Moderna PLUS

MANOEL PAIVA

MATEMÁTICA 2

PAIVA

Moderna PLUS

MATEMÁTICA 2

PAIVA

Manoel Paiva

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciência e Letras de Santo André. Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor do ensino fundamental, médio e de cursos pré-vestibular durante 29 anos.

2ª edição
Moderna Plus

Moderna PLUS

Coordenação editorial: Juliane Matsubara Barroso
Edição de texto: Débora Regina Yogui, Fabio Martins de Leonardo, Marilu Maranho Tassetto, Willian Raphael Silva
Assistência editorial: Thais Toldo Antonagi
Preparação de texto: Solange Gonçalves Guerra Martins
Coordenação de *design* e projetos visuais: Sandra Homma
Projeto gráfico: Everson de Paula, Marta Cerqueira Leite
Capa: Everson de Paula
Foto: Diamantes
© Alessio Ponti/Panther Media/Keystone
Coordenação de produção gráfica: André Monteiro, Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Edição de infografia: William H. Taciro, Fabio Martins de Leonardo, A+ Comunicação, Fernanda Fencz, Ana Cláudia Fernandes
Ilustrações: Alex Argozino, Cecília Iwashita, Claudio Chiyo, Elisa Nievas Pereira, Fábio Cortez, Faustino, George Tutumi, Hector Gomez, Jo card, Paulo Manzi, Serralheiro, Wagner Willian
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Elaine Cristina del Nero
Revisão: Márcia Leme, Nelson J. de Camargo, Sandra G. Cortes
Coordenação de pesquisa iconográfica: Ana Lucia Soares
Pesquisa iconográfica: Camila D'Angelo, Marcia Sato
As imagens identificadas com a sigla CID foram fornecidas pelo Centro de Informação e Documentação da Editora Moderna.
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Arleth Rodrigues, Fabio N. Precendo, Rodrigo Fragoso, Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira Silva, Helio P. de Souza Filho, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wilson Aparecido Troque

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Paiva, Manoel Rodrigues
Matemática : Paiva / Manoel Rodrigues Paiva. — 2. ed. — São Paulo : Moderna, 2010 .

Obra em 3v. para alunos do 1º ao 3º ano.
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Título

10-07085 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

ISBN 978-85-16-07408-1

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2011
Impresso na China

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Caro estudante

As transformações do Ensino Médio brasileiro nos últimos anos visam, entre outros objetivos, a um aprendizado voltado para a continuação dos estudos e ao mundo do trabalho. Por isso, uma das orientações do Ministério da Educação para o Ensino Médio é recorrer a situações práticas, que possibilitem o trânsito entre as disciplinas escolares e suas aplicações na indústria, comércio, serviços etc.

Além dessas orientações, comuns a todas as disciplinas, os documentos oficiais enfatizam: "A Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo e instrumental, mas deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas". Essa ênfase tem a finalidade de alertar sobre os exageros da visão pragmática da ciência, que podem pôr em risco a aquisição do pensamento matemático.

Neste livro, seguimos essas orientações, recorrendo frequentemente a aplicações práticas, destacando, porém, a Matemática como conhecimento científico e, como tal, evolutivo e sistêmico. Enfim, buscamos um ponto de equilíbrio entre ciência e prática.

Manoel Paiva

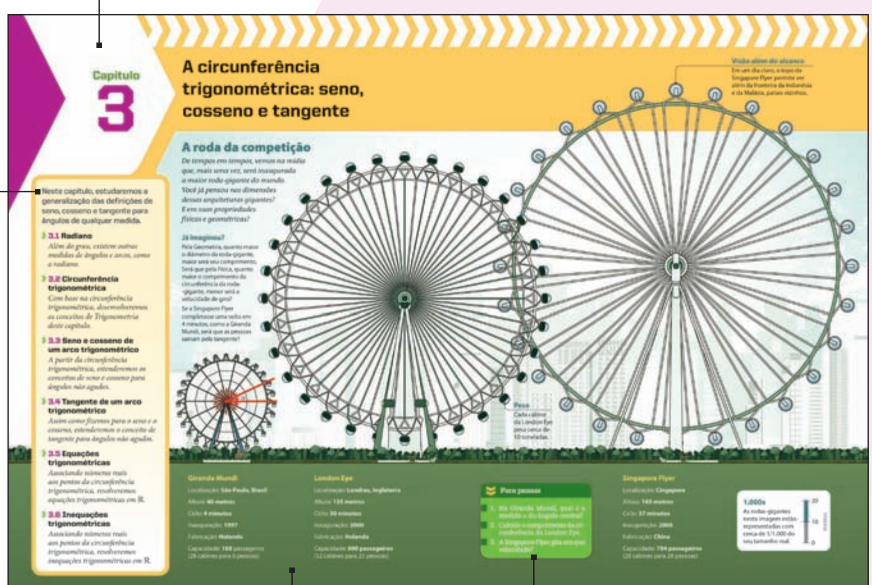
Ao tio Paulo, cujos ensinamentos transpõem gerações.

ORGANIZAÇÃO DESTE LIVRO

A coleção *Moderna Plus Matemática* é composta de três livros. O conteúdo de cada volume é encadernado separadamente em três partes: Parte I, Parte II e Parte III. Assim, você leva para a sala de aula apenas a parte onde está o conteúdo em estudo.

Abertura de Parte
Cada parte está dividida em capítulos.

Abertura de Capítulo
Cada abertura de capítulo traz uma imagem retratando situações cotidianas que envolvem a Matemática ou propiciam a aquisição de informações sobre assuntos relacionados ao capítulo.



Apresenta uma breve descrição do que será estudado no capítulo e uma síntese de cada seção.

Alguns temas foram destacados com infografias, para possibilitar a interpretação da leitura de imagens.

Cada abertura propõe algumas questões que possibilitam o estudo do tema proposto.

Abertura de Seção

Cada capítulo é organizado em seções. No início de cada seção, há a descrição dos seus objetivos e também dos termos e conceitos envolvidos em seu estudo. Os termos e conceitos são retomados no Caderno do estudante, promovendo a revisitação dos temas do capítulo. Dessa maneira, você tem uma visão geral sobre a seção em estudo.


Seção 5.2

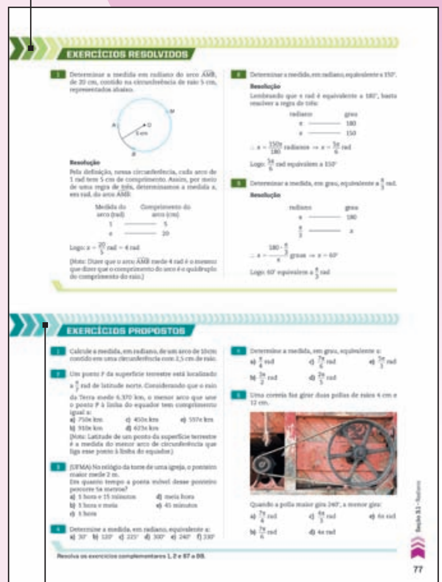
Movimentos periódicos

Conteúdo digital *Moderna Plus*

Ícone com indicação de conteúdo digital no portal do *Projeto Moderna Plus*, como leituras complementares, animações e simuladores relativos ao tema estudado.

Exercícios resolvidos

Junto aos exemplos, têm o objetivo de auxiliar na sistematização do aprendizado.


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercícios propostos

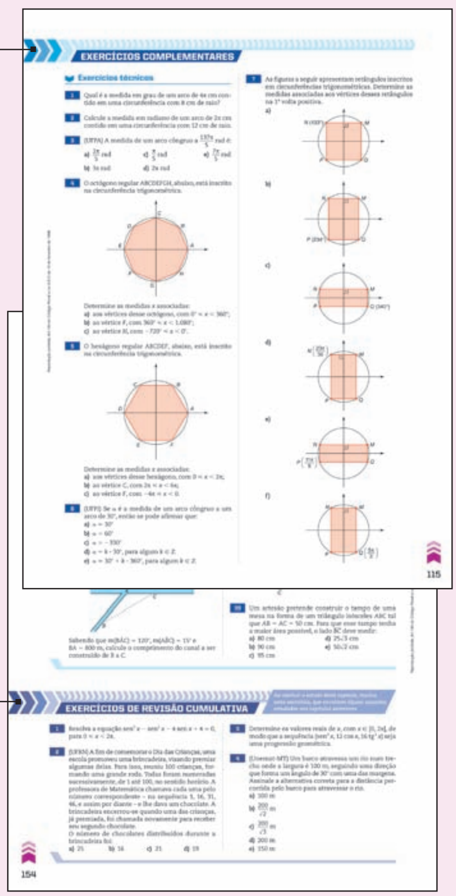
Acompanham os tópicos do capítulo. São uma aplicação mais imediata dos conteúdos ali trabalhados.

Exercícios complementares

O final de cada capítulo oferece exercícios de aprofundamento, subdivididos nas modalidades: *Exercícios técnicos* e *Exercícios contextualizados*.

Exercícios de revisão cumulativa

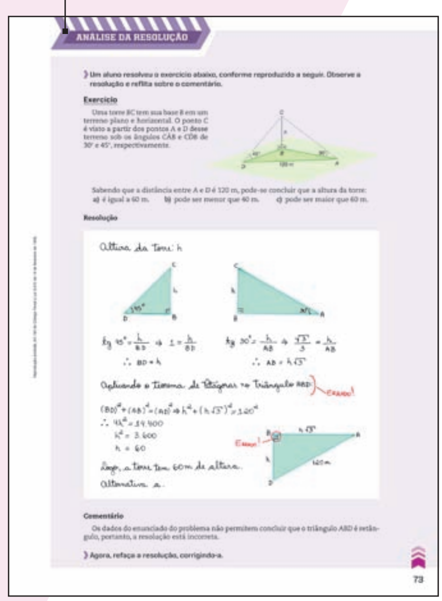
Aparecem após os exercícios complementares, englobam conteúdos já vistos nos capítulos anteriores.


EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Análise da resolução

Possibilita a análise e a reflexão sobre erros comuns na resolução de exercícios, além de sua correção.


ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

SUMÁRIO GERAL

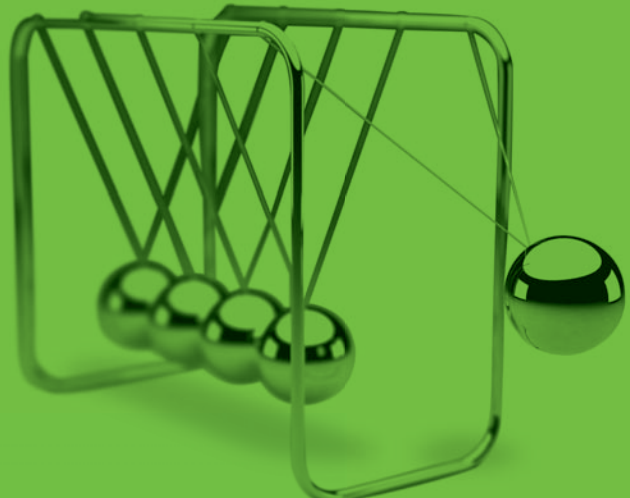
PARTE
I

PARTE III

PARTE I

PARTE

I



Capítulo

1

Sequências

Sem perceber, lidamos com sequências em muitas situações do cotidiano; por exemplo, em um dicionário, as palavras formam uma sequência que obedece à ordem alfabética, e suas páginas são numeradas por uma sequência de números que obedece à ordem crescente. Neste capítulo, daremos ênfase ao estudo das sequências numéricas, suas leis de formação, representações gráficas e algumas de suas propriedades.

1.1 O conceito de sequência

Ao estabelecer determinada ordem para os elementos de um conjunto, estabelece-se uma sequência para eles.

1.2 Progressão aritmética (PA)

A progressão aritmética é uma importante sequência numérica na qual, ao adicionar cada termo a uma mesma constante, obtemos o termo seguinte.

1.3 Progressão geométrica (PG)

A progressão geométrica é outra importante sequência numérica na qual, ao multiplicar cada termo por uma mesma constante, obtemos o termo seguinte.

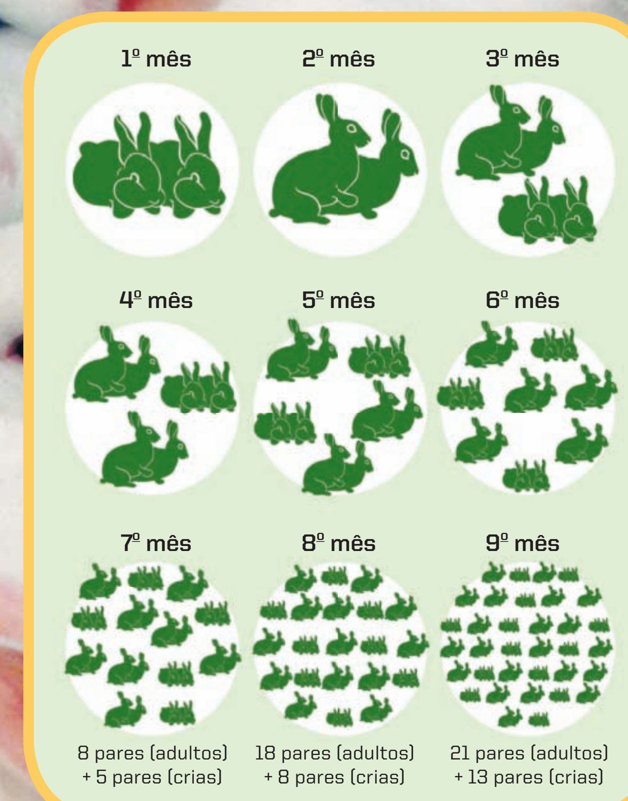
Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, foi um matemático italiano que viveu de 1180 a 1250, aproximadamente. Em 1202, em sua obra Liber abaci *(Livro dos cálculos), ele propôs o seguinte problema:*

"Admitindo que cada casal de coelhos só procrie pela primeira vez exatamente 2 meses após seu nascimento e que, a partir de então, gere um casal de filhotes a cada mês, quantos casais haverá ao final de doze meses, considerando-se um único casal de coelhos recém-nascidos?"

A sequência formada pelo número de coelhos em cada mês ficou conhecida como ***sequência de Fibonacci****, e passou a ser aplicada em várias áreas, como Economia, Biologia, Química etc.*

Para pensar

- Leia o problema acima e escreva os 12 primeiros números da sequência de Fibonacci.



Seção 1.1

O conceito de sequência

Objetivos

- **Obter** uma sequência a partir de sua lei de formação.
- **Escrever** a lei de formação de uma sequência.
- **Resolver** problemas que envolvem sequências.

Termos e conceitos

- **sequência finita**
- **sequência infinita**
- **termo de uma sequência**
- **lei de formação de uma sequência**

Em setembro de 2009, o Brasil sediou a VI Copa América de basquete feminino, realizada na cidade de Cuiabá (MT). O time feminino do Brasil venceu essa competição, conquistando a medalha de ouro.

Oito países participaram da competição feminina de basquete, obtendo as seguintes classificações:

Classificação final da VI Copa América de basquete feminino

Posição	País
1	Brasil
2	Argentina
3	Canadá
4	Cuba
5	Porto Rico
6	Chile
7	Venezuela
8	República Dominicana

Disponível em: <http://www.cbb.com.br>. Acesso em: 13 out. 2009.

Jogadoras brasileiras na VI Copa América de basquete feminino.

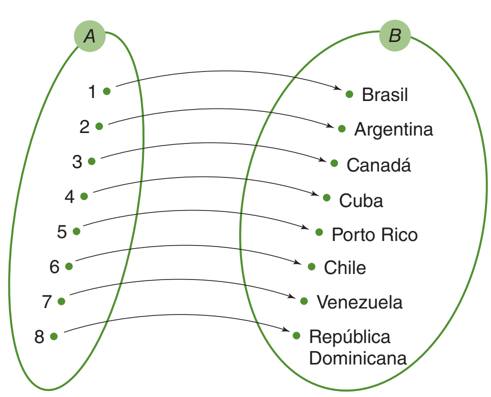
Observe que a classificação é apresentada associando-se cada número natural de 1 a 8 ao nome de um país. Essa associação determina uma **sequência**, em que:

- o número 1 corresponde ao primeiro elemento da sequência;
- o número 2 corresponde ao segundo elemento da sequência;
- o número 3 corresponde ao terceiro elemento da sequência;

...

- o número 8 corresponde ao oitavo elemento da sequência.

Vamos representar essa associação em um diagrama de flechas, indicando por *A* o conjunto de números naturais de 1 a 8 e por *B* o conjunto dos países participantes do torneio:



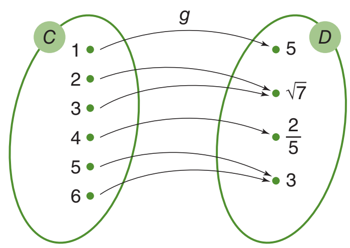
Note que cada elemento de *A* está associado a um único elemento de *B*. Dessa forma, temos uma função de *A* em *B*. Essa situação é um exemplo de sequência finita.

Sequência finita

Sequência finita é toda função de domínio $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ com $A \subset \mathbb{N}^*$ e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.

Exemplos

a) Consideremos a função g descrita pelo diagrama:



Essa função descreve uma sequência finita, que pode ser representada simplesmente por:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Nessa forma de representação da sequência, os parênteses indicam que a ordem em que os elementos são apresentados deve ser mantida, isto é, se trocarmos a ordem de pelo menos dois elementos, obteremos outra sequência, por exemplo:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right) \neq \left(\sqrt{7}, 5, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

b) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 40\}$, considere a função $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(n) = 3n^2 - 1$. Temos:

$$h(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$$
$$h(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$$
$$h(3) = 3 \cdot 3^2 - 1 = 26$$
$$h(4) = 3 \cdot 4^2 - 1 = 47$$
$$...$$
$$h(40) = 3 \cdot 40^2 - 1 = 4.799$$

Assim, a função h representa a sequência: $(2, 11, 26, 47, ..., 4.799)$

Sequência infinita

Sequência infinita é toda função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.

Exemplos

a) Seja a função $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(n) = 2n$. Essa função é a sequência infinita dos números naturais pares não nulos e pode ser representada por:

$$(2, 4, 6, 8, ...)$$

b) Seja a função $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(n) = (-1)^n$. Essa é a sequência infinita:

$$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...)$$

Termos de uma sequência

Cada elemento de uma sequência também é chamado de **termo da sequência**. Em uma sequência, o termo que ocupa a posição de número n é indicado pelo símbolo a_n, isto é:

a_1 indica o primeiro termo da sequência;
a_2 indica o segundo termo da sequência;
a_3 indica o terceiro termo da sequência;
a_4 indica o quarto termo da sequência;
...
a_n indica o n-ésimo termo da sequência.

Exemplo

Na sequência (7, 3, 8, 10, ...), temos: $a_1 = 7$, $a_2 = 3$, $a_3 = 8$, $a_4 = 10$, ...

Notas:

1. Uma sequência (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) pode ser representada abreviadamente por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou, simplesmente, (a_n).
2. Em uma sequência finita (a_1, a_2, a_3, ..., a_n), os termos a_1 e a_n são chamados de **extremos da sequência**. Dois termos, a_i e a_j **são equidistantes dos extremos** se, e somente se, a quantidade de termos que precedem a_i é igual à quantidade de termos que sucedem a_j.
3. Um termo a_m é chamado de **termo médio** de uma sequência com número ímpar de termos se, e somente se, a quantidade de termos que antecedem a_m é igual à quantidade de termos que o sucedem.

   Por exemplo:

   Na sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{58}, a_{59}, a_{60}, a_{61}), os extremos são a_1 e a_{61}. Os termos a_4 e a_{58} são equidistantes dos extremos. E o termo médio da sequência é a_{31}.

Lei de formação de uma sequência

Um conjunto de informações que determina todos os termos de uma sequência e a ordem em que eles são apresentados é chamado de **lei de formação da sequência**.

Exemplos

a) Seja (a_n) a sequência tal que: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4 + a_n \end{cases}$

As informações acima determinam todos os elementos da sequência e a ordem em que eles são apresentados. Observe:

- o primeiro termo da sequência é 3, isto é, $a_1 = 3$;
- na igualdade $a_{n+1} = 4 + a_n$, atribuindo a n os valores 1, 2, 3, ..., obtemos os demais termos da sequência, isto é:

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = 4 + a_1 = 4 + 3 = 7$$
$$n = 2 \Rightarrow a_3 = 4 + a_2 = 4 + 7 = 11$$
$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 4 + a_3 = 4 + 11 = 15$$
$$n = 4 \Rightarrow a_5 = 4 + a_4 = 4 + 15 = 19$$
$$\dots$$

Portanto, a sequência é (3, 7, 11, 15, 19, ...).

b) Considere a sequência (a_n) tal que $a_n = n^2 - 1$. Para determinar os termos dessa sequência, basta atribuir a n os valores 1, 2, 3, 4, ... na igualdade $a_n = n^2 - 1$. Observe:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 - 1 = 0$$
$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 - 1 = 3$$
$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 - 1 = 8$$
$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 - 1 = 15$$
$$\dots$$

Portanto, a sequência é (0, 3, 8, 15, ...).

c) A sequência dos números primos positivos, em ordem crescente, é (2, 3, 5, 7, 11, ...). Observe que a lei de formação dessa sequência não foi expressa por uma equação, mas pela propriedade de que os números sejam primos positivos e estejam em ordem crescente. Esse exemplo mostra que a lei de formação de uma sequência pode não ser uma equação.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Na sequência $(5, -4, 8, \sqrt{3}, 6, 6, 6, ...)$ identifique os termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 e a_7.

2 Escreva sob a forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ cada uma das sequências a seguir.

a) (a_n) tal que $a_n = 2n + 5$

b) (a_n) tal que $a_n = n^2 + n$

c) (a_n) tal que $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

d) (a_n) tal que $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 5 + a_n \end{cases}$

e) (a_n) tal que $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 7 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$

3 A soma dos n primeiros termos de uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ é dada por $S_n = n^2 + n$, para todo número natural n não nulo.

a) Calcule a soma dos dez primeiros termos da sequência.

b) Determine o primeiro termo da sequência.

c) Determine o 5º termo da sequência.

d) Determine o n-ésimo termo, a_n, da sequência.

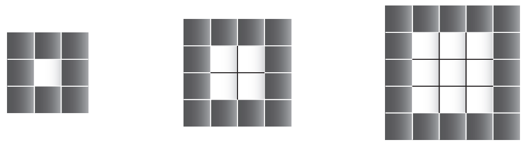
4 Uma livraria faz a seguinte promoção:

Agora, responda:

a) Um cliente que tem 23 livros e já leu todos pretende aproveitar ao máximo essa promoção. Quantos livros novos ele pode trocar pelos já lidos nessa livraria, sem nenhum custo, supondo que a promoção não termine?

b) Um cliente tem 505 livros e já leu todos e, em cada troca dessa promoção, ele retira o maior número possível de livros novos. Escreva a sequência (a_n), em que a_n é o número de livros novos retirados na n-ésima troca.

5 Com azulejos quadrados brancos e pretos, todos do mesmo tamanho, construímos os seguintes mosaicos:



A regra para construir esses mosaicos é a seguinte: inicialmente, formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos pretos; em seguida, outro quadrado, este com 4 azulejos brancos, também cercado por azulejos pretos, e assim sucessivamente.
Considerando a sequência de mosaicos com número crescente de azulejos, responda:

a) Quantos azulejos brancos terá o 15º mosaico dessa sequência?

b) Quantos azulejos brancos terá o n-ésimo mosaico dessa sequência?

c) Quantos azulejos pretos terá o 20º mosaico dessa sequência?

d) Quantos azulejos pretos terá o n-ésimo mosaico dessa sequência?

6 Faça o que se pede.

a) Releia o problema da abertura deste capítulo e reescreva os 12 primeiros números da sequência de Fibonacci.

b) Considerando infinita a sequência de Fibonacci, escreva sua lei de formação. (*Dica*: Relacione cada termo com seus dois termos anteriores.)

7 (UFPB) O total de indivíduos, na n-ésima geração, de duas populações, P e Q, é dado, respectivamente, por $P(n) = 4^n$ e $Q(n) = 2^n$. Sabe-se que, quando $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \geqslant 1.024$, a população Q estará ameaçada de extinção. Com base nessas informações, essa ameaça de extinção ocorrerá a partir da:

a) décima geração
b) nona geração
c) oitava geração
d) sétima geração
e) sexta geração

Resolva os exercícios complementares 1 a 7 e 89 a 94.

Seção 1.2

Progressão aritmética (PA)

Objetivos

- **Reconhecer** e classificar uma PA.
- **Determinar** um termo qualquer de uma PA, a partir do primeiro termo e da razão.
- **Escrever** o termo geral de uma PA.
- **Calcular** a soma dos *n* primeiros termos de uma PA.
- **Aplicar** o conceito de PA na resolução de problemas.

Termos e conceitos

- **progressão aritmética**
- **razão de uma PA**

Uma nova linha do metrô, ainda em construção, tinha 12 km no início de janeiro do ano passado. De lá para cá, construiu-se 0,5 km dessa linha ao mês.

Construção do metrô, no Rio de Janeiro.

A sequência a seguir apresenta os comprimentos, em quilômetro, dessa linha do metrô, mês a mês, a partir do início de janeiro do ano passado:

$$(12; 12{,}5; 13; 13{,}5; 14; 14{,}5; ...)$$

Essa sequência numérica é chamada de **progressão aritmética**, porque, adicionando a cada um de seus termos uma mesma constante, obtemos o termo seguinte; nesse caso, adicionamos 0,5 a cada termo.

Podemos definir, de modo geral, que:

> **Progressão aritmética (PA)** é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante r.
>
> O número r é chamado de **razão** da progressão aritmética.

Exemplos

a) A sequência (4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39) é uma PA finita de razão $r = 5$.

b) (18, 10, 2, −6, −14, ...) é uma PA infinita de razão $r = -8$.

c) (4, 4, 4, 4, 4, ...) é uma PA infinita de razão $r = 0$.

Nota:

Considere uma PA qualquer de razão r:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$$

$$+r \quad +r \quad +r \quad\quad +r$$

Observe que:

$a_2 - a_1 = r$ $\quad a_3 - a_2 = r$ $\quad a_4 - a_3 = r$ $\quad a_{n+1} - a_n = r$

Ou seja, a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é constante e igual à razão r.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Calcular a razão da PA que tem termos $a_5 = \frac{3}{5}$ e $a_6 = 2$.

Resolução

A razão r da PA é dada por:

$$r = a_6 - a_5 = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

2 Verificar se as sequências abaixo são progressões aritméticas ou não.

a) (5, 9, 13, 17, 21)

b) (−2, −5, −8, −12)

c) (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = 1 + 3n$

d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 4n + 3$

Resolução

a) Qualquer termo dessa sequência, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante (no caso, 4). Logo, a sequência é uma PA.

b) Observando que $-12-(-8) \neq -8-(-5)$, concluímos que a sequência não é PA.

c) A partir da lei de formação, vamos encontrar os 4 elementos da sequência:

$$a_1 = 1 + 3 \cdot 1 = 4$$
$$a_2 = 1 + 3 \cdot 2 = 7$$
$$a_3 = 1 + 3 \cdot 3 = 10$$
$$a_4 = 1 + 3 \cdot 4 = 13$$

Assim, a sequência é: (4, 7, 10, 13).

Como a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é sempre a mesma (no caso, 3), concluímos que a sequência é uma PA.

d) Devemos verificar se a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é constante.

Temos $a_n = 4n + 3$ e $a_{n+1} = 4(n + 1) + 3$ que são termos consecutivos da sequência, para qualquer n natural não nulo. Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, temos:

$a_{n+1} - a_n = 4(n + 1) + 3 - (4n + 3) =$
$= 4n + 4 + 3 - 4n - 3 = 4$

Como essa diferença é constante, concluímos que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma PA.

Classificação de uma PA

Podemos classificar as progressões aritméticas em crescente, decrescente ou constante.

- Uma PA é **crescente** quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior. Isso só ocorre quando a **razão** é **positiva**.

Exemplo

(6, 10, 14, 18, ...) é uma PA crescente. Observe que sua razão é positiva: $r = 4$.

- Uma PA é **decrescente** quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior. Isso só ocorre quando a **razão** é **negativa**.

Exemplo

(13, 8, 3, −2, −7, ...) é uma PA decrescente. Observe que sua razão é negativa: $r = -5$.

- Uma PA é **constante** quando todos os seus termos são iguais. Isso só ocorre quando a **razão** é **nula**.

Exemplo

$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, ...\right)$ é uma PA constante. Note que sua razão é nula: $r = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8 Verifique se as sequências abaixo são progressões aritméticas.

a) (7, 9, 11, 13, 15)

b) (2, 4, 8, 16, 32)

c) (30, 25, 20, 15)

d) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que $a_n = 3n - 5$

e) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ tal que $a_n = n^2 + 1$

f) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ tal que $a_n = \frac{3n}{2} + 1$

g) (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = \frac{3}{n}$

9 Calcule a razão de cada uma das progressões aritméticas:

a) (0, 2, 4, 6, 8, ...)

b) (10, 7, 4, 1, −2, ...)

c) $\left(\frac{13}{6}, \frac{17}{12}, \frac{2}{3}, ...\right)$

d) (−7, −7, −7, −7, ...)

e) $\left(\frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2 - \sqrt{3}}, 4, ...\right)$

10 Considere a PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ e $a_6 = 1 - \sqrt{2}$. Determine o termo a_7.

11 (PUC-MG) Três números naturais, a, b e c, estão, nessa ordem, em progressão aritmética de razão 2. Se $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, a soma $a + b + c$ é igual a:

a) 12
b) 18
c) 24
d) 32
e) 36

12 Verifique se a sequência (a_n) tal que $a_n = 3n + 5$ é uma PA.

13 Classifique como crescente, decrescente ou constante cada uma das progressões aritméticas a seguir.

a) $(4, 7, 10, 13, ...)$

b) $(-14, -10, -6, -2, ...)$

c) $(28, 20, 12, 4, ...)$

d) $(-30, -35, -40, -45, ...)$

e) $(6, 6, 6, 6, ...)$

f) $\left(2 - \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2}, ...\right)$

14 Classifique cada uma das seguintes progressões aritméticas como crescente, decrescente ou constante:

a) (a_n) tal que $a_n = 8 - 3n$

b) (a_n) tal que $a_n = \dfrac{n^2 - 9}{n + 3} - n$

c) (a_n) tal que $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 8 \end{cases}$

15 Determine o número real x, de modo que a sequência $(1 - x, x - 2, 2x - 1)$ seja uma PA.

16 Em qualquer PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão r, os termos podem ser expressos em função de a_1 e r, observe: $\left(a_1, \underbrace{a_1 + r}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3}, \underbrace{a_1 + 3r}_{a_4}, ..., \underbrace{\;?\;}_{a_n}, ...\right)$. Qual é a expressão que representa o termo a_n em função de a_1 e r?

Resolva os exercícios complementares 8 a 12.

Representação genérica de uma PA

Para agilizar a resolução de certos problemas, convém representar uma PA de maneira genérica. Mostramos a seguir algumas dessas representações:

- A sequência $(x, x + r, x + 2r)$ é uma PA de três termos e razão r, para quaisquer valores de x e r.
- A sequência $(x - r, x, x + r)$ é uma PA de três termos e razão r, para quaisquer valores de x e r. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PA de três termos, conhecendo-se a soma deles.
- A sequência $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$ é uma PA de quatro termos e razão r, para quaisquer valores de x e r.
- A sequência $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$ é uma PA de quatro termos e razão $2r$, para quaisquer valores de x e r. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PA de quatro termos, conhecendo-se a soma deles.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 Determinar a PA decrescente de três termos, sabendo que a soma desses termos é 3 e o produto deles é $\frac{5}{9}$.

Resolução

Quando conhecemos a soma dos termos, a representação mais adequada da PA genérica é $(x - r, x, x + r)$. Assim, temos:

$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 3 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = \dfrac{5}{9} \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $x = 1$.
Substituímos x por 1 na segunda equação, obtendo:

$$(1 - r) \cdot 1 \cdot (1 + r) = \frac{5}{9} \Rightarrow 1 - r^2 = \frac{5}{9}$$

$$\therefore r^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow r = \pm\frac{2}{3}$$

Como queremos uma PA decrescente, só nos interessa a razão negativa, isto é, $r = -\frac{2}{3}$. Assim, a PA decrescente $(x - r, x, x + r)$ é

$$\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right), 1, 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\right), \text{ ou seja, } \left(\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}\right).$$

4 Em uma PA crescente de quatro termos, a soma de todos os termos é 16 e o produto do segundo pelo terceiro termo é 12. Determinar essa PA.

Resolução

Como conhecemos a soma dos termos, a representação mais adequada da PA genérica é $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$. Assim, temos:

$$\begin{cases} x - 3r + x - r + x + r + x + 3r = 16 \\ (x - r) \cdot (x + r) = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ (x - r) \cdot (x + r) = 12 \end{cases}$$

Substituímos x por 4 na segunda equação, obtendo:

$(4 - r)(4 + r) = 12 \Rightarrow 16 - r^2 = 12$

$\therefore r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$

Como queremos uma PA crescente, só nos interessa a razão $2r$ positiva, o que ocorre para $r = 2$. Assim, a PA crescente $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$ é

$(4 - 3 \cdot 2, 4 - 2, 4 + 2, 4 + 3 \cdot 2)$, ou seja,

$(-2, 2, 6, 10)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

17 Determine a PA crescente de três termos cuja soma dos três termos é 6 e o produto deles é -10.

18 Determine a PA crescente de quatro termos cuja soma dos quatro termos é 4 e o produto do terceiro pelo quarto termo é 40.

19 (Faap-SP) As medidas dos ângulos internos de um triângulo, em ordem crescente, formam uma progressão aritmética. A medida do maior desses ângulos é o dobro da medida do menor. O maior ângulo interno desse triângulo mede:

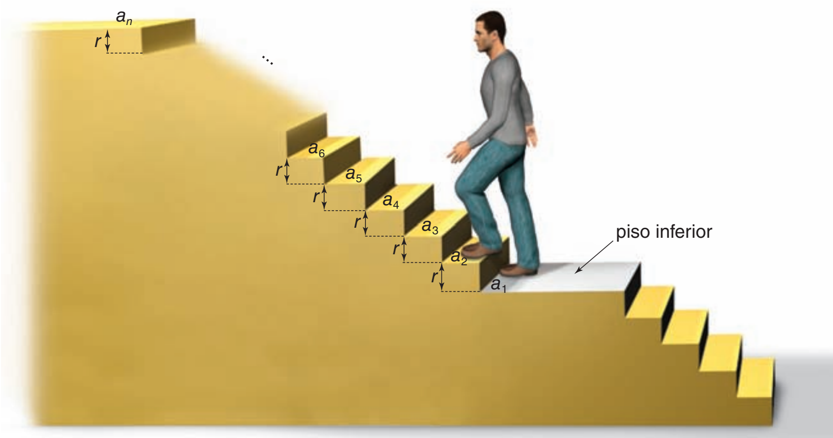
a) 68° **b)** 72° **c)** 76° **d)** 80° **e)** 82°

20 Durante três meses consecutivos, um investidor aplicou em um fundo de capitais, perfazendo um total de R$ 2.790,00 aplicados. Sabendo que as aplicações, mês a mês, formam uma progressão aritmética, qual foi o valor aplicado no segundo mês?

Resolva os exercícios complementares 13 e 14.

Fórmula do termo geral de uma PA

Numa progressão aritmética, um termo qualquer pode ser expresso em função da razão (r) e do primeiro termo (a_1) por uma fórmula matemática. Para entender essa fórmula, imagine uma escada que une dois pisos de um edifício. O piso inferior tem altura a_1, em relação ao térreo do edifício, e os patamares dos degraus têm alturas $a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n$, em relação ao térreo, conforme mostra a figura.



Sendo r a altura de cada degrau, a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma PA.

- Se uma pessoa estiver no patamar de altura a_1, quantos degraus deverá subir para atingir o patamar de altura a_6?

  Observando a figura, constatamos que a pessoa deve subir 5 degraus ($5r$). Assim, a altura a_6 é igual à soma $a_1 + 5r$.

- Generalizando, se uma pessoa estiver no patamar de altura a_1, quantos degraus deverá subir para atingir o patamar de altura a_n?

  Ora, no patamar de altura a_2, a pessoa terá subido 1 degrau; no de altura a_3, terá subido 2 degraus; no de altura a_4, terá subido 3 degraus; e assim por diante, ou seja:

$$a_1 = a_1 + \mathbf{0}r$$
$$a_2 = a_1 + \mathbf{1}r$$
$$a_3 = a_1 + \mathbf{2}r$$
$$a_4 = a_1 + \mathbf{3}r$$
$$\ldots$$

Observando que, em cada igualdade, o coeficiente de r tem uma unidade a menos que o índice do termo à esquerda da igualdade, concluímos: $a_n = a_1 + (n - 1)r$

De maneira geral:

> Numa PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r, temos:
> $$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

A identidade acima é chamada de **fórmula do termo geral da PA**.

Outra fórmula do termo geral de uma PA

Voltando à figura anterior, observe que:

- se a pessoa estiver no patamar de altura a_6 e quiser se deslocar até o patamar de altura a_{10}, ela deve subir $(10 - 6)$ degraus:

$$a_{10} = a_6 + (10 - 6)r\text{, ou seja, } a_{10} = a_6 + 4r$$

- se a pessoa estiver em um patamar de altura a_k e quiser se deslocar até o patamar de altura a_n, ela deve subir $(n - k)$ degraus, ou seja: $a_n = a_k + (n - k)r$

De maneira geral:

Numa PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_k, ..., a_n, ...)$ de razão r, temos:

$$a_n = a_k + (n - k)r$$

Essa identidade é outro modo de apresentar a **fórmula do termo geral da PA**.

Note que, se $k = 1$, obtemos a fórmula anterior: $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

Exemplos

a) $a_{30} = a_{10} + (30 - 10)r \Rightarrow a_{30} = a_{10} + 20r$

b) $a_6 = a_8 + (6 - 8)r \Rightarrow a_6 = a_8 - 2r$

c) $a_{40} = a_1 + (40 - 1)r \Rightarrow a_{40} = a_1 + 39r$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 Determinar o 51º termo da PA (4, 10, 16, 22, ...).

Resolução

Devemos determinar o termo $a_n = a_1 + (n - 1)r$ dessa PA tal que: $a_1 = 4$, $r = 6$ e $n = 51$

Logo:

$a_{51} = 4 + (51 - 1) \cdot 6 \Rightarrow a_{51} = 4 + 50 \cdot 6 = 304$

Concluímos, assim, que o 51º termo da PA é 304.

6 Obter a razão da PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$ tal que $a_1 = 7$ e $a_5 = 8$.

Resolução

Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$ da PA para $n = 5$, temos:

$a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow 8 = 7 + 4r$

$\therefore r = \dfrac{1}{4}$

Concluímos que a razão da PA é $\dfrac{1}{4}$.

7 Determinar o número de termos da PA (2, 10, 18, ..., 250).

Resolução

Indicando por n o número de termos, devemos obter o valor de n na expressão $a_n = a_1 + (n - 1)r$ tal que: $a_1 = 2$, $a_n = 250$ e $r = 8$

Logo:

$250 = 2 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow 250 = 2 + 8n - 8$

$\therefore 256 = 8n \Rightarrow n = 32$

Concluímos, então, que a PA possui 32 termos.

8 Qual é a razão da PA (a_n) tal que $a_1 + a_5 = 26$ e $a_2 + a_9 = 46$?

Resolução

Pela fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$, podemos representar os termos a_5, a_2 e a_9 por:

$a_5 = a_1 + 4r$, $a_2 = a_1 + r$ e $a_9 = a_1 + 8r$

Assim:

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 26 \\ a_2 + a_9 = 46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 4r = 26 \\ a_1 + r + a_1 + 8r = 46 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2a_1 + 4r = 26 \\ 2a_1 + 9r = 46 \end{cases}$$

Subtraindo, membro a membro, essas igualdades, temos:

$$-5r = -20 \Rightarrow r = 4$$

Concluímos, então, que a razão da PA é 4.

9 A partir do momento em que havia 684 pessoas em um ginásio de esportes, a contagem dos torcedores que entravam passou a ser feita por catracas que registraram o ingresso de 208 pessoas por hora, até completar a capacidade máxima do ginásio, que é de 3.180 espectadores. Ninguém saiu antes do jogo, que começou quando a capacidade máxima do ginásio foi atingida.

a) Construir a sequência em que os termos representem o número de pessoas no ginásio, hora a hora, a partir do instante em que a contagem das pessoas passou a ser feita por catracas.

b) Durante quantas horas as catracas estiveram em funcionamento?

Resolução

a) A sequência é uma progressão aritmética finita de razão 208, cujo primeiro e último termos são 684 e 3.180, respectivamente, isto é:

$$(684, 892, 1.100, 1.308, ..., 3.180)$$

b) Observe na PA do item anterior que, após 1 hora, havia a_2 pessoas; após 2 horas, havia a_3 pessoas; assim, após $n - 1$ horas, havia a_n pessoas no ginásio.
Então, vamos calcular o número n de termos da PA, em que $a_1 = 684$, $a_n = 3.180$ e $r = 208$:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 3.180 = 684 + (n - 1) \cdot 208$
$\therefore n = 13$
Logo, as catracas estiveram em funcionamento durante 12 horas.

10 Interpolar (ou seja, inserir) 4 meios aritméticos entre 1 e 2, nessa ordem.

Resolução

Interpolar 4 meios aritméticos entre 1 e 2, nessa ordem, significa determinar a PA de primeiro termo 1 e último termo 2, havendo entre eles quatro outros termos, isto é:

$$(\underset{a_1}{1}, \underbrace{\_, \_, \_, \_}_{\text{meios aritméticos}}, \underset{a_6}{2})$$

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow 2 = 1 + 5r$
$\therefore r = \dfrac{1}{5}$
Logo, a PA é $\left(1, \dfrac{6}{5}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{8}{5}, \dfrac{9}{5}, 2\right)$.

11 Obter o 40º termo da PA de razão 3, em que $a_{21} = 62$.

Resolução

Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_k + (n - k)r$ da PA para $n = 40$, $k = 21$ e $r = 3$, temos:
$a_{40} = a_{21} + (40 - 21)r \Rightarrow a_{40} = 62 + 19 \cdot 3 = 119$
Logo, o 40º termo da PA é 119.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21 Determine o 40º termo da PA (2, 13, 24, 35, ...).

22 Qual é o 21º termo da PA $(2k + 1, 3k, 4k - 1, ...)$?

23 Obtenha o termo geral a_n da PA (2, 8, 14, 20, ...).

24 Em uma PA (a_n) de razão $r = 7$, temos $a_{20} = 131$. Determine a_1.

25 Na PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $r = 2 - k$, temos $a_{11} = 29k - 18$, sendo k um número real. Determine a_1.

26 Obtenha a PA (a_n) de razão $r = -5$, em que $a_8 = 3a_5$.

27 Quantos termos tem a PA (3, 7, 11, ..., 99)?

28 Determine o número de termos da PA $(15b - 47, 14b - 43, 13b - 39, ..., 13)$.

29 Em uma PA (a_n), temos $a_1 = \dfrac{1}{6}$ e $a_{12} = \dfrac{17}{3}$. Determine a razão dessa PA.

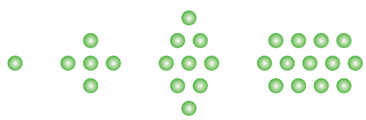
30 Interpolar 6 meios aritméticos entre 2 e 10, nessa ordem.

31 Determine a razão da PA (a_n) em que $a_2 + a_3 = 11$ e $a_4 + a_7 = 21$.

32 Determine o 23º termo da PA (a_n) de razão $r = 6$ e $a_{15} = 18$.

33 Em uma PA (a_n), temos $a_{20} = 5$ e $a_{32} = 8$. Determine a razão dessa PA.

34 (Vunesp) Num laboratório, foi feito um estudo sobre a evolução de uma população de vírus. Ao final de um minuto do início das observações, existia 1 elemento na população; ao final de dois minutos, existiam 5, e assim por diante. A seguinte sequência de figuras apresenta as populações do vírus (representado por um círculo) ao final de cada um dos quatro primeiros minutos.



Supondo que se manteve constante o ritmo de desenvolvimento da população, o número de vírus no final de 1 hora era de:
a) 241 b) 238 c) 237 d) 233 e) 232

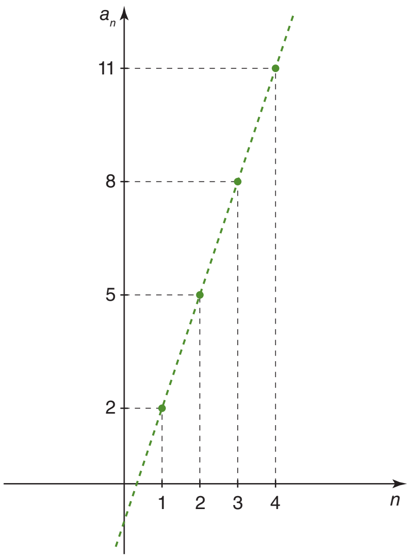
35 Um trecho de serra de 13 km de uma rodovia que liga o interior ao litoral possui duas faixas de trânsito para a descida e duas faixas para a subida. Quando o fluxo de veículos para o litoral é muito intenso, é implantada a Operação Descida. Um dos procedimentos dessa operação é limitar a apenas uma faixa de trânsito a subida de veículos e, consequentemente, permitir a descida da serra por três faixas. Para isso, são colocados 261 cones sinalizadores ao longo de toda a serra, sendo que a distância entre dois cones consecutivos quaisquer é constante e que o primeiro e o último ficam exatamente no início e no fim da serra, respectivamente. Calcule a distância entre dois cones consecutivos quaisquer.

36 Em cada região especificada pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), as frequências das emissoras de rádio FM devem variar de 87,9 a 107,9 MHz, e a diferença entre duas frequências consecutivas deve ser 0,2 MHz. O número máximo de emissoras FM que podem funcionar em uma mesma região determinada pela Anatel é:
a) 99 b) 100 c) 101 d) 102 e) 103

Resolva os exercícios complementares 15 a 25 e 95 a 102.

Representação gráfica de uma PA

Considere a PA (2, 5, 8, 11, ...). Como vimos, seu termo geral é dado por $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$, ou seja, $a_n = -1 + 3n$. A representação gráfica dessa PA é formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano, conforme a figura abaixo:



Observando que o termo geral $a_n = -1 + 3n$ é identificado com a função afim $y = -1 + 3x$ quando x assume apenas valores naturais não nulos, concluímos que a representação gráfica da PA (2, 5, 8, 11, ...) é formada por pontos da reta de equação $y = -1 + 3x$.

De modo geral, temos:

- A representação gráfica da PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...)$ é formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano.
- Como o termo geral é $a_n = a_1 + (n - 1)r$, a representação gráfica da PA é formada por pontos da reta de equação $y = a_1 + (x - 1)r$. Note que $y = a_1 + (x - 1)r$ é uma função afim se $r \neq 0$, e é uma função constante se $r = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

37 Represente no plano cartesiano cada uma das progressões aritméticas a seguir.

a) $(-5, -1, 3, 7, 11)$

b) $(10, 7, 4, 1, -2, -5)$

38 Considere que a_n é o termo geral de uma progressão aritmética de razão 5 e primeiro termo 8. Podemos afirmar que a representação gráfica dos pontos (n, a_n) no plano cartesiano, com $n \in \mathbb{N}^*$, está contida no gráfico da função afim:

a) $y = 3 + 5x$

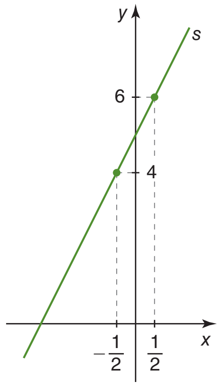
b) $y = 8 + 5x$

c) $y = 3 + 5x^2$

d) $y = 8 \cdot 5^x$

e) $y = 8 \cdot \log (x + 9)$

39 Considere a PA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cuja representação gráfica é formada pelos pontos (n, a_n) pertencentes à reta s, abaixo. Determine a razão r e o termo a_{40} dessa PA.



Propriedades das progressões aritméticas

P1. Em toda PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração

Seja a PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-k}, \ldots, a_n)$ de razão r.

Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, pois antes de a_{k+1} existem k termos e depois de a_{n-k} existem, também, k termos. Vamos demonstrar que $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$.

De fato:

$$a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + (k + 1 - 1)r + a_1 + (n - k - 1)r = a_1 + \cancel{kr} + a_1 + (n - 1)r - \cancel{kr} =$$

$$= a_1 + a_1 + (n - 1)r = a_1 + a_n$$

Exemplo

(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63)

28 + 38 = 66

23 + 43 = 66

18 + 48 = 66

13 + 53 = 66

8 + 58 = 66

3 + 63 = 66

P2. Uma sequência de três termos é PA se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois, isto é:

$$(a, b, c) \text{ é PA } \Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

Demonstração

Temos:

$$\begin{cases} (a, b, c) \text{ é PA } \Leftrightarrow b - a = c - b \\ b - a = c - b \Leftrightarrow b = \dfrac{a + c}{2} \end{cases}$$

Logo: (a, b, c) é PA $\Leftrightarrow b = \dfrac{a + c}{2}$

Consequência

Temos, como consequências das propriedades P1 e P2:

> Em uma PA com número ímpar de termos, o termo médio é a média aritmética entre os extremos.

Demonstração

Seja a_k o termo médio de uma PA com número ímpar de termos:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, \boldsymbol{a_k}, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

A sequência $(a_{k-1}, \boldsymbol{a_k}, a_{k+1})$ também é uma PA; logo, pela propriedade P2:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad \text{(I)}$$

Mas os termos a_{k-1} e a_{k+1} são equidistantes dos extremos, portanto, por P1:

$$a_{k-1} + a_{k+1} = a_1 + a_n \quad \text{(II)}$$

Por (I) e (II), concluímos que $a_k = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$.

Exemplo

(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38)

termo médio

$20 = \dfrac{2 + 38}{2}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12 Determinar o número x de modo que a sequência (x + 3, x − 1, 1 − 2x) seja uma PA.

Resolução

A sequência (x + 3, x − 1, 1 − 2x) é PA se, e somente se, $x - 1 = \dfrac{x + 3 + 1 - 2x}{2}$, ou seja:

$2x - 2 = -x + 4 \Rightarrow x = 2$

13 Os números x + 5, 2x + 1 e 3x + 4, com $x \in \mathbb{R}$, podem ser termos consecutivos de uma PA, na ordem em que foram apresentados?

Resolução

Os termos x + 5, 2x + 1 e 3x + 4 estão em PA, nessa ordem, se, e somente se,

$2x + 1 = \dfrac{x + 5 + 3x + 4}{2}$, ou seja,

$4x + 2 = 4x + 9 \Rightarrow 0x = 7$

Como a sentença 0x = 7 é falsa para qualquer x real, concluímos que não existe número real x que torne as expressões x + 5, 2x + 1 e 3x + 4, nessa ordem, termos consecutivos de uma PA.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

40 Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é o triplo do primeiro termo. Sabendo que o último termo dessa PA é 36, determine o primeiro termo.

41 O termo médio da PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{49})$ é:

a) a_{23} b) a_{24} c) a_{25} d) a_{26} e) a_{27}

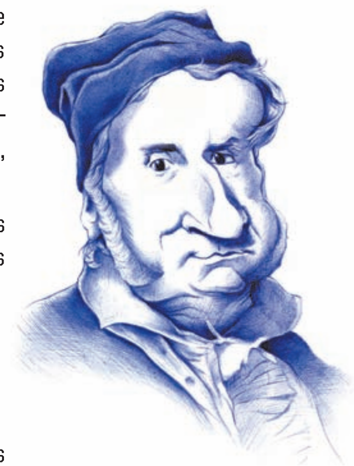
42 Em uma PA finita com número ímpar de termos, os termos $a_i = 8$ e $a_j = 12$ são equidistantes dos extremos. Determine o termo médio dessa PA.

43 Obtenha x para que a sequência (2x − 2, 3x − 1, 2x + 6) seja uma PA.

Resolva os exercícios complementares 26 a 30.

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

No ano de 1785, em uma pequena escola do principado de Braunscheweig, na Alemanha, o professor Büttner propôs a seus alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um menino de 8 anos aproximou-se da mesa do professor e apresentou o resultado pedido. O professor, assombrado, constatou que o resultado estava correto.



Carl Friedrich Gauss

Aquele menino viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Carl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado por Gauss foi simples. Ele percebeu que:

- a soma do primeiro número com o último é: $1 + 100 = 101$
- a soma do segundo número com o penúltimo é: $2 + 99 = 101$
- a soma do terceiro número com o antepenúltimo é: $3 + 98 = 101$

e assim por diante, ou seja, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, que é 101:

$$(1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots, \quad 97, \quad 98, \quad 99, \quad 100)$$

$4 + 97 = 101$

$3 + 98 = 101$

$2 + 99 = 101$

$1 + 100 = 101$

Como no total são 50 somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5.050$$

Esse raciocínio pode ser generalizado para o cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer pelo teorema a seguir.

> A soma S_n dos n primeiros termos da PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots)$ é dada por:
>
> $$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Demonstração

Vamos descrever a soma S_n duas vezes, do seguinte modo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando, membro a membro, essas igualdades, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observando que em cada expressão entre parênteses temos a soma dos extremos ou a soma de dois termos equidistantes dos extremos, podemos escrever, pela propriedade P1:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas iguais a } (a_1 + a_n)}$$

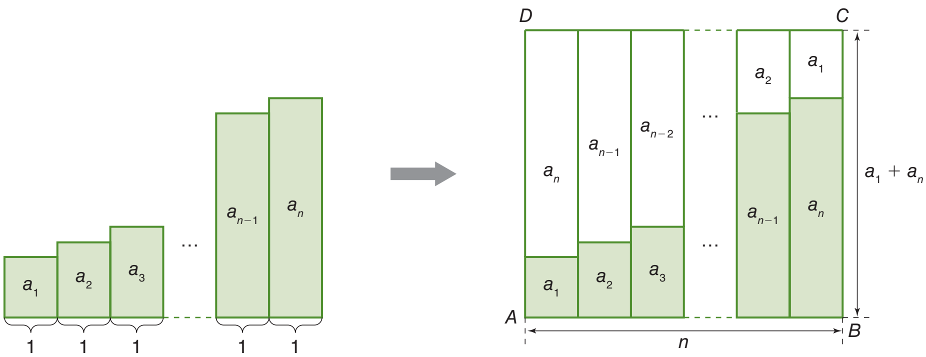
$$\therefore 2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$\therefore S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Interpretação gráfica da fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Consideremos n retângulos de bases unitárias (1) cujas medidas das alturas formam a PA crescente $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n)$. Como a base de cada retângulo mede 1 unidade, as áreas desses retângulos são numericamente iguais aos termos dessa PA. Colocando lado a lado esses retângulos, com as alturas em ordem crescente, obtemos a primeira figura abaixo.

Acima de cada retângulo, construímos outro cuja soma das alturas é igual a $a_1 + a_n$, conforme mostra a segunda figura.



A área da região sombreada, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, é metade da área do retângulo *ABCD*, isto é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 Calcular a soma dos 20 primeiros termos da PA (3, 7, 11, 15, ...).

Resolução

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 20$, temos:

$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$

Calculando a_{20} pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1)r \Rightarrow a_{20} = 3 + 19 \cdot 4 = 79$$

Logo: $S_{20} = \frac{(3 + 79) \cdot 20}{2} = 820$

15 Calcular a soma dos n primeiros termos da PA (6, 10, 14, 18, ...).

Resolução

Temos $a_1 = 6$ e $a_n = 6 + (n - 1) \cdot 4$, ou seja, $a_n = 4n + 2$.

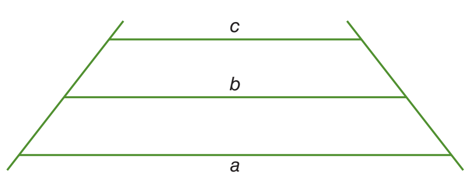
Pela fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, concluímos:

$$S_n = \frac{(6 + 4n + 2) \cdot n}{2} = \frac{(8 + 4n) \cdot n}{2} = 4n + 2n^2$$

16 Uma escada de pedreiro será construída com degraus paralelos pregados em dois caibros, que serão os suportes da escada. Os comprimentos dos degraus formarão uma sequência decrescente de primeiro termo igual a 60 cm e último igual a 40 cm, e a distância entre dois degraus consecutivos quaisquer será constante.
Sabendo que serão usados 450 cm de sarrafo na construção de todos os degraus, calcular o número de degraus que terá a escada.

Resolução

Esquematizando três degraus consecutivos quaisquer, de medidas a, b e c, em ordem decrescente, temos:



O degrau intermediário é base média de um trapézio, portanto $b = \frac{a + c}{2}$.

Assim, deduzimos que a sequência decrescente dos comprimentos dos degraus da escada é uma PA de primeiro termo 60 cm e último 40 cm. Para calcular o número n de degraus, aplicamos a fórmula da soma dos n primeiros termos da PA, em que $S_n = 450$ cm, $a_1 = 60$ cm e $a_n = 40$ cm:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 450 = \frac{(60 + 40)n}{2} \therefore n = 9$$

Logo, a escada terá 9 degraus.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

44 Calcule a soma dos 51 primeiros termos da PA (2, 9, 16, 23, ...).

45 Calcule a soma dos 30 primeiros termos da PA (-15, -11, -7, -3, ...).

46 Calcule a soma dos múltiplos positivos de 9, menores que 100.

47 Determine a soma de todos os números naturais que sejam múltiplos de 2 e 3, simultaneamente, e que estejam compreendidos entre 100 e 700.

48 A letra grega Σ (sigma) é usada, em Ciências Exatas, para indicar uma soma. Por exemplo, a expressão $\sum_{j=1}^{5} 2j$, que lemos "somatório de $2j$, com j variando (em $\mathbb{N}$) de 1 até 5", é calculada atribuindo-se os valores 1, 2, 3, 4 e 5 à variável j da expressão $2j$ e somando-se, a seguir, os resultados obtidos. Isto é, primeiro obtemos os valores de $2j$:

$$j = 1 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 1 = 2$$
$$j = 2 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 2 = 4$$
$$j = 3 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 3 = 6$$
$$j = 4 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 4 = 8$$
$$j = 5 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 5 = 10$$

E, depois, somamos esses valores:

$$\sum_{j=1}^{5} 2j = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

De acordo com essa ideia, calcule:

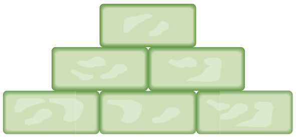
a) $\sum_{j=1}^{50} 2j$ b) $\sum_{j=1}^{40} (3j - 1)$

49 Dada a PA (2, 7, 12, 17, ...), determine:
a) o n-ésimo termo, isto é, a_n.
b) a soma dos n primeiros termos.

50 Calcule a soma dos n primeiros números naturais ímpares.

51 A soma dos termos de uma PA finita é 33, sua razão é 2 e o primeiro termo é -7. Determine o número de termos dessa PA.

52 Com o objetivo de melhorar a iluminação de um ambiente, um arquiteto projetou parte de uma parede com 820 tijolos de vidro. Esses tijolos devem ser dispostos na forma de um triângulo, de modo que, a partir da segunda fileira, cada tijolo se apoie sobre dois tijolos da fileira inferior até a última, que terá apenas um tijolo, conforme a figura que apresenta as três últimas fileiras.



O número de tijolos da primeira fileira deve ser:
a) 35 b) 38 c) 40 d) 45 e) 50

53 Estudos realizados em um município brasileiro mostraram que o desmatamento do cerrado nesse município cresce assustadoramente. A cada dia são desmatados 4 ha (hectares) a mais que a área desmatada no dia anterior.

Paisagem típica do cerrado brasileiro.

No primeiro dia de determinado mês foram desmatados 50 ha.
a) Quantos hectares foram desmatados no 20º dia desse mês?
b) Quantos hectares foram desmatados nos 20 primeiros dias desse mês?

54 No projeto de uma sala de cinema, um arquiteto desenhou a planta com a forma de um trapézio isósceles posicionando a tela sobre a base menor desse trapézio. As poltronas serão dispostas em 16 fileiras paralelas às bases do trapézio. A primeira fileira terá 20 poltronas e, a partir da segunda, cada fileira terá 2 poltronas a mais que a fileira anterior. Calcule o número de poltronas desse cinema.

Resolva os exercícios complementares 31 a 44 e 103 a 109.

Seção 1.3

Progressão geométrica (PG)

Objetivos

- **Reconhecer** e classificar uma PG.
- **Determinar** um termo qualquer de uma PG, a partir do primeiro termo e da razão.
- **Representar** o termo geral de uma PG.
- **Calcular** a soma e o produto dos n primeiros termos de uma PG.
- **Calcular** a soma dos infinitos termos de uma PG.
- **Aplicar** o conceito de PG na resolução de problemas.

Termos e conceitos

- **progressão geométrica**
- **razão de uma PG**

Problemas que envolvem grandezas que crescem ou decrescem através do produto por uma taxa constante podem ser resolvidos com o auxílio da função exponencial, conforme estudamos no capítulo 8.

Neste tópico, veremos que problemas como esses também podem ser resolvidos por meio de um tipo de sequência chamada de **progressão geométrica** (PG). Como exemplo, acompanhe a seguinte situação.

A taxa média anual de crescimento da população de um país indica o percentual médio de crescimento da população de um ano para o seguinte.

Hong Kong: densidade demográfica média de 7.900 hab/km².

Considere que em determinado ano a população de um país era de x habitantes e, a partir de então, ela tenha crescido à taxa média anual de 2%. Se essa taxa se mantiver, a sequência a seguir indica as estimativas populacionais desse país, ano a ano, a partir de x habitantes:

$$(\underbrace{x}_{1^{\underline{o}}\text{ ano}};\ \underbrace{x \cdot 1{,}02}_{2^{\underline{o}}\text{ ano}};\ \underbrace{x \cdot (1{,}02)^2}_{3^{\underline{o}}\text{ ano}};\ \underbrace{x \cdot (1{,}02)^3}_{4^{\underline{o}}\text{ ano}};\ \underbrace{x \cdot (1{,}02)^4}_{5^{\underline{o}}\text{ ano}};\ \ldots)$$

A sequência numérica que aparece nessa situação é um exemplo de **progressão geométrica** (PG), assim chamada porque, multiplicando cada termo por uma mesma constante, obtemos o termo seguinte. Nesse caso, multiplicamos cada termo da sequência pela constante 1,02.

Podemos definir, de modo geral, que:

> **Progressão geométrica** (PG) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q. O número q é chamado de **razão** da progressão geométrica.

Exemplos

a) (1, 3, 9, 27, 81, 243) é uma PG finita de razão $q = 3$.

b) $\left(6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots\right)$ é uma PG infinita de razão $q = \frac{1}{3}$.

c) (5, −10, 20, −40, 80, −160) é uma PG finita de razão $q = -2$.

d) (7, 0, 0, 0, 0, ...) é uma PG infinita de razão $q = 0$.

e) (0, 0, 0, 0, 0, ...) é uma PG infinita de razão indeterminada.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

17 Determinar a razão da PG (a_n) tal que $a_{11} = 26$ e $a_{12} = 130$.

Resolução

Como $a_{11} \neq 0$, a razão q da PG é o quociente de a_{12} por a_{11}, isto é: $q = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{130}{26} = 5$

18 Verificar se é ou não uma progressão geométrica a sequência (a_n) dada pela lei de formação $a_n = 2 \cdot 3^n$, para todo n natural não nulo.

Resolução

Como a variável n deve assumir os infinitos valores do conjunto $\mathbb{N}^*$, em vez de atribuir os infinitos valores a n (o que não conseguiríamos), vamos verificar se o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante para todo valor n natural não nulo. Note que tal quociente sempre existe, pois todos os elementos da sequência (a_n) são diferentes de zero.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3^n} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot \cancel{3^n}} = 3$$

Como o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é a constante 3, concluímos que a sequência é uma PG de razão $q = 3$.

Classificação de uma PG

As progressões geométricas podem ser classificadas como crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula.

- Uma PG é **crescente** quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior. Isso só ocorre quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

Exemplos

a) $(1, 2, 4, 8, \dots)$ é uma PG crescente de razão $q = 2$.

b) $\left(-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots\right)$ é uma PG crescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

- Uma PG é **decrescente** quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior. Isso só ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.

Exemplos

a) $\left(12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots\right)$ é uma PG decrescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

b) $(-1, -3, -9, -27, \dots)$ é uma PG decrescente de razão $q = 3$.

- Uma PG é **constante** quando todos os seus termos são iguais. Isso só ocorre quando sua razão é 1 ou quando todos os seus termos são nulos.

Exemplos

a) $(6, 6, 6, 6, 6, \dots)$ é uma PG constante de razão $q = 1$.

b) $(0, 0, 0, 0, \dots)$ é uma PG constante de razão indeterminada.

- Uma PG é **oscilante** quando todos os seus termos são diferentes de zero e dois termos consecutivos quaisquer têm sinais opostos. Isso só ocorre quando $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Exemplos

a) $(1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots)$ é uma PG oscilante de razão $q = -2$.

b) $\left(-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ é uma PG oscilante de razão $q = -\frac{1}{2}$.

- Uma PG é **quase nula** quando o primeiro termo é diferente de zero e os demais são iguais a zero. Isso só ocorre quando $a_1 \neq 0$ e $q = 0$.

Exemplo

$(4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ é uma PG quase nula.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

55 Verifique se as sequências abaixo são progressões geométricas.

a) (5, 25, 125, 625)

b) (3, 6, 9, 12, 15, ...)

c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}\right)$

d) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ tal que $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

e) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que $a_n = (n-1)^2$

f) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ tal que $a_n = 5^{2-n}$

g) (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-4}$

56 Calcule a razão de cada uma das progressões geométricas abaixo.

a) (1, 2, 4, 8, 16, ...)

b) (−3, 9, −27, 81, ...)

c) $\left(\frac{4}{3}, 2, 3, \frac{9}{2}, ...\right)$

d) $\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}, \frac{5}{9}, \frac{5\sqrt{2}}{27}, ...\right)$

e) $\left(\frac{3}{\sqrt{5}-2}, \frac{6}{5-2\sqrt{5}}, \frac{12}{5\sqrt{5}-10}, ...\right)$

57 Determine a razão da PG (a_n) tal que $a_{38} = 15$ e $a_{39} = 5$.

58 Na PG $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $q = \sqrt{3} + 1$, temos $a_{10} = \sqrt{3} - 1$. Determine o termo a_{11}.

59 (Furg-RS) Dada a progressão geométrica $\left(..., 1, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}, ...\right)$, o termo que precede imediatamente o 1 é:

a) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

b) $1-\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}-1$

d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

e) $1+\sqrt{3}$

60 Três números reais não nulos a, b e c estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão 3 tal que $b = ac$. Calcule a soma $a + b + c$.

61 Verifique se é progressão geométrica a sequência (a_n), tal que $a_n = 5 \cdot 2^n$.

62 Classifique como crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula cada uma das progressões geométricas a seguir.

a) (3, 6, 18, 54, ...)

b) (−16, −8, −4, −2, ...)

c) $\left(6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, ...\right)$

d) (−5, 10, −20, 40, ...)

e) (0, 0, 0, 0, ...)

f) (9, 9, 9, 9, 9, ...)

g) (−5, 0, 0, 0, 0, ...)

h) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}, ...\right)$

i) $\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}, 2+\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}}, ...\right)$

63 (UFRGS) A cada balanço, uma firma tem apresentado um aumento de 10% em seu capital. A razão da progressão formada pelos capitais nos balanços é:

a) 10

b) $\frac{11}{10}$

c) $\frac{10}{11}$

d) $\frac{9}{10}$

e) $\frac{1}{10}$

Resolva os exercícios complementares 45 a 50.

Representação genérica de uma PG

Do mesmo modo que vimos no estudo da PA, é importante saber representar uma PG genericamente. Mostramos a seguir algumas representações.

- A sequência (x, xq, xq^2) é uma PG de três termos e razão q, para quaisquer valores de x e q.
- A sequência $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ é uma PG de três termos e razão q, para quaisquer valores de x e q, com $q \neq 0$. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PG de três termos, conhecendo o produto deles.
- A sequência (x, xq, xq^2, xq^3) é uma PG de quatro termos e razão q, para quaisquer valores de x e q.
- A sequência $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$ é uma PG de quatro termos e razão q^2, para quaisquer valores de x e q, com $q \neq 0$. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PG de quatro termos, conhecendo-se o produto deles.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

19 Determinar a PG de três termos, sabendo que o produto dos três termos é 8 e a soma do segundo com o terceiro é 18.

Resolução

Quando se conhece o produto dos três termos, a representação mais adequada é $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 8 \\ x + xq = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 8 \\ x + xq = 18 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 \\ x + xq = 18 \end{cases}$$

Substituindo x por 2 na equação $x + xq = 18$, obtemos:

$$2 + 2q = 18 \Rightarrow q = 8$$

Assim, a PG $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ para $x = 2$ e $q = 8$, é igual a $\left(\frac{1}{4}, 2, 16\right)$.

20 Em uma PG de quatro termos positivos, o produto do segundo pelo terceiro termo é 4 e a soma do primeiro com o quarto termo é 5. Determinar essa PG.

Resolução

Representando a PG por $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot xq = 4 \\ \frac{x}{q^3} + xq^3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 & \text{(I)} \\ \frac{x}{q^3} + xq^3 = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), temos $x = \pm 2$; mas só nos interessa $x = 2$, pois a PG deve ter os termos positivos. Substituindo x por 2 na equação (II), obtemos:

$$\frac{2}{q^3} + 2q^3 = 5$$

Multiplicamos por q^3 ambos os membros dessa equação:

$$\left(\frac{2}{q^3} + 2q^3\right) \cdot q^3 = 5q^3 \Rightarrow 2 + 2q^6 = 5q^3$$

$$\therefore 2q^6 - 5q^3 + 2 = 0$$

Fazendo a mudança de variável, $q^3 = y$, temos:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$\therefore y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = \frac{1}{2}$$

Retornando à variável original:

$$q^3 = 2 \text{ ou } q^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \sqrt[3]{2} \text{ ou } q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

Assim, temos as duas possibilidades a seguir.

- Para $x = 2$ e $q = \sqrt[3]{2}$:

$$\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right) = \left(\frac{2}{(\sqrt[3]{2})^3}, \frac{2}{\sqrt[3]{2}}, 2\sqrt[3]{2}, 2(\sqrt[3]{2})^3\right) =$$

$$= \left(1, \sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{2}, 4\right)$$

- Para $x = 2$ e $q = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$:

$$\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right) = \left(\frac{2}{\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^3}, \frac{2}{\frac{\sqrt[3]{4}}{2}}, 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{2}, 2\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^3\right) =$$

$$= \left(4, 2\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, 1\right)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

64 Determine a PG crescente de três termos tal que a soma dos três termos é 14 e o produto deles é 64.

65 Determine a PG crescente de quatro termos tal que o produto dos quatro termos é 81 e a soma do segundo com o terceiro termo é $\frac{15}{2}$.

66 Em um triângulo retângulo, as medidas, numa mesma unidade de comprimento, do cateto menor, do cateto maior e da hipotenusa, formam uma progressão geométrica, nessa ordem. A razão q dessa PG satisfaz a condição:

a) $0{,}7 < q < 0{,}9$
b) $0{,}9 < q < 1$
c) $1 < q < 2$
d) $2 < q < 3$
e) $3 < q < 3{,}2$

Resolva os exercícios complementares 51 e 52.

Fórmula do termo geral de uma PG

Em toda progressão geométrica, um termo qualquer pode ser expresso em função do primeiro termo e da razão da PG, por meio de uma fórmula matemática. Para entender tal fórmula, considere a PG cujo primeiro termo é a_1 e cuja razão é q:

$$(a_1, \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2}, \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3}, \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_4}, \underbrace{a_1 \cdot q^4}_{a_5}, ..., \underbrace{?}_{a_n}, ...)$$

Note que qualquer termo da PG é o produto do primeiro termo a_1 por uma potência de q:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot q^0 \\ a_2 &= a_1 \cdot q^1 \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3 \\ a_5 &= a_1 \cdot q^4 \\ &\vdots \\ a_n &= ? \end{aligned}$$

Observando que, em cada igualdade, o expoente de q tem uma unidade a menos que o índice do termo à esquerda da igualdade, concluímos: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Ou seja:

Numa PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Essa identidade é chamada de **fórmula do termo geral** da PG.

Outra fórmula do termo geral de uma PG

Podemos, ainda, expressar um termo a_n da PG em função de outro termo qualquer a_k e da razão q. Por exemplo, observando a PG:

$$(a_1, \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2}, \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3}, \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_4}, \underbrace{a_1 \cdot q^4}_{a_5}, \underbrace{a_1 \cdot q^5}_{a_6}, ...)$$

temos:

$$\begin{aligned} a_6 &= a_1 \cdot q^5 \\ a_6 &= a_2 \cdot q^4 \\ a_6 &= a_3 \cdot q^3 \\ a_6 &= a_4 \cdot q^2 \\ a_6 &= a_5 \cdot q \end{aligned}$$

Generalizando, podemos escrever:

Numa PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k, ..., a_n, ...)$ de razão q, temos:

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

Essa identidade é outra forma de apresentar o termo geral da PG. Note que, para $k = 1$, obtém-se a fórmula anterior.

Exemplos

a) $a_{40} = a_1 \cdot q^{40-1}$, ou seja, $a_{40} = a_1 \cdot q^{39}$

b) $a_{40} = a_{10} \cdot q^{40-10}$, ou seja, $a_{40} = a_{10} \cdot q^{30}$

c) $a_{18} = a_8 \cdot q^{18-8}$, ou seja, $a_{18} = a_8 \cdot q^{10}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

21 Determinar o 13º termo da PG (64, 32, 16, ...)

Resolução

Devemos determinar o termo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ dessa PG tal que $a_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$ e $n = 13$.

$$a_{13} = a_1 \cdot q^{12} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 2^6 \cdot \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

22 Determinar a razão da PG (a_n) em que $a_1 = \frac{1}{5^{30}}$ e $a_{12} = \frac{1}{5^8}$.

Resolução

Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1q^{n-1}$ para $n = 12$, temos:

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{11} \Rightarrow \frac{1}{5^8} = \frac{1}{5^{30}} \cdot q^{11}$$

$$\therefore q^{11} = \frac{5^{30}}{5^8} = 5^{22} \Rightarrow q = \sqrt[11]{5^{22}} = 5^2 = 25$$

Logo, a razão da PG é 25.

23 Determinar o número de termos da PG $\left(k^{53}, k^{50}, k^{47}, \ldots, \frac{1}{k^{28}}\right)$, sendo k um número real não nulo.

Resolução

Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para $a_1 = k^{53}$, $a_n = \frac{1}{k^{28}} = k^{-28}$ e $q = k^{-3}$, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow k^{-28} = k^{53} \cdot (k^{-3})^{n-1}$$

$$\therefore k^{-28} = k^{53} \cdot k^{-3n+3} \Rightarrow k^{-28} = k^{53-3n+3}$$

$$\therefore k^{-28} = k^{56-3n} \Rightarrow -28 = 56 - 3n$$

$$\therefore n = 28$$

Logo, a PG possui 28 termos.

24 Uma estimativa prevê crescimento anual de 0,2% na população de uma cidade. Supondo que essa estimativa esteja correta, calcular a população dessa cidade daqui a 14 anos, sabendo que a população atual é de 480.000 habitantes.

Resolução

A sequência crescente da população, ano a ano, dessa cidade, a partir do momento atual é a progressão geométrica de razão 1,002 e primeiro termo 480.000. O termo a_{15} dessa PG é a população da cidade daqui a 14 anos, isto é:

$$a_{15} = 480.000 \cdot (1{,}002)^{14}$$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos $(1{,}002)^{14} \approx 1{,}02837$, portanto:

$$a_{15} \approx 480.000 \cdot 1{,}02837 \Rightarrow a_{15} \approx 493.618$$

Logo, daqui a 14 anos a população da cidade será de 493.618 habitantes, aproximadamente.

25 Um estudo mostrou que a área desertificada de um município dobra a cada década e atualmente essa área representa $\frac{1}{1.024}$ do município. Considerando que a conclusão desse estudo está correta e não será tomada nenhuma providência, daqui a exatamente k décadas todo o município terá se transformado em deserto. Determinar k.

Resolução

Sendo A a área total do município, a sequência das áreas desertificadas desse município, década a década, a partir do momento atual até a desertificação total, é a progressão geométrica de razão 2, primeiro termo igual a $\frac{A}{1.024}$ e último termo A:

$$\left(\frac{A}{1.024}, \frac{A}{512}, \frac{A}{256}, \ldots, A\right)$$

O número n de termos dessa PG pode ser determinado pela fórmula do termo geral, em que $a_n = A$, $a_1 = \frac{1}{1.024}$ e $q = 2$, isto é:

$$A = \frac{A}{1.024} \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 1.024$$

$$\therefore 2^{n-1} = 2^{10} \Rightarrow n - 1 = 10$$

$$\therefore n = 11$$

Como a sequência tem 11 termos, concluímos que daqui a 10 décadas, ou 100 anos, toda a área do município terá se transformado em deserto.

26 Calcular a razão da PG (a_n) tal que $a_3 + a_6 = 36$ e $a_1 + a_4 = 144$.

Resolução

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1q^{n-1}$, temos: $a_3 = a_1q^2$, $a_6 = a_1q^5$ e $a_4 = a_1q^3$; logo:

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = 36 \\ a_1 + a_4 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q^2 + a_1q^5 = 36 \\ a_1 + a_1q^3 = 144 \end{cases}$$

Fatorando o 1º membro de cada uma das equações, obtemos:

$$\begin{cases} a_1q^2(1 + q^3) = 36 \\ a_1(1 + q^3) = 144 \end{cases}$$

Dividimos, membro a membro, as duas igualdades anteriores:

$$\frac{\cancel{a_1}q^2\cancel{(1 + q^3)}}{\cancel{a_1}\cancel{(1 + q^3)}} = \frac{36}{144} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore q = \pm\frac{1}{2}$$

Observe, portanto, que existem duas progressões geométricas que satisfazem as condições desse problema: uma de razão positiva, $q = \frac{1}{2}$, e outra de razão negativa, $q = -\frac{1}{2}$.

27 Interpolar 5 meios geométricos entre 1 e 64, nessa ordem.

Resolução

Devemos determinar a PG de sete termos, com $a_1 = 1$ e $a_7 = 64$.

$$(\underset{a_1}{1}, \underbrace{\_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_}_{\text{meios geométricos}}, \underset{a_7}{64})$$

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1q^{n-1}$, temos:

$a_7 = a_1q^6 \Rightarrow 64 = 1 \cdot q^6$

$\therefore q = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2$

Chegamos, portanto, a duas interpolações possíveis:

- para $q = 2$, temos a PG (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)
- para $q = -2$, temos a PG (1, −2, 4, −8, 16, −32, 64)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

67 Determine o 14º termo da PG (1.536, 768, 384, 192, ...).

68 O 30º termo da PG $\left(\frac{k-1}{k+1}, k-1, k^2-1, ...\right)$ é:

a) $(k^2 - 1)(k + 1)^{29}$
b) $(k + 1)^{29}$
c) $(k - 1)(k + 1)^{28}$
d) $(k + 1)^{28}$
e) $\frac{(k+1)^{29}}{k-1}$

69 Obtenha o n-ésimo termo, a_n, da PG (3, 6, 12, 24, ...).

70 Considere a PG (a_n) de razão $q = \sqrt[7]{3}$ e $a_{15} = 5$. Determine a_1.

71 Obtenha a PG (a_n) de termos não nulos e razão $q = \frac{2}{3}$ tal que $a_6 = a_1 \cdot a_4$.

72 Quantos termos tem a PG $\left(243, 81, 27, ..., \frac{1}{3^{10}}\right)$?

73 Em uma PG (a_n) temos $a_1 = \frac{1}{243}$ e $a_{10} = 81$. Determine a razão da PG.

74 Interpolar 4 meios geométricos entre 1 e 7, nessa ordem.

75 Determine a razão da PG oscilante (a_n) em que $a_5 + a_8 = 9$ e $a_7 + a_{10} = 1$.

76 Determine o 19º termo da PG (a_n) de razão $q = \sqrt[6]{2}$ e $a_7 = 10$.

77 Em uma PG (a_n), $a_{16} = 1$ e $a_{22} = 4$. Determine a razão dessa PG.

78 (Cefet-PR) Os pontos médios dos lados de um quadrado com 24 cm de perímetro são vértices de um segundo quadrado. Os pontos médios dos lados desse segundo quadrado são vértices de um terceiro quadrado e assim, sucessivamente, até o décimo quadrado. A área do décimo quadrado assim obtido, em centímetro quadrado, é igual a:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{512}$
c) $\frac{105}{1.024}$
d) $\frac{7}{128}$
e) $\frac{9}{128}$

79 (Fuvest-SP) Um biólogo está analisando a reprodução de uma população de bactérias, que se iniciou com 100 indivíduos. Admite-se que a taxa de mortalidade das bactérias é nula. Os resultados obtidos, na primeira hora, são:

Tempo decorrido (em minuto)	Número de bactérias
0	100
20	200
40	400
60	800

Supondo-se que as condições de reprodução continuem válidas nas horas que se seguem, após 4 horas do início do experimento, a população de bactérias será de:

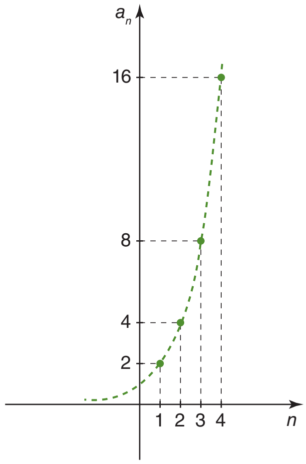
a) 51.200
b) 102.400
c) 409.600
d) 819.200
e) 1.638.400

80 Cinco amigos resolveram trabalhar na campanha eleitoral de um candidato a deputado federal. Para isso, cada um enviou 10 e-mails a 10 outros amigos exaltando as qualidades do candidato e pedindo a cada destinatário que enviasse 10 e-mails com os mesmos dizeres a 10 novos destinatários. Suponha que cada destinatário tenha recebido um único e-mail e tenha atendido ao pedido. Denominando de: 1ª geração de destinatários as pessoas que receberam os e-mails desses 5 amigos; 2ª geração de destinatários as pessoas que receberam e-mails da 1ª geração; e assim por diante, calcule o número de destinatários da 6ª geração.

Resolva os exercícios complementares 53 a 62 e 110 a 113.

Representação gráfica de uma PG

Do mesmo modo que fizemos com as progressões aritméticas, representamos graficamente uma PG $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano. Por exemplo, a PG (2, 4, 8, 16, ...), cujo termo geral é $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$, ou seja, $a_n = 2^n$, é representada graficamente pelos pontos $(n, 2^n)$ do plano cartesiano:



Observando que o termo geral $a_n = 2^n$ é identificado com a função exponencial $y = 2^x$, quando x assume apenas valores naturais não nulos, concluímos que a representação gráfica da PG (2, 4, 8, 16, ...) é formada por pontos do gráfico da função exponencial $y = 2^x$.

Generalizando:

> Consideremos a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ de razão q, com $q > 0$ e $q \neq 1$. Seu termo geral $a_n = a_1q^{n-1}$ é equivalente a $a_n = \dfrac{a_1}{q} \cdot q^n$, portanto, a representação gráfica dessa PG é formada por pontos do gráfico da função exponencial $y = \dfrac{a_1}{q} \cdot q^x$.

Nota:

Se a razão q de uma PG $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ for negativa ou igual a 1, a representação gráfica dessa PG é formada pelos pontos (n, a_n), que não pertencem ao gráfico de uma função exponencial.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

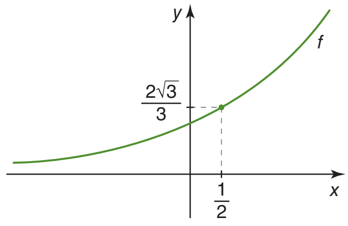
81 Represente no plano cartesiano cada uma das progressões geométricas a seguir.

a) $\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16\right)$ b) $\left(16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}\right)$

82 Considere que a_n é o termo geral de uma progressão geométrica de razão 3 e primeiro termo 7. Podemos afirmar que a representação gráfica, no plano cartesiano, dos pontos (n, a_n), com $n \in \mathbb{N}^*$, está contida no gráfico da função:

a) $y = 7 + 3\log x$
b) $y = \dfrac{3^x}{7}$
c) $y = 3^x$
d) $y = 7^x$
e) $y = \dfrac{7}{3} \cdot 3^x$

83 Considere a PG $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cuja representação gráfica é formada pelos pontos (n, a_n) pertencentes ao gráfico da função exponencial $f(x) = k^x$, representado abaixo, em que k é uma constante real positiva e diferente de 1. Determine a razão q e o termo a_{30} dessa PG.



Resolva o exercício complementar 63.

Propriedades das progressões geométricas

P1. Em toda PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Demonstração

Seja a PG finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-k}, \dots, a_n)$ de razão q.

Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, pois antes de a_{k+1} existem k termos e depois de a_{n-k} existem, também, k termos. Vamos demonstrar que $a_{k+1} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n$.

$$a_{k+1} \cdot a_{n-k} = a_1q^k \cdot a_1q^{n-k-1} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{k+n-k-1} = a_1 \cdot a_1q^{n-1} = a_1 \cdot a_n$$

Exemplo

(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512)

$16 \cdot 64 = 1.024$

$8 \cdot 128 = 1.024$

$4 \cdot 256 = 1.024$

$2 \cdot 512 = 1.024$

P2. Uma sequência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é uma PG se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois, isto é, sendo $a \neq 0$, temos:

$$(a, b, c) \text{ é PG } \Leftrightarrow b^2 = ac$$

Demonstração

Vamos analisar cada uma das hipóteses: $b \neq 0$ ou $b = 0$.

- 1ª hipótese: $b \neq 0$

Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos: $\begin{cases} (a, b, c) \text{ é PG } \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = ac \end{cases}$

- 2ª hipótese: $b = 0$

Como $a \neq 0$ e $b = 0$, a PG (a, b, c) é $(a, 0, 0)$, portanto o quadrado do termo médio (0^2) é igual ao produto dos outros dois termos $(a \cdot 0)$.

Logo, (a, b, c) é PG $\Leftrightarrow b^2 = ac$

Consequência

Temos, como consequência das propriedades P1 e P2:

Em uma PG com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Demonstração

Seja a_k o termo médio de uma PG com número ímpar de termos:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}, \boldsymbol{a_k}, a_{k+1}, ..., a_n)$$

A sequência $(a_{k-1}, \boldsymbol{a_k}, a_{k+1})$ também é uma PG; logo, pela propriedade P2, temos:

$$(a_k)^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1} \qquad \text{(I)}$$

Mas os termos a_{k-1} e a_{k+1} são equidistantes dos extremos, portanto, por P1:

$$a_{k-1} \cdot a_{k+1} = a_1 \cdot a_n \qquad \text{(II)}$$

Por (I) e (II), concluímos que $(a_k)^2 = a_1 \cdot a_n$

Exemplo

(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512)

termo médio: $32^2 = 1.024$

extremos: $2 \cdot 512 = 1.024$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

28 Determinar x de modo que a sequência $(3, x + 2, 3x)$ seja uma PG crescente.

Resolução

A sequência de três termos tem o primeiro termo não nulo (3). Logo, pela propriedade P2, essa sequência é PG se, e somente se, $(x + 2)^2 = 3 \cdot 3x$, ou seja:

$x^2 + 4x + 4 = 9x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1$$

- Para $x = 1$ temos a PG $(3, 1 + 2, 3 \cdot 1)$, que é a PG constante (3, 3, 3).
- Para $x = 4$ temos a PG $(3, 4 + 2, 3 \cdot 4)$, que é a PG crescente (3, 6, 12).

Como queremos que a PG seja crescente, concluímos que $x = 4$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

84 Em uma PG de dez termos $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{10})$, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é o quádruplo do primeiro termo. Sabendo que o primeiro termo dessa PG é 3, determine a razão da PG.

85 Em uma PG finita, com número ímpar de termos, os termos $a_i = 2$ e $a_j = 72$ são equidistantes dos extremos. Determine o termo médio dessa PG.

86 Obtenha x para que a sequência $(-1, x - 1, 4x - 1)$ seja uma PG.

87 Determine x de modo que a sequência $(x + 1, 3x - 2, 5x)$ seja uma PG crescente.

88 Para dois números positivos a e c, a sequência $(a, 4, c)$ é PA e a sequência $(c + 2, 4, a)$ é PG. Determine a e c.

89 Em uma PG finita e crescente, o termo médio é a raiz quadrada do primeiro termo. Determine o último termo dessa PG.

90 A valorização percentual anual de um apartamento foi a mesma em dois anos consecutivos. A tabela abaixo mostra o valor do imóvel, em função do tempo, em que o tempo zero corresponde ao início desse período. Qual era o valor do apartamento ao final desse período?

Tempo (ano)	Valor do imóvel (milhares de reais)
0	100
1	$x + 30$
2	$2x - 39$

91 (Fuvest-SP) Três números positivos, cuja soma é 30, estão em progressão aritmética. Somando-se, respectivamente, 4, -4 e -9 ao primeiro, segundo e terceiro termos dessa progressão aritmética, obtemos três números em progressão geométrica. Então, um dos termos da progressão aritmética é:

a) 9 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 15

Resolva os exercícios complementares 64 a 72.

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Considere a PG (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1.536, ...). Para calcular a soma (S) dos dez primeiros termos dessa PG, podemos adotar o procedimento a seguir.

Primeiro, escrevemos a adição de todas as parcelas:

$$S = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1.536$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade pela razão da PG ($q = 2$), obtemos:

$$2S = 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1.536 + 3.072$$

Subtraímos essas duas igualdades, membro a membro:

$$S - 2S = 3 - 3.072 \Rightarrow S = 3.069$$

Logo, a soma (S) dos dez primeiros termos da PG é 3.069.

Podemos generalizar esse procedimento para qualquer PG não constante, como mostra o teorema a seguir.

A soma S_n dos n primeiros termos da PG não constante $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Demonstração

Indicando por S_n a soma dos n primeiros termos da PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n, \text{ ou ainda,}$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} \quad \text{(I)}$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade pela razão q da PG, obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^n \qquad \text{(II)}$$

Subtraindo as igualdades (I) e (II), membro a membro, temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

Como $q \neq 1$, pois a PG não é constante, podemos dividir ambos os membros dessa última igualdade por $1 - q$, concluindo:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

29 Calcular a soma dos 11 primeiros termos da PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, ...\right)$.

Resolução

Aplicamos a fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ para $a_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$ e $n = 11$:

$$S_{11} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (1 - 2^{11})}{1 - 2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (-2.047)}{-1}$$

$$\therefore S_{11} = \frac{2.047}{4}$$

30 Calcular a soma dos 30 primeiros termos da PG (4, 4, 4, 4, 4, ...)

Resolução

Como a PG é constante ($q = 1$), a soma dos 30 primeiros termos é dada por:

$S_{30} = 30 \cdot a_1 \Rightarrow S_{30} = 30 \cdot 4 = 120$

31 Desde a sua fundação, uma empresa já pagou um total de R$ 46.410,00 de impostos. Sabendo que, a cada ano, os impostos pagos pela empresa têm aumentado 10%, em relação ao ano anterior, e no primeiro ano de funcionamento a empresa pagou R$ 10.000,00 de impostos, calcular o tempo de existência dessa empresa.

Resolução

A sequência dos impostos pagos por essa empresa, ano a ano, é uma progressão geométrica de primeiro termo 10.000 e razão 1,1. O tempo de existência da empresa, em ano, é o número n de termos dessa PG, e pode ser obtido pela fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG não constante, em que: $S_n = 46.410{,}00$, $a_1 = 10.000$ e $q = 1{,}1$, isto é:

$$46.410 = \frac{10.000 \cdot [1 - (1{,}1)^n]}{1 - 1{,}1} \Rightarrow 4{,}641 = \frac{1 - (1{,}1)^n}{-0{,}1}$$

$$\therefore -0{,}4641 = 1 - (1{,}1)^n \Rightarrow (1{,}1)^n = 1{,}4641$$

$$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{14.641}{10.000}\right)$$

Decompondo em fatores primos o número 14.641, obtemos 11^4, portanto:

$$\left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^4 \Rightarrow n = 4$$

Logo, a empresa tem quatro anos de existência.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

92 Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG (1, 2, 4, 8, 16, ...).

93 Calcule a soma dos 11 primeiros termos da PG $\left(2, 1, \frac{1}{2}, ...\right)$.

94 Dada a PG (1, −1, 1, −1, 1, −1, ...):

a) calcule a soma dos 50 primeiros termos.

b) calcule a soma dos 51 primeiros termos.

95 Em uma PG de razão 2, a soma dos 8 primeiros termos é 765. Determine o primeiro termo dessa PG.

96 Calcule, em função da variável real k, a soma dos 30 primeiros termos da PG $(1, k, k^2, k^3, ...)$.

97 A soma dos n primeiros termos da PG (5, 10, 20, 40, ...) é:

a) $2^n - 5$

b) $5 - 2^n$

c) $5(2^n - 1)$

d) $5(1 - 2^n)$

e) $5(2^n - 5)$

98 A soma dos n primeiros termos de uma PG é 12.285. Determine n sabendo que $a_1 = 3$ e $q = 2$.

99 Considerando seus pais como primeira geração anterior à sua, os pais deles como segunda geração, os pais dos pais deles como terceira geração e assim por diante, o número dos seus antepassados até a 20ª geração anterior à sua é:

a) maior que 2.000.000.

b) maior que 1.900.000 e menor que 2.000.000.

c) maior que 1.800.000 e menor que 1.900.000.

d) maior que 1.700.000 e menor que 1.800.000.

e) menor que 1.800.000.

100 Uma gravadora lançou no mercado um CD de música popular brasileira. Para conhecer a aceitação do produto, o departamento de vendas fez uma pesquisa nas distribuidoras para verificar o número de cópias vendidas. Na primeira semana, foram vendidas 20 cópias; na segunda semana, a venda dobrou em relação à primeira semana; e, na terceira, dobrou em relação à segunda semana. A diretora acredita que as vendas continuarão dobrando a cada semana.

Agora, responda:

a) Em que semana serão vendidas 10.240 cópias?

b) Até o final da semana indicada no item **a**, quantas cópias terão sido vendidas desde o lançamento do CD?

Resolva os exercícios complementares 73 a 78 e 114 a 117.

Produto dos n primeiros termos de uma PG

O produto dos n primeiros termos de uma PG também pode ser obtido por meio de uma fórmula matemática.

Para entender essa fórmula, vamos multiplicar os 30 primeiros termos da PG $(a_1q^0, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, ..., a_1q^{29}, ...)$.

Indicando por P_{30} esse produto, temos: $P_{30} = a_1q^0 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 \cdot a_1q^3 \cdot ... \cdot a_1q^{29}$

Pelas propriedades comutativa e associativa da multiplicação, podemos representar esse produto por:

$$P_{30} = \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot ... \cdot a_1)}_{\text{30 fatores}} \cdot \underbrace{(q^0 \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot ... \cdot q^{29})}_{\text{30 fatores}}$$

Conservando a base e adicionando os expoentes das potências de mesma base, temos:

$$P_{30} = (a_1)^{30} \cdot q^{0+1+2+3+...+29}$$

O expoente de q é a soma dos 30 termos da PA $(0, 1, 2, 3, ..., 29)$, que é igual a $\dfrac{(0+29) \cdot 30}{2} = 435$; logo, $P_{30} = (a_1)^{30} \cdot q^{435}$.

Generalizando esse procedimento, obtemos o teorema:

> O produto P_n dos n primeiros termos da PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q é dado por:
>
> $$P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

Demonstração

Indicando por P_n o produto dos n primeiros termos da PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, temos: $P_n = a_1q^0 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 \cdot a_1q^3 \cdot ... \cdot a_1q^{n-1}$

Pelas propriedades comutativa e associativa da multiplicação, podemos representar esse produto por:

$$P_n = \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot ... \cdot a_1)}_{n\text{ fatores}} \cdot \underbrace{(q^0 \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot ... \cdot q^{n-1})}_{n\text{ fatores}}$$

Conservando a base e adicionando os expoentes das potências de mesma base, temos:

$$P_n = (a_1)^n \cdot q^{0+1+2+3+...+(n-1)}$$

O expoente de q é a soma dos n termos da PA $(0, 1, 2, 3, ..., n-1)$, que é igual a $\dfrac{(0+n-1) \cdot n}{2}$; logo: $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

32 Calcular o produto dos 10 primeiros termos da PG (2, 6, 18, 54, ...), deixando indicado o resultado sob a forma de potências.

Resolução

Aplicamos a fórmula $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$ para $a_1 = 2$, $n = 10$ e $q = 3$, obtendo:

$P_{10} = (2)^{10} \cdot 3^{\frac{(10-1) \cdot 10}{2}} \Rightarrow P_{10} = 2^{10} \cdot 3^{45}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

101 Calcule o produto dos 18 primeiros termos da PG $\left(\frac{1}{256}, \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$.

102 Calcule o produto dos 14 primeiros termos da PG $\left(\frac{1}{7^{12}}, \frac{1}{7^{10}}, \frac{1}{7^{8}}, \ldots\right)$, deixando indicado o resultado na forma de uma potência.

103 Qual é a PG crescente em que $a_1 = 1$ e o produto dos 8 primeiros termos é 81?

Resolva os exercícios complementares 79 a 82 e 118.

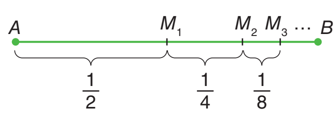
Soma dos infinitos termos de uma PG

O segmento de reta $\overline{AB}$, representado a seguir, tem 1 unidade de comprimento, e os infinitos pontos $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, \ldots$ são tais que:

- M_1 é o ponto médio de $\overline{AB}$
- M_2 é o ponto médio de $\overline{M_1B}$
- M_3 é o ponto médio de $\overline{M_2B}$

...

- M_{n+1} é o ponto médio de $\overline{M_nB}$



A sequência decrescente infinita formada pelas medidas dos segmentos $\overline{AM_1}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_2M_3}, \ldots$ é a progressão geométrica $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.

Note que:

- somando as medidas dos três primeiros segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$ e $\overline{M_2M_3}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

- somando as medidas dos quatro primeiros segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$ e $\overline{M_3M_4}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

- somando as medidas dos cinco primeiros segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_4}$, e $\overline{M_4M_5}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875$$

E assim, sucessivamente: somando uma quantidade cada vez maior de parcelas AM_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., nos aproximaremos "tanto quanto quisermos" da medida 1 do segmento $\overline{AB}$. Por isso dizemos que o limite da soma dos infinitos termos da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ é 1.

Indicando esse limite pelo símbolo S_∞, temos $S_\infty = 1$. Para abreviar, chamaremos esse limite simplesmente de **soma dos infinitos termos** da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$ e escrevemos:

$$S_\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ... = 1$$

Generalizando esse procedimento, obtemos o teorema:

> A soma S_∞ dos infinitos termos de uma PG $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, é dada por:
>
> $$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Demonstração

Consideremos a PG infinita $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão q, com $-1 < q < 1$. Admitindo que, sob essa condição, existe a soma S_∞ dos infinitos termos da PG, temos:

$$S_\infty = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... \qquad \text{(I)}$$

Multiplicando por q ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$qS_\infty = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 + ... \qquad \text{(II)}$$

Subtraímos, membro a membro, as igualdades (I) e (II):

$$S_\infty - qS_\infty = a_1$$

Fatoramos o primeiro membro e concluímos:

$$S_\infty(1 - q) = a_1 \Rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Nota:

Demonstra-se que existe soma dos infinitos termos de uma PG de razão q se, e somente se, for satisfeita a condição $-1 < q < 1$, fato que foi admitido nessa demonstração. Caso a condição $-1 < q < 1$ não seja satisfeita, não será possível aplicar os procedimentos usados nessa demonstração, pois estaríamos admitindo a existência da soma S_∞, o que é falso.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

33 Calcular a soma dos infinitos termos da PG $\left(7, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, ...\right)$.

Resolução

Como a razão da PG é $q = \frac{1}{3}$, a condição $-1 < q < 1$ é obedecida. Logo, existe a soma S_∞ dos infinitos termos da PG, que é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{7}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{2}{3}} = \frac{21}{2}$$

34 Determinar a geratriz da dízima periódica $D = 5{,}4444...$

Resolução

$$D = 5 + \underbrace{0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + 0{,}0004 + ...}_{\text{PG infinita de razão 0,1}}$$

$$\therefore D = 5 + \frac{0{,}4}{1 - 0{,}1}$$

$$\therefore D = 5 + \frac{4}{9}$$

$$\therefore D = \frac{49}{9}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

104 Calcule a soma dos infinitos termos das progressões geométricas a seguir.

a) (63, 21, 7, ...)

b) (40, -20, 10, -5, ...)

c) (0,4; 0,04; 0,004; ...)

105 Considere a PG oscilante, (a_n), com $a_1 = 3$ e $a_5 = \frac{16}{27}$.

Calcule a soma dos infinitos termos dessa PG.

106 Calcule a fração geratriz de cada uma das dízimas periódicas:

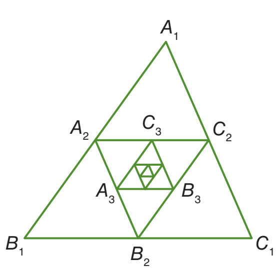
a) 5,2222...

b) 4,53333...

107 A soma dos infinitos termos da sequência $\left(x, \frac{2x}{5}, \frac{4x}{25}, ...\right)$ é $\frac{25}{3}$. Determine o número real x.

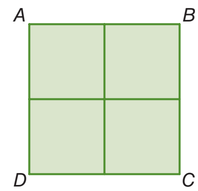
108 Um motorista de caminhão avista repentinamente uma grande pedra no meio de uma estrada e aciona os freios a 100 m de distância da pedra. Após a freada, o veículo percorre 20 m no primeiro segundo e, por mais alguns instantes, percorre em cada segundo $\frac{1}{4}$ da distância percorrida no segundo anterior. O caminhão conseguirá parar antes ou se chocará contra a pedra? Justifique a sua resposta.

109 Considere a sequência de infinitos triângulos $(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, A_4B_4C_4, ...)$ e que os vértices de cada triângulo, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo anterior, conforme mostra a figura. Sendo 20 cm o perímetro do triângulo $A_1B_1C_1$, calcule a soma dos perímetros desses infinitos triângulos.

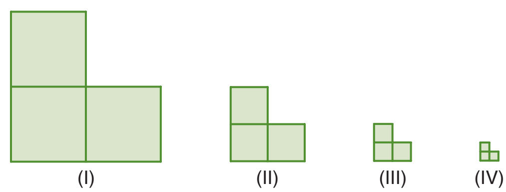


(*Dica*: Lembre-se de que cada base média de um triângulo é paralela a um dos lados e mede metade desse lado.)

110 Um quadrado $ABCD$ é dividido em quatro quadradinhos por dois segmentos de reta que unem os pontos médios dos lados de $ABCD$, conforme mostra a figura.



Retirando o quadradinho superior direito (de vértice B), obtemos a figura I abaixo. Repetindo esse procedimento no quadradinho retirado, obtemos a figura II e assim sucessivamente. Repetindo o procedimento em cada quadradinho retirado, obtemos uma sequência de infinitas figuras semelhantes a I.



a) Prove que a soma das áreas dessas infinitas figuras é igual à área do quadrado $ABCD$.

b) Prove que a soma dos perímetros dessas infinitas figuras é o dobro do perímetro do quadrado $ABCD$.

111 Um barco da guarda costeira persegue um barco de contrabandistas que está a 10 km de distância. Que distância o barco da guarda costeira deverá percorrer para alcançar os contrabandistas se sua velocidade é o dobro da velocidade do barco dos criminosos, e os dois barcos navegam em linha reta? (Justifique sua resposta de dois modos diferentes, sendo um deles pela fórmula da soma dos termos de uma PG infinita.)

Resolva os exercícios complementares 83 a 88, 119 e 120.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 (UFRN) Em uma calculadora, a tecla T transforma o número x (não nulo), que está no visor, em $\frac{1}{x}$, e a tecla V duplica o número que se encontra no visor. Se o número 2 estiver no visor e forem digitadas, alternadamente, as teclas T e V, iniciando-se por T, num total de 1.999 digitações, será obtido um número igual a:

a) $2^{1.999}$ b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{2^{1.999}}$

2 (UEL-PR) Tome um quadrado de lado 20 cm (figura 1) e retire sua metade (figura 2). Retire depois um terço do que restou (figura 3). Continue o mesmo procedimento, retirando um quarto do que restou, depois um quinto do novo resto e assim por diante.

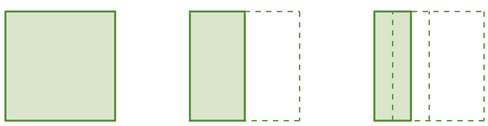


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Desse modo, qual será a área da figura 100?

a) 0 cm² c) 4 cm² e) 40 cm²
b) 2 cm² d) 10 cm²

3 Considere a função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{5}, \text{ se } x \text{ é múltiplo de 5} \\ x + 1, \text{ se } x \text{ não é múltiplo de 5} \end{cases}, \text{ e a}$$

sequência (a_n), com $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$ para todo número natural não nulo n. Determine o 123º termo dessa sequência.

4 A partir de um ponto P_1 de uma circunferência, percorre-se no sentido horário um arco de medida α, com $0° < \alpha < 360°$, até um ponto P_2. A partir de P_2, percorre-se no sentido horário um arco de medida α até um ponto P_3 e assim por diante, repete-se esse procedimento para cada ponto P_i até se obter o ponto P_n coincidindo com P_1.

a) Calcule o valor de n para $\alpha = 30°$.
b) Calcule o valor de n em função da medida α.

5 (OBM) O primeiro número de uma sequência é 7. O próximo é obtido da seguinte maneira: calculamos o quadrado do número anterior $7^2 = 49$ e a seguir efetuamos a soma de seus algarismos e adicionamos 1, isto é, o segundo número é $4 + 9 + 1 = 14$. Repetimos este processo, obtendo $14^2 = 196$ e o terceiro número da sequência é $1 + 9 + 6 + 1 = 17$ e assim sucessivamente. Qual o 2.002º elemento desta sequência?

6 Em uma sequência de n termos, os termos a_i e a_j são equidistantes dos extremos. Então:

a) $i + j = n + 1$
b) $i + j = n$
c) $i + j = n - 1$
d) $i + j = 2n - 1$
e) $i + j = 2n + 1$

7 Em uma sequência de 20 termos, os termos a_k e a_{k+7} são equidistantes dos extremos. Determine k.

8 Calcule a razão de cada uma das progressões aritméticas apresentadas a seguir.

a) (a_n) tal que $a_9 = 6$ e $a_{10} = 15$
b) (b_n) tal que $b_k = 8$ e $b_{k+1} = 5$
c) (c_n) tal que $c_1 = \dfrac{k}{k-1}$ e $c_2 = \dfrac{2k^2}{k^2 - 1}$

9 Na PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $r = \dfrac{5}{2 - \sqrt{3}}$, temos $a_9 = 5\sqrt{3} - 1$. Determine o termo a_8.

10 Verifique se é PA a sequência (a_n) tal que $a_n = n^2 + 1$.

11 Em uma sequência (a_n), temos $a_n = \dfrac{2n + 7}{3}$ para qualquer número natural não nulo n. Essa sequência é uma PA? Justifique.

12 Classifique como crescente, decrescente ou constante cada uma das progressões aritméticas a seguir.

a) $(1 - k^2, 2, k^2 + 3, ...)$, sendo k um número real.
b) $\left(h + 1, \dfrac{h^2 - 1}{h - 1}, \dfrac{h^2 + h}{h}, ...\right)$, sendo h um número real não nulo e diferente de 1.
c) $(5 + a^2, 5, 5 - a^2)$, sendo a um número real não nulo.

13 Em uma PA de três termos, a soma do primeiro com o terceiro termo é 10 e o produto do segundo pelo terceiro termo é -40.
Determine essa PA.

14 Em uma PA de quatro termos, a soma do primeiro com o quarto termo é 10 e o produto dos dois primeiros termos é -3. Determine essa PA.

15 (Ufam) Na PA $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{4}, 2, ...\right)$, o n-ésimo termo é igual a:

a) $\dfrac{n-5}{4}$ b) $\dfrac{n+5}{4}$ c) $\dfrac{n+3}{4}$ d) $\dfrac{5n+1}{4}$ e) $\dfrac{3n+1}{4}$

16 (UFSCar-SP) Uma função f é definida recursivamente como $f(n+1) = \dfrac{5f(n) + 2}{5}$. Sendo $f(1) = 5$, o valor de $f(101)$ é:

a) 45 b) 50 c) 55 d) 60 e) 65

17 Qual é o número de termos da PA $(-10, -7, -4, ..., 47)$?

18 Em uma PA de razão $\dfrac{2}{3}$, o primeiro termo é 2 e o último é $\dfrac{164}{3}$. Quantos termos tem essa PA?

19 Existem infinitos números inteiros que resultam da soma de três números inteiros consecutivos; por exemplo, o número 99 é resultado da expressão $32 + 33 + 34$. Considere todos os números inteiros n, com $3 \leqslant n < 1.000$, que resultam da soma de três números inteiros consecutivos. Quantos são esses números?

a) 333 b) 334 c) 335 d) 336 e) 337

20 Em uma PA de 20 termos, o primeiro termo é 5 e o último é 8. Qual é a razão dessa PA?

21 Inserir 5 meios aritméticos entre 1 e 20, nessa ordem.

22 Obtenha o primeiro termo da PA (a_n) em que $a_5 + a_7 = -20$ e $a_3 - a_6 = 12$.

23 Determine o primeiro termo da PA (a_n) em que $a_{10} = -51$ e $a_{18} = -91$.

24 Em uma PA (a_n) temos $a_7 = 2k - 6$ e $a_{18} = k - 1$. Determine a razão dessa PA, em função de k.

25 Na PA (a_n), com $a_1 = 37$ e razão $r = 2$, determine o maior valor possível a_k que seja múltiplo de k.

26 O termo médio da PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, com n ímpar, é a_k. Então:

a) $k = \dfrac{n+1}{2}$ c) $k = \dfrac{n+2}{2}$ e) $k = \dfrac{n}{2}$

b) $k = \dfrac{n-1}{2}$ d) $k = \dfrac{n-2}{2}$

27 Em uma PA finita, o termo médio é o quádruplo do primeiro termo. Sabendo que o último termo dessa PA é 42, determine o primeiro termo.

28 Determine x de modo que a sequência $(x - 1, x^2 - 4, 3x - 1)$ seja uma PA crescente.

29 Mostre que a sequência $(2x + 5, 3x - 1, 4x - 7)$ é PA para qualquer valor real de x.

30 Mostre que não existe valor real de x tal que a sequência $(3x + 6, 2x + 1, x + 4)$ seja PA.

31 Qual é a soma dos 20 primeiros termos da PA $\left(2, \dfrac{11}{4}, \dfrac{7}{2}, ...\right)$?

32 O termo geral de uma sequência é $a_n = 2n + 5, \forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Calcule a soma dos 18 primeiros termos dessa sequência.

33 Dada a PA (12, 19, 26, ...), calcule a soma do 30º até o 42º termo.

34 Calcule a soma dos múltiplos de 13 compreendidos entre 100 e 1.000.

35 Calcule a soma dos múltiplos positivos de 2 ou 3, menores que 300.

36 Determine o número natural n tal que $\sum_{j=1}^{n} (2j + 1) = 143$.

37 Calcule a soma dos n primeiros números naturais pares.

38 Calcule a soma dos n primeiros números naturais pares diferentes de zero.

39 (FGV) A soma de todos os inteiros entre 50 e 350 que possuem o algarismo das unidades igual a 1 é:

a) 4.566 c) 5.208 e) 5.880

b) 4.877 d) 5.539

40 (UFC-CE) A soma dos 15 primeiros termos de uma progressão aritmética é 150. O 8º termo dessa PA é:

a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

41 (UEG) Um ângulo de um triângulo equilátero foi dividido em 10 ângulos cujas medidas em grau formam uma sequência que está em progressão aritmética. A soma dos dois termos extremos dessa progressão é:

a) 15 graus. c) 14 graus.

b) 10 graus. d) 12 graus.

42 (Fuvest-SP) Em uma progressão aritmética $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = bn^2 + n$, sendo b um número real. Sabendo-se que $a_3 = 7$, determine:

a) o valor de b e a razão da progressão aritmética.

b) o 20º termo da progressão.

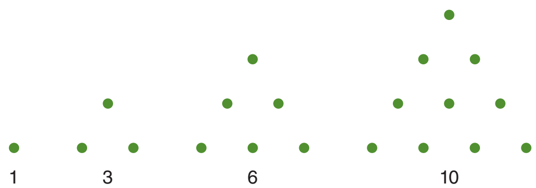
c) a soma dos 20 primeiros termos da progressão.

43 Uma progressão aritmética infinita de razão 3 tem primeiro termo igual a 5.

a) Qual é o valor de n para que a soma dos n primeiros termos dessa PA seja igual a 185?

b) Quais os possíveis valores de n para que a soma dos n primeiros termos dessa PA seja maior que 98?

44 (Unifesp) "Números triangulares" são números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos equiláteros. É conveniente definir 1 como o primeiro número triangular. Apresentamos a seguir os primeiros números triangulares.



Se T_n representa o n-ésimo número triangular, então $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, e assim por diante. Dado que T_n satisfaz a relação $T_n = T_{n-1} + n$, para $n = 2, 3, 4, ...$, pode-se deduzir que T_{100} é igual a:

a) 5.050 c) 2.187 e) 729

b) 4.950 d) 1.458

45 Calcule a razão de cada uma das progressões geométricas apresentadas a seguir.

a) (a_n) tal que $a_6 = \dfrac{8}{3}$ e $a_7 = 4$

b) (b_n) tal que $b_k = 3$ e $b_{k+1} = \dfrac{2}{5}$

c) (c_n) tal que $c_1 = k - 1$ e $c_2 = k^2 - 1$

46 Na PG $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $q = k + 1$, temos $a_{15} = k^3 + 1$. Determine o termo a_{14}.

47 (Fuvest-SP) A sequência a_n é uma PA estritamente crescente, de termos positivos. Então, a sequência $b_n = 3^{a_n}$, $n > 0$, é uma:

a) PG crescente.

b) PA crescente.

c) PG decrescente.

d) PA decrescente.

e) sequência que não é uma PA e não é uma PG.

48 Verifique se é PG a sequência (a_n) tal que $a_n = 5n$.

49 Considere uma sequência (a_n) tal que $a_n = \dfrac{2^{n+3}}{27 \cdot 3^n}$ para qualquer número natural não nulo n. Essa sequência é PG? Justifique.

50 Classifique como crescente, decrescente, constante ou oscilante cada uma das progressões geométricas a seguir.

a) $\left(\frac{2}{k}, \frac{2}{3}, \frac{2k}{9}, ...\right)$, sendo k um número real maior que 3.

b) $(a, a^2, a^3, a^4, a^5, ...)$ sendo a um número real maior que 1.

c) $\left(t - 3, \frac{t^2 - 9}{t + 3}, \frac{t^3 - 3t^2}{t^2}, ...\right)$, sendo t um número real não nulo e diferente de -3.

d) $(5a^2, 5a^5, 5a^8, 5a^{11}, ...)$, sendo a um número real negativo.

51 Em uma PG decrescente de três termos, a soma do primeiro com o segundo termo é 15 e o produto do primeiro pelo terceiro termo é 9. Determine essa PG.

52 Em uma PG crescente de quatro termos, o produto dos quatro termos é 256 e a soma do segundo com o terceiro termo é 10. Determine essa PG.

53 Na PG $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $q = k + 2$, temos $a_{10} = (k + 2)^7$, sendo k um número real. Determine a_1, em função de k.

54 Determine o número de termos da PG $\left(\frac{1}{2^{15}}, \frac{1}{2^{14}}, \frac{1}{2^{13}}, ..., 256\right)$.

55 Em uma PG de razão $\frac{1}{5}$, o primeiro termo é 625 e o último é $\frac{1}{5^{20}}$. Quantos termos tem essa PG?

56 Em uma PG de 20 termos, o primeiro termo é 512 e o último é $\frac{1}{1.024}$. Qual é a razão dessa PG?

57 Inserir 5 meios geométricos entre 10 e 20, nessa ordem.

58 Obtenha o primeiro termo da PG crescente (a_n) em que $a_2 \cdot a_4 = 3$ e $a_5 \cdot a_6 = 96$.

59 Determine o primeiro termo da PG (a_n) em que $a_6 = 2$ e $a_{11} = 4$.

60 Em uma PG (a_n) temos $a_5 = 3k$ e $a_{12} = k^2$. Determine a razão dessa PG, em função de k.

61 (UFPB) Considere a PA (2, 5, 8, 11, ...) e a PG (3, 6, 12, 24, ...). Na sequência (2, 3, 5, 6, 8, 12, 11, 24, 14, 48, ...) onde os termos da PA ocupam as posições ímpares e os da PG, as posições pares, o seu 25º termo é:
a) 602 b) 38 c) 224 d) 49 e) 25

62 (UFSC) Sejam (a_n) uma progressão geométrica e (b_n) uma progressão aritmética cuja razão é $\frac{3}{10}$ da razão da progressão geométrica (a_n). Sabendo que $a_1 = b_1 = 2$ e que $a_2 = b_7$ calcule a soma $b_1 + b_2 + ... + b_7$.

63 A representação gráfica da PG (a_n) está contida no gráfico da função $y = 4 \cdot 3^x$. Qual é o menor valor possível de n tal que $a_n > 36$?

64 Em uma PG finita e crescente, o termo médio é a raiz quadrada do segundo termo. Determine o penúltimo termo dessa PG.

65 Determine x de modo que a sequência $(x - 1, x + 1, 3x - 1)$ seja uma PG crescente.

66 Mostre que a sequência $\left(x - 2, 5, \frac{25}{x - 2}\right)$ é PG para qualquer valor real de x, com $x \neq 2$.

67 Mostre que não existe valor real de x tal que a sequência $(-4, x - 1, x + 1)$ seja PG.

68 (UFF-RJ) São dadas duas progressões: uma aritmética (PA) e outra geométrica (PG). Sabe-se que:
- a razão da PG é 2;
- em ambas o primeiro termo é igual a 1;
- a soma dos termos da PA é igual à soma dos termos da PG;
- ambas têm 4 termos.

Pode-se afirmar que a razão da PA é:
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{9}{6}$ e) $\frac{11}{6}$

69 (UFPB) Seja (x, y, z) uma progressão geométrica de razão q, com $x \neq y$ e $x \neq 0$. Se (x, 2y, 3z) é uma progressão aritmética, então q é igual a:
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 2 e) 4

70 (Fuvest-SP) Sejam a e b números reais tais que:
I. a, b e $a + b$ formam, nessa ordem, uma PA;
II. 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG.
Então o valor de a é:
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

71 (UFMA) O número 38 é dividido em três parcelas positivas, formando uma progressão geométrica de tal modo que, se for adicionada uma unidade à segunda parcela, obtém-se uma progressão aritmética. Qual é a maior das parcelas?
a) 10 b) 15 c) 18 d) 20 e) 22

72 (Mackenzie-SP) Em uma sequência de quatro números, o primeiro é igual ao último; os três primeiros, em progressão geométrica, têm soma 6, e os três últimos estão em progressão aritmética. Um possível valor da soma dos quatro termos dessa sequência é:
a) 10 b) 18 c) 12 d) 14 e) 20

73 A soma dos 15 primeiros termos da PG $(3^1, 3^2, 3^3, ...)$ é:
a) $\frac{3 - 3^{16}}{2}$ b) $\frac{3^{15}}{2}$ c) $\frac{3^{16} - 3}{2}$ d) $3^{16} - 3$ e) $\frac{3^{16} - 1}{2}$

74 Calcule a soma dos 18 primeiros termos da PG $(3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, 12, ...)$.

75 Calcule o resultado de cada uma das expressões abaixo. (Deixe as potências indicadas.)
a) $\sum_{j=1}^{40} 5^j$ b) $\sum_{j=1}^{n} 2 \cdot 3^j$

76 Determine n, com $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $\sum_{j=1}^{n} 2^j = 4.094$.

77 Dado que $2^{16} = 65.536$, calcule a soma $S = \sum_{j=1}^{15} (j + 2^j)$.

78 (UFC-CE) A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tem razão $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 1$. Determine o menor inteiro positivo n tal que S_n, a soma dos n primeiros termos da progressão, satisfaça a desigualdade $S_n > \frac{8.191}{4.096}$.

79 O termo geral de uma sequência é $a_n = 5^{n-10}$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. O produto dos 30 primeiros termos dessa sequência é:

a) 5^{165} **b)** 5^{110} **c)** 5^{235} **d)** 5^{205} **e)** 5^{180}

80 Determine o número de termos da PG $(7, 7^2, 7^3, ..., 7^n)$ sabendo que o produto de todos esses termos é 7^{630}.

81 Determine o produto dos n primeiros termos da PG (5, 25, 125, ...).

82 O produto dos n primeiros termos de uma PG (a_n) é $P_n = 3^{\frac{n^2+n}{2}}$. Determine:

a) a_1

b) a razão da PG

c) a_4

d) o produto $a_3 a_4 a_5$

83 Calcule a soma dos infinitos termos de cada uma das progressões geométricas a seguir.

a) $\left(1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, ...\right)$

b) $\left(-4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, ...\right)$

c) (1; 0,2; 0,04; ...)

84 Calcule a fração geratriz de cada uma das dízimas periódicas:

a) 7,48484848...

b) 2,5466666...

85 Sejam: O_1 o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com $AB = 8$ cm; O_2 o ponto médio do segmento $\overline{O_1B}$; O_3 o ponto médio do segmento $\overline{O_2B}$; O_4 o ponto médio do segmento $\overline{O_3B}$; e assim por diante, O_{n+1} o ponto médio do segmento $\overline{O_nB}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. A soma dos perímetros dos infinitos círculos de diâmetros $\overline{AB}, \overline{O_1B}, \overline{O_2B}, \overline{O_3B}, ..., \overline{O_nB}, ...$ é:

a) 4π cm **b)** 8π cm **c)** 16π cm **d)** 20π cm **e)** 24π cm

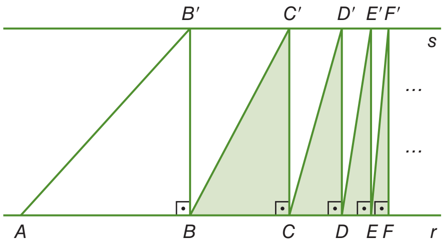
86 Calcule o produto dos infinitos termos da sequência determinada pela lei de formação:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt[3]{2^5} \\ a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}}, \forall n, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

87 (FGV) Um círculo é inscrito em um quadrado de lado m. Em seguida, um novo quadrado é inscrito nesse círculo, e um novo círculo é inscrito nesse quadrado, e assim sucessivamente. A soma das áreas dos infinitos círculos descritos nesse processo é igual a:

a) $\frac{\pi m^2}{2}$ **b)** $\frac{3\pi m^2}{8}$ **c)** $\frac{\pi m^2}{3}$ **d)** $\frac{\pi m^2}{4}$ **e)** $\frac{\pi m^2}{8}$

88 (UFSM-RS) A figura representa uma sequência infinita de triângulos retângulos com um lado sobre a reta r e com o vértice oposto a esse lado sobre a reta s, paralela a r.



Sabendo que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{DE} = ... = 2$, pode-se afirmar que a soma das áreas de todos os triângulos coloridos, BCC', CDD', DEE', ..., é igual:

a) à área do triângulo ABB'.

b) ao dobro da área do triângulo ABB'.

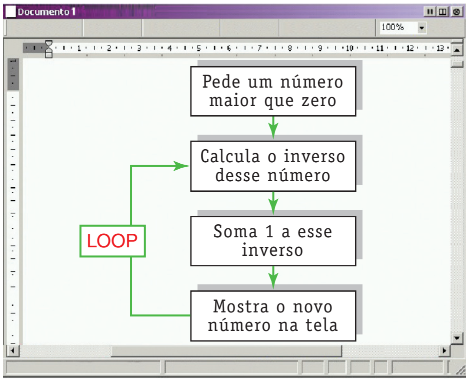
c) ao triplo da área do triângulo ABB'.

d) à metade da área do triângulo ABB'.

e) a um terço da área do triângulo ABB'.

Exercícios contextualizados

89 Um computador executa um pequeno programa de cálculo seguindo o fluxograma abaixo.



Em computação, a palavra *loop* significa "operações realizadas repetidas vezes".

Qual é o 5º número que aparecerá na tela, considerando que o primeiro número seja x?

90 (UFJF-MG) José decidiu nadar, regularmente, de quatro em quatro dias. Começou a fazê-lo em um sábado; nadou pela segunda vez na quarta-feira seguinte e assim por diante.
Nesse caso, na centésima vez em que José for nadar, será:

a) terça-feira. **b)** quarta-feira. **c)** quinta-feira. **d)** sexta-feira.

91 Uma escadaria de 280 degraus une o piso térreo ao último piso de um prédio de apartamentos. Cada degrau tem 10 cm de altura e o piso térreo está a 48 cm de altura em relação ao nível da rua.

a) Escreva a sequência crescente formada pelas alturas, em relação ao nível da rua, do piso térreo e dos patamares dos degraus.

b) Dê a lei de formação dessa sequência.

92 Uma pessoa aplicou R$ 10.000,00 em um fundo de investimento, em regime de juro composto, durante 20 meses. O fundo rendeu 2% ao mês.

a) Escreva a sequência crescente formada pelo capital inicial e pelos montantes acumulados nesses meses.

b) Dê a lei de formação dessa sequência.

93 Um pedreiro realizou uma tarefa em 4 dias, totalizando t horas de trabalho. No primeiro dia, o pedreiro trabalhou metade do total t de horas mais meia hora. Em cada um dos dias seguintes, ele trabalhou metade do tempo que faltava para completar a tarefa mais meia hora. E assim completou a tarefa no quarto dia.

a) Dê a sequência formada pelas horas de trabalho nesses quatro dias.

b) Qual foi o total de horas trabalhadas?

94 Em um jogo entre duas pessoas A e B, os participantes tiram, alternadamente, 1, 2, 3 ou 4 bolinhas de uma caixa que, inicialmente, tem exatamente 100 bolinhas. Ganha o jogador que tirar a última bolinha da caixa. O jogador A começa o jogo, tirando 2 bolinhas da caixa. O jogador B adota a seguinte estratégia: tira $5 - n$ bolinhas da caixa, sendo n o número de bolinhas tiradas por A na jogada anterior (cada jogada é uma retirada de uma ou mais bolinhas da caixa por um dos participantes). Se nenhum dos jogadores cometer engano em sua jogada:

a) Quem vencerá o jogo? Justifique a sua resposta.

b) Quantas jogadas vão compor esse jogo?

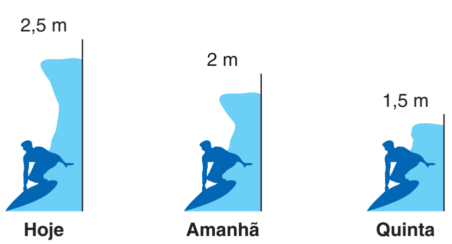
95 (Vunesp) Em 05 de junho de 2008, foi inaugurada uma pizzaria que só abre aos sábados. No dia da inauguração, a pizzaria recebeu 40 fregueses. A partir daí, o número de fregueses que passaram a frequentar a pizzaria cresceu em progressão aritmética de razão 6, até que atingiu a cota máxima de 136 pessoas, a qual tem se mantido. O número de sábados que se passaram, excluindo-se o sábado de inauguração, para que a cota máxima de fregueses fosse atingida pela primeira vez, foi:

a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) 26

96 (Ufal) Um atleta fez vários lançamentos de dardo e um fato interessante foi que a cada vez a distância alcançada pelo dardo aumentou 2 cm. Se ele fez 30 lançamentos e o alcance do último deles foi 15 m, quantos metros foram alcançados no terceiro lançamento?

a) 14,40 c) 14,46 e) 14,54
b) 14,44 d) 14,52

97 (Unirio-RJ) A figura abaixo foi publicada em jornal de grande circulação, terça-feira, 25 de setembro. Trata da previsão da altura das ondas no Rio de Janeiro para os três próximos dias, que representa uma progressão aritmética decrescente.



Fonte: http://www.oglobo.com

Analisando esta figura, um surfista ficou imaginando a possibilidade de ocorrência de ondas gigantescas. Se isso fosse possível, considerando esta mesma progressão, qual teria sido a altura das ondas no dia 01 de setembro do mesmo ano?

a) 14,5 m c) 15,5 m e) 16,5 m
b) 15,0 m d) 16,0 m

98 (UFG-GO) Uma indústria consome mensalmente 150 m^3 de um certo reagente. Uma unidade dessa indústria passou a produzir esse reagente e, no primeiro mês de produção, produziu 10% do seu consumo mensal. Se a unidade aumenta a produção do reagente em 3 m^3 por mês, quantos meses serão necessários, a partir do início da produção, para que a unidade produza, em um único mês, 70% do volume mensal desse reagente consumido pela indústria?

a) 21 b) 24 c) 28 d) 31 e) 36

99 (UFSCar-SP) Um determinado corpo celeste é visível da Terra a olho nu de 63 em 63 anos, tendo sido visto pela última vez no ano de 1968. De acordo com o calendário atualmente em uso, o primeiro ano da era Cristã em que esse corpo celeste esteve visível a olho nu da Terra foi o ano:

a) 15 b) 19 c) 23 d) 27 e) 31

100 (Unifal-MG) Uma empresa de entrega de mercadorias possui várias filiais em uma cidade. A fim de maximizar a distribuição, a empresa dividiu a cidade em 305 setores, designando um número natural a cada setor. A tabela abaixo mostra parte do quadro de distribuição de uma das filiais desta empresa, sendo que os demais setores seguem a forma de distribuição apresentada.

Dias da semana	Setor				
Segunda	1		7		13
Terça		6		12	
Quarta	2		8		14
Quinta		5		11	
Sexta	3		9		15
Sábado		4		10	

O dia da semana em que essa filial atenderá o setor 275 é:

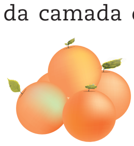
a) sábado. c) segunda. e) quarta.
b) quinta d) sexta.

101 (PUC-PR) Há dois tipos de anos bissextos: os que são múltiplos de 4, mas não de 100, e os que são múltiplos de 400. O número de anos bissextos que o século XXI irá ter é:

a) 23 b) 24 c) 25 d) 26 e) 27

102 Em uma barraca de frutas, um feirante empilhou as laranjas formando uma pirâmide de base quadrada. A base era formada por 10 fileiras de 10 laranjas cada uma, e cada laranja tangenciava as vizinhas. Acima da base vinha a segunda camada de laranjas, e cada uma delas tangenciava quatro laranjas da camada inferior, conforme a figura. O mesmo ocorria nas demais camadas, até a última, que era formada por uma única laranja. Considerando a base como 1ª camada, o número de laranjas da camada de número n dessa pilha era:

a) n^2 d) $(9 - n)^2$
b) $(10 - n)^2$ e) $(11 - n)^2$
c) $(9 + n)^2$

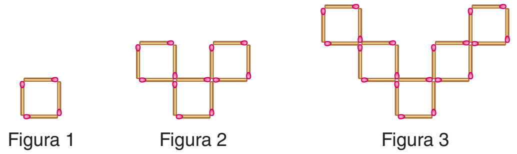


103 Uma pedra caiu do alto de um edifício. No primeiro segundo da queda, a pedra percorreu 10 m e, em cada um dos segundos restantes, até atingir o solo, ela percorreu 10 m a mais que no segundo anterior. Sabendo que o tempo total de queda foi de n segundos, calcule, em função de n:

a) a altura do edifício.

b) a velocidade, em metro por segundo, com que a pedra atingiu o solo.

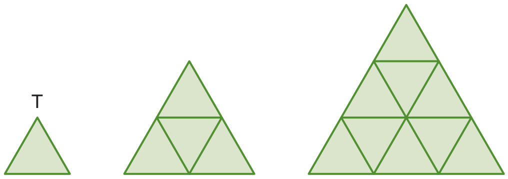
104 (Unicamp-SP) Considere a sucessão de figuras apresentada a seguir. Observe que cada figura é formada por um conjunto de palitos de fósforo.



a) Suponha que essas figuras representam os três primeiros termos de uma sucessão de figuras que seguem a mesma lei de formação. Suponha também que F_1, F_2 e F_3 indiquem, respectivamente, o número de palitos usados para produzir as figuras 1, 2, 3, e que o número de fósforos utilizados para formar a figura n seja F_n. Calcule F_{10} e escreva a expressão geral de F_n.

b) Determine o número de fósforos necessários para que seja possível exibir concomitantemente todas as primeiras 50 figuras.

105 (OBM) O triângulo equilátero T a seguir tem lado 1. Juntando triângulos congruentes a esse, podemos formar outros triângulos equiláteros maiores, conforme indicado no desenho abaixo.



Qual é a medida do lado do triângulo equilátero formado por 49 dos triângulos T.

a) 7

b) 49

c) 13

d) 21

e) É impossível formar um triângulo equilátero com esse número de triângulos T.

106 (Uespi) Do dia primeiro ao dia vinte e um de junho do ano passado, o número de pessoas com gripe socorridas num posto médico aumentou segundo uma progressão aritmética. Só nos 10 primeiros dias do mês, 290 pessoas gripadas foram atendidas e, no dia vinte e um, o número de atendimentos diário alcançou seu valor máximo de 91 pacientes gripados. Entretanto, no dia vinte e dois, o número de atendimentos diminuiu de 10 pacientes gripados em relação ao dia anterior e, dessa forma, prosseguiu a diminuição diária dos atendimentos de pacientes gripados, até o final de junho. Nessas condições, é correto afirmar que o total de pacientes com gripe que foram atendidos nesse posto médico, durante todo o mês de junho, foi de:

a) 1.220 **b)** 1.440 **c)** 1.520 **d)** 1.560 **e)** 1.660

107 No dia 1º de janeiro, um site de compras foi acessado por 1.800 internautas. A cada um dos próximos dias de janeiro houve um aumento de 100 unidades no número de acessos.

a) Em que dia de janeiro houve exatamente 3.700 acessos a esse site?

b) Quantos acessos houve no mês de janeiro até o dia mencionado no item **a**?

108 (UFS-SE) Dispunha-se de 280 fichas para distribuir a três pessoas, X, Y e Z. O quadro abaixo mostra as quantidades diárias de fichas dadas a cada pessoa, obedecendo a uma determinada sequência.

	X	Y	Z
1º dia	1	2	3
2º dia	4	5	6
3º dia	7	8	9
...	...	...	...

Utilize as informações na página anterior para analisar cada uma das afirmativas seguintes.

a) Nas condições acima, no último dia, terminada a distribuição, sobraram 4 fichas.

b) Nas condições acima, a última entrega de fichas ocorreu no sétimo dia.

c) O total de fichas recebidas por Z foi 84.

d) No quinto dia, X recebeu 14 fichas.

e) Ao terminar a distribuição do sexto dia, Y havia recebido um total de 57 fichas.

[*Nota*: Analisar as afirmativas significa classificá-las como verdadeira (V) ou falsa (F).]

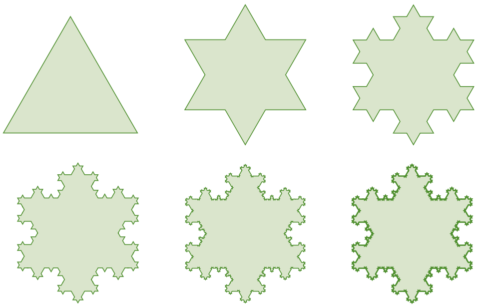
109 (Unifesp) Uma pessoa resolveu fazer sua caminhada matinal passando a percorrer, a cada dia, 100 metros mais do que no dia anterior. Ao completar o 21º dia de caminhada, observou ter percorrido, nesse dia, 6.000 metros. A distância total percorrida nos 21 dias foi de:

a) 125.500 m **b)** 105.000 m **c)** 90.000 m **d)** 87.500 m **e)** 80.000 m

110 (Uespi) Certo dia um botânico descobriu que 8 km² dos 472.392 km² de uma reserva florestal haviam sido infestados por um fungo que danificava as folhas das árvores. Sabe-se que o estudo sobre a proliferação desse tipo de fungo indica que, a cada mês, ele triplica sua área de contaminação. Nessas condições, caso não seja tomada nenhuma providência para debelar a proliferação desse fungo, em quantos meses, a partir do instante da descoberta da contaminação, somente $\frac{2}{3}$ da área dessa reserva florestal ainda não estará infestada?

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 11 **e)** 12

111 O termo "fractal" foi criado em 1975 por Benoit Mandelbrot, pesquisador da IBM e autor de trabalhos pioneiros sobre fractais. A característica principal de um fractal é a repetição de padrões. Por exemplo, partindo de um triângulo equilátero, dividimos cada lado em três partes iguais e desenhamos, externamente ao triângulo original, um novo triângulo equilátero em que um dos lados é o segmento central obtido dessa divisão; a seguir, apagamos o segmento central. Repetimos esse procedimento para cada lado do polígono obtido com o primeiro procedimento, e assim por diante. Consideremos todos os infinitos polígonos obtidos dessa maneira, tal que a sequência formada pelos números de lados seja crescente.



O número de lados do 6º polígono dessa sequência é:

a) 192 c) 1.264 e) 3.072
b) 768 d) 2.288

112 (UEL-PR) A figura construída segundo a sequência a seguir é denominada Esponja de Sierpinski ou Esponja de Menger. Representa um fractal gerado a partir de um cubo. Partindo-se do cubo inicial, obtemos outros cubos menores, com arestas iguais a $\frac{1}{3}$ da aresta deste. O cubo central e os cubos do centro de cada face são removidos. O procedimento se repete em cada um dos cubos menores restantes. O processo é iterado infinitas vezes, gerando a Esponja. Supondo que a medida da aresta do cubo inicial seja igual a 1 m, e considerando uma face do cubo original, qual é a área remanescente dessa face, em metro quadrado, na figura 30?

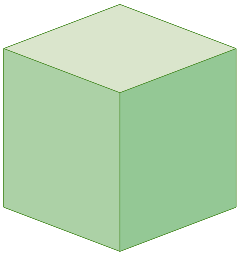


fig. 1

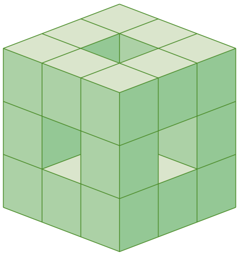


fig. 2

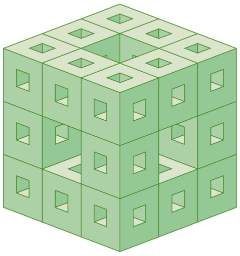


fig. 3

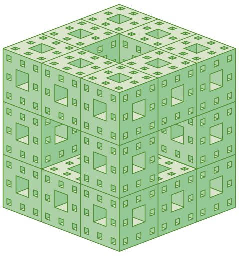


fig. 4

a) $\left(\frac{8}{9}\right)^{30}$ d) $\left(\frac{20}{27}\right)^{19}$

b) $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$ e) $\left(\frac{27}{20}\right)^{19}$

c) $\left(\frac{9}{8}\right)^{30}$

113 (Uenf-RJ) Numa reserva florestal foram computados 3.645 coelhos. Uma determinada infecção alastrou-se de modo que, ao final do primeiro dia, há cinco coelhos infectados e, a cada cinco dias, o número total de coelhos infectados triplica.

a) Determine a quantidade de coelhos infectados ao final do 21º dia.
b) Calcule o número mínimo de dias necessário para que toda a população de coelhos esteja infectada.

114 (Vunesp) "Devido ao aquecimento das águas, a ocorrência de furacões das categorias 4 e 5 — os mais intensos da escala Saffir-Simpson — dobrou nos últimos 35 anos". (*Veja*, 21 jun. 2006.)
Seja x o número de furacões dessas categorias ocorridos no período 1971-2005. Vamos supor que a quantidade de furacões a cada 35 anos continue dobrando em relação aos 35 anos anteriores, isto é, de 2006 a 2040 ocorrerão 2x furacões, de 2041 a 2075 ocorrerão 4x furacões, e assim por diante. Baseado nesta suposição, determine, em função de x, o número total de furacões que terão ocorrido no período de 1971 a 2320.

115 (UFPB) Hélio comprou, em uma loja, uma máquina de lavar roupas, no seguinte plano de pagamento: 10 parcelas, sendo a primeira de R$ 256,00 e o valor de cada parcela, a partir da segunda, correspondendo a 50% do valor da anterior. Hélio pagou pela máquina de lavar o valor total de:

a) R$ 511,75
b) R$ 511,50
c) R$ 511,00
d) R$ 510,50
e) R$ 510,00

116 (PUC-PR) O efeito em aumentar o volume da massa de pão por determinado fermento pode ser associado a uma sequência de unidades de tempo (minutos). Consideramos o efeito como a contribuição no instante de tempo.

Tempo (min)	Efeito na unidade de tempo
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125
6	0,015625
7	0,007813
...	...

Após 20 minutos sob atuação do fermento, qual é o volume máximo do pão?

a) 3 vezes o tamanho original
b) 4 vezes o tamanho original
c) 2 vezes o tamanho original
d) 1,8 vezes o tamanho original
e) 1,5 vezes o tamanho original

117 (UFPB) Um estudo, feito a partir do ano de 2001, mostrou que uma indústria produziu 74.400 unidades de um determinado produto, no período de janeiro de 2001 a dezembro de 2005, isto é, num período de 5 anos, e que sua produção dobra a cada ano. Com base nesse estudo, pode-se afirmar que a produção anual dessa indústria seria superior a 76.800 unidades, a partir do ano de:

a) 2006
b) 2007
c) 2015
d) 2023
e) 2031

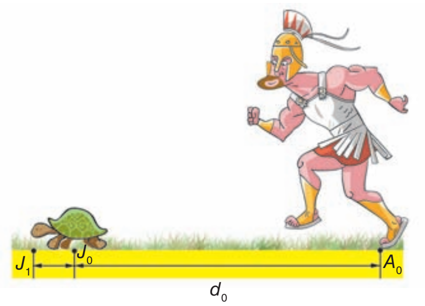
118 Digitando em uma calculadora um número y, depois a tecla $\boxed{y^x}$, a seguir um número x e, finalmente, a tecla $\boxed{=}$, obtemos como resultado o número y^x.
Um estudante necessita calcular o produto de todas as potências de base 2 e expoente natural n, com $1 \leqslant n \leqslant 20$, isto é, $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot ... \cdot 2^{20}$. Qual das alternativas a seguir apresenta uma sequência de teclas que devem ser acionadas na calculadora para se obter esse resultado?

a) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{6}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$
b) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{6}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$
c) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$
d) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$
e) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{8}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

119 (Ufes) O governo federal, ao efetuar a restituição de impostos, permite que os contribuintes consumam mais. O gasto de cada contribuinte torna-se receita para outros contribuintes, que, por sua vez, fazem novos gastos. Cada contribuinte poupa 10% de suas receitas, gastando todo o resto.
O valor global, em bilhões de reais, do consumo dos contribuintes a ser gerado por uma restituição de impostos de 40 bilhões de reais é:

a) 36
b) 40
c) 180
d) 360
e) 450

120 (UFRJ) Um dos paradoxos atribuídos ao filósofo grego Zenão (que viveu por volta de 450 a.C.) é o de Aquiles e a tartaruga. Zenão teria afirmado que, por mais rápido que fosse, Aquiles jamais alcançaria a tartaruga.



Para fixar as ideias, vamos dar uma formulação teórica e simplificada da questão. Admitiremos que Aquiles é representado por um ponto A e a tartaruga, por um ponto J, que se movem sobre a mesma reta e no mesmo sentido, com velocidades constantes, sendo a velocidade de Aquiles igual a dez vezes à da tartaruga.
Suponhamos ainda que, no instante inicial, a distância entre Aquiles e a tartaruga seja d_0 e que Aquiles leve um tempo t_0 para percorrê-la. O argumento de Zenão é o seguinte: quando Aquiles chega ao ponto J_0 em que estava a tartaruga no instante inicial, esta já se moveu para um ponto J_1; quando Aquiles chega a J_1, a tartaruga já se moveu para um ponto J_2, e assim sucessivamente, de forma que Aquiles e a tartaruga jamais estarão no mesmo ponto simultaneamente.
Com base nos dados acima, é verdadeira esta última afirmação? Justifique rigorosamente sua resposta.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Um vendedor gastou R$ 600,00 na compra de x unidades de certo produto e vendeu todas por R$ 4,00 cada uma. Sabendo que seu lucro foi uma quantia entre R$ 160,00 e R$ 220,00, pode-se concluir que:

a) $x \in]190, 205[$
b) $x \in [190, 205]$
c) $x = 150$
d) $x \neq 150$
e) para qualquer número natural não nulo menor que 150, o lucro foi uma quantia entre R$ 160,00 e R$ 220,00.

2 (UFMT) Num acidente no litoral brasileiro, o navio Virgínia II sofreu uma fissura no casco atingindo um dos tanques que continha óleo cru. Considere que a mancha provocada pelo vazamento tenha a forma de um disco circular de raio R e que o raio, em metro, cresce em função do tempo t, em minuto, obedecendo à relação $R(t) = 16t + 1$. Sendo A a área ocupada pela mancha após 5 minutos do início do vazamento, calcule A.

3 Na China está em vigor desde 1979 a política de um filho por casal, com o objetivo de reduzir a população. Sabendo que no ano 2000 o número de habitantes desse país era 1,2 bilhão e supondo que a população decresça à taxa de 0,5% por ano, pode-se afirmar, adotando a aproximação $(0{,}995)^{25} = 0{,}9$, que no ano de 2050 a população da China será:

a) $9{,}72 \cdot 10^8$
b) $9{,}72 \cdot 10^9$
c) $1{,}08 \cdot 10^9$
d) $1{,}08 \cdot 10^6$
e) $8{,}1 \cdot 10^9$

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots = 6 - 4x$, em que o primeiro membro é a soma das infinitas parcelas da forma $\frac{x^n}{2^{n-1}}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

$$\underbrace{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots}_{\text{soma } S_\infty \text{ de uma PG}} = 6 - 4x$$

Cálculo da soma S_∞:

$a_1 = x$

razão: $\frac{x}{2}$

$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$

$$S_\infty = \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{x}{\frac{2 - x}{2}} = \frac{2x}{2 - x}$$

Substituindo S_∞ na equação inicial:

$$\frac{2x}{2 - x} = 6 - 4x$$

$(2 - x)(6 - 4x) = 2x$

$12 - 8x - 6x + 4x^2 = 2x$

$4x^2 - 16x + 12 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x' = \frac{6}{2} = 3 \\ x'' = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Logo, $S = \{1, 3\}$.

ERRADO!

Comentário

O aluno se esqueceu de considerar a condição de existência da soma dos infinitos termos de uma PG.

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo

2

Trigonometria no triângulo retângulo

O cálculo de medidas de ângulos e de distâncias, algumas inacessíveis, é frequente em muitas profissões, por exemplo: calcular a largura de um rio para o projeto de construção de uma ponte; a medida do ângulo que uma rampa deve formar com o piso para a construção de uma escada e outras medidas e distâncias. Neste capítulo, mostraremos que cálculos como esses podem ser efetuados por meio da Trigonometria.

2.1 Estudo da Trigonometria no triângulo retângulo

As razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, que são razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, permitem o cálculo indireto de distâncias e de ângulos.

2.2 Transformações trigonométricas

As transformações de razões trigonométricas podem simplificar os cálculos envolvendo seno, cosseno e tangente.

Para pensar

Um teleférico deve unir os topos A e B de dois morros de 108 m e 144 m de altura, respectivamente. Conhecendo a medida do ângulo formado entre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano horizontal, como você calcularia a distância entre os pontos A e B?

Seção 2.1

Estudo da Trigonometria no triângulo retângulo

Objetivos

- **Calcular** os valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo agudo.
- **Calcular** a medida de um lado de um triângulo retângulo.
- **Aplicar** conceitos de seno, cosseno e tangente.

Termos e conceitos

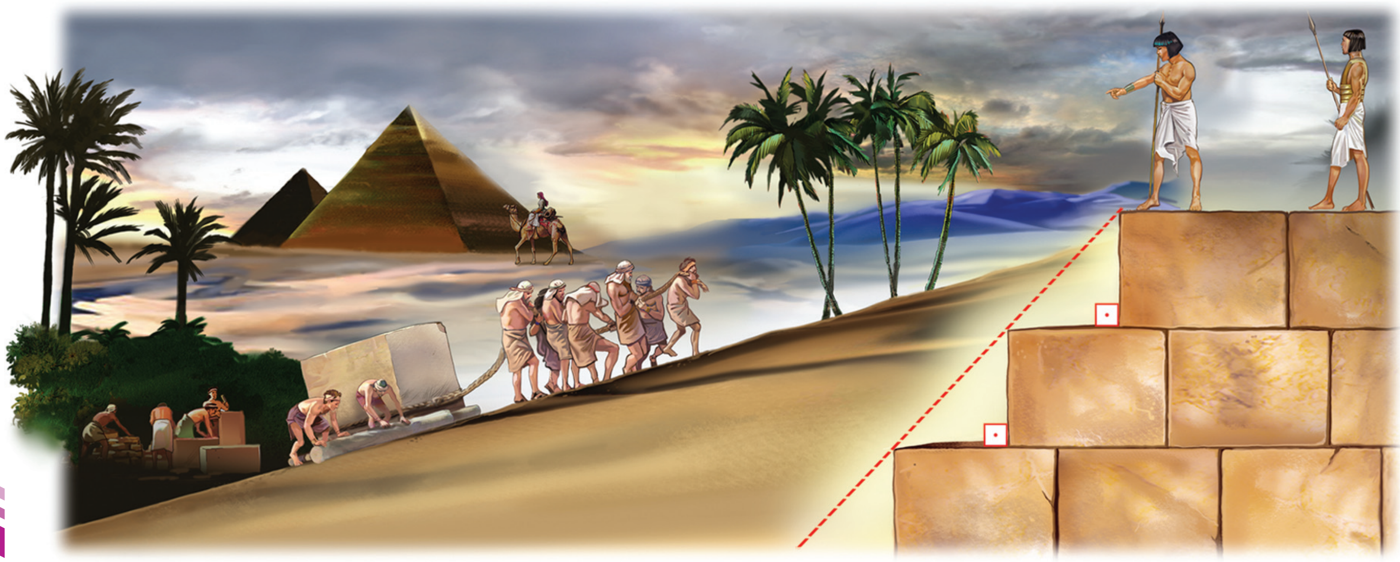
- seno de um ângulo agudo
- cosseno de um ângulo agudo
- tangente de um ângulo agudo

A origem da Trigonometria

O termo **Trigonometria** (do grego *trígónon*, que significa triângulo, e *métron*, que significa medida) foi criado em 1595 pelo matemático Bartholomeus Pitiscus para designar o ramo da Matemática que estuda as relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo, mas a origem desse campo de estudo é muito mais antiga.

O papiro Rhind, escrito no Egito por volta de 1650 a.C., apresenta um texto matemático com 85 problemas, sendo o de número 56 um dos mais antigos registros conhecidos sobre Trigonometria. Esse problema trata da construção de pirâmides, tipo de construção em que era essencial manter a mesma inclinação nas faces – requisito que levou os construtores a manter constantes as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos, cujos catetos eram determinados pela sobreposição de blocos de pedra. Atualmente, essas razões entre os lados de um triângulo retângulo são chamadas de **razões trigonométricas**.

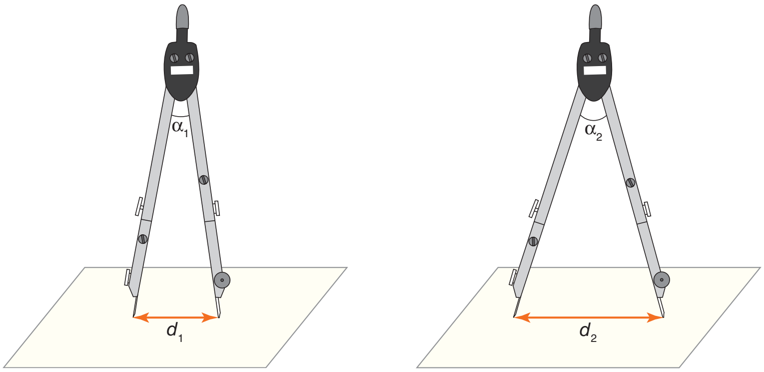
Problema 56 do papiro Rhind.



A ideia central da Trigonometria

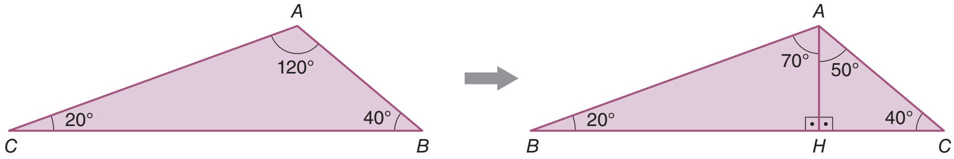
As figuras abaixo mostram o mesmo compasso com duas aberturas diferentes. Cada medida α do ângulo formado pelas hastes determina uma distância *d* entre as pontas do compasso. Que relação numérica podemos estabelecer entre a medida α e a distância *d*?

Essa situação apresenta um dos objetivos do estudo da Trigonometria, que é estabelecer relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um triângulo. Essas relações permitem, entre outras aplicações, o cálculo indireto de distâncias, como a distância entre a Terra e o Sol.



O triângulo fundamental

Qualquer triângulo pode ser separado, por uma de suas alturas, em dois triângulos retângulos. Por exemplo:

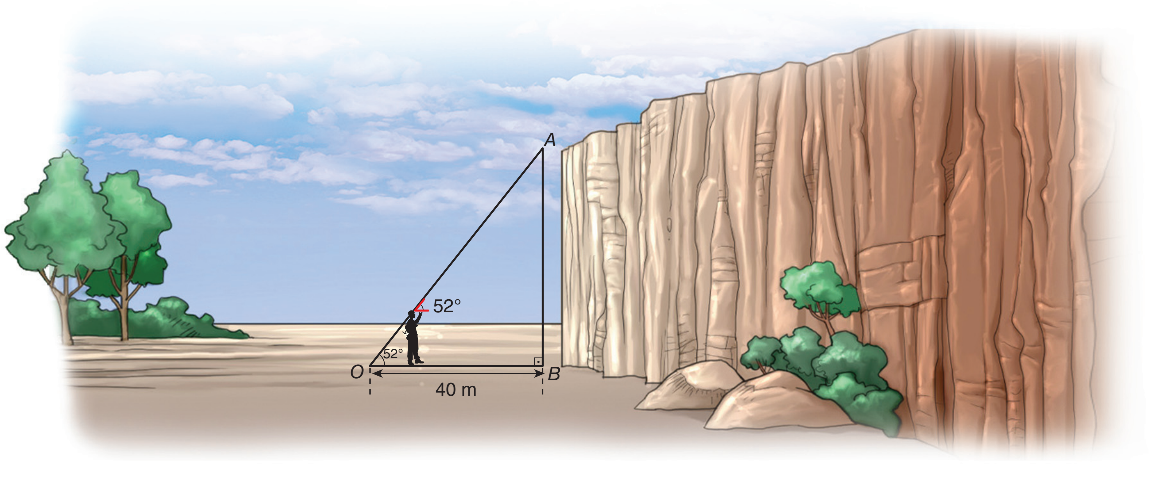


Assim, se conhecermos as relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um **triângulo retângulo**, conheceremos as relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um **triângulo qualquer**.

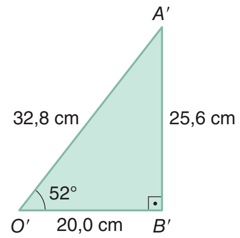
Por isso, daremos início ao estudo dessas relações em triângulos retângulos, consideradas relações fundamentais pela Trigonometria.

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Para medir a altura *AB* de uma encosta vertical, cuja base está em um terreno plano e horizontal, um topógrafo fixou um ponto *O* do terreno, conforme o esquema abaixo, e mediu o ângulo $A\hat{O}B$ e a distância *OB*, obtendo 52° e 40 m, respectivamente.



A seguir, o topógrafo desenhou um triângulo $O'A'B'$ qualquer, retângulo em B' e com o ângulo agudo $A'\hat{O}'B'$ medindo 52°. Então, com uma régua graduada, mediu os lados desse triângulo, obtendo os valores indicados ao lado.

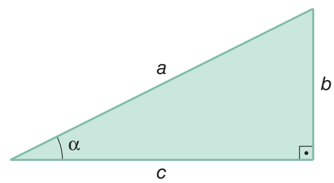


Como os triângulos AOB e $A'O'B'$ são semelhantes (pelo caso AA), seus lados correspondentes são proporcionais. Assim, o topógrafo calculou a altura h da encosta pela proporção a seguir, em que 40 m foi substituído por 4.000 cm:

$$\frac{h}{25{,}6} = \frac{4.000}{20} \Rightarrow h = 5.120 \text{ cm}$$

Dessa forma, ele descobriu que a encosta tinha 5.120 cm de altura, ou 51,20 m.

A ideia de relacionar as medidas dos lados com as medidas dos ângulos internos de triângulos retângulos por meio da semelhança de triângulos, levou alguns matemáticos a construir tabelas com as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos para várias medidas α de ângulos agudos, como os da tabela abaixo. Note que se o topógrafo tivesse a seu dispor essa tabela, não precisaria desenhar o triângulo semelhante ao triângulo AOB.



α	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{c}$
40°	0,642788	0,766044	0,839010
41°	0,656059	0,754710	0,869287
42°	0,669131	0,743145	0,900404
43°	0,681998	0,731354	0,932515
44°	0,694658	0,719340	0,965689
45°	0,707107	0,707107	1,000000
46°	0,719340	0,694658	1,035530
47°	0,731354	0,681998	1,072369
48°	0,743145	0,669131	1,110613
49°	0,754710	0,656059	1,150368
50°	0,766044	0,642788	1,191754
51°	0,777146	0,629320	1,234897
52°	0,788011	0,615661	1,279942

Atualmente, as tabelas das razões trigonométricas são substituídas pelas calculadoras eletrônicas.

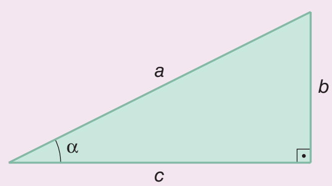
Para facilitar a identificação dessas razões, chamadas de **razões trigonométricas**, foi adotada a seguinte nomenclatura:

- a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa foi chamada de **seno de α**;
- a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa foi chamada de **cosseno de α**;
- a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida do cateto adjacente a α foi chamada de **tangente de α**.

Usamos **sen α**, **cos α** e **tg α** para abreviar seno, cosseno e tangente de α, respectivamente.

Resumindo:

Sendo α a medida de um ângulo agudo em um triângulo retângulo qualquer, temos:



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

Quando dizemos "cateto oposto a α", estamos nos referindo ao "cateto oposto ao ângulo de medida α". Isso também vale para o cateto adjacente.

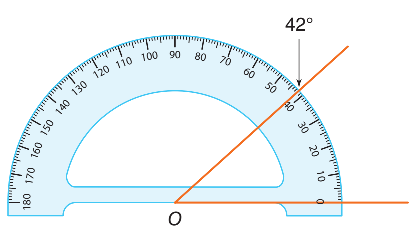
Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Razões trigonométricas*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

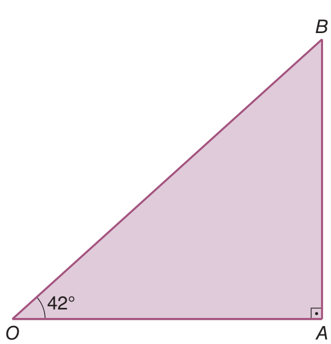
1 Com auxílio de uma régua graduada e de um transferidor, calcular sen 42°, cos 42° e tg 42°.

Resolução

Construímos, com auxílio do transferidor, um ângulo de 42°.



Traçamos uma perpendicular a um dos lados desse ângulo, obtendo um triângulo retângulo. Quanto maior o triângulo retângulo desenhado, mais precisos serão os valores obtidos para as razões seno, cosseno e tangente.



Com a régua graduada, medimos os lados do triângulo retângulo *ABO*. Nesse desenho, obtemos: $AB = 3{,}7$ cm, $AO = 4{,}1$ cm e $BO = 5{,}5$ cm.

Finalmente, calculamos as razões trigonométricas:

$$\text{sen } 42° = \frac{3{,}7}{5{,}5} \approx 0{,}67$$

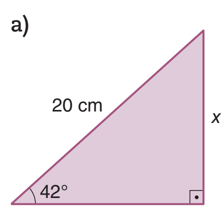
$$\cos 42° = \frac{4{,}1}{5{,}5} \approx 0{,}74$$

$$\text{tg } 42° = \frac{3{,}7}{4{,}1} \approx 0{,}90$$

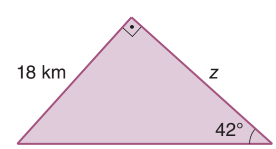
(*Nota*: Quando medimos um segmento de reta com régua graduada, inevitavelmente cometemos erros de aproximação. Por isso, os resultados obtidos nesse exercício são valores aproximados.)

2 Adotando sen 42° = 0,67, cos 42° = 0,74 e tg 42° = 0,90, determinar as medidas indicadas por x, y e z nas figuras a seguir.

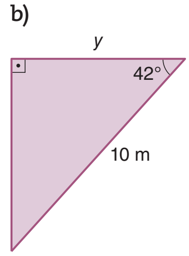
a)



c)



b)



Resolução

a) A razão trigonométrica que deve ser aplicada é aquela que relaciona os elementos:

- ângulo agudo (42°);
- cateto oposto a esse ângulo (x);
- hipotenusa (20 cm).

Tal razão é o seno. Assim:

$$\text{sen } 42° = \frac{x}{20} \Rightarrow 0{,}67 = \frac{x}{20}$$

$\therefore x = 13{,}4$ cm

b) As medidas relacionadas no triângulo retângulo são:

- ângulo agudo (42°);
- cateto adjacente a esse ângulo (y);
- hipotenusa (10 m).

Nesse caso, a razão trigonométrica adequada é o cosseno. Temos, então:

$$\cos 42° = \frac{y}{10} \Rightarrow 0{,}74 = \frac{y}{10}$$

$\therefore y = 7{,}4$ m

c) Temos:

- ângulo agudo (42°);
- cateto oposto a esse ângulo (18 km);
- cateto adjacente a esse ângulo (z).

A razão trigonométrica que relaciona esses elementos é a tangente. Assim:

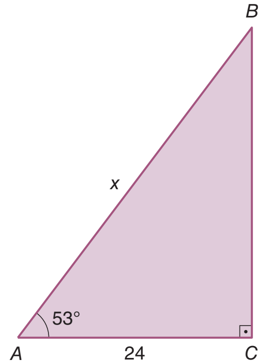
$$\text{tg } 42° = \frac{18}{z} \Rightarrow 0{,}90 = \frac{18}{z}$$

$\therefore z = 20$ km

3 Uma corda, completamente esticada, liga um ponto *A* de um terreno plano e horizontal a um balão *B* de gás, suspenso no ar. No instante em que os raios solares eram perpendiculares ao terreno, um forte vento fez a corda se inclinar, formando um ângulo de 53° com o terreno. Nesse mesmo instante, a sombra *C* do balão era tal que *AC* = 24 m. Calcular o comprimento da corda, adotando: sen 53° = 0,80; cos 53° = 0,60; tg 53° = 1,33

Resolução

Indicando por *x* o comprimento da corda, em metro, esquematizamos:



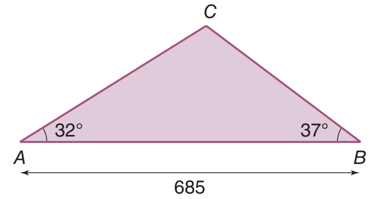
Como no triângulo retângulo *ABC* estão relacionadas as medidas de um ângulo agudo, do cateto adjacente a esse ângulo e da hipotenusa, deduzimos que a razão trigonométrica adequada para o cálculo de *x* é o cosseno:

$$\cos 53° = \frac{24}{x} \Rightarrow 0{,}6 = \frac{24}{x}$$

$\therefore x = 40$

Logo, a corda que prende o balão ao terreno tem 40 m de comprimento.

4 Em um porto, o cais reto *AB* tem 685 m de comprimento e pode ser considerado no mesmo nível do mar. Dos pontos *A* e *B*, vê-se uma ilhota *C* tal que m($C\hat{A}B$) = 32° e m($C\hat{B}A$) = 37°, conforme a figura:

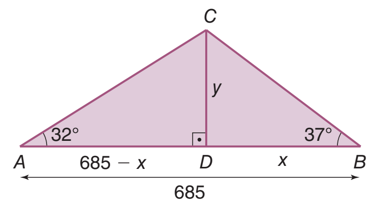


Adotando os valores apresentados na tabela abaixo, calcular a distância entre a ilhota e o cais.

	32°	37°
sen	0,53	0,60
cos	0,85	0,80
tg	0,62	0,75

Resolução

Sendo *D* o ponto do cais em que $\overline{DC} \perp \overline{AB}$ e indicando por *x* e *y* as distâncias *DB* e *CD*, em metro, respectivamente, temos:



$$\begin{cases} \text{tg } 32° = \dfrac{y}{685 - x} \\ \text{tg } 37° = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

De acordo com os valores da tabela, obtemos:

$$\begin{cases} 0{,}62 = \dfrac{y}{685 - x} \\ 0{,}75 = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 424{,}7 - 0{,}62x & \text{(I)} \\ y = 0{,}75x & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (II) em (I):

$0{,}75x = 424{,}7 - 0{,}62x \Rightarrow 1{,}37x = 424{,}7$

$\therefore x = 310$

Substituindo *x* por 310 em (II), concluímos:

$y = 0{,}75 \cdot 310 = 232{,}5$

Logo, a distância entre a ilhota e o cais é 232,5 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

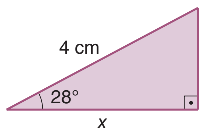
1 Neste exercício, você vai calcular alguns valores aproximados de razões trigonométricas.

a) Com o auxílio de régua e transferidor, construa um triângulo retângulo com um ângulo de 35°.

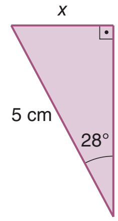
b) Usando uma régua graduada, meça os lados do triângulo e calcule sen 35°, cos 35°, tg 35°, sen 55°, cos 55° e tg 55°, com aproximação de duas casas decimais.

2 Sabendo que sen 28° = 0,46, cos 28° = 0,88 e tg 28° = 0,53, calcule o valor de x em cada figura.

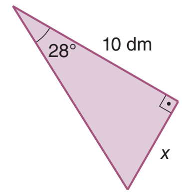
a)



b)

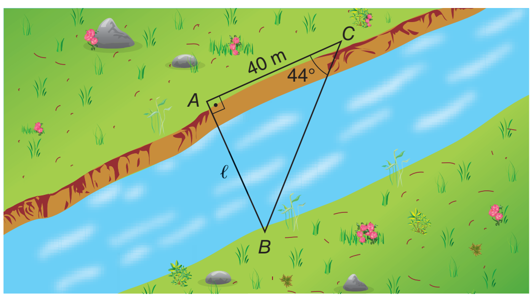


c)



(*Nota*: Os valores das razões trigonométricas apresentados nesse exercício são aproximados. Com o intuito de simplificar os enunciados e as resoluções, em outros exercícios também adotaremos valores aproximados como se fossem valores exatos das razões trigonométricas.)

3 Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que está e um ponto B na margem oposta (conforme a figura). A seguir, ele se desloca 40 m perpendicularmente à reta $\overleftrightarrow{AB}$ até o ponto C e mede o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 44°. Dados: sen 44° = 0,69, cos 44° = 0,71 e tg 44° = 0,96, calcule a largura do rio.



4 Um teleférico deve unir os topos A e B de dois morros. Para calcular a quantidade de cabos de aço necessária, um engenheiro mediu as alturas dos morros em relação a um mesmo plano horizontal, obtendo 108 m e 144 m. A seguir, mediu o ângulo que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma com a horizontal, obtendo 32°.

a) Faça um esquema da situação proposta no texto.

b) Calcule a distância entre os pontos A e B, sabendo que sen 32° = 0,52, cos 32° = 0,84 e tg 32° = 0,62.

Resolva os exercícios complementares 1 a 3 e 13 a 21.

Seção 2.2

Transformações trigonométricas

Objetivos

- **Relacionar** a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo com o seno e o cosseno desse ângulo.
- **Relacionar** ângulos complementares através do seno e do cosseno.

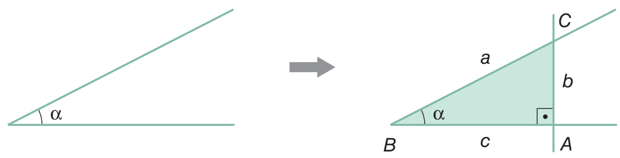
Relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo

Uma importante relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo é enunciada no teorema a seguir.

> Dado um ângulo agudo de medida α, tem-se: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$

Demonstração

Construímos um ângulo agudo de medida α e traçamos uma perpendicular a um dos lados do ângulo, obtendo um triângulo retângulo com lados de medidas a, b, c, confome figura:

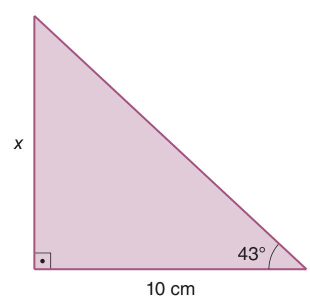


Calculando sen α e cos α, e efetuando $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$, concluímos que:

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}} = \frac{b}{c} = \text{tg}\ \alpha$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5 Obter a medida indicada por x na figura abaixo, adotando sen 43° = 0,68 e cos 43° = 0,73.



Resolução

Pela figura, temos: $\text{tg}\ 43° = \dfrac{x}{10}$

Calculamos a tg 43° como o quociente do sen 43° pelo cos 43°, isto é:

$$\text{tg}\ 43° = \frac{\text{sen}\ 43°}{\cos 43°} = \frac{0{,}68}{0{,}73} \approx 0{,}93$$

Logo: $0{,}93 \approx \dfrac{x}{10} \Rightarrow x \approx 9{,}3$

Concluímos que x vale aproximadamente 9,3 cm.

Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

Vamos lembrar o conceito de ângulos complementares.

Dois ângulos agudos de medidas α e β são complementares se, e somente se, $\alpha + \beta = 90°$.

Dizemos também que as medidas α e β são complementares.

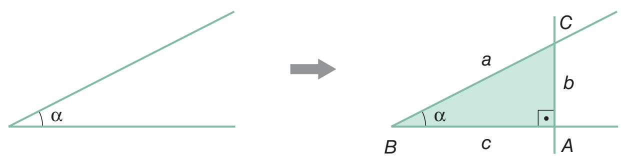
Neste tópico, vamos relacionar o seno e o cosseno de dois ângulos complementares por meio do seguinte teorema:

> Se α é a medida em grau de um ângulo agudo, então:
> - $\text{sen } \alpha = \cos (90° - \alpha)$
> - $\cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$

Observe que α e $(90° - \alpha)$ são medidas complementares.

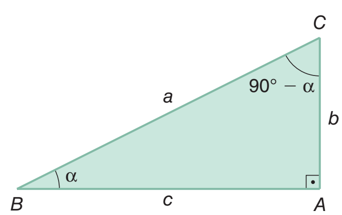
Demonstração

Construímos um ângulo agudo de medida α e traçamos uma perpendicular a um dos lados do ângulo, obtendo o triângulo retângulo com lados de medidas *a*, *b* e *c*, conforme a figura:



Observe que o ângulo $\hat{C}$ é o complementar do ângulo $\hat{B}$, pois:

$$\alpha + m(\hat{C}) = 90° \Rightarrow m(\hat{C}) = 90° - \alpha$$



Assim:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \dfrac{b}{a} \\ \cos (90° - \alpha) = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \cos (90° - \alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \dfrac{c}{a} \\ \text{sen } (90° - \alpha) = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$$

Desse modo, provamos que:

> Se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Exemplos

a) 30° é o complemento de 60°; logo, sen 30° = cos 60° e sen 60° = cos 30°.

b) 12° é o complemento de 78°; logo, sen 12° = cos 78° e sen 78° = cos 12°.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6 Sabendo que cos 23° = 0,92, calcular o valor da expressão: $E = \dfrac{\text{sen } 23° + \cos 67°}{4 \cdot \text{tg } 23°}$

Resolução

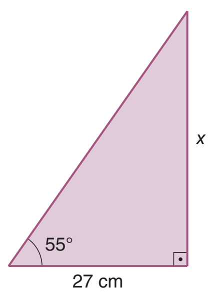
Como 23° é o complemento de 67°, temos cos 67° = sen 23°, logo:

$$E = \frac{\text{sen } 23° + \text{sen } 23°}{4 \cdot \dfrac{\text{sen } 23°}{\cos 23°}} = \frac{2 \text{ sen } 23°}{\dfrac{4 \text{ sen } 23°}{\cos 23°}} = 2 \text{ sen } 23° \cdot \frac{\cos 23°}{4 \text{ sen } 23°}$$

ou seja: $E = \dfrac{\cos 23°}{2} = \dfrac{0{,}92}{2} = 0{,}46$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

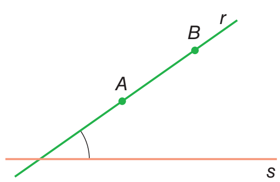
5 Sabendo que sen 55° = 0,81 e cos 55° = 0,57, determine o valor de x na figura.



6 Considerando sen 10° = 0,17 e sen 80° = 0,98, calcule cos 10°, cos 80°, tg 10° e tg 80°.

7 Na figura abaixo, as retas r e s formam entre si um ângulo de 37°, e o segmento $\overline{AB}$, contido em r, mede 18 cm.

Calcule a medida da projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta s, dado sen 53° = 0,79.



8 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$, calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (90° - \alpha)}{\cos \alpha \cdot \cos (90° - \alpha)} + \cos (90° - \alpha)$$

Resolva os exercícios complementares 4 a 8 e 22 a 24.

A Trigonometria e o teorema de Pitágoras

Dado um dos valores de sen α, cos α ou tg α, em que α é a medida de um ângulo agudo, é possível determinar os outros dois valores com o auxílio do teorema de Pitágoras, conforme veremos nos exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\text{sen } \alpha = \dfrac{4}{5}$, calcular cos α e tg α.

Resolução

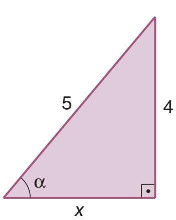
Se α é a medida de um ângulo agudo e $\text{sen } \alpha = \dfrac{4}{5}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 4 e a hipotenusa mede 5, conforme a figura ao lado.

Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida x do cateto adjacente a α:

$$x^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow x = 3$$

Assim, concluímos:

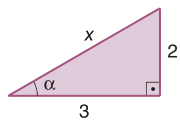
$$\cos \alpha = \frac{x}{5} = \frac{3}{5} \text{ e tg } \alpha = \frac{4}{x} = \frac{4}{3}$$



8 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\text{tg}\ \alpha = \frac{2}{3}$, calcular $\text{sen}\ \alpha$ e $\cos \alpha$.

Resolução

Se α é a medida de um ângulo agudo e $\text{tg}\ \alpha = \frac{2}{3}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 2 e o cateto adjacente mede 3, conforme a figura:



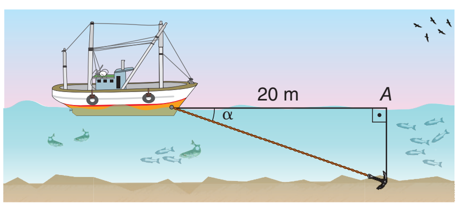
Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida x da hipotenusa:

$$x^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow x = \sqrt{13}$$

Assim, concluímos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ e } \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{x} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

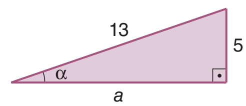
9 A âncora de um barco pesqueiro, depois de lançada, atingiu o fundo do rio. Como a profundidade do rio nesse ponto é menor que o comprimento da corda que prende a âncora ao barco, este se moveu 20 m em relação ao ponto A, de onde foi lançada a âncora, esticando completamente a corda, que formou um ângulo agudo de medida α com a superfície do rio tal que $\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{13}$. Calcular a profundidade do rio nesse ponto.



Resolução

No triângulo retângulo destacado na figura, observamos que 20 m é a medida do cateto adjacente ao ângulo agudo de medida α e pretendemos calcular a medida x do cateto oposto a α; logo, a razão trigonométrica que relaciona essas medidas é a tangente. Necessitamos, então, calcular $\text{tg}\ \alpha$.

Como $\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{13}$, deduzimos que existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 5 unidades e a hipotenusa mede 13 unidades:



Assim, a medida a do cateto adjacente a α pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras:

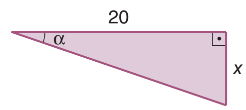
$$a^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow a^2 = 144$$

$$\therefore\ a = 12$$

Assim, obtemos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{5}{12}$$

Retornando ao triângulo retângulo do enunciado do problema, temos:



$$\text{tg}\ \alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore\ x \approx 8{,}3$$

Portanto, a profundidade do rio é 8,3 m, aproximadamente.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Demonstração do teorema de Pitágoras*.

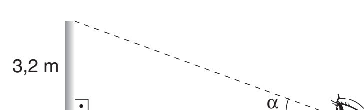
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9 Sendo α a medida de um ângulo agudo tal que $\text{sen}\ \alpha = \frac{12}{13}$, calcule $\cos \alpha$ e $\text{tg}\ \alpha$.

10 Sendo α a medida de um ângulo agudo tal que $\text{tg}\ \alpha = \frac{4}{3}$, calcule $\text{sen}\ \alpha$ e $\cos \alpha$.

11 Em um cinema, os olhos de um espectador estão no mesmo plano horizontal que contém a base da tela vertical de 3,2 m de altura, conforme mostra a figura ao lado.

O espectador vê toda a extensão vertical da tela sob um ângulo agudo de medida α tal que $\cos \alpha = \frac{15}{17}$.



a) Calcule $\text{tg}\ \alpha$.

b) Calcule a distância entre os olhos do espectador e a base da tela.

Resolva os exercícios complementares 9 a 11.

Ângulos notáveis

Para estudos posteriores de Trigonometria, convém conhecer o seno, o cosseno e a tangente de alguns ângulos. Escolhemos, pela facilidade das demonstrações, os ângulos de medidas 30°, 45° e 60°, que chamaremos de **ângulos notáveis**.

Ângulo de 45°

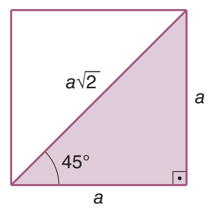
Vimos que a medida de cada diagonal de um quadrado de lado a é $a\sqrt{2}$, e cada ângulo interno do quadrado é dividido por uma diagonal em dois ângulos de 45°.

Assim, temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

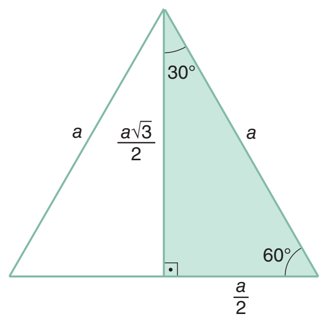
$$\cos 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1$$



Ângulos de 30° e 60°

Conforme já estudamos, a medida de cada altura de um triângulo equilátero de lado a é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vimos que cada altura desse tipo de triângulo também é bissetriz interna e mediana.



Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\cancel{a}}{2}}{\cancel{a}} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2}}{\cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg } 30° = \frac{\frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Temos, ainda, que 60° é o complemento de 30°. Logo:

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$

Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis

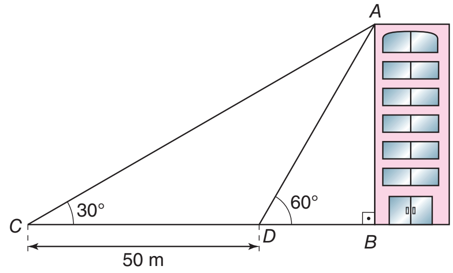
	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

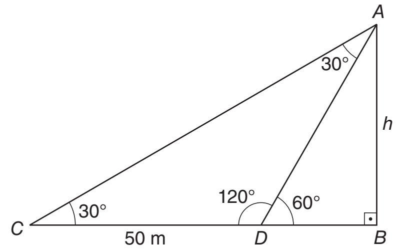
10 A base de um edifício está localizada em um terreno plano e horizontal. Para medir a altura desse edifício, um engenheiro fixou-se em um ponto do terreno e mirou o topo do prédio sob um ângulo de 30° com o solo. Depois, andou 50 metros em direção ao prédio e mirou novamente seu topo, mas, agora, sob um ângulo de 60°. Desconsiderando a altura do engenheiro, calcular a altura do edifício.

Resolução

Primeiro, vamos fazer um esquema da situação:



Indicando por *h* a altura do edifício, calculamos as medidas dos ângulos internos do triângulo *ACD*:



O triângulo *ACD* é isósceles, pois tem dois ângulos internos congruentes (30°); logo, os lados opostos a esses ângulos são congruentes, isto é, $DA = DC = 50$ m.

Assim, do triângulo *ABD*, temos:

- ângulo agudo (60°);
- hipotenusa (50 m);
- cateto oposto (*h*).

Relacionando esses valores ao seno de 60°, concluímos:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{50} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{50}$$

$\therefore 2h = 50\sqrt{3}$

$\therefore h = 25\sqrt{3}$

Logo, a altura do edifício é $25\sqrt{3}$ m, ou seja, aproximadamente 43,3 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen}^2 45° + \cos^4 60°}{\text{tg}^4 60°}$$

(*Nota*: Expressões do tipo $\text{sen}^n \alpha$, $\cos^n \alpha$ e $\text{tg}^n \alpha$ devem ser interpretadas como $(\text{sen } \alpha)^n$, $(\cos \alpha)^n$ e $(\text{tg } \alpha)^n$, respectivamente.)

13 Sendo $x = 10°$, determine o valor da expressão:

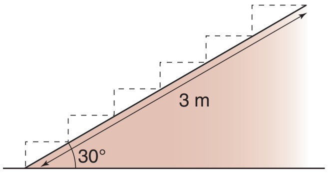
$$E = \frac{\text{sen } 3x + \cos \frac{3x}{2} - \text{sen } \frac{15x}{2}}{\text{tg}^2 6x}$$

(*Nota*: Expressões do tipo sen *kx*, cos *kx* e tg *kx* devem ser interpretadas como sen (*kx*), cos (*kx*) e tg (*kx*), respectivamente.)

14 A torre Eiffel tem sua base em um piso plano e horizontal. De um ponto *A* desse piso, distante $108\sqrt{3}$ m do centro da base, vê-se o ponto mais alto da torre sob um ângulo de 60° com o piso. Calcule a altura da torre.

15 Em certo instante, o capitão de um navio vê o topo de um *iceberg* sob um ângulo de 30° com a superfície do mar. Navegando 100 m no sentido do *iceberg*, o capitão vê o topo sob um ângulo de 45° com a superfície do mar. Calcule a altura da parte emersa do *iceberg*, em relação ao nível do mar, desconsiderando a altura do navio.

16 (UFPI) Dois níveis de uma praça estão ligados por uma rampa de 3 m de comprimento e 30° de inclinação, conforme a figura abaixo.



Devem-se construir sobre a rampa 6 degraus de mesma altura. A altura de cada degrau será:

a) 0,20 m **b)** 0,23 m **c)** 0,25 m **d)** 0,27 m **e)** 0,28 m

Resolva os exercícios complementares 12 e 25 a 31.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Com auxílio de transferidor e de uma régua graduada, calcule os valores abaixo com aproximação de duas casas decimais. Lembre que, quanto maior o triângulo desenhado em seu caderno, mais precisos serão os valores do seno, do cosseno e da tangente.

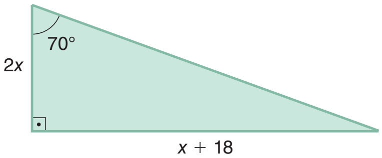
a) sen 35°, cos 35° e tg 35°

b) sen 44°, cos 44° e tg 44°

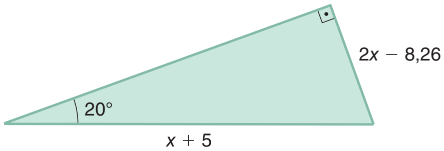
2 Calcule a medida desconhecida *x*, em cada um dos triângulos a seguir, usando a tabela:

	70°
sen	0,94
cos	0,34
tg	2,75

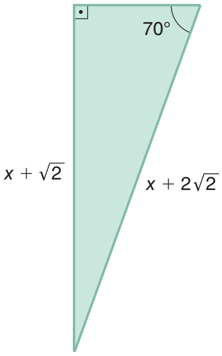
a)



b)

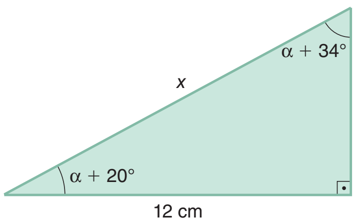


c)

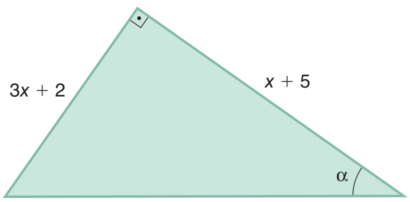


3 Na figura abaixo, α é uma medida em grau. Determine a medida x, em centímetro, usando, se necessário, os valores da tabela:

	52°
sen	0,79
cos	0,62
tg	1,28



4 Obtenha o valor de x na figura sabendo que $\text{sen } \alpha = 0{,}6$ e $\cos \alpha = 0{,}8$.



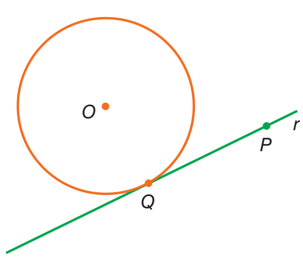
5 Demonstre que: "Se α é a medida de um ângulo agudo tal que $\text{sen } \alpha + \cos \alpha = \cos^2 \alpha$ então $\text{tg } \alpha + 1 = \cos \alpha$".

6 Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{4 \text{ tg } \alpha - 2}{\text{tg}^2 \alpha}$ sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e $4 \text{ sen } \alpha = 3 \cos \alpha$.

7 Determine os valores x e y na tabela:

	72°	18°
sen	0,95	0,31
cos	x	y

8 Uma reta r passa por um ponto P e é tangente em Q a uma circunferência de centro O, conforme a figura abaixo. Calcule a medida do raio dessa circunferência sabendo que o ângulo $O\hat{P}Q$ mede α, com $\cos(90° - \alpha) = 0{,}3$ e $PO = 15$ cm.

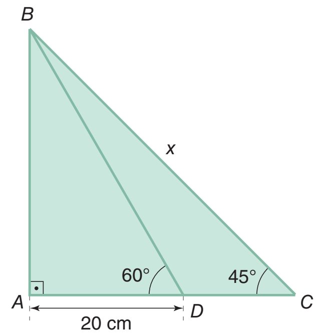


9 Calcule os valores de $\text{sen } \theta$ e $\text{tg } \theta$ sabendo que θ é a medida de um ângulo agudo e que $\cos \theta = \dfrac{1}{3}$.

10 A medida α de um ângulo agudo é tal que $\text{sen } \alpha = 0{,}6$. Calcule $\cos \alpha$ e $\text{tg } \alpha$.

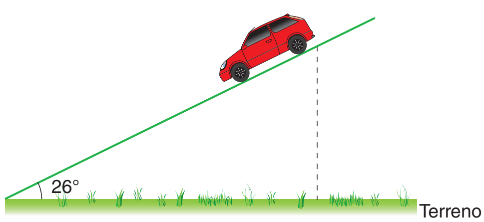
11 Um ângulo agudo tem medida β com $\text{tg } \beta = 3$. Calcule $\text{sen } \beta$ e $\cos \beta$.

12 Determine a medida x na figura:



Exercícios contextualizados

13 Um carro desce uma rampa plana que forma um ângulo de 26° com o terreno plano e horizontal.



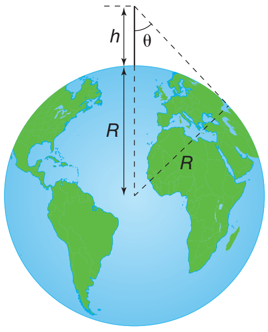
Responda às questões seguintes.

a) Quando o carro estiver a 2 m de altura em relação ao terreno, que distância percorrerá até o final da descida?

b) Quando o carro percorrer 4 m da rampa, quais serão os seus deslocamentos horizontal e vertical, em metro?

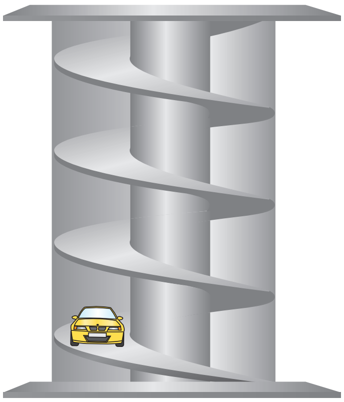
(Adote: $\text{sen } 26° = 0{,}43$; $\cos 26° = 0{,}89$ e $\text{tg } 26° = 0{,}48$.)

14 (FEI-SP) Um observador, do alto de uma torre vertical, de altura h, enxerga a linha do horizonte. Sabendo que o raio visual forma com a vertical da torre um ângulo de medida θ, determine, em função de h e θ, a medida do raio da Terra.

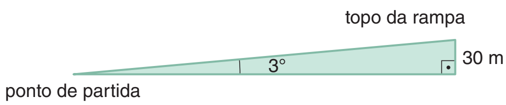


(*Sugestão*: O raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência.)

15 No estacionamento de um *shopping center*, uma rampa espiralada de 50 m de comprimento liga o piso térreo ao piso superior. Sabendo que a rampa tem inclinação constante de 25° com a horizontal, em toda a sua extensão, determine a altura do piso superior em relação ao piso térreo.
(Adote: sen 25° = 0,42; cos 25° = 0,91; tg 25° = 0,47.)



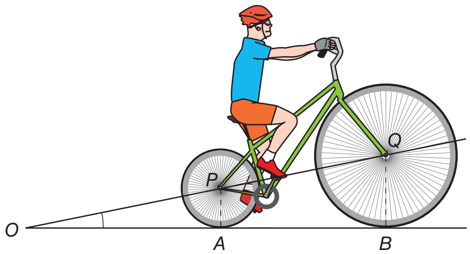
16 (Vunesp) Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus à velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é 30 m.



Use a aproximação sen 3° = 0,05 e responda. O tempo, em minuto, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é:

a) 2,5
b) 7,5
c) 10
d) 15
e) 30

17 (Uerj) Observe a bicicleta e a tabela trigonométrica.

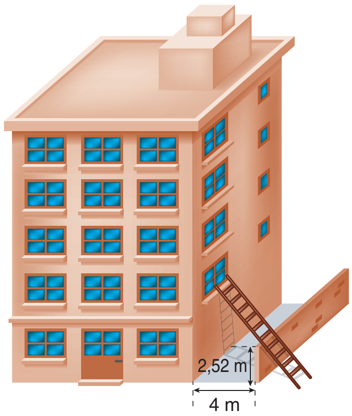


Ângulo (grau)	Seno	Cosseno	Tangente
10	0,174	0,985	0,176
11	0,191	0,982	0,194
12	0,208	0,978	0,213
13	0,225	0,974	0,231
14	0,242	0,970	0,249

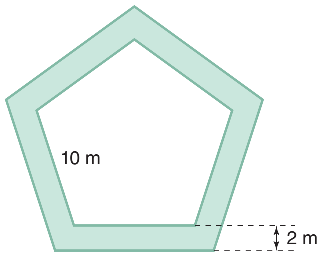
Os centros das rodas estão a uma distância *PQ* igual a 120 cm, e os raios *PA* e *QB* medem, respectivamente, 25 cm e 52 cm. De acordo com a tabela, o ângulo $A\hat{O}P$ tem o seguinte valor:

a) 10°
b) 12°
c) 13°
d) 14°

18 Um muro com 2,52 metros de altura está a 4 metros de uma parede de um edifício. Uma escada que está tocando a parede e apoiada no muro forma um ângulo de 40° com o chão plano e horizontal. Supondo que o muro e a parede sejam perpendiculares ao chão, determine o comprimento da escada.
(Adote: sen 40° = 0,64; cos 40° = 0,77; tg 40° = 0,84.)



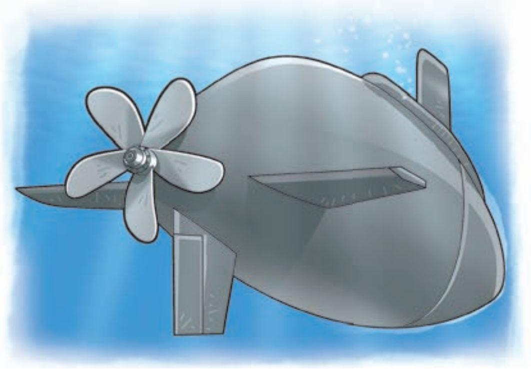
19 Uma praça tem a forma de um pentágono regular com 10 m de lado. Em volta dessa praça, foi construída uma calçada de largura constante 2 m, conforme mostra a figura:



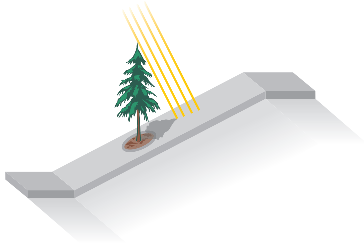
O perímetro externo dessa calçada é:

a) 9(6 + tg 54°)
b) 3(20 − 3 cos 54°)
c) 20(3 + 2 sen 36°)
d) 10(5 + 2 tg 36°)
e) 10(5 + 2 tg 54°)

20 A hélice de um submarino foi projetada com cinco pás de mesmo comprimento de modo que a distância entre os extremos móveis de duas pás consecutivas quaisquer seja 2 m. Calcule o comprimento de cada pá, ou seja, a distância do centro da hélice ao ponto extremo móvel da pá.
(Adote: sen 36° = 0,588, cos 36° = 0,809 e tg 36° = 0,727.)



21 Em uma calçada com 28° de inclinação em relação a um plano horizontal, há um pinheiro vertical de 3,80 m de altura. Calcule o comprimento da sombra do pinheiro projetada sobre a calçada, no instante em que os raios solares são perpendiculares à calçada.
(Adote: sen 28° = 0,47.)

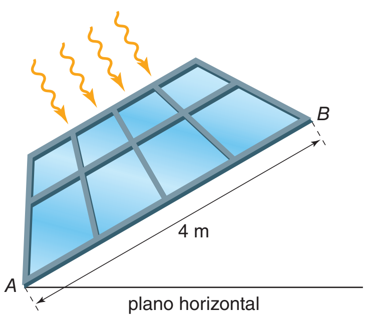


22 Um avião decolou em linha reta formando um ângulo de medida 28° com a pista plana e horizontal do aeroporto. Quando estava exatamente na vertical que contém a cabeceira da pista, sua altura era de 300 m em relação à pista. Calcule a distância entre a cabeceira da pista e o ponto do qual o avião decolou.
(Adote: sen 28° = 0,47; cos 28° = 0,88.)

23 Uma diagonal de um campo (retangular) de futebol forma 38° com uma linha lateral. Sabendo que essa linha lateral mede 100 m, calcule o comprimento da linha de fundo, isto é, a largura do campo.
(Adote: sen 38° = 0,65; cos 38° = 0,79.)

24 Um telhado plano, com 23° de inclinação em relação ao plano horizontal do piso, apoia-se em duas paredes verticais e paralelas. A parede maior tem 5,1 m de altura em relação ao plano do piso, e a menor tem 3 m de altura. Calcule a distância entre essas paredes. (Adote: sen 23° = 0,39; cos 23° = 0,92.)

25 Um painel solar *AB* de 4 m de comprimento inclina-se no máximo 30° em torno de um eixo horizontal que passa por *A*, conforme mostra a figura abaixo. Calcule a altura do ponto *B* em relação ao plano horizontal que passa por *A* quando a inclinação é máxima.



26 (UEPB) Duas avenidas retilíneas, *r* e *s*, cruzam-se segundo um ângulo de 30°. Um posto de gasolina A, situado na avenida s a 400 m do ponto de encontro das avenidas, encontra-se a que distância da avenida *r*?

a) 300 m
b) 250 m
c) 150 m
d) 250 m
e) 200 m

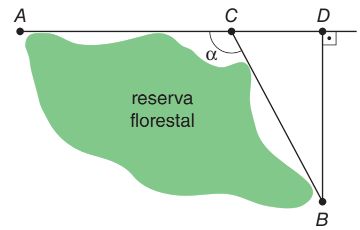
27 (Uerj) Um foguete é lançado com velocidade igual a 180 m/s e com ângulo de inclinação de 60° em relação ao solo. Suponha que sua trajetória seja retilínea e que sua velocidade seja constante ao longo de todo o percurso. Após 5 segundos, o foguete se encontra à altura de *x* metros, exatamente acima de um ponto no solo horizontal, a y metros do ponto de lançamento.
Os valores de x e y são, respectivamente:

a) 90 e $90\sqrt{3}$
b) $90\sqrt{3}$ e 90
c) 450 e $450\sqrt{3}$
d) $450\sqrt{3}$ e 450

28 Um penhasco tem sua base sobre uma planície horizontal. Sobre essa planície, tomam-se dois pontos, *D* e *C*, pertencentes a uma mesma semirreta de origem *B* na base do penhasco. Do ponto *D* vê-se o topo *T* do penhasco sob um ângulo de 30° com a planície; e do ponto *C* vê-se *T* sob um ângulo de 60° com a planície. Calcule a altura do penhasco sabendo que a distância *CD* é 100 m.

29 Um balão meteorológico sobe verticalmente a partir de um ponto *A* do solo plano e horizontal. A 20 m de altura, o balão é visto de um ponto *B* do chão sob um ângulo de 30° com o solo, e pouco depois é visto do mesmo ponto *B* sob um ângulo de 60°. Calcule a altura em que estava o balão quando foi visto sob o ângulo de 60°.

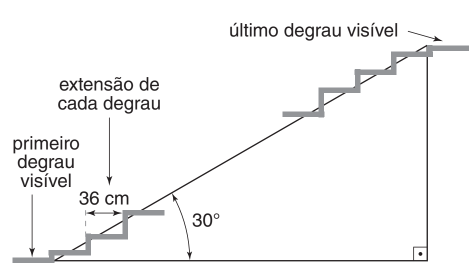
30 (UFG-GO) Uma empresa de engenharia deseja construir uma estrada ligando os pontos *A* e *B*, que estão situados em lados opostos de uma reserva florestal, como mostra a figura abaixo.



A empresa optou por construir dois trechos retilíneos, denotados pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, ambos com o mesmo comprimento. Considerando que a distância de *A* até *B*, em linha reta, é igual ao dobro da distância de *B* a *D*, o ângulo α, formado pelos dois trechos retilíneos da estrada, mede:

a) 110° b) 120° c) 130° d) 140° e) 150°

31 Uma escada rolante desliza sobre uma rampa que forma um ângulo de 30° com o plano horizontal. Quando toda a extensão do primeiro degrau visível aparece no plano do piso inferior, toda a extensão do último degrau é visível e está no plano do piso superior, conforme a figura abaixo. Sabendo que a extensão de cada degrau é 36 cm e que o tempo para um degrau se deslocar do piso inferior ao superior é de 1,2 min (à velocidade de 0,2 metro por segundo), calcule o número máximo possível de degraus visíveis que mostram toda a sua extensão. (Adote: $\sqrt{3} = 1,7$.)

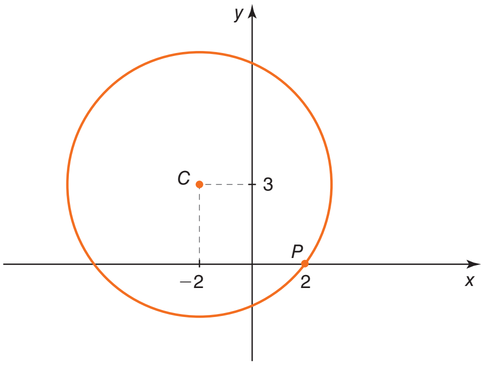


EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 As quatro teclas reproduzidas ao lado movimentam um ponto na tela de um computador. A cada digitação das teclas 1 ou 3, o ponto se movimenta verticalmente 6 mm, para cima ou para baixo, respectivamente; e a cada digitação das teclas 2 ou 4, o ponto se movimenta horizontalmente 1,6 mm, para a esquerda ou para a direita, respectivamente. Indicando por P a posição inicial do ponto na tela e por Q a posição do ponto após digitar dez vezes a tecla 4 e duas vezes a tecla 1, calcule a distância, em milímetro, entre os pontos P e Q.

2 No plano cartesiano abaixo está representada a circunferência que passa pelo ponto P e tem centro C. Calcule o comprimento do raio dessa circunferência.



3 Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado durante 5 meses à taxa de juro composto de 2,2% ao mês. Com auxílio de uma calculadora científica, determine:

a) o montante acumulado ao final da aplicação;

b) o juro produzido por essa aplicação.

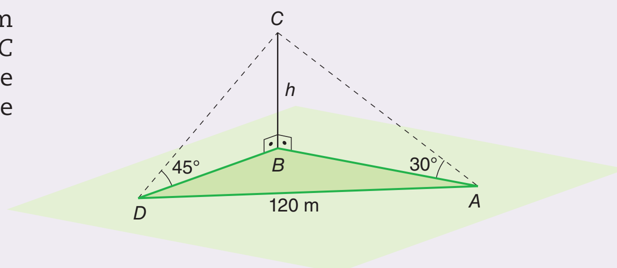
4 Sendo f uma função tal que $f(x + 4) = 3x - 1$, determine:

a) $f(10)$ **b)** $f(x)$

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Uma torre BC tem sua base B em um terreno plano e horizontal. O ponto C é visto a partir dos pontos A e D desse terreno sob os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{D}B$ de 30° e 45°, respectivamente.

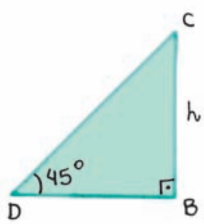


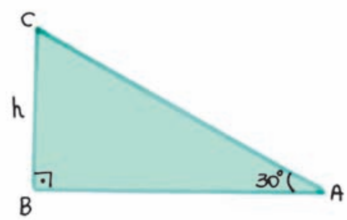
Sabendo que a distância entre A e D é 120 m, pode-se concluir que a altura da torre:

a) é igual a 60 m. **b)** pode ser menor que 40 m. **c)** pode ser maior que 60 m.

Resolução

Altura da torre: h





$\text{tg } 45° = \dfrac{h}{BD} \Rightarrow 1 = \dfrac{h}{BD}$

$\therefore BD = h$

$\text{tg } 30° = \dfrac{h}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{AB}$

$\therefore AB = h\sqrt{3}$

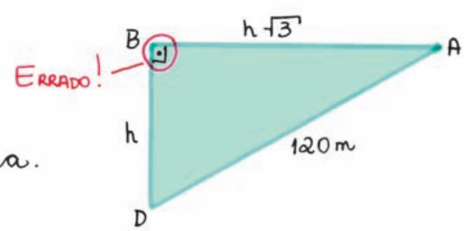
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD: ERRADO!

$(BD)^2 + (AB)^2 = (AD)^2 \Rightarrow h^2 + (h\sqrt{3})^2 = 120^2$

$\therefore 4h^2 = 14.400$

$h^2 = 3.600$

$h = 60$



Logo, a torre tem 60 m de altura.

Alternativa a.

Comentário

Os dados do enunciado do problema não permitem concluir que o triângulo ABD é retângulo, portanto, a resolução está incorreta.

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo
3

A circunferência trigonométrica: seno, cosseno e tangente

Neste capítulo, estudaremos a generalização das definições de seno, cosseno e tangente para ângulos de qualquer medida.

3.1 Radiano
Além do grau, existem outras medidas de ângulos e arcos, como o radiano.

3.2 Circunferência trigonométrica
Com base na circunferência trigonométrica, desenvolveremos os conceitos de Trigonometria deste capítulo.

3.3 Seno e cosseno de um arco trigonométrico
A partir da circunferência trigonométrica, estenderemos os conceitos de seno e cosseno para ângulos não agudos.

3.4 Tangente de um arco trigonométrico
Assim como fizemos para o seno e o cosseno, estenderemos o conceito de tangente para ângulos não agudos.

3.5 Equações trigonométricas
Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica, resolveremos equações trigonométricas em ℝ.

3.6 Inequações trigonométricas
Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica, resolveremos inequações trigonométricas em ℝ.

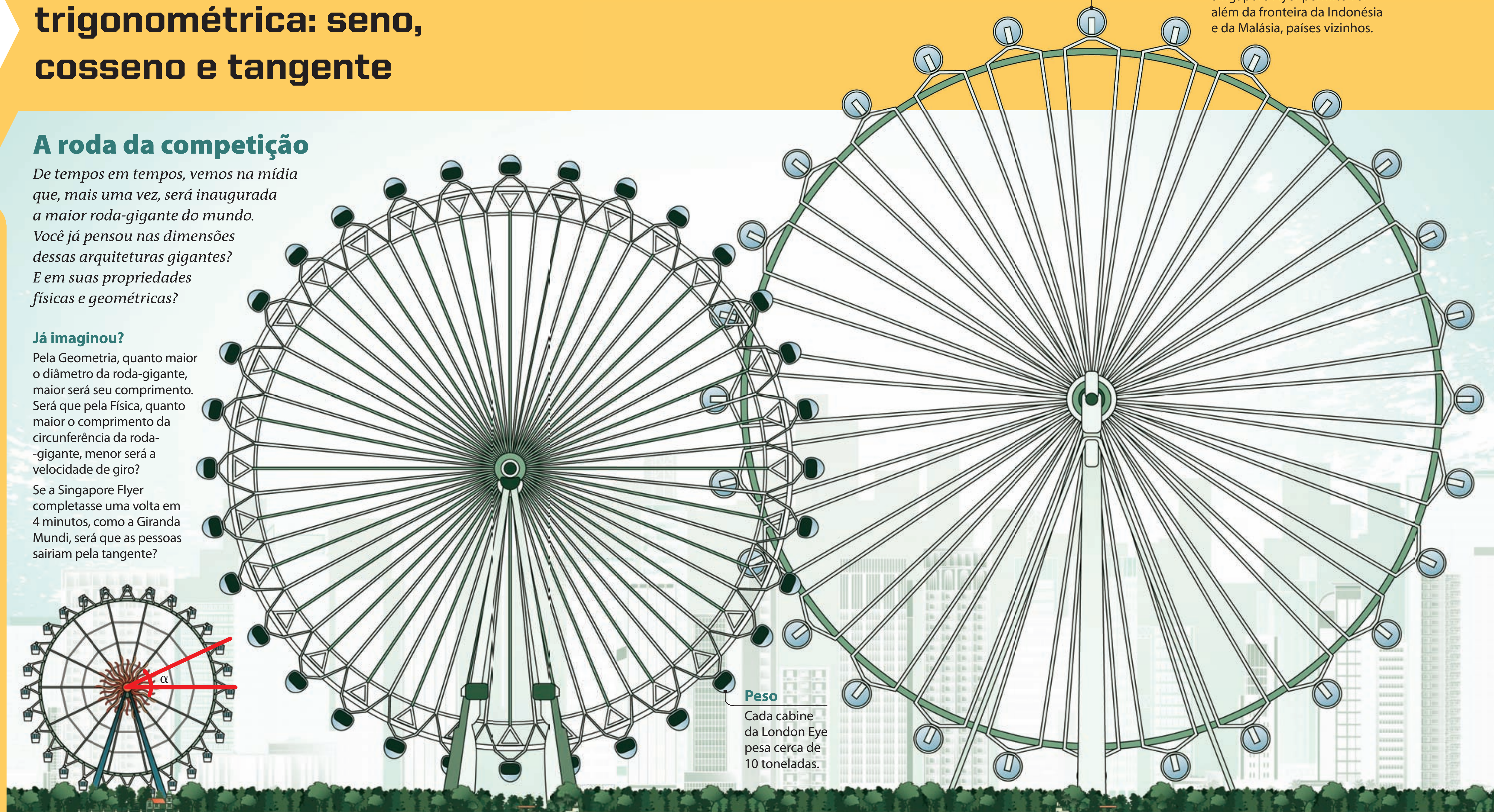
A roda da competição

De tempos em tempos, vemos na mídia que, mais uma vez, será inaugurada a maior roda-gigante do mundo. Você já pensou nas dimensões dessas arquiteturas gigantes? E em suas propriedades físicas e geométricas?

Já imaginou?

Pela Geometria, quanto maior o diâmetro da roda-gigante, maior será seu comprimento. Será que pela Física, quanto maior o comprimento da circunferência da roda-gigante, menor será a velocidade de giro?

Se a Singapore Flyer completasse uma volta em 4 minutos, como a Giranda Mundi, será que as pessoas sairiam pela tangente?



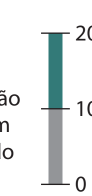
Giranda Mundi
- Localização: **São Paulo, Brasil**
- Altura: **40 metros**
- Ciclo: **4 minutos**
- Inauguração: **1997**
- Fabricação: **Holanda**
- Capacidade: **168** passageiros (28 cabines para 6 pessoas)

London Eye
- Localização: **Londres, Inglaterra**
- Altura: **135 metros**
- Ciclo: **30 minutos**
- Inauguração: **2000**
- Fabricação: **Holanda**
- Capacidade: **800 passageiros** (32 cabines para 25 pessoas)

Para pensar
1. Na Giranda Mundi, qual é a medida α do ângulo central?
2. Calcule o comprimento da circunferência da London Eye.
3. A Singapore Flyer gira em que velocidade?

Singapore Flyer
- Localização: **Cingapura**
- Altura: **165 metros**
- Ciclo: **37 minutos**
- Inauguração: **2008**
- Fabricação: **China**
- Capacidade: **784 passageiros** (28 cabines para 28 pessoas)

1.000x
As rodas-gigantes nesta imagem estão representadas com cerca de 1/1.000 do seu tamanho real.



Radiano

Objetivos

- **Calcular** a medida de um arco em radiano.
- **Transformar** a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.

Termo e conceito

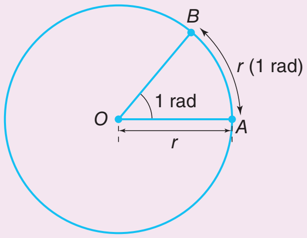
- **radiano**

No estudo da Geometria plana, é comum utilizar o **grau** como unidade de medida de ângulo e de arco de circunferência. Neste capítulo, vamos estudar outra unidade para medir arco e ângulo: o **radiano**, definido a seguir.

Seja $\overset{\frown}{AB}$ um arco contido em uma circunferência de raio r e centro O tal que o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ seja igual a r.

- Define-se a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ como **um radiano** (1 rad).
- Define-se a medida do ângulo $A\hat{O}B$ como 1 rad.

$$m(\overset{\frown}{AB}) = m(A\hat{O}B) = 1 \text{ rad}$$



Ou seja, um radiano (1 rad) é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

A medida da circunferência em radiano

Sabemos que uma circunferência mede 360°. Qual será sua medida em radiano?

Para responder a essa pergunta, consideremos uma circunferência cujo raio tenha medida r. Como o comprimento dessa circunferência é $2\pi r$, podemos obter sua medida x, em radiano, por meio de uma regra de três:

Medida do arco		Comprimento do arco
1 rad	———	r
x	———	$2\pi r$

Logo: $x = \dfrac{2\pi r}{r} \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$

Assim, concluímos:

A medida de uma circunferência é 2π rad.

Como $\pi \approx 3{,}14$, essa conclusão nos diz que o raio da circunferência cabe, aproximadamente, 6,28 vezes no comprimento da circunferência.

Transformações de unidades

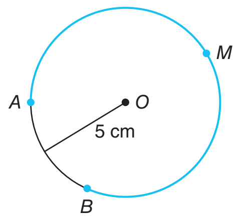
Dizemos que uma medida em radiano é equivalente a uma medida em grau se ambas forem medidas de um mesmo arco; por exemplo, 2π rad é equivalente a 360°, pois são medidas de um arco de uma volta completa. Consequentemente, temos:

π rad é equivalente a 180°

Essa equivalência permite transformar unidades, ou seja, se tivermos a medida de um arco em grau, podemos obter a medida desse arco em radiano e vice-versa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Determinar a medida em radiano do arco $\widehat{AMB}$, de 20 cm, contido na circunferência de raio 5 cm, representados abaixo.



Resolução

Pela definição, nessa circunferência, cada arco de 1 rad tem 5 cm de comprimento. Assim, por meio de uma regra de três, determinamos a medida x, em rad, do arco $\widehat{AMB}$:

Medida do arco (rad)		Comprimento do arco (cm)
1	——	5
x	——	20

Logo: $x = \dfrac{20}{5}$ rad $= 4$ rad

(*Nota*: Dizer que o arco $\widehat{AMB}$ mede 4 rad é o mesmo que dizer que o comprimento do arco é o quádruplo do comprimento do raio.)

2 Determinar a medida, em radiano, equivalente a 150°.

Resolução

Lembrando que π rad é equivalente a 180°, basta resolver a regra de três:

radiano		grau
π	——	180
x	——	150

$\therefore\ x = \dfrac{150\pi}{180}$ radianos $\Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6}$ rad

Logo: $\dfrac{5\pi}{6}$ rad equivalem a 150°

3 Determinar a medida, em grau, equivalente a $\dfrac{\pi}{3}$ rad.

Resolução

radiano		grau
π	——	180
$\dfrac{\pi}{3}$	——	x

$\therefore\ x = \dfrac{180 \cdot \dfrac{\pi}{3}}{\pi}$ graus $\Rightarrow x = 60°$

Logo: 60° equivalem a $\dfrac{\pi}{3}$ rad

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Calcule a medida, em radiano, de um arco de 10 cm contido em uma circunferência com 2,5 cm de raio.

2 Um ponto P da superfície terrestre está localizado a $\dfrac{\pi}{7}$ rad de latitude norte. Considerando que o raio da Terra mede 6.370 km, o menor arco que une o ponto P à linha do equador tem comprimento igual a:

a) 750π km
b) 910π km
c) 450π km
d) 623π km
e) 597π km

(*Nota*: Latitude de um ponto da superfície terrestre é a medida do menor arco de circunferência que liga esse ponto à linha do equador.)

3 (UFMA) No relógio da torre de uma igreja, o ponteiro maior mede 2 m.
Em quanto tempo a ponta móvel desse ponteiro percorre 5π metros?

a) 1 hora e 15 minutos
b) 1 hora e meia
c) 1 hora
d) meia hora
e) 45 minutos

4 Determine a medida, em radiano, equivalente a:

a) 30° b) 120° c) 225° d) 300° e) 240° f) 330°

5 Determine a medida, em grau, equivalente a:

a) $\dfrac{\pi}{4}$ rad
b) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad
c) $\dfrac{7\pi}{6}$ rad
d) $\dfrac{2\pi}{5}$ rad
e) $\dfrac{5\pi}{3}$ rad

6 Uma correia faz girar duas polias de raios 4 cm e 12 cm.

Quando a polia maior gira 240°, a menor gira:

a) $\dfrac{7\pi}{4}$ rad
b) $\dfrac{7\pi}{6}$ rad
c) $\dfrac{4\pi}{3}$ rad
d) 4π rad
e) 6π rad

Resolva os exercícios complementares 1, 2 e 87 a 98.

Seção 3.2

Circunferência trigonométrica

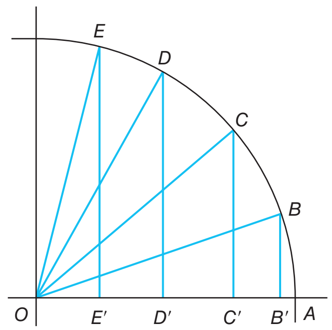
Objetivos

- **Associar** os pontos da circunferência trigonométrica a medidas de arcos.
- **Determinar** as medidas dos arcos côngruos a outro arco.
- **Associar** números reais aos pontos da circunferência trigonométrica.
- **Determinar** os pontos simétricos de um ponto dado, na circunferência trigonométrica.

Termos e conceitos

- **circunferência trigonométrica**
- **quadrante**
- **origem dos arcos**
- **arco trigonométrico**
- **arcos côngruos**

As razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo, não dependem do tamanho do triângulo, mas sim da medida do ângulo. Por isso, para construir uma tabela com essas razões, para vários ângulos, podemos considerar triângulos retângulos que tenham **hipotenusas de mesma medida** e fazer variar a medida do ângulo agudo. Assim, teremos tantos triângulos retângulos quantos quisermos. Na figura ao lado, estão representados alguns desses triângulos.



Note que:

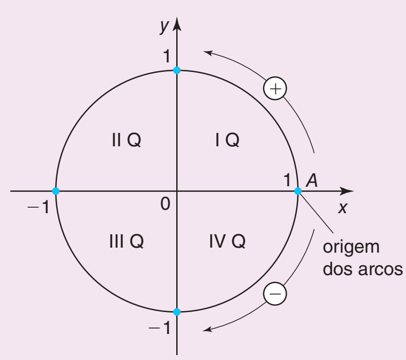
- Os vértices B, C, D e E pertencem a uma mesma circunferência, cujo raio é a medida da hipotenusa dos triângulos.
- Se adotarmos a medida da hipotenusa como unidade (1), o seno e o cosseno de um ângulo agudo de vértice O, em cada um desses triângulos, serão, respectivamente, a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo. Por exemplo, no triângulo retângulo BOB', com $m(B\hat{O}B') = \alpha$, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{BB'}{OB} = \frac{BB'}{1} = BB' \qquad \cos\alpha = \frac{OB'}{OB} = \frac{OB'}{1} = OB'$$

Ou seja, o seno e o cosseno do ângulo de medida α são o cateto oposto a α (BB') e o cateto adjacente a α (OB'), respectivamente, quando a hipotenusa é adotada como unidade (1).

Essas ideias levaram os matemáticos a definir as razões trigonométricas em uma circunferência, chamada de **circunferência trigonométrica**, na qual os conceitos de seno, cosseno e tangente são estendidos também para ângulos não agudos.

Em um plano, considere uma circunferência de raio r unitário ($r = 1$), cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal. Essa estrutura, com as convenções a seguir, é chamada de **circunferência trigonométrica**.

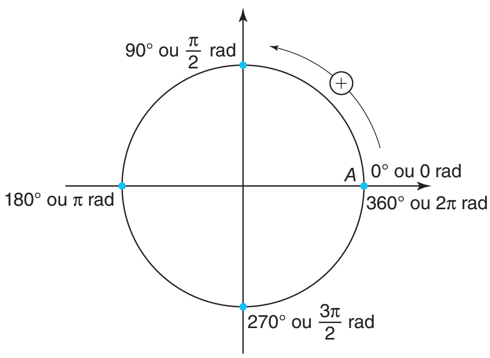


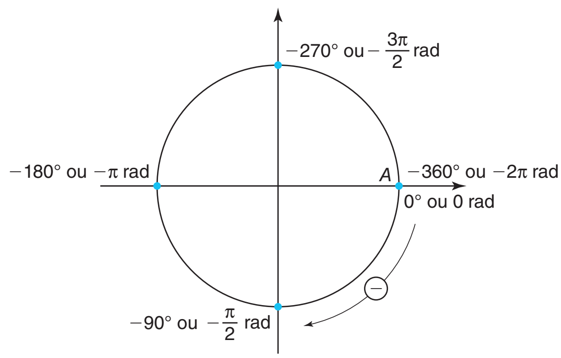
- O ponto $A(1, 0)$ é a **origem dos arcos** a serem medidos na circunferência.
- Se um arco for medido no sentido **horário**, então, ao valor absoluto dessa medida, será atribuído o sinal **negativo** (−).
- Se um arco for medido no sentido **anti-horário**, então, ao valor absoluto dessa medida, será atribuído o sinal **positivo** (+).
- Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas **quadrantes** (Q); esses quadrantes são numerados no sentido anti-horário, a partir do ponto A, conforme a figura.
- Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.

Arcos trigonométricos

Aos pontos da circunferência trigonométrica associamos medidas em grau ou em radiano. Cada medida associada a um ponto M indica a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$.

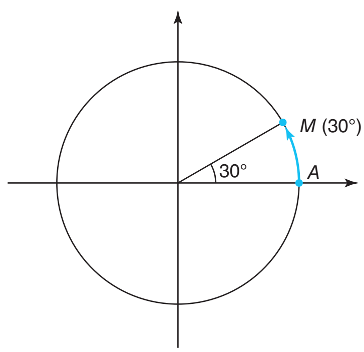
Exemplos





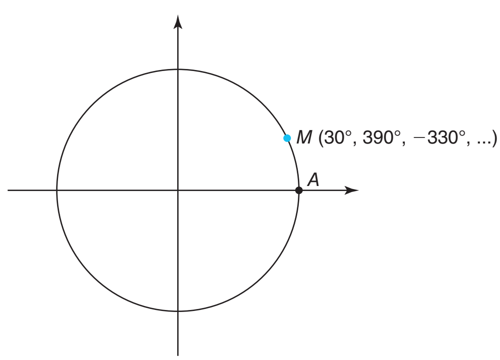
Arcos côngruos

Girando 30°, no sentido anti-horário, a partir do ponto A da circunferência trigonométrica abaixo, paramos no ponto M; logo, 30° é uma medida associada ao ponto M.



Há, porém, infinitas outras medidas associadas ao ponto M. Por exemplo:

- Girando uma volta completa mais 30°, no sentido anti-horário, a partir do ponto A, também paramos no ponto M. Logo, $360° + 30°$, isto é, 390° também é uma medida associada ao ponto M.
- Girando 330°, no sentido horário, a partir do ponto A, paramos no ponto M. Logo, $-330°$ também é uma medida associada ao ponto M.



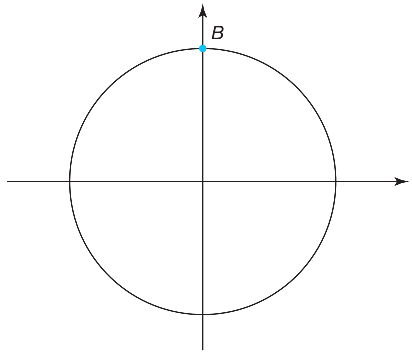
Arcos trigonométricos que têm a mesma extremidade são chamados de **arcos côngruos**.

Se α e β são medidas de arcos côngruos, indicamos: $\alpha \equiv \beta$ (lemos: "α é côngruo a β").

Assim, no exemplo anterior, temos: $30° \equiv 390° \equiv -330°$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4 Calcular as medidas x, em grau, associadas ao ponto B da circunferência trigonométrica abaixo, nas quatro primeiras voltas positivas ($0° \leqslant x < 1.440°$).



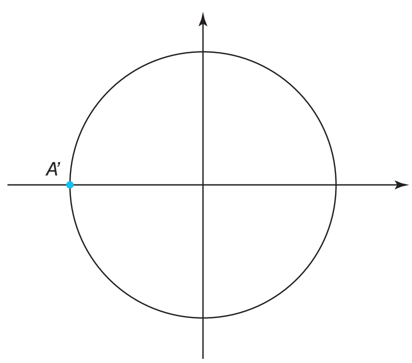
Resolução

A medida em grau associada ao ponto B na 1ª volta positiva é 90°. Assim, as outras medidas associadas ao ponto B são:

- na 2ª volta positiva:
  $90° + 360° = 450°$
- na 3ª volta positiva:
  $90° + 2 \cdot 360° = 810°$
- na 4ª volta positiva:
  $90° + 3 \cdot 360° = 1.170°$

Logo, as medidas dos arcos côngruos procuradas são: 90°, 450°, 810° e 1.170°

5 Determinar as medidas x, em radiano, associadas ao ponto A' da circunferência trigonométrica a seguir, nas quatro primeiras voltas positivas ($0 \leqslant x < 8\pi$).



Resolução

A medida em radiano associada ao ponto A' na 1ª volta positiva é π. Assim, as outras medidas associadas ao ponto A' são:

- na 2ª volta positiva:
  $\pi + 2\pi = 3\pi$
- na 3ª volta positiva:
  $\pi + 2 \cdot 2\pi = 5\pi$
- na 4ª volta positiva:
  $\pi + 3 \cdot 2\pi = 7\pi$

Logo, as medidas dos arcos côngruos procurados são: π, 3π, 5π e 7π

(*Nota*: Ao indicar a medida de um arco trigonométrico em radiano, não é preciso explicitar a unidade rad; basta escrever o número real associado ao ponto extremo do arco. Explicaremos o porquê dessa convenção na página 81.)

6 Calcular a medida x do arco da 1ª volta positiva ($0° \leqslant x < 360°$) que possui a mesma extremidade do arco de 1.140°.

Resolução

Basta desconsiderar do arco de 1.140° todas as voltas completas. Para isso, dividimos 1.140° por 360°:

$$\begin{array}{r|l} 1.140^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} 60^\circ & 3 \end{array}$$

Assim, $1.140° = 3 \cdot 360° + 60°$, ou seja, o arco de 1.140° tem três voltas completas e mais 60°. Logo, desconsiderando as voltas completas, obtemos a medida x do arco côngruo ao arco de 1.140° na 1ª volta positiva: $x = 60°$.

7 Determinar a medida x do arco da 1ª volta positiva ($0 \leqslant x < 2\pi$) que possui a mesma extremidade dos arcos abaixo:

a) $\dfrac{17\pi}{2}$ rad

b) $\dfrac{19\pi}{3}$ rad

Resolução

Como no exercício anterior, basta desconsiderar todas as voltas completas de cada arco. Para isso, vamos transformar a medida de cada arco em uma soma de duas parcelas tal que uma delas represente o total de voltas completas contidas no arco. Isto é:

a) $$\frac{17\pi}{2} = \frac{16\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underbrace{8\pi}_{\text{quatro voltas completas}} + \frac{\pi}{2}$$

Desconsiderando as voltas completas, concluímos que $\dfrac{17\pi}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}$. Assim, a medida x procurada é $\dfrac{\pi}{2}$.

b) $$\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \underbrace{6\pi}_{\text{três voltas completas}} + \frac{\pi}{3}$$

Desconsiderando as voltas completas, concluímos que $\dfrac{19\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}$. Assim, a medida x procurada é $\dfrac{\pi}{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7 A medida de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ é 50°. Determine todas as medidas x associadas à extremidade M, sob cada uma das condições:

a) $0° \leqslant x < 1.080°$ **b)** $-720° \leqslant x < 0°$

8 A medida de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ é $\frac{6\pi}{7}$ rad.

Encontre todas as medidas x associadas à extremidade M, sob cada uma das condições:

a) $0 \leqslant x < 6\pi$ **b)** $-4\pi \leqslant x < 0$

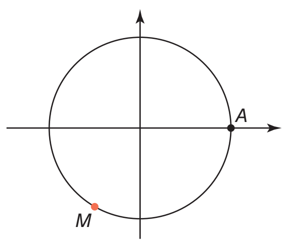
9 Calcule a medida do arco trigonométrico, da 1ª volta positiva, côngruo ao arco de medida:

a) 2.923° **d)** $-400°$ **g)** $-\frac{\pi}{13}$ rad

b) 1.972° **e)** $\frac{45\pi}{11}$ rad **h)** $-\frac{18\pi}{5}$ rad

c) $-40°$ **f)** $\frac{38\pi}{5}$ rad

10 O ponto M, representado abaixo, é extremidade de um arco trigonométrico de 2.040°.



Determine a medida x associada ao ponto M:

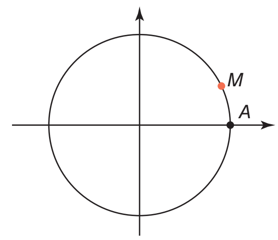
a) com $0° \leqslant x < 360°$, isto é, na 1ª volta do sentido positivo.

b) com $360° \leqslant x < 720°$, isto é, na 2ª volta do sentido positivo.

c) com $720° \leqslant x < 1.080°$, isto é, na 3ª volta do sentido positivo.

d) com $-360° \leqslant x < 0°$, isto é, na 1ª volta do sentido negativo.

11 O ponto M, representado abaixo, é extremidade de um arco trigonométrico de $\frac{121\pi}{6}$ rad.



Encontre a medida x associada ao ponto M:

a) com $x \in [0, 2\pi[$ **c)** com $x \in [4\pi, 6\pi[$

b) com $x \in [2\pi, 4\pi[$ **d)** com $x \in [-2\pi, 0[$

12 (Unicamp-SP) O ponteiro de um relógio de medição funciona acoplado a uma engrenagem de modo que, a cada volta completa da engrenagem, o ponteiro dá $\frac{1}{4}$ de volta em um mostrador graduado de 0° a 360°. No início da medição, o ponteiro encontra-se na posição 0°. Quantos graus indicará o ponteiro quando a engrenagem tiver completado 4.135 voltas?

a) 270° **b)** 160° **c)** 220° **d)** 140° **e)** 20°

Resolva os exercícios complementares 3 a 5.

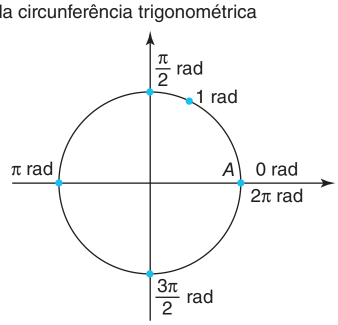
Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica

Vamos considerar a correspondência que associa cada medida em radiano ao número real que a representa. Por exemplo, associamos:

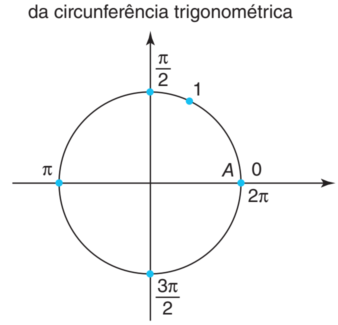
- à medida 0 rad o número real 0;
- à medida 1 rad o número real 1;
- à medida $\frac{\pi}{2}$ rad o número real $\frac{\pi}{2}$;
- à medida π rad o número real π;
- à medida x rad o número real x.

Dessa forma, associamos a cada número real um ponto da circunferência trigonométrica:

Medidas em radiano associadas a pontos da circunferência trigonométrica



Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica



Note que a cada ponto da circunferência trigonométrica estão associados infinitos números reais. Por exemplo, considerando as infinitas voltas que podemos girar nos dois sentidos, horário e anti-horário, o ponto A da circunferência trigonométrica anterior é extremidade dos arcos de medidas:

$$\dots\ -4\pi \text{ rad},\ -2\pi \text{ rad},\ 0 \text{ rad},\ 2\pi \text{ rad},\ 4\pi \text{ rad},\ 6\pi \text{ rad},\ 8\pi \text{ rad},\ \dots$$

Logo, ao ponto A estão associados os infinitos números reais:

$$\dots\ -4\pi,\ -2\pi,\ 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi,\ \dots$$

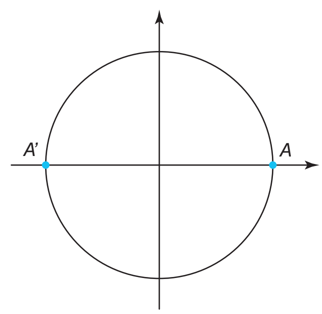
Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π, podemos representar todos esses números reais por:

$$x = 0 + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ ou, simplesmente, } x = k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

É importante ressaltar que existem infinitas expressões diferentes que podem representar os números reais associados ao ponto A. Basta adicionar a qualquer termo da sequência ... -4π, -2π, 0, 2π, 4π, 6π, 8π, ... um múltiplo de 2π; por exemplo: $x = 6\pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8 Obter uma expressão que represente todos os números reais associados aos pontos A ou A' da circunferência trigonométrica ao lado.



Resolução

As medidas algébricas, em radiano, dos infinitos arcos com extremidades em A ou A' são:

$$\dots,\ -3\pi \text{ rad},\ -2\pi \text{ rad},\ -\pi \text{ rad},\ 0 \text{ rad},\ \pi \text{ rad},\ 2\pi \text{ rad},\ 3\pi \text{ rad},\ \dots$$

Logo, os infinitos números reais associados a A ou A' são:

$$\dots,\ -3\pi,\ -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \dots$$

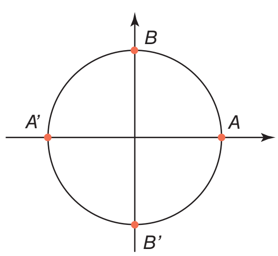
Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é π, podemos representar todos esses números reais por:

$$x = 0 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}, \text{ ou, simplesmente, } x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Qualquer expressão que represente a soma de um termo dessa sequência com um múltiplo de π pode ser dada como resposta; por exemplo, $x = \pi + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13 A circunferência trigonométrica abaixo está dividida em quatro arcos congruentes pelos pontos A, B, A' e B'.



Obtenha:

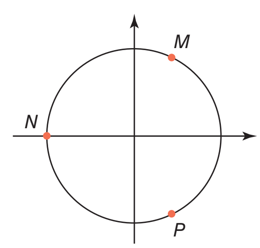
a) uma expressão que represente todos os números reais associados ao ponto A';

b) uma expressão que represente todos os números reais associados ao ponto B;

c) uma expressão que represente todos os números reais associados aos pontos B ou B';

d) uma expressão que represente todos os números reais associados aos pontos A, B, A' ou B'.

14 A circunferência trigonométrica a seguir está dividida em três arcos congruentes pelos pontos M, N e P.



a) Obtenha uma expressão que represente todos os números reais associados aos pontos M, N ou P.

b) Existe outra expressão, além daquela apresentada no item **a**, que represente todos os números reais associados aos pontos M, N ou P? Se existir, apresente uma.

15 A bateria de um relógio analógico durou 2.400 horas e 20 minutos. Nesse período:

a) quantos graus girou o ponteiro das horas?

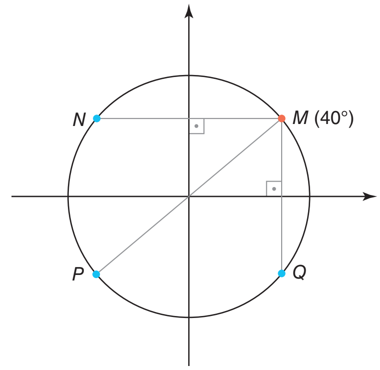
b) quantos radianos girou o ponteiro dos minutos?

c) se o relógio começou a funcionar à meia-noite, que horas estava marcando quando parou de funcionar?

Resolva o exercício complementar 6.

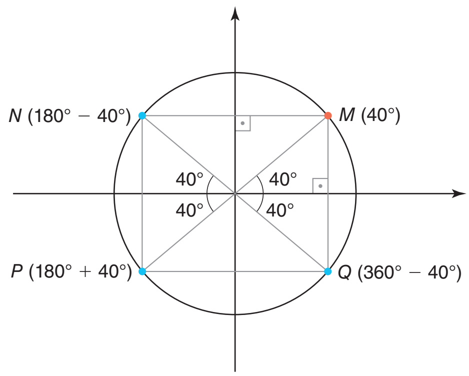
Simetrias

É de grande utilidade saber relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano, pois isso ajudará, mais adiante, a calcular senos, cossenos, tangentes etc. desses arcos.



Para exemplificar, consideremos o ponto *M* da circunferência trigonométrica associado à medida 40°. Pelo ponto *M*, vamos traçar três retas: as perpendiculares aos eixos das ordenadas e das abscissas e a que passa pela origem do sistema, conforme mostra a figura ao lado.

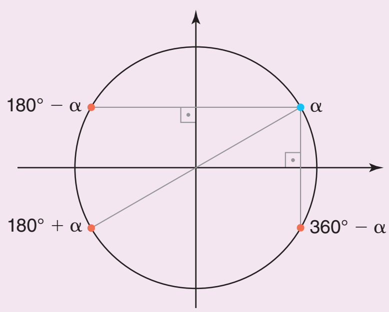
Os pontos *N*, *P* e *Q* são chamados de **simétricos** (ou correspondentes) do ponto *M*. Vamos determinar as medidas associadas a esses pontos considerando apenas a 1ª volta no sentido anti-horário. Para isso, desenhamos o retângulo *MNPQ* e suas diagonais, conforme a figura ao lado. Por congruência de triângulos, obtemos:



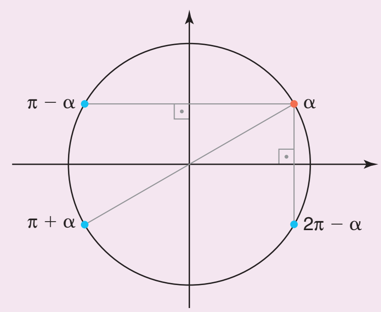
- medida associada ao ponto *N*: $180° - 40° = 140°$;
- medida associada ao ponto *P*: $180° + 40° = 220°$;
- medida associada ao ponto *Q*: $360° - 40° = 320°$.

Raciocinando de maneira análoga para qualquer arco trigonométrico de medida α do primeiro quadrante, temos:

Sendo α uma medida em grau:

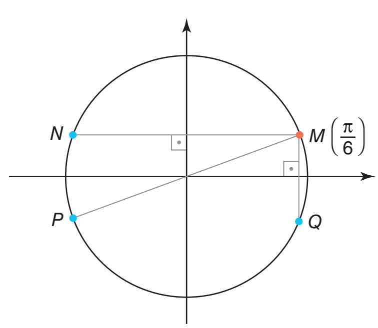


Sendo α uma medida em radiano:



EXERCÍCIO RESOLVIDO

9 O ponto M da circunferência trigonométrica ao lado está associado à medida $\frac{\pi}{6}$ rad. Determinar as medidas associadas aos pontos N, P e Q na 1ª volta positiva.



Resolução

Pelas relações anteriores, temos:

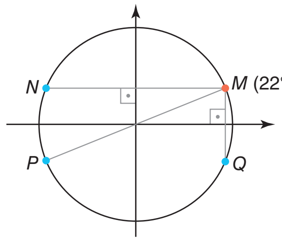
- medida associada ao ponto N: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
- medida associada ao ponto P: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
- medida associada ao ponto Q: $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Logo: $N\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ e $Q\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

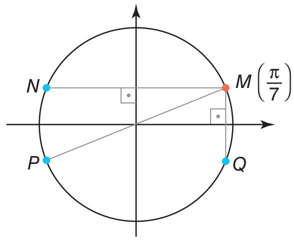
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16 Em cada um dos itens abaixo, encontre as medidas associadas aos pontos N, P e Q na 1ª volta positiva da circunferência trigonométrica.

a)

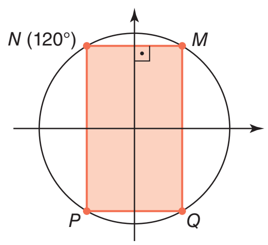


b)

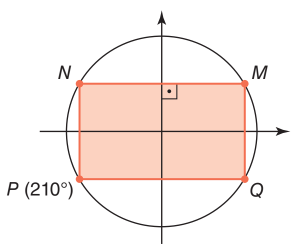


17 Determine as medidas associadas aos vértices dos retângulos inscritos nas circunferências trigonométricas na 1ª volta positiva.

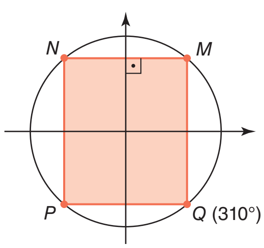
a)



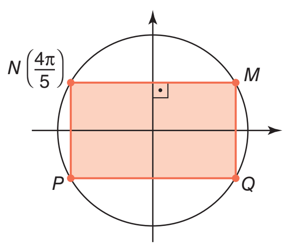
b)



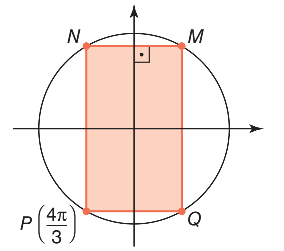
c)



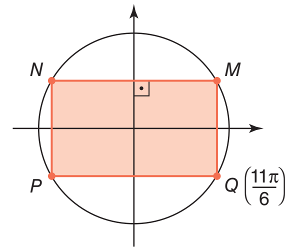
d)



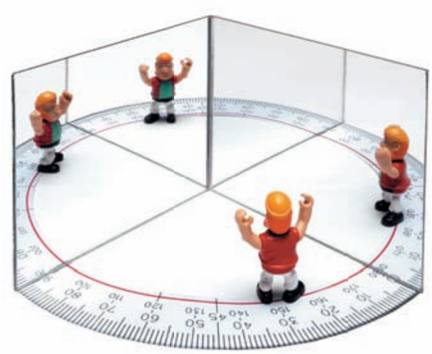
e)



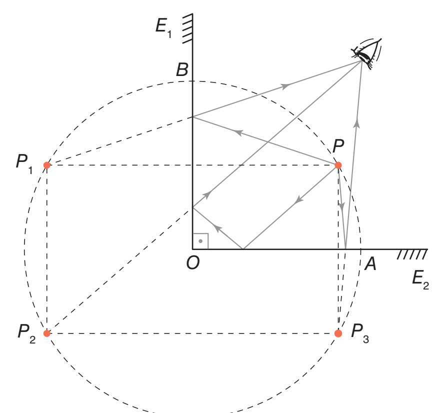
f)



18 Considere dois espelhos planos adjacentes, E_1 e E_2, cujas superfícies refletoras formam entre si um ângulo de 90°.



Quando um ponto P, luminoso ou iluminado, é colocado no interior do ângulo de 90°, as várias reflexões da luz proveniente de P dão origem à formação de três imagens, P_1, P_2 e P_3, tal que P e suas imagens pertencem a uma mesma circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$, conforme mostra o esquema a seguir.



Sabendo que a medida do arco $\widehat{AP_1}$, no sentido anti-horário, é 148°, calcule a medida dos arcos $\widehat{AP}$, $\widehat{AP_2}$ e $\widehat{AP_3}$, nesse mesmo sentido.

Resolva os exercícios complementares 7 e 8.

Seção 3.3

Seno e cosseno de um arco trigonométrico

Objetivos

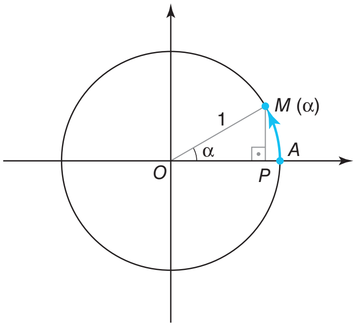
- **Determinar** o seno e o cosseno de um arco trigonométrico de qualquer quadrante.
- **Relacionar** o seno e o cosseno de um arco com o seno e o cosseno de seus arcos correspondentes.
- **Aplicar** a relação fundamental da Trigonometria.

Termos e conceitos

- seno
- cosseno

Com base na ideia de seno e cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, vamos estender o conceito de seno e cosseno para um arco trigonométrico.

Para entender a transição do triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica, considere um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0° < \alpha < 90°$.



Como o raio da circunferência trigonométrica mede 1 e a medida do ângulo central $M\hat{O}A$ é igual à medida do arco $\overset{\frown}{AM}$, em grau, temos no triângulo retângulo OMP:

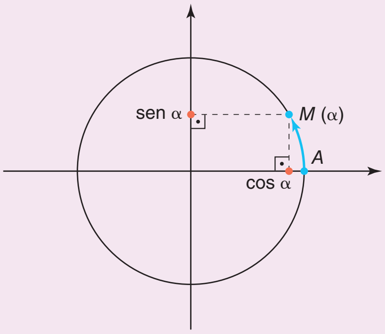
$$\cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{PM}{1} = PM$$

Portanto, $\cos \alpha$ e sen α são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto M.

Ampliamos esse conceito para qualquer arco trigonométrico pela definição a seguir.

Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, chamam-se **cosseno** e **seno** de α a abscissa e a ordenada do ponto M, respectivamente.



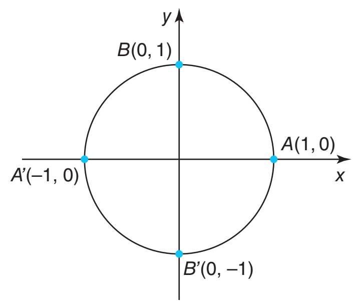
$\cos \alpha$ = abscissa de M

sen α = ordenada de M

Assim, na circunferência trigonométrica, podemos nos referir ao eixo das abscissas como eixo dos cossenos e ao eixo das ordenadas como eixo dos senos.

Exemplo

Vamos determinar o cosseno e o seno de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°. Para isso, marcamos na circunferência trigonométrica os pontos A, B, A' e B' associados a essas medidas, conforme a figura ao lado.



Como a abscissa e a ordenada de cada ponto da circunferência trigonométrica representam, respectivamente, o cosseno e o seno do arco com extremidade no ponto, temos:

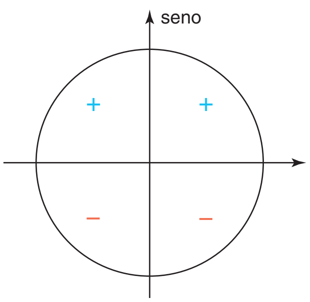
$\cos 0° = 1$	$\text{sen } 0° = 0$
$\cos 90° = 0$	$\text{sen } 90° = 1$
$\cos 180° = -1$	$\text{sen } 180° = 0$
$\cos 270° = 0$	$\text{sen } 270° = -1$
$\cos 360° = 1$	$\text{sen } 360° = 0$

Como qualquer coordenada de um ponto da circunferência trigonométrica é no máximo 1 e no mínimo -1, concluímos:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$$

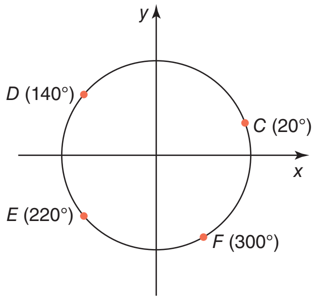
Variação de sinal do seno

Vimos que o seno de um arco é a ordenada da extremidade desse arco. Como os pontos de ordenadas positivas são os do 1º e os do 2º quadrante e os pontos de ordenadas negativas são os do 3º e os do 4º quadrante, temos o seguinte esquema de sinais para o seno:



Exemplo

Os arcos trigonométricos de 20°, 140°, 220° e 300° têm extremidades nos pontos C, D, E e F, respectivamente, conforme mostra a figura:

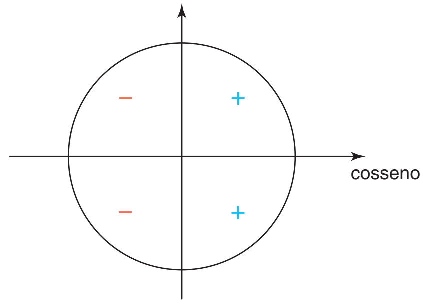


Observando que:

- C e D são pontos do 1º e do 2º quadrante e sen 20° e sen 140° são as ordenadas desses pontos, respectivamente, temos sen 20° e sen 140° positivos;
- E e F são pontos do 3º e do 4º quadrante e sen 220° e sen 300° são as ordenadas desses pontos, respectivamente, temos sen 220° e sen 300° negativos.

Variação de sinal do cosseno

Vimos que o cosseno de um arco é a abscissa da extremidade desse arco. Como os pontos de abscissas positivas são os do 1º e os do 4º quadrante e os pontos de abscissas negativas são os do 2º e os do 3º quadrante, temos o seguinte esquema de sinais para o cosseno:



Exemplo

Na figura do exemplo anterior, observando que:

- *C* e *F* são pontos do 1º e do 4º quadrante e cos 20° e cos 300° são as abscissas desses pontos, respectivamente, temos cos 20° e cos 300° positivos;
- *D* e *E* são pontos do 2º e do 3º quadrante e cos 140° e cos 220° são as abscissas desses pontos, respectivamente, temos cos 140° e cos 220° negativos.

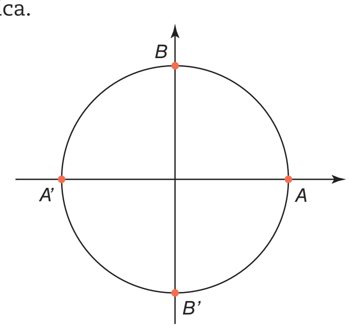
Tabela trigonométrica dos arcos notáveis

Pela igualdade entre as medidas do arco e do ângulo central que determina esse arco na circunferência trigonométrica, concluímos que o seno (ou cosseno) de um ângulo central é igual ao seno (ou cosseno) do arco determinado por esse ângulo na circunferência trigonométrica. Assim, a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) continua válida se considerarmos essas medidas como medidas de arcos trigonométricos.

	30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad	45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad	60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

19 A figura abaixo representa a circunferência trigonométrica.



Calcule:

a) cos 0
b) sen 0
c) $\cos \frac{\pi}{2}$
d) $\text{sen } \frac{\pi}{2}$
e) $\cos \pi$
f) $\text{sen } \pi$
g) $\cos \frac{3\pi}{2}$
h) $\text{sen } \frac{3\pi}{2}$
i) $\cos 2\pi$
j) $\text{sen } 2\pi$
k) cos 720°
l) sen 450°
m) sen 990°
n) cos 810°
o) sen (−270°)
p) cos (−180°)
q) $\cos 12\pi$
r) $\cos 11\pi$
s) $\text{sen } \frac{21\pi}{2}$
t) $\text{sen } \frac{23\pi}{2}$
u) $\text{sen } (-\pi)$
v) $\cos (-3\pi)$

20 Calcule o valor numérico da expressão:

$$E = \frac{\text{sen } x - \cos 2x + \cos 3x}{\text{sen } 3x - \cos x} \text{ para } x = 90°$$

21 Sendo a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \text{ sen } x + \text{sen } 2x + \cos 3x$, calcule:

a) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $f(\pi)$

c) $\dfrac{f(0) + f(2\pi)}{f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}$

22 Calcule o valor numérico da expressão:

$E = \dfrac{\text{sen } x + \cos 2x}{\text{sen } 3x}$ para $x = \dfrac{\pi}{6}$ rad

23 Sendo a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } x$, determine o valor máximo e o valor mínimo de f.

24 (Uece) Assinale a opção verdadeira:

a) $\text{sen } 17° < \cos 74°$

b) $\text{sen } 74° < \cos 17°$

c) $\cos 37° = \cos 143°$

d) $\text{sen } 31° > \text{sen } 150°$

25 Uma partícula se move sobre uma circunferência de centro O e raio de 5 centímetros, no sentido anti-horário e com velocidade constante, completando uma volta a cada 3 segundos. Um sistema cartesiano ortogonal de origem O é fixado no plano da trajetória dessa partícula, e a unidade adotada nos eixos é o centímetro. Considerando que no instante inicial $(t = 0)$ a partícula passa pelo ponto (5, 0), a função que expressa a abscissa da posição da partícula em cada instante t, em segundo, é:

a) $f(t) = 3 \cos \dfrac{5\pi t}{3}$

b) $f(t) = 5 \cos \dfrac{2\pi t}{3}$

c) $f(t) = 3 \cos \dfrac{3\pi t}{2}$

d) $f(t) = 2 \cos \dfrac{5\pi t}{3}$

e) $f(t) = 5 \cos \dfrac{3\pi t}{2}$

26 Na questão anterior, qual das funções abaixo expressa a ordenada da posição da partícula em cada instante t, em segundo?

a) $g(t) = 2 \text{ sen } \dfrac{5\pi t}{3}$

b) $g(t) = \text{sen } \dfrac{7\pi t}{4}$

c) $g(t) = \text{sen } 2\pi t$

d) $g(t) = 5 \text{ sen } \dfrac{2\pi t}{3}$

Resolva os exercícios complementares 9 a 13.

Redução ao 1º quadrante

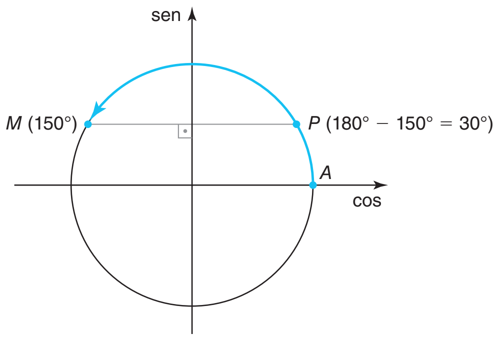
A partir do seno ou cosseno de um arco do 1º quadrante, podemos determinar o seno ou o cosseno de um arco simétrico do 2º, do 3º ou do 4º quadrante. Nos exercícios resolvidos a seguir, utilizaremos a tabela trigonométrica dos arcos notáveis para determinar senos e cossenos desses arcos simétricos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, calcular sen 150° e cos 150°.

Resolução

A extremidade M do arco de 150° pertence ao 2º quadrante. Traçando por M a reta perpendicular ao eixo dos senos, obtemos o ponto P, simétrico de M no 1º quadrante, conforme mostra a figura:



Os pontos M e P têm ordenadas iguais e abscissas opostas. Logo:

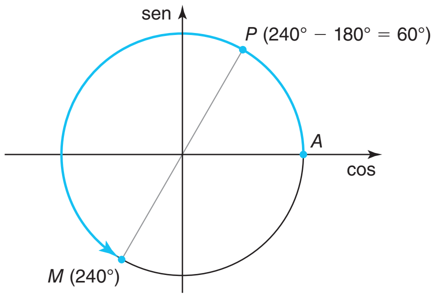
$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$

$\cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determinar sen 240° e cos 240°.

Resolução

A extremidade M do arco de 240° pertence ao 3º quadrante. Traçando por M a reta que passa pelo centro da circunferência, obtemos o ponto P, simétrico de M no 1º quadrante:



Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas opostas. Logo:

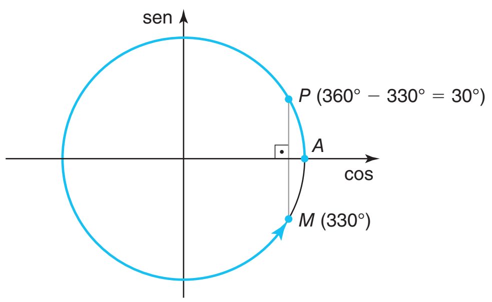
$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

12 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determinar sen 330° e cos 330°.

Resolução

A extremidade M do arco de 330° pertence ao 4º quadrante. Traçando por M a perpendicular ao eixo dos cossenos, obtemos o ponto P, simétrico de M no 1º quadrante:



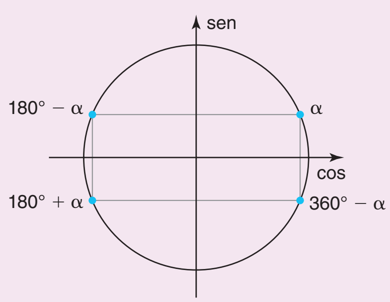
Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas iguais. Logo:

$$\text{sen } 330° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Raciocinando de maneira análoga para qualquer arco trigonométrico de medida α do 1º quadrante, temos as seguintes relações:

Se α é uma medida em grau:



$\text{sen } (180° - \alpha) = \text{sen } \alpha$

$\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$

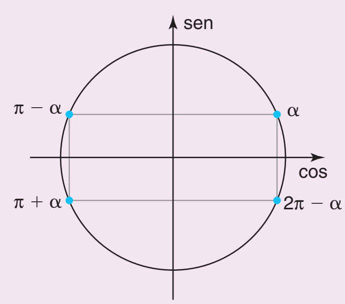
$\text{sen } (180° + \alpha) = -\text{sen } \alpha$

$\cos (180° + \alpha) = -\cos \alpha$

$\text{sen } (360° - \alpha) = -\text{sen } \alpha$

$\cos (360° - \alpha) = \cos \alpha$

Se α é uma medida em radiano:



$\text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha$

$\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

$\text{sen } (\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha$

$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

$\text{sen } (2\pi - \alpha) = -\text{sen } \alpha$

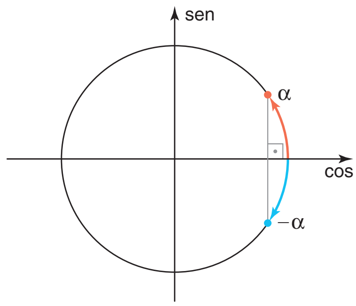
$\cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha$

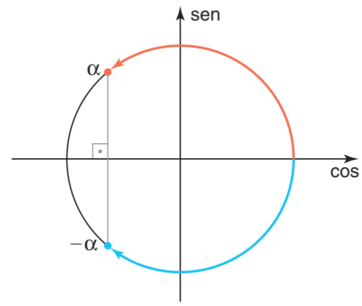
Nota:

Essas relações continuam válidas mesmo que α não seja uma medida do 1º quadrante. Verifique você mesmo.

Arcos de medidas opostas

Arcos de medidas opostas, α e $-\alpha$, têm extremidades simétricas em relação ao eixo das abscissas, como mostra cada uma das figuras abaixo.





Dessa simetria, concluímos que:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \text{sen}(-\alpha) &= -\text{sen}\,\alpha\end{aligned}}$$

Exemplos

a) $\cos(-60°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

b) $\text{sen}(-135°) = -\text{sen}\,135° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

13 Sendo α uma medida em grau, com $\cos\alpha \neq 0$, simplificar a expressão:

$$E = \frac{\cos(360° - \alpha) - \cos(180° - \alpha)}{\cos(180° + \alpha)}$$

Resolução

Sabemos que $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$,
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ e $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$.
Logo:

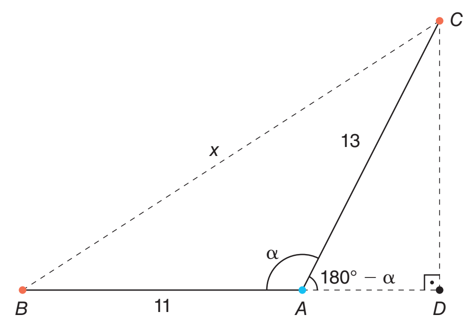
$$E = \frac{\cos(360° - \alpha) - \cos(180° - \alpha)}{\cos(180° + \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha - (-\cos\alpha)}{-\cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{-\cos\alpha} = -2$$

14 De um observatório astronômico A da Terra, um astrônomo estuda duas estrelas, B e C, constatando que o ângulo obtuso $B\hat{A}C$ mede α, com $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$, que $AB = 11$ anos-luz e $AC = 13$ anos-luz. Com esses dados, o cientista calculou a distância entre as estrelas B e C. Qual é essa distância em ano-luz?

Resolução

Indicando por x a distância procurada e por D a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, esquematizamos:



Assim, temos:

$$\begin{cases} \cos(180° - \alpha) = \dfrac{AD}{13} \\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{5}{13} \end{cases}$$

Logo: $\dfrac{AD}{13} = \dfrac{5}{13} \Rightarrow AD = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos ACD e BCD, obtemos:

$13^2 = 5^2 + (CD)^2 \Rightarrow CD = 12$

e

$x^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow x = 20$

Portanto, a distância entre as estrelas B e C é igual a 20 anos-luz.

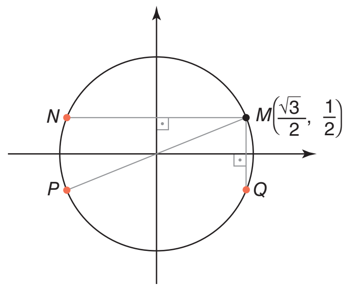
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, calcule:

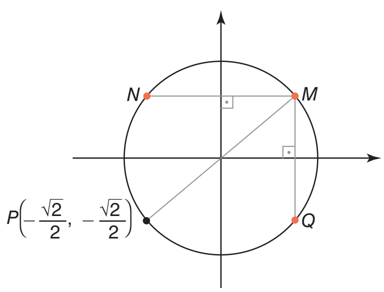
a) sen 120°	**d)** cos 210°
b) cos 120°	**e)** sen 300°
c) sen 210°	**f)** cos 300°

28 Em cada um dos itens a seguir, determine as coordenadas dos pontos assinalados.

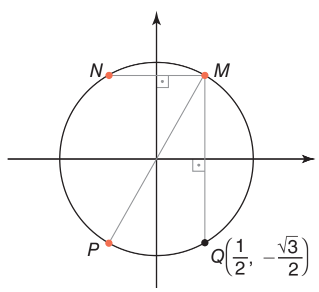
a)



b)



c)



29 Consultando o exercício anterior, calcule:

a) sen $\frac{2\pi}{3}$	**f)** sen $\frac{3\pi}{4}$
b) cos $\frac{2\pi}{3}$	**g)** cos $\frac{3\pi}{4}$
c) sen $\frac{7\pi}{6}$	**h)** sen $\frac{5\pi}{4}$
d) cos $\frac{7\pi}{6}$	**i)** cos $\frac{5\pi}{4}$
e) sen $\frac{5\pi}{3}$	**j)** sen $\frac{7\pi}{4}$

30 Calcule o valor de:

a) sen (−30°)	**d)** cos (−300°)
b) cos (−30°)	**e)** sen (−1.485°)
c) sen (−300°)	**f)** cos (−1.230°)

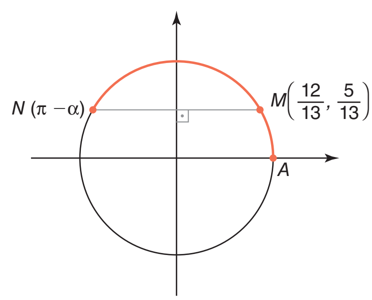
g) sen $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	**k)** cos $\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$
h) cos $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$	**l)** sen $\frac{25\pi}{6}$
i) sen $\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$	**m)** sen $\frac{33\pi}{4}$
j) cos $\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$	

31 Simplifique a expressão:

$$E = \frac{\cos(180° + x) + \text{sen}(180° + x) + \text{sen}(180° - x)}{\cos(360° - x)},$$

com cos x ≠ 0.

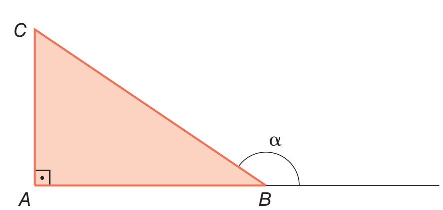
32 Na circunferência trigonométrica abaixo, as coordenadas do ponto M são $\frac{12}{13}$ e $\frac{5}{13}$, e a medida do arco $\overset{\frown}{AN}$ na 1ª volta positiva é $\pi - \alpha$.



Calcule:

a) sen α	**d)** sen (−α)
b) cos α	**e)** cos (2π − α)
c) cos (π + α)	

33 Calcule a medida do cateto $\overline{AB}$ do triângulo retângulo ABC, abaixo, sabendo que $BC = 12$ cm e que $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$.



34 Uma rampa reta e plana, de 8 m de comprimento, une dois pisos de uma garagem e forma um ângulo obtuso de medida α com o piso plano e horizontal inferior tal que $\cos\alpha = -\frac{5}{8}$. Calcule a altura do piso superior em relação ao inferior.

Resolva os exercícios complementares 14 a 20, 97 e 98.

Relação fundamental da Trigonometria

Para qualquer arco trigonométrico de medida α, temos:

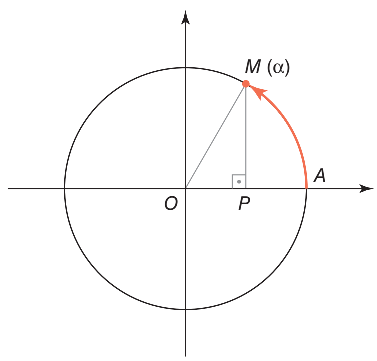
$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Demonstração

Seria possível demonstrar essa relação por um único caso. Porém, para entendê-la melhor, vamos separá-la em três casos.

1º caso

Seja α a medida de um arco trigonométrico do 1º quadrante.



Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo *OMP*, temos:

$$(MP)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$$

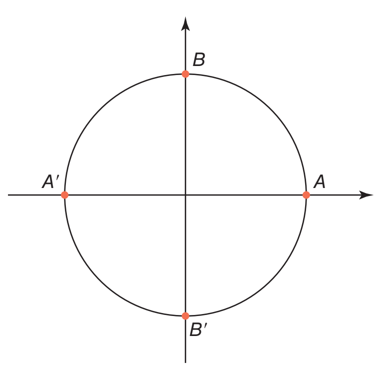
Como a ordenada *MP* e a abscissa *OP* são, respectivamente, o seno e o cosseno de α e $OM = 1$, concluímos:

$$(\text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = (1)^2$$

$$\therefore\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

2º caso

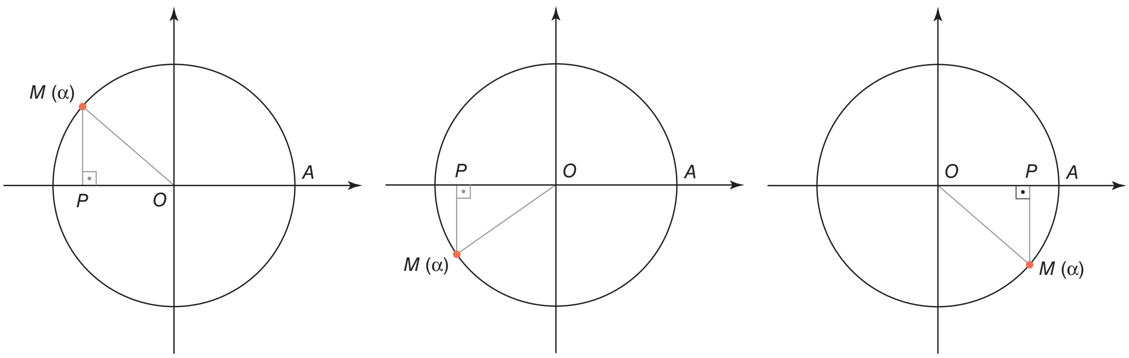
Seja α a medida de um arco trigonométrico com extremidade sobre um dos eixos coordenados.



- No ponto *A*, em que $\text{sen}\,\alpha = 0$ e $\cos\alpha = 1$, constatamos a validade da relação fundamental, pois $0^2 + 1^2 = 1$.
- No ponto *B*, em que $\text{sen}\,\alpha = 1$ e $\cos\alpha = 0$, constatamos a validade da relação fundamental, pois $1^2 + 0^2 = 1$.
- No ponto *A'*, em que $\text{sen}\,\alpha = 0$ e $\cos\alpha = -1$, constatamos a validade da relação fundamental, pois $0^2 + (-1)^2 = 1$.
- No ponto *B'*, em que $\text{sen}\,\alpha = -1$ e $\cos\alpha = 0$, constatamos a validade da relação fundamental, pois $(-1)^2 + 0^2 = 1$.

3º caso

Seja α a medida de um arco trigonométrico do 2º, do 3º ou do 4º quadrante.



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo *OMP* de cada figura, temos:

$$(MP)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$$

Em cada um dos triângulos *OMP*, podemos afirmar que: $MP = |\text{sen }\alpha|$, $OP = |\cos\alpha|$ e $OM = 1$ (raio). Logo:

$$|\text{sen }\alpha|^2 + |\cos\alpha|^2 = 1$$

Lembrando a propriedade $|x|^2 = x^2$, do módulo de um número real x, concluímos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Note que, com base nessa relação, podemos expressar o seno em função do cosseno e vice-versa:

$$\boxed{\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

15 Dado que $\text{sen }\alpha = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcular o valor de $\cos\alpha$.

Resolução

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\therefore \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como α é uma medida do 2º quadrante, concluímos que $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

16 Determinar os valores de sen x e de cos x sabendo que $\text{sen }x = 3\cos x$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Resolução

$$\begin{cases} \text{sen }x = 3\cos x & \text{(I)} \\ \text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$(3\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 10\cos^2 x = 1$

$\therefore \cos^2 x = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$

Como x é uma medida do 3º quadrante, temos:

$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

Substituindo cos x por $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ em (I), obtemos:

$\text{sen }x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

17 Determinar m, com $m \in \mathbb{R}$, tal que $\text{sen }\beta = \frac{m}{6}$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{4m}}{3}$.

Resolução

$\text{sen}^2\,\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \left(\frac{m}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4m}}{3}\right)^2 = 1$

$\therefore \frac{m^2}{36} + \frac{4m}{9} = 1 \Rightarrow m^2 + 16m - 36 = 0$

$\Delta = (16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 400$

$\therefore m = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{-16 \pm 20}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 2$ ou $m = -18$

Observe que a igualdade $\cos\beta = \frac{\sqrt{4m}}{3}$ é absurda para $m = -18$, pois no conjunto $\mathbb{R}$ não existe raiz quadrada de número negativo; logo, -18 não pode ser admitido como valor de m. Concluímos, então, que $m = 2$.

18 Resolver, na variável x, a equação:
$x^2 - 2x + \text{sen}^2\,\alpha = 0$

Resolução

Na variável x, a equação é do 2º grau. Então:
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \text{sen}^2\,\alpha$
$\therefore \Delta = 4 - 4\,\text{sen}^2\,\alpha = 4(1 - \text{sen}^2\,\alpha)$
Pela relação fundamental, $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$; temos $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$ e, portanto, $\Delta = 4\cos^2\alpha$.

Assim:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4\cos^2\alpha}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\cos\alpha}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 1 + \cos\alpha$ ou $x = 1 - \cos\alpha$

Concluímos, então, que o conjunto solução da equação é:
$S = \{1 + \cos\alpha, 1 - \cos\alpha\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

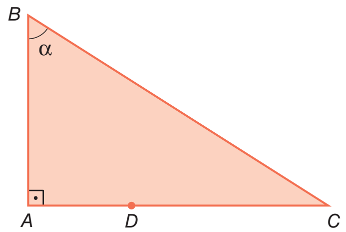
35 Dado que $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule o valor de $\cos\alpha$.

36 Sendo $\text{sen}\,\alpha = -\frac{5}{13}$ e $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcule o valor de $\cos\alpha$.

37 Determine $\text{sen}\,\beta$ e $\cos\beta$ sabendo que $\text{sen}\,\beta = 2\cos\beta$ e $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

38 Obtenha m, com $m \in \mathbb{R}$, tal que: $\text{sen}\,x = \frac{m}{4}$ e $\cos x = \frac{\sqrt{m+1}}{2}$

39 No triângulo retângulo ABC abaixo, a hipotenusa $\overline{BC}$ mede 51 cm, $\text{sen}\,\alpha = \frac{15}{17}$ e a distância do ponto D ao vértice C é 30,6 cm.
Calcule a distância do ponto D à hipotenusa $\overline{BC}$.

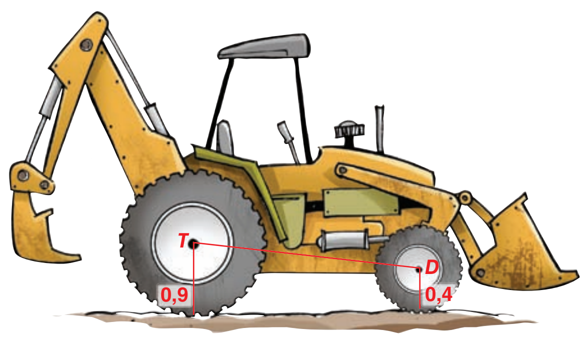


40 Dado que $3\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine o valor de sen x.
(*Sugestão*: Substitua $\cos x$ por y.)

41 Determine o valor de $\cos x$ sabendo que $4\cos^2 x + 9\,\text{sen}\,x - 6 = 0$.
(*Sugestão*: Substitua $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2\,x$.)

42 (Vunesp) A expressão $1 - 2\,\text{sen}^2\,x + \text{sen}^4\,x + \text{sen}^2\,x \cdot \cos^2 x$ é equivalente a:
a) $\cos^2 x$ **b)** $2\cos^2 x$ **c)** $\cos^3 x$ **d)** $\cos^4 x + 1$ **e)** $\cos^4 x$

43 Cada pneu traseiro de um trator tem raio de 0,9 m e cada pneu dianteiro tem raio de 0,4 m.
Calcule a distância entre os centros T e D de dois pneus de um mesmo lado do trator, sabendo que a reta $\overleftrightarrow{TD}$ forma um ângulo obtuso de medida α com o solo plano tal que $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.



Resolva os exercícios complementares 21 a 27.

Tangente de um arco trigonométrico

Objetivos

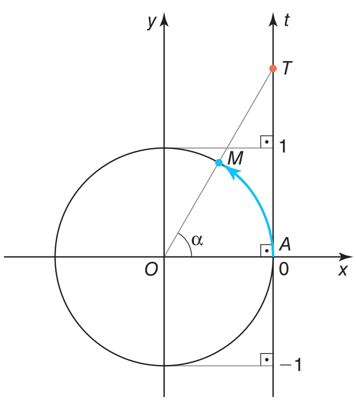
- **Determinar** a tangente de um arco trigonométrico de qualquer quadrante.
- **Relacionar** a tangente de um arco com a tangente de seus arcos correspondentes.

Termo e conceito

- **eixo das tangentes**
- **tangente**

Assim como fizemos para o seno e o cosseno, vamos estender o conceito de tangente para um arco trigonométrico tomando por base a ideia de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Para compreender essa extensão, considere o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0° < \alpha < 90°$, e o eixo real t de origem A, com a mesma direção e a mesma orientação do eixo Oy e com a mesma unidade adotada nos eixos coordenados. Para determinar a tangente do arco $\overset{\frown}{AM}$, traçamos a reta $\overleftrightarrow{OM}$ até sua intersecção T com o eixo t.

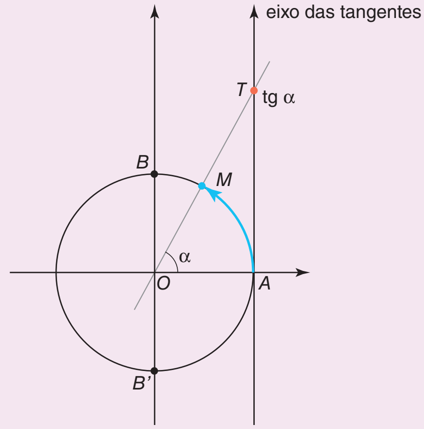
No triângulo retângulo AOT, temos:



$$\text{tg}\ \alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Portanto, a tangente de α é a medida do segmento de reta $\overline{AT}$ contido no eixo real t, que será chamado, de agora em diante, de **eixo das tangentes**. Ampliando essa ideia, vamos definir a tangente para qualquer arco trigonométrico cuja extremidade não pertença ao eixo das ordenadas.

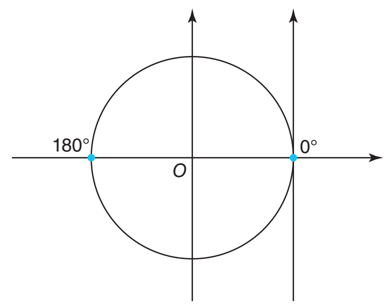
Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das ordenadas, chama-se **tangente de α** a ordenada do ponto T, que é a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OM}$ com o eixo das tangentes.



Observe que se o ponto M coincidir com B ou com B', as retas $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{OB'}$ não interceptam o eixo das tangentes. Por isso dizemos que **não existe** tangente de um arco com extremidade em B ou em B'; ou seja, na 1ª volta da circunferência trigonométrica, não existe tg 90° nem tg 270°.

Exemplo

Para determinar tg 0° e tg 180°, marcamos na circunferência trigonométrica os pontos associados a 0° e a 180°, conforme a figura ao lado.

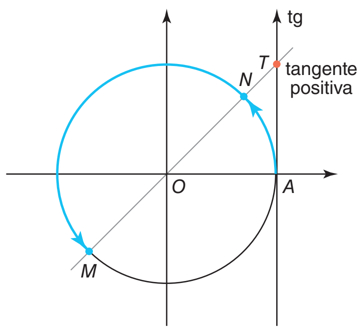


Como as retas que passam por esses pontos e pelo centro da circunferência interceptam o eixo das tangentes no ponto de ordenada zero, concluímos:

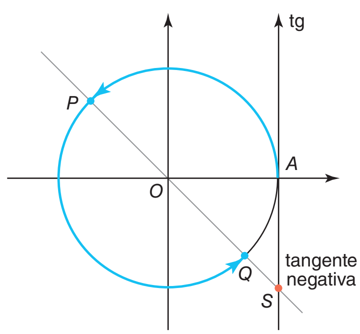
$$\text{tg } 0° = 0 \text{ e tg } 180° = 0$$

Variação de sinal da tangente

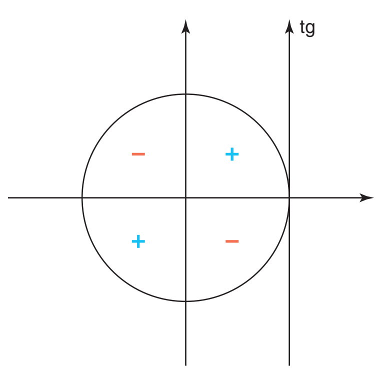
Se um arco trigonométrico tiver a extremidade no 1º ou no 3º quadrante, o prolongamento do raio que passa por essa extremidade interceptará o eixo das tangentes em um ponto *T* de ordenada positiva.



Se um arco trigonométrico tiver a extremidade no 2º ou no 4º quadrante, o prolongamento do raio que passa por essa extremidade interceptará o eixo das tangentes em um ponto *S* de ordenada negativa.



Ou seja, a tangente é positiva para os arcos do 1º e do 3º quadrante e negativa para os arcos do 2º e do 4º quadrante. Em resumo, essa variação de sinal pode ser assim representada:



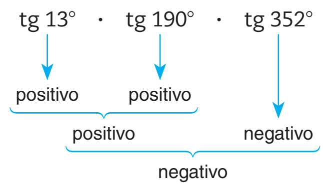
EXERCÍCIO RESOLVIDO

19 Determinar o sinal do produto: $P = \text{tg } 13° \cdot \text{tg } 190° \cdot \text{tg } 352°$

Resolução

Os arcos de medidas 13°, 190° e 352° têm extremidades no 1º, no 3º e no 4º quadrante, respectivamente. Logo: $\text{tg } 13° > 0$; $\text{tg } 190° > 0$; $\text{tg } 352° < 0$

Assim:



Então, P é negativo.

A tangente como razão do seno pelo cosseno

No estudo do triângulo retângulo, vimos que a tangente de um ângulo agudo pode ser obtida pela razão do seno pelo cosseno desse ângulo. É possível generalizar essa propriedade para a tangente de qualquer arco trigonométrico de medida α, com $\cos \alpha \neq 0$, conforme o teorema a seguir.

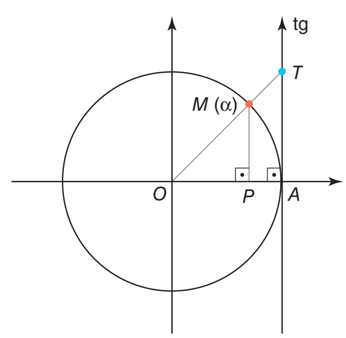
> Se um arco trigonométrico tem medida α, com $\cos \alpha \neq 0$, então $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$.

Demonstração

Para facilitar, vamos separar a demonstração em dois casos.

1º caso

Seja α a medida de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ com extremidade em M no 1º quadrante, ou seja, $0° < \alpha < 90°$. Traçando a reta $\overleftrightarrow{OM}$, obtemos:



Pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos $\triangle OTA \sim \triangle OMP$. Portanto:

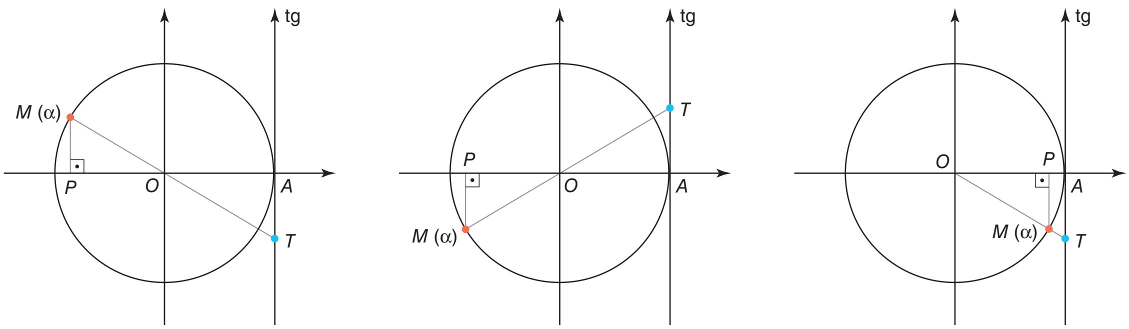
$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP}$$

Como $AT = \text{tg } \alpha$, $OA = 1$, $PM = \text{sen } \alpha$ e $OP = \cos \alpha$, concluímos:

$$\frac{\text{tg } \alpha}{1} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

2º caso

Seja α a medida de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ com extremidade em M no 2º, 3º ou 4º quadrante. Traçando a reta $\overleftrightarrow{OM}$, obtemos:



Pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos, em cada uma das três figuras, $\triangle OTA \sim \triangle OMP$. Portanto:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP}$$

Como $AT = |\text{tg}\ \alpha|$, $OA = 1$, $PM = |\text{sen}\ \alpha|$ e $OP = |\cos \alpha|$, temos:

$$\frac{|\text{tg}\ \alpha|}{1} = \frac{|\text{sen}\ \alpha|}{|\cos \alpha|} \qquad \text{(I)}$$

Observamos que:

- no 2º quadrante, temos: $\text{sen}\ \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$ e $\text{tg}\ \alpha < 0$;
- no 3º quadrante, temos: $\text{sen}\ \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$ e $\text{tg}\ \alpha > 0$;
- no 4º quadrante, temos: $\text{sen}\ \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$ e $\text{tg}\ \alpha < 0$.

Pelas observações acima, concluímos que, em todos os casos, a identidade (I) também é verificada sem os módulos, ou seja:

$$\frac{\text{tg}\ \alpha}{1} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

20 Dado $\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcular $\text{tg}\ \alpha$.

Resolução

$$\begin{cases} \text{sen}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{11}}{6} & \text{(I)} \\ \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{11}{36} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{5}{6}$$

Como α é uma medida associada a um ponto do 2º quadrante, temos:

$$\cos \alpha = -\frac{5}{6}$$

Logo: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{-\frac{5}{6}} = -\dfrac{\sqrt{11}}{5}$

21 Dado $\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{2}$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcular $\text{sen}\ \alpha$ e $\cos \alpha$.

Resolução

$$\begin{cases} \text{tg}\ \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \alpha = 2\ \text{sen}\ \alpha & \text{(I)} \\ \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$\text{sen}^2\ \alpha + (2\ \text{sen}\ \alpha)^2 = 1 \Rightarrow 5\ \text{sen}^2\ \alpha = 1$

$\therefore \text{sen}^2\ \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Como α é medida associada a um ponto do 3º quadrante, temos: $\text{sen}\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Substituindo $\text{sen}\ \alpha$ por $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ em (I), obtemos:

$\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

44 Calcule:

a) $\text{tg } 2\pi$ b) $\text{tg } \dfrac{3\pi}{2}$ c) $\text{tg } 3\pi$ d) $\text{tg } (-\pi)$

45 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações:

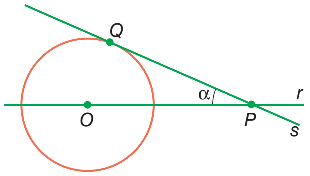
a) $\text{tg } \dfrac{\pi}{5} \cdot \text{tg } \dfrac{4\pi}{2} > 0$ b) $\dfrac{\text{tg } \dfrac{5\pi}{9}}{\text{tg } \dfrac{2\pi}{9}} < 0$ c) $\text{tg } \dfrac{13\pi}{18} + \text{tg } \dfrac{4\pi}{15} < 0$

46 Sabendo que $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$ e $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule tg α.

47 Calcule o valor de tg α sabendo que $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{7}$ e $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

48 Quais são os valores de sen α e cos α tal que $\text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4}$ e $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$?

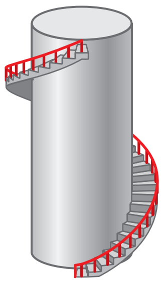
49 Uma reta *r* passa pelo centro de uma circunferência cujo raio mede 2 cm. Essa circunferência tangencia a reta *s* em Q, conforme mostra a figura.



A medida α do ângulo agudo formado por *r* e *s* é tal que $\cos \alpha = \dfrac{15}{17}$. Calcule a medida do segmento $\overline{PQ}$.

50 Uma escada em espiral será construída em torno de um reservatório cilíndrico de 15 m de altura, dando exatamente uma volta ao redor do reservatório, desde um ponto da base inferior até um ponto da base superior. O engenheiro responsável pelo projeto calculou que a inclinação da escada em relação ao plano horizontal deve ser α rad, em toda a sua extensão, com $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Calcule a medida do raio da base do reservatório.



Resolva os exercícios complementares 28 a 35.

Tabela trigonométrica dos arcos notáveis

A tabela apresentada na página 87 pode ser completada com os valores da tangente dos arcos notáveis, bastando para isso dividir o seno pelo cosseno de cada arco.

	30° ou $\dfrac{\pi}{6}$ rad	45° ou $\dfrac{\pi}{4}$ rad	60° ou $\dfrac{\pi}{3}$ rad
sen	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
tg	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Redução ao 1º quadrante

Conhecida a tangente de um arco trigonométrico do 1º quadrante, podemos calcular a tangente do correspondente desse arco em qualquer quadrante, conforme veremos no exercício resolvido a seguir.

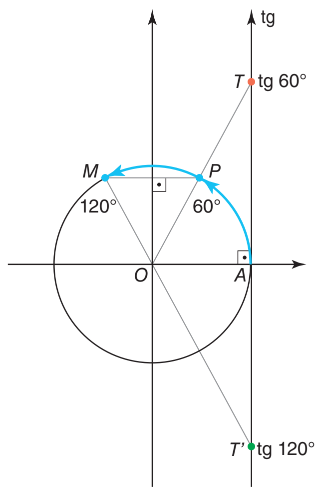
EXERCÍCIO RESOLVIDO

22 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determinar o valor de:

a) tg 120° **b)** tg 210° **c)** tg 300°

Resolução

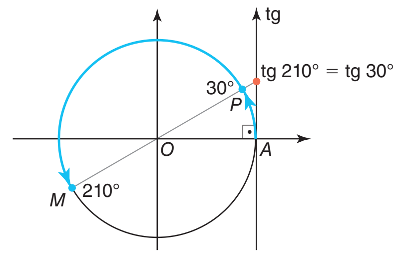
a) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de 120° é o ponto *P*, extremidade do arco de 60°.



Como os triângulos *OTA* e *OT'A* são congruentes, temos que os pontos *T* e *T'* têm ordenadas opostas. Assim, concluímos:

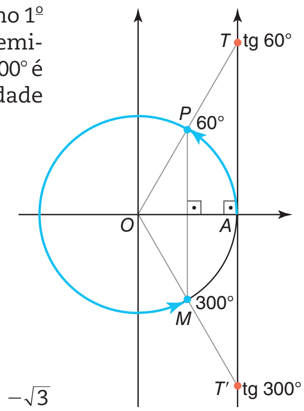
$\text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

b) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de 210° é o ponto *P*, extremidade do arco de 30°.



Assim: $\text{tg } 210° = \text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de 300° é o ponto *P*, extremidade do arco de 60°.



Assim:

$\text{tg } 300° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

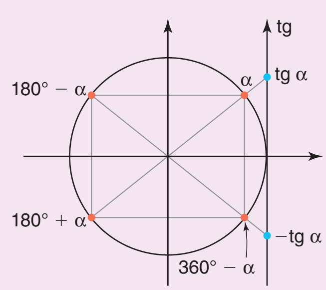
Resumindo:

Sendo α a medida, em grau, associada a um ponto do 1º quadrante, temos:

$\text{tg } (180° - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

$\text{tg } (180° + \alpha) = \text{tg } \alpha$

$\text{tg } (360° - \alpha) = -\text{tg } \alpha$



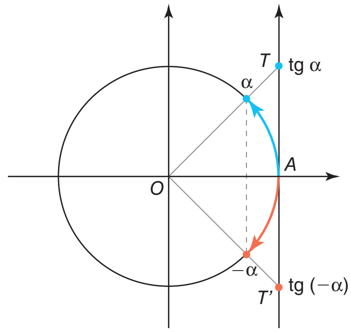
Se α for uma medida em radiano, essas relações devem ser expressas por:

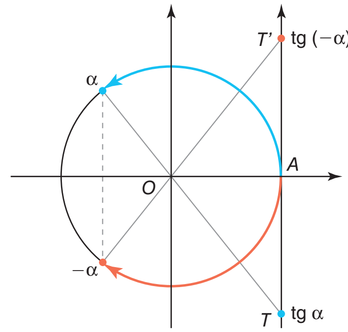
- $\text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$
- $\text{tg } (\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha$
- $\text{tg } (2\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

Essas igualdades se mantêm, mesmo que α esteja associado a um ponto de outro quadrante. Verifique.

Arcos de medidas opostas

Considere dois arcos trigonométricos de medidas opostas α e $-\alpha$. Os prolongamentos dos raios que passam pelas extremidades desses arcos interceptam o eixo das tangentes nos pontos T e T', conforme as figuras abaixo.





Como os triângulos OTA e $OT'A$ são congruentes, concluímos que os pontos T e T' têm ordenadas opostas, portanto:

$$\boxed{\text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha}$$

Exemplos

a) $\text{tg}\,(-60°) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

b) $\text{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{4} = -1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

51 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, calcule:

a) $\text{tg}\,120°$
b) $\text{tg}\,135°$
c) $\text{tg}\,210°$
d) $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{3}$
e) $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{4}$
f) $\text{tg}\,\dfrac{11\pi}{4}$
g) $\text{tg}\,\dfrac{20\pi}{3}$
h) $\text{tg}\,\dfrac{17\pi}{6}$

52 Calcule o valor da expressão:

$$E = \text{tg}^2\,\frac{25\pi}{3} + \text{tg}\,\frac{51\pi}{4} - \text{tg}\,\frac{45\pi}{4}$$

53 Simplifique as expressões:

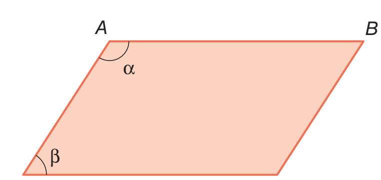
a) $E = \dfrac{\text{tg}\,(\pi + \alpha) - \text{tg}\,(2\pi - \alpha)}{\text{tg}\,(\pi - \alpha) + \text{tg}\,(-\alpha)}$, em que $\text{tg}\,\alpha \neq 0$

b) $E = \dfrac{\text{tg}\,(180° + x) + \text{tg}\,(180° - x) + \text{tg}\,(360° - x)}{\text{sen}\,(360° - x)}$,

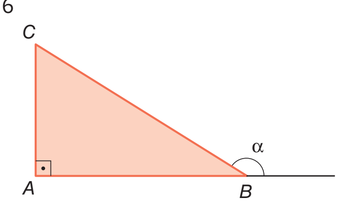
com $\text{sen}\,x \neq 0$

54 No paralelogramo representado abaixo, sabe-se que $\text{tg}\,\alpha = -2{,}6$.

Calcule:
a) $\text{tg}\,\beta$
b) $\text{tg}\,(\alpha + \beta)$
c) $\text{tg}\,(2\alpha + \beta)$

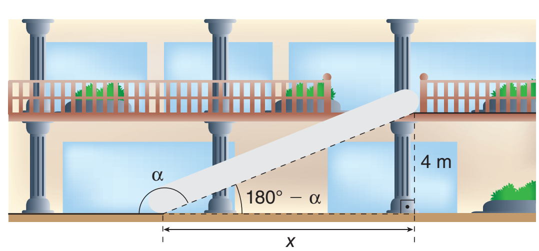


55 Calcule a medida do cateto $\overline{AB}$ do triângulo retângulo ABC a seguir sabendo que $AC = 10$ cm e que $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{5}{6}$



56 Calcule:
a) $\text{tg}\,(-45°)$
b) $\text{tg}\,(-120°)$
c) $\text{tg}\,(-300°)$

57 Em um *shopping center*, uma rampa plana e reta une dois pisos horizontais e forma um ângulo obtuso de medida α com o piso inferior, tal que $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{2}{5}$.



Uma pessoa que percorre toda essa rampa desloca-se verticalmente 4 m. Qual é o deslocamento horizontal dessa pessoa?

Resolva os exercícios complementares 36 a 42.

Equações trigonométricas

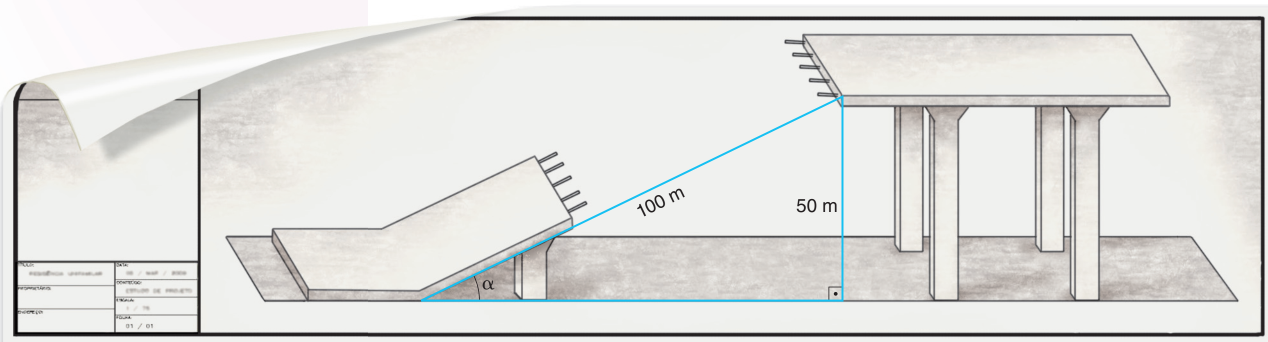
Objetivo

- **Resolver** equações trigonométricas.

Várias situações do cotidiano envolvem questões sobre distâncias e ângulos. Alguns desses problemas necessitam da resolução de equações trigonométricas, como ilustra a situação a seguir.

Um engenheiro projetou uma rampa reta e plana, com 100 m de comprimento, que vai unir dois patamares horizontais entre os quais há um desnível vertical de 50 m. Iniciada a construção a partir do patamar inferior, determine a inclinação da rampa, ou seja, a medida do ângulo agudo que deve ser mantida constante, entre o plano da rampa e o plano horizontal, para que a construção termine exatamente no nível do patamar superior.

Esquematizando essa situação, temos:



Pelo triângulo formado, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{50}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2}$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, concluímos que $\alpha = 30°$.

Note que, ao determinar o valor de α, obtivemos uma solução da equação $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2}$.

Equações do tipo $\text{sen}\ x = k$, $\cos x = k$ ou $\text{tg}\ x = k$, sendo k uma constante real, são chamadas de **equações trigonométricas imediatas**.

Resolução de uma equação trigonométrica imediata

Resolver, em um universo U, uma equação do tipo $\text{sen}\ x = k$ (ou $\cos x = k$ ou $\text{tg}\ x = k$), sendo k uma constante real, significa obter o conjunto solução S formado por todos os valores pertencentes a U que, atribuídos à variável x, tornam verdadeira a sentença $\text{sen}\ x = k$ (ou $\cos x = k$ ou $\text{tg}\ x = k$).

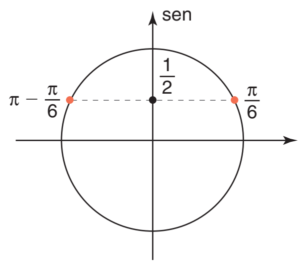
Resolveremos esse tipo de equação pelo método gráfico e, para isso, vamos aplicar alguns tópicos já vistos neste capítulo, como a tabela trigonométrica dos arcos notáveis e as simetrias de pontos na circunferência trigonométrica.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

23 Resolver a equação sen $x = \frac{1}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Para determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada $\frac{1}{2}$, considerando apenas a 1ª volta positiva, adotamos o esquema abaixo.



Observe que os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais sen $x = \frac{1}{2}$ são:

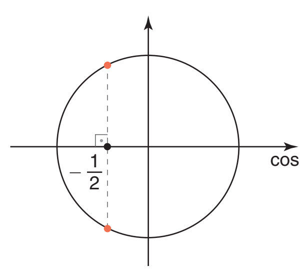
$$x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

24 Resolver a equação cos $x = -\frac{1}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

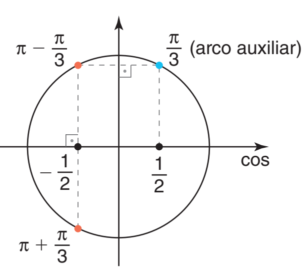
Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm abscissa $-\frac{1}{2}$ considerando apenas a 1ª volta positiva.



Observe, na figura acima, que esses pontos pertencem ao 2º e ao 3º quadrantes e que, portanto, as medidas dos arcos com extremidades nesses pontos não estão na tabela dos arcos notáveis. Para usar a tabela, vamos buscar no 1º quadrante um **arco auxiliar**, isto é, um arco cujo cosseno seja igual a $\frac{1}{2}$.

Nesse caso, o arco auxiliar é $\frac{\pi}{3}$, pois $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Pelas simetrias, transportamos o arco auxiliar para o 2º e o 3º quadrantes, obtendo:



Assim, os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais cos $x = -\frac{1}{2}$ são:

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

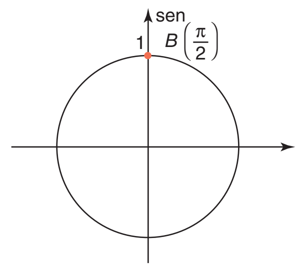
Logo: $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

25 Resolver a equação sen $x = 1$:

a) para $0 \leqslant x < 2\pi$. **b)** em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Precisamos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada igual a 1 considerando apenas a 1ª volta positiva. O único ponto que satisfaz essa condição é o ponto B, representado na circunferência trigonométrica a seguir.



Assim, para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

sen $x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

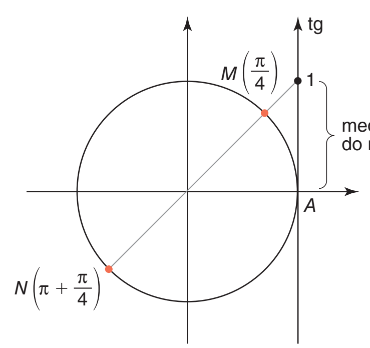
b) No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é formado pelos números reais associados ao ponto B, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica; logo:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

26 Resolver a equação tg $x = 1$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Marcamos no eixo das tangentes o ponto de ordenada igual a 1 e traçamos por ele a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica. Essa reta intercepta a circunferência em dois pontos, M e N, aos quais estão associadas as raízes da equação.



O ponto M está associado à medida $\frac{\pi}{4}$, pois sabemos, pela tabela trigonométrica dos arcos notáveis, que tg $\frac{\pi}{4} = 1$. Para encontrar a medida associada ao ponto N, que é o simétrico de $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ em relação à origem, efetuamos $\pi - \frac{\pi}{4}$, obtendo $N\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Assim, considerando apenas a 1ª volta positiva da circunferência, que é o universo da equação, temos:

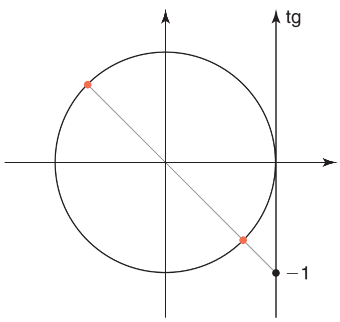
$x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$. Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

27 Resolver a equação tg $x = -1$:

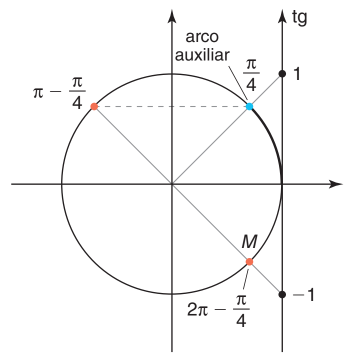
a) para $0 \leqslant x < 2\pi$. b) em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Marcamos no eixo das tangentes o ponto de ordenada -1 e traçamos por ele a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica. Essa reta intercepta a circunferência em dois pontos, conforme a figura abaixo, aos quais estão associadas as raízes da equação.



Como esses pontos estão fora do 1º quadrante, devemos buscar o arco auxiliar nesse quadrante, de modo que possamos usar a tabela trigonométrica dos arcos notáveis:



Pelas simetrias, considerando o universo $[0, 2\pi[$, encontramos as soluções:

$x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo: $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

b) No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é formado pelos números reais associados aos pontos obtidos no item **a**, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica; logo:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

58 Resolva as equações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) cos $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) cos $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) cos $x = \frac{1}{2}$
f) sen $x = -\frac{1}{2}$
g) sen $x = -1$
h) cos $x = 1$
i) sen $x = 0$
j) sen $x = 3$
k) cos $x = -2$
l) tg $x = \sqrt{3}$
m) tg $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
n) tg $x = -\sqrt{3}$
o) tg $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

59 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações dos itens **a**, **e**, **i**, **m** e **n** do exercício anterior.

60 Resolva as equações:

a) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ no intervalo $[0, 2\pi[$
b) $\cos^2 x = 1$ no intervalo $[0, 2\pi[$
c) $\cos^2 x = 1$ no intervalo $[0, 2\pi]$
d) $\text{sen}^2\, x = \frac{1}{4}$ no intervalo $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$
e) $|\text{sen}\, x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ em $\mathbb{R}$

61 Resolva a equação $\text{sen}^2\, x = \frac{3}{4}$ para $0° \leqslant x < 720°$.

62 Quantas raízes possui a equação tg $x = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 6\pi[$?

63 Determine o conjunto solução da equação sen x = cos x para $0 \leqslant x < 2\pi$.
(*Sugestão*: Procure na circunferência trigonométrica os pontos que têm abscissa igual à ordenada.)

64 Resolva as equações abaixo para $0 \leqslant x < 2\pi$.

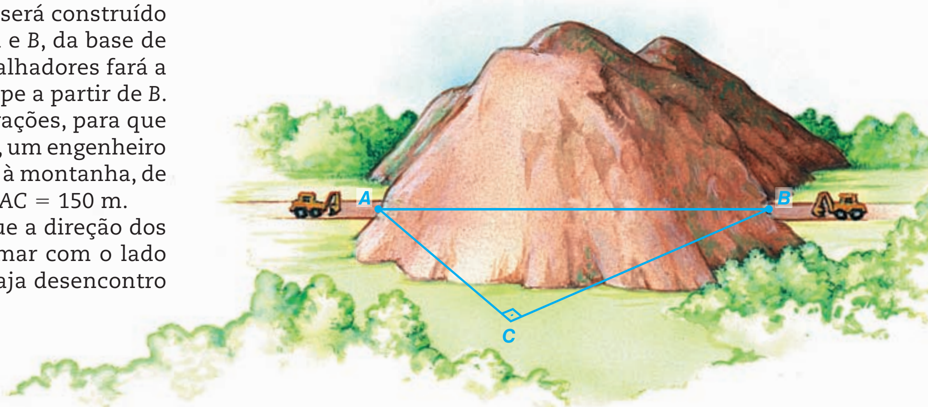
a) $\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{5}$ b) $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$ c) $\text{tg } x = \text{tg } \frac{\pi}{5}$

65 A soma das raízes da equação $\cos x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1$, com $0 \leqslant x < 4\pi$, é:

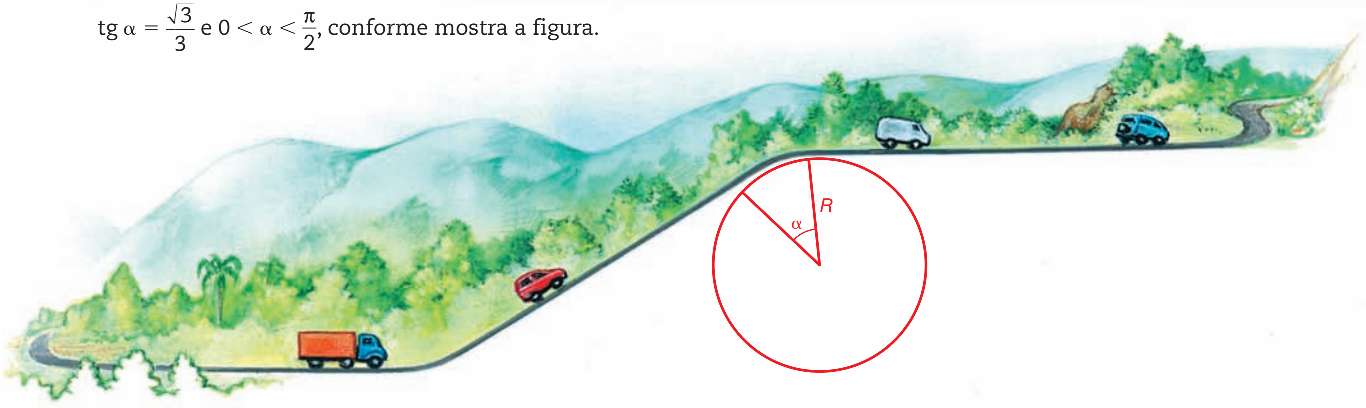
a) $\frac{15\pi}{3}$ b) 2π c) $\frac{17\pi}{3}$ d) 8π e) 6π

66 Em um retângulo, a medida de cada diagonal é o dobro da medida de um dos lados. Determine a medida dos ângulos que cada diagonal forma com os lados desse retângulo.

67 Um túnel de 300 m de comprimento será construído em linha reta, unindo dois pontos, A e B, da base de uma montanha. Uma equipe de trabalhadores fará a perfuração a partir de A, e outra equipe a partir de B. Para determinar a direção das perfurações, para que os dois trechos cavados se encontrem, um engenheiro fixou um ponto C no terreno próximo à montanha, de modo que o ângulo $A\hat{C}B$ fosse reto e $AC = 150$ m. Qual deve ser a medida do ângulo que a direção dos dois trechos da perfuração deve formar com o lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC para que não haja desencontro desses trechos?



68 Para suavizar o início e o final de um trecho em aclive de uma estrada, um engenheiro projetou-os com bordas em arcos de circunferência de 20 m de comprimento e ângulo central de α rad tal que $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, conforme mostra a figura.



Calcule a medida do raio de curvatura desses arcos.
(*Nota*: O raio de curvatura de um arco é o raio da circunferência que contém esse arco.)

Resolva os exercícios complementares 43 a 54.

Resolução de uma equação trigonométrica na forma fatorada

Certas equações podem ser representadas como um produto de duas ou mais expressões igualado a zero. Essa representação é chamada de forma fatorada da equação. Por exemplo, a equação $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \text{sen } x = 0$ pode ser representada na forma fatorada, pondo em evidência o fator comum aos termos do primeiro membro:

$$\text{sen } x\,(2 \cos x - 1) = 0$$

Para resolver equações como essa, usamos a **propriedade do produto nulo**, que garante que o produto de números reais é igual a zero se, e somente se, pelo menos um dos fatores for igual a zero, ou seja, $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$. Veja os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

28 Resolver a equação $2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x - \text{sen}\, x = 0$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

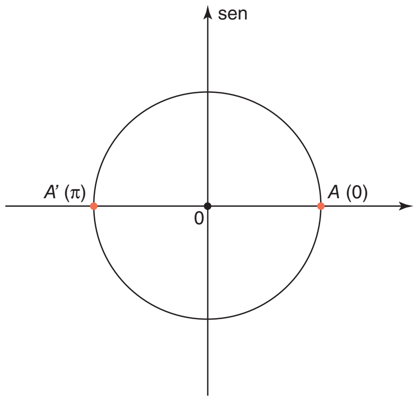
Inicialmente, fatoramos o 1º membro da equação pelo caso do fator comum:

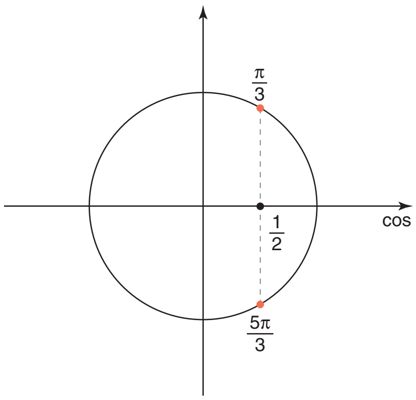
$\text{sen}\, x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$

Portanto, pela propriedade do produto nulo: $\text{sen}\, x = 0$ ou $2 \cos x - 1 = 0$

Resolvendo cada uma dessas equações, na primeira volta positiva, temos:

- $\text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$





Logo: $S = \left\{0, \pi, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

29 Resolver a equação $(\text{tg}\, x - 1)(2\, \text{sen}\, x - 1) = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

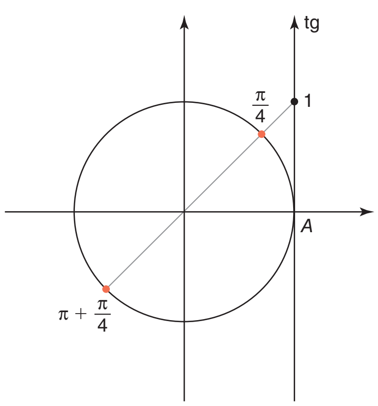
Pela propriedade do produto nulo, temos:

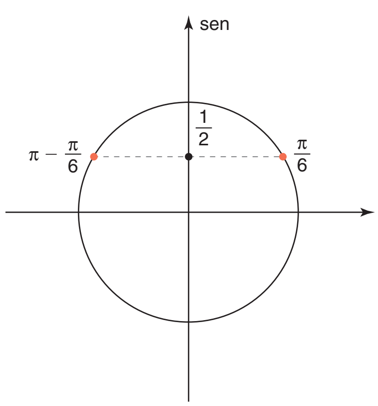
$$(\text{tg}\, x - 1)(2\, \text{sen}\, x - 1) = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x - 1 = 0 \text{ ou } 2\, \text{sen}\, x - 1 = 0$$

$$\therefore \text{tg}\, x = 1 \text{ ou } \text{sen}\, x = \frac{1}{2}$$

Resolvendo cada uma dessas equações na 1ª volta positiva, temos:

- $\text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$
- $\text{sen}\, x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$





Concluímos, então, que o conjunto solução da equação é: $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

69 Resolva as equações para $0 \leqslant x < 2\pi$:

a) $(2 \text{ sen } x - \sqrt{3})(2 \cos x - \sqrt{2}) = 0$

b) $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x = 0$

c) $\text{tg}^2 x - \text{tg } x = 0$

d) $(\text{tg } x - \sqrt{3})(\text{tg}^2 x - 1) = 0$

70 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações dos itens **a**, **b** e **c** do exercício anterior.

71 (UFSC) Resolva a equação $\text{tg } x \cdot \text{sen } x = \text{sen } x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Resolva os exercícios complementares 55 a 65.

Resolução de uma equação trigonométrica por meio de equações polinomiais

Equação polinomial é toda equação que pode ser representada por um polinômio igualado a zero. Por exemplo: $-2x + 3 = 0$ ou $7t^2 - 2t - 5 = 0$.

Certas equações trigonométricas podem ser resolvidas com o auxílio de uma equação polinomial, bastando para isso uma mudança de variável, como mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

30 Resolver a equação $3 \text{ tg}^2 x - 4\sqrt{3} \text{ tg } x + 3 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Essa equação pode ser resolvida com o auxílio de uma equação polinomial, bastando para isso efetuar a mudança de variável: tg $x = t$. Com essa mudança, obtemos a equação do 2º grau:

$3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$

$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 12$

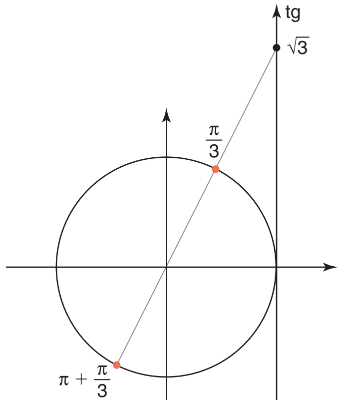
$$\therefore t = \frac{-(-4\sqrt{3}) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow t = \sqrt{3} \text{ ou } t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Lembrando que tg $x = t$, retornamos à variável original:

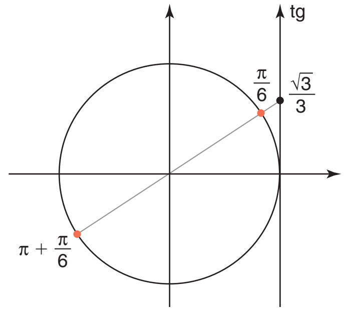
$$\text{tg } x = \sqrt{3} \text{ ou tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Resolvendo cada uma dessas equações na 1ª volta positiva, temos:

- $\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$



- $\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6}$



Concluímos, então, que o conjunto solução da equação é: $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

Seção 3.5 • Equações trigonométricas

31 Resolver a equação $2\,\text{sen}^2\,x + \cos x - 1 = 0$:

a) para $0 \leqslant x < 2\pi$.

b) em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Quando uma equação apresenta seno e cosseno, um recurso muito útil para transformá-la em uma equação equivalente, que apresente somente seno ou somente cosseno, é aplicar uma das identidades: $\text{sen}^2\,x = 1 - \cos^2 x$ ou $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2\,x$.

Na equação proposta, vamos substituir $\text{sen}^2\,x$ por $(1 - \cos^2 x)$, obtendo:

$2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\therefore -2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$

Efetuando a mudança de variável $\cos x = t$:

$-2t^2 + t + 1 = 0$

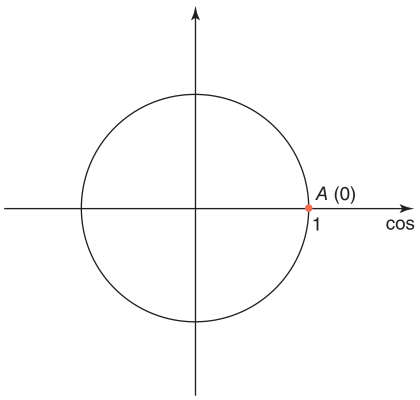
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9$

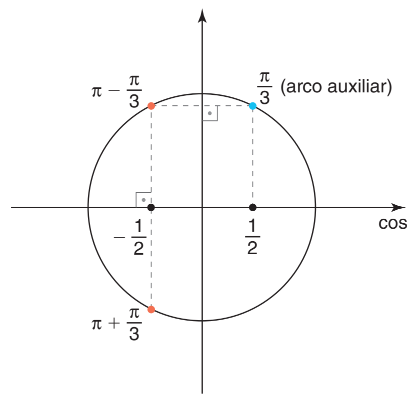
$\therefore t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{-1 \pm 3}{-4} \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = -\dfrac{1}{2}$

Como $\cos x = t$, temos $\cos x = 1$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

Resolvendo essas equações na 1ª volta positiva, temos:

- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$
- $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$





Logo: $S = \left\{0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

b) Observando que as raízes obtidas no item **a** estão associadas a pontos que dividem a circunferência trigonométrica em três arcos congruentes, temos, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + \dfrac{k \cdot 2\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

72 Resolva as equações a seguir no universo $U = [0, 2\pi[$.

a) $2\,\text{sen}^2\,x + \text{sen}\,x - 1 = 0$

b) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$

c) $4\,\text{tg}^2\,x + \sqrt{3}\,\text{tg}\,x = \text{tg}^2\,x + 3\sqrt{3}\,\text{tg}\,x + 3$

73 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação: $\cos^2 x - 4\,\text{sen}\,x + 4 = 0$

Resolva os exercícios complementares 66 a 76.

Seção 3.6

Inequações trigonométricas

Objetivo

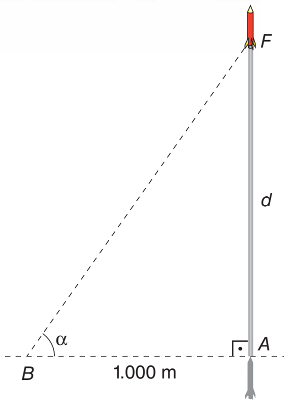
- **Resolver** inequações trigonométricas.

Um foguete F, lançado em trajetória vertical de um ponto A do solo plano e horizontal, é monitorado a partir de um ponto B do solo, distante 1.000 m de A. Quais serão as possíveis medidas do ângulo $A\hat{B}F$, quando a distância AF for superior a 1.000 m?

Indicando por α a medida do ângulo $A\hat{B}F$ e por d a distância AF, esquematizamos:

$$\begin{cases} \text{tg}\ \alpha = \dfrac{d}{1.000} \\ d > 1.000 \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha > 1$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, concluímos que $45° < \alpha < 90°$.



Note que, ao determinar os possíveis valores de α, obtivemos as soluções da inequação $\text{tg}\ \alpha > 1$, em que α é a medida de um ângulo agudo. Inequações do tipo $\text{tg}\ \alpha > k$, $\text{sen}\ \alpha > k$ ou $\cos \alpha > k$ (ou com as relações $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ ou $\neq$), sendo k uma constante real, são chamadas de **inequações trigonométricas imediatas**.

Resolução de uma inequação trigonométrica imediata

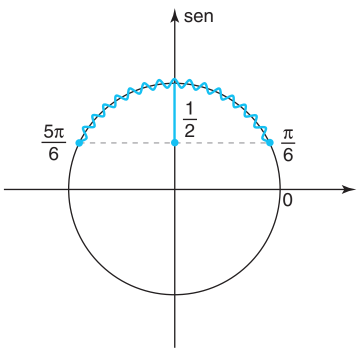
Resolver, em um universo U, uma inequação trigonométrica significa obter o conjunto solução S formado por todos os valores pertencentes a U que, atribuídos à variável da inequação, tornam verdadeira a sentença assim obtida. Resolveremos as inequações trigonométricas imediatas pelo método gráfico, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

32 Resolver a inequação sen $x \geqslant \frac{1}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Precisamos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada maior ou igual a $\frac{1}{2}$, considerando apenas a 1ª volta positiva. A figura a seguir esquematiza a situação.



Os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada $\frac{1}{2}$ são os associados às medidas $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$; os pontos que têm ordenada maior que $\frac{1}{2}$ são os associados às medidas entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}\right\}$

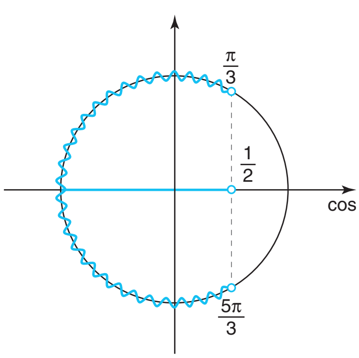
33 Resolver a inequação cos $x < \frac{1}{2}$

a) para $0 \leqslant x < 2\pi$

b) em $\mathbb{R}$

Resolução

a) Esquematizamos:



Considerando a 1ª volta positiva, os pontos da circunferência trigonométrica que têm cosseno menor que $\frac{1}{2}$ são aqueles associados às medidas entre $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) Para obter uma expressão que represente as soluções da inequação nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica, basta adicionar a cada extremo do intervalo obtido no item anterior a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, o conjunto solução S da inequação é dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

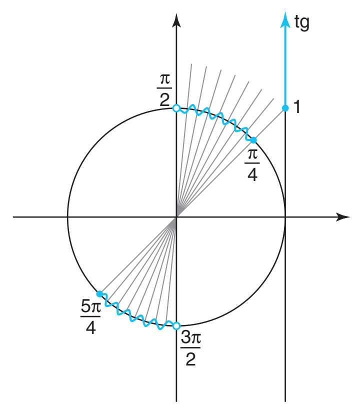
34 Resolver a inequação tg $x \geqslant 1$.

a) para $0 \leqslant x < 2\pi$.

b) em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Em um esquema, determinamos os arcos trigonométricos que têm tangente igual a 1. A seguir, consideramos todas as retas que passam pelo centro da circunferência e pelos pontos de ordenada maior ou igual a 1 no eixo das tangentes. As medidas associadas aos pontos de intersecção dessas retas com a circunferência trigonométrica formam o conjunto solução da inequação.



Considerando apenas a 1ª volta positiva, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}\right\}$$

b) Para obter as expressões que representam as soluções da inequação, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica, basta adicionar $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo dos intervalos obtidos no item **a**, obtendo:

$$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou}$$

$$\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

Notando, porém, que os arcos determinados por essas expressões na circunferência trigonométrica são simétricos em relação à origem do sistema, podemos substituí-las por uma única expressão:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

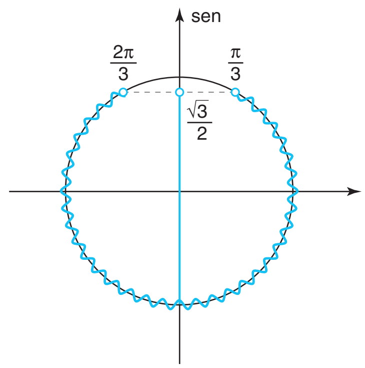
Assim, uma das formas de apresentar o conjunto solução S da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

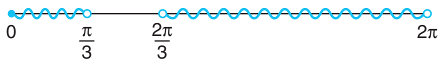
35 Resolver a inequação sen $x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Devemos encontrar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada menor que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ considerando apenas a 1ª volta positiva. Esses pontos são:



A maior dificuldade dessa resolução é a maneira de escrever a resposta. Para entender o porquê da forma da resposta, vamos "esticar" (retificar) a circunferência:



Assim, percebemos que o conjunto solução é a reunião de dois intervalos:

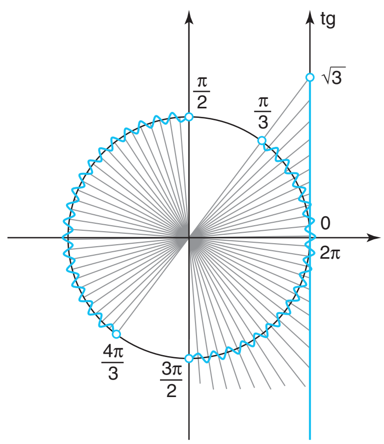
$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right[$$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

36 Resolver a inequação tg $x < \sqrt{3}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Esquematizamos:



Considerando apenas a 1ª volta positiva, temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

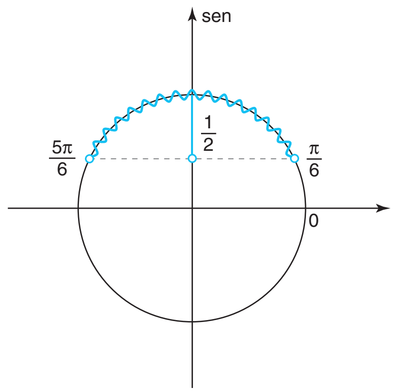
37 Resolver o sistema de inequações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.

$$\begin{cases} \text{sen } x > \frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

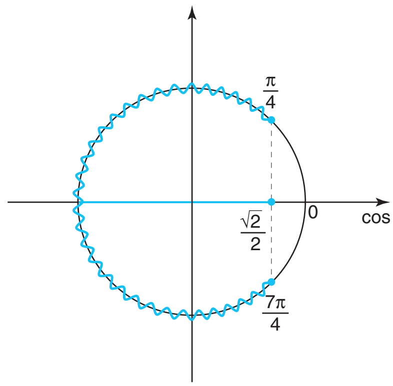
Resolução

Resolvendo cada uma das inequações do sistema, temos:

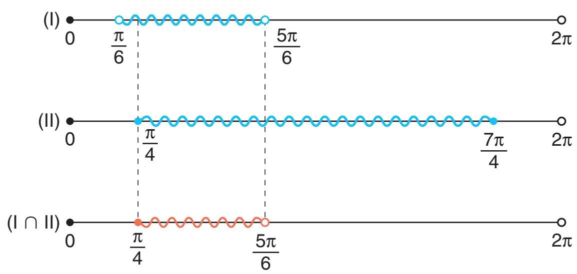
(I) sen $x > \frac{1}{2}$



(II) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$



O conjunto solução do sistema é a intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II). Retificando as circunferências, temos:



Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

74 Resolva as inequações para $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\text{sen } x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen } x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

d) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos x \leq 0$

f) $\text{sen } x < 0$

g) $\cos x > 0$

h) $\text{sen } x \leq \frac{1}{2}$

i) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\text{sen } x \leq -\frac{1}{2}$

k) $\cos x > -\frac{1}{2}$

l) $\text{sen } x > 1$

m) $\cos x < 1$

n) $\text{sen } x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

o) $\text{tg } x > \sqrt{3}$

p) $\text{tg } x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

q) $\text{tg } x < -\sqrt{3}$

75 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações dos itens **a**, **c**, **d**, **o** e **p** do exercício anterior.

76 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, obtenha o conjunto solução das inequações:

a) $\text{sen } x < \text{sen } \frac{\pi}{9}$

b) $\cos x \geq \cos \frac{\pi}{7}$

77 Resolva os sistemas de inequações a seguir para $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\begin{cases} \cos x < -\frac{1}{2} \\ \text{sen } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{tg } x > 1 \\ \text{tg } x \leq \sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{tg } x \geq 1 \\ \text{sen } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

78 Resolva em $\mathbb{R}$ os sistemas dos itens **a** e **d** do exercício anterior.

79 Resolva as inequações para $0 \leq x < 2\pi$.

a) $0 < \text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{1}{2} \leq \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

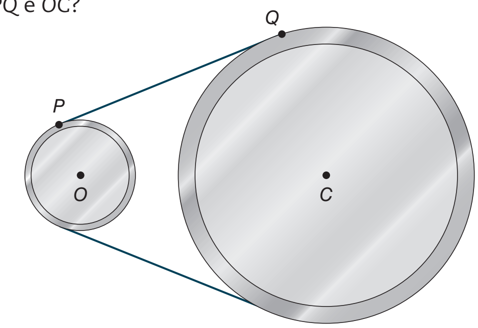
c) $|\text{sen } x| < \frac{1}{2}$

d) $1 < \text{tg } x \leq \sqrt{3}$

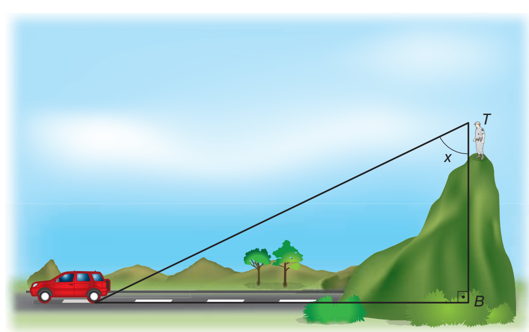
e) $0 \leq \text{tg } x < 1$

f) $-\sqrt{3} < \text{tg } x \leq 1$

80 Uma correia contorna duas polias, de 5 cm e 13 cm de raio e centros O e C, respectivamente, sendo P e Q pontos de tangência da parte reta da correia com as polias, conforme mostra a figura. Se a distância PQ deve ser maior que 16 cm, quais são as possíveis medidas de um ângulo agudo formado pelas retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{OC}$?



81 De um ponto *T*, a 15 m de altura em relação ao plano de uma estrada horizontal, um guarda rodoviário observa um automóvel sob um ângulo de medida *x*, em grau, em relação à vertical $\overleftrightarrow{TB}$, sendo *B* um ponto do plano da estrada. Determine as possíveis medidas *x* para que a distância entre o automóvel e o ponto *B* seja maior que $5\sqrt{3}$ m.



Resolva os exercícios complementares 77 a 82, 99 e 100.

Resolução de uma inequação trigonométrica por meio de inequações polinomiais

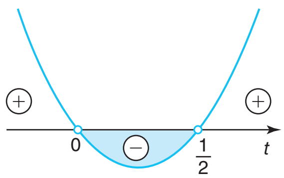
Certas inequações trigonométricas podem ser resolvidas com o auxílio de uma inequação polinomial, bastando para isso uma mudança de variável, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

38 Resolver a inequação
$2\cos^2 x - \cos x < 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

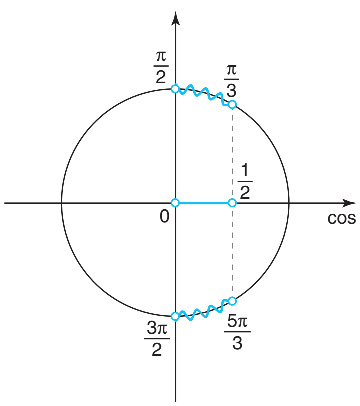
Resolução

Substituindo cos x por t na inequação, obtemos:
$2t^2 - t < 0$.
Para resolver essa inequação, devemos estudar o sinal de $f(t) = 2t^2 - t$. Para isso, encontramos as raízes de f:
$2t^2 - t = 0 \Rightarrow t \cdot (2t - 1) = 0$
$\therefore t = 0$ ou $(2t - 1) = 0$
$\therefore t = 0$ ou $t = \frac{1}{2}$
Logo, um esboço do gráfico de f é:



Observamos que $f(t) < 0$ para $0 < t < \frac{1}{2}$.

Logo, $0 < \cos x < \frac{1}{2}$, portanto:



Concluímos, então, que:

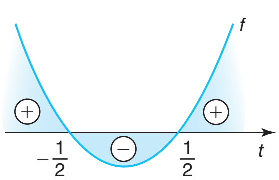
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$$

39 Resolver a inequação
$(4\,\text{sen}^2 x - 1)(2\,\text{sen}\, x - \sqrt{3}) \leqslant 0$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

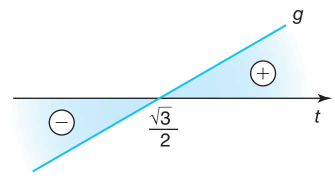
Resolução

Efetuando a mudança de variável sen x = t, obtemos:
$(4t^2 - 1)(2t - \sqrt{3}) \leqslant 0$
Estudamos a variação de sinal de cada uma das funções $f(t) = 4t^2 - 1$ e $g(t) = 2t - \sqrt{3}$:

- $f(t) = 4t^2 - 1$
  raízes de f:
  $4t^2 - 1 = 0$
  $\therefore t^2 = \frac{1}{4}$
  $\therefore t = \pm\frac{1}{2}$



- $g(t) = 2t - \sqrt{3}$
  raiz de g:
  $2t - \sqrt{3} = 0$
  $\therefore 2t = \sqrt{3}$
  $\therefore t = \frac{\sqrt{3}}{2}$



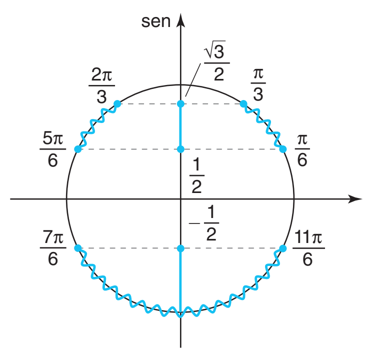
Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$, temos:

		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
f	+		−		+		+
g	−		−		−		+
$f \cdot g$	−		+		−		+

Observamos que: $f(t) \cdot g(t) \leqslant 0$ para $t \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo: $\text{sen}\, x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant \text{sen}\, x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Na circunferência trigonométrica, temos:



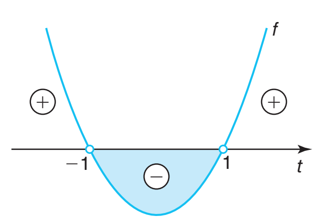
Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$$

40 Resolver a inequação $\text{tg}^2 x < 1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

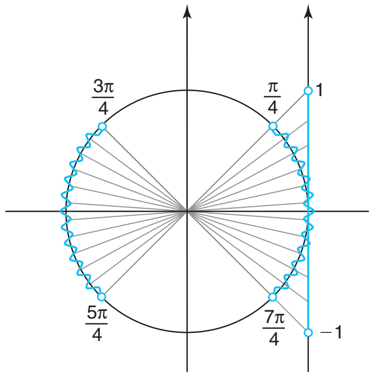
Resolução

Fazendo a mudança de variável tg x = t, temos:
$t^2 < 1 \Rightarrow t^2 - 1 < 0$
Estudamos o sinal da função $f(t) = t^2 - 1$:



Observamos que $f(t) < 0$ para $-1 < t < 1$. Portanto, $-1 < \text{tg}\, x < 1$.

Na circunferência trigonométrica, temos:



Logo, considerando apenas a 1ª volta positiva, temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

41 Resolver a inequação $\frac{4\cos^2 x - 1}{2\cos x + \sqrt{2}} \leq 0$ para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Efetuando a mudança de variável $\cos x = t$, temos:

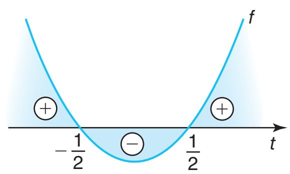
$\frac{4t^2 - 1}{2t + \sqrt{2}} \leq 0$

Nas inequações-quociente, devemos considerar a condição de existência:

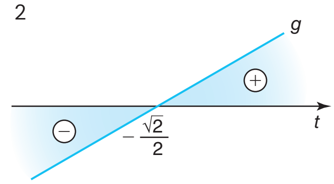
$2t + \sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow t \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Estudamos a variação de sinal de cada uma das funções $f(t) = 4t^2 - 1$ e $g(t) = 2t + \sqrt{2}$:

- $f(t) = 4t^2 - 1$
  raízes de f:
  $4t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{4}$
  $\therefore t = \pm\frac{1}{2}$



- $g(t) = 2t + \sqrt{2}$
  raiz de g:
  $2t + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2t = -\sqrt{2}$
  $\therefore t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



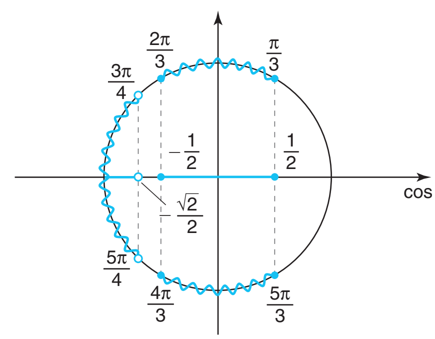
Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$, temos:

	$t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$	$t > \frac{1}{2}$
f	+	+	−	+
g	−	+	+	+
$\frac{f}{g}$	−	+	−	+

Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} \leq 0$ para $t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Logo: $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$

Na circunferência trigonométrica, obtemos:



Assim, o conjunto solução da inequação é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

82 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, obtenha o conjunto solução das inequações:

a) $2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x < 0$

b) $2\,\text{sen}^2 x - \sqrt{2}\,\text{sen}\, x \geq 0$

c) $2\,\text{sen}^2 x + 5\cos x - 4 > 0$

d) $2\cos^2 x + 5\,\text{sen}\, x - 8 < 0$

e) $(2\cos x - 1)(2\cos x - \sqrt{2}) < 0$

f) $\frac{2\,\text{sen}\, x - 1}{2\,\text{sen}\, x - \sqrt{2}} < 0$

g) $\frac{2\cos x - 1}{2\cos x + 1} > 0$

h) $\text{tg}^2 x - \text{tg}\, x > 0$

i) $(\text{tg}\, x - \sqrt{3})(\text{tg}^2 x - 1) \leq 0$

j) $\frac{\text{tg}\, x - 1}{\text{tg}\, x - \sqrt{3}} > 0$

83 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações dos itens **a**, **f** e **j** do exercício anterior.

Resolva os exercícios complementares 83 a 86.

Exercícios técnicos

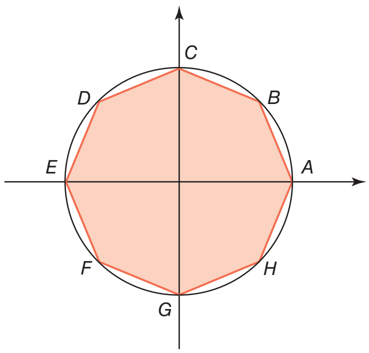
1 Qual é a medida em grau de um arco de 4π cm contido em uma circunferência com 8 cm de raio?

2 Calcule a medida em radiano de um arco de 2π cm contido em uma circunferência com 12 cm de raio.

3 (UFPA) A medida de um arco côngruo a $\frac{137\pi}{5}$ rad é:

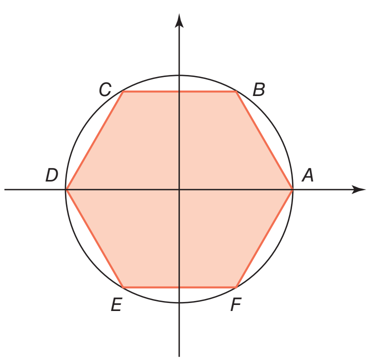
a) $\frac{2\pi}{5}$ rad
b) 3π rad
c) $\frac{\pi}{5}$ rad
d) 2π rad
e) $\frac{7\pi}{5}$ rad

4 O octógono regular *ABCDEFGH*, abaixo, está inscrito na circunferência trigonométrica.



Determine as medidas x associadas:
a) aos vértices desse octógono, com $0° \leqslant x < 360°$;
b) ao vértice F, com $360° \leqslant x < 1.080°$;
c) ao vértice H, com $-720° \leqslant x < 0°$.

5 O hexágono regular *ABCDEF*, abaixo, está inscrito na circunferência trigonométrica.

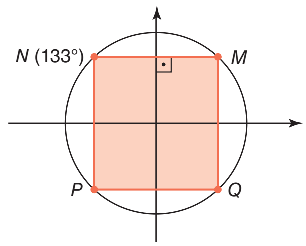


Determine as medidas x associadas:
a) aos vértices desse hexágono, com $0 \leqslant x < 2\pi$;
b) ao vértice C, com $2\pi \leqslant x < 6\pi$;
c) ao vértice F, com $-4\pi \leqslant x < 0$.

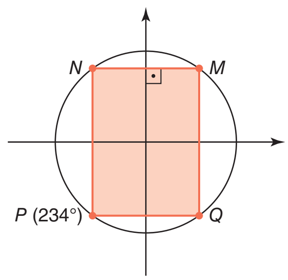
6 (UFPI) Se α é a medida de um arco côngruo a um arco de 30°, então se pode afirmar que:
a) $\alpha = 30°$
b) $\alpha = 60°$
c) $\alpha = -330°$
d) $\alpha = k \cdot 30°$, para algum $k \in \mathbb{Z}$
e) $\alpha = 30° + k \cdot 360°$, para algum $k \in \mathbb{Z}$

7 As figuras a seguir apresentam retângulos inscritos em circunferências trigonométricas. Determine as medidas associadas aos vértices desses retângulos na 1ª volta positiva.

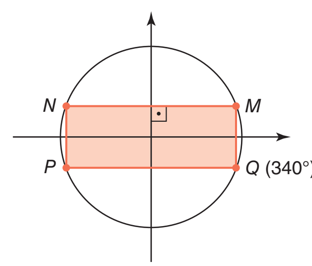
a)



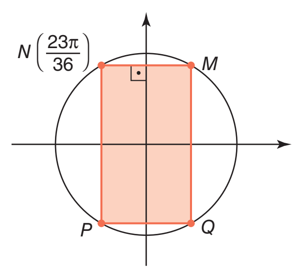
b)



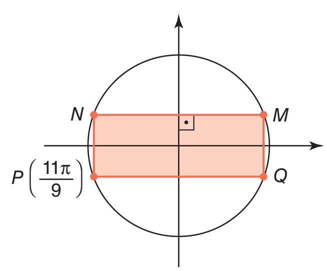
c)



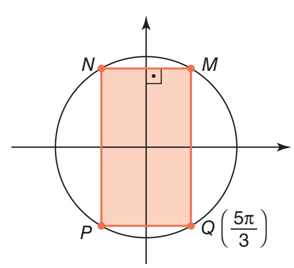
d)



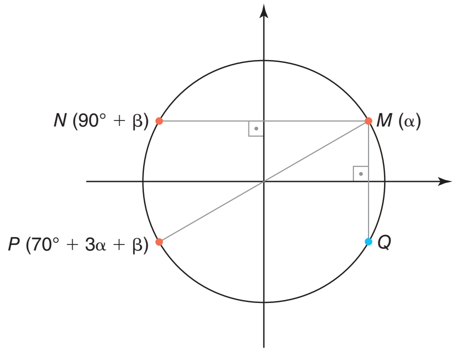
e)



f)



8 A circunferência trigonométrica abaixo apresenta as medidas em grau, na 1ª volta positiva, associadas aos pontos M, N e P.



A medida associada ao ponto Q é:
a) 330°
b) 320°
c) 335°
d) 340°
e) 350°

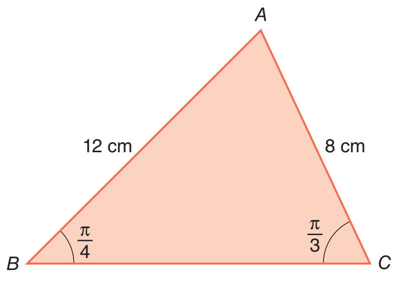
9 Determine o valor mínimo da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |\text{sen } x|$.

10 Se a variável x pode assumir qualquer medida de um arco trigonométrico, calcule o menor valor possível da expressão $\dfrac{1}{|\cos x|}$.

11 (UFMA) Sendo $180° < a < b < 270°$, assinale a afirmação verdadeira.
a) $\cos a = \cos b$
b) $\cos a > \cos b$
c) $\text{sen } a < \text{sen } b$
d) $\cos a \cdot \cos b < 0$
e) $\cos a \cdot \cos b > 0$

12 Sendo α e β medidas de arcos trigonométricos, com $\{\alpha, \beta\} \subset [0, 2\pi[$, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações a seguir.
a) Se α e β pertencem ao 1º quadrante e $\alpha > \beta$, então $\text{sen } \alpha > \text{sen } \beta$.
b) Se α e β pertencem ao 2º quadrante e $\alpha > \beta$, então $\text{sen } \alpha > \text{sen } \beta$.
c) Se α e β pertencem ao 1º quadrante e $\alpha > \beta$, então $\cos \alpha > \cos \beta$.
d) Se α e β pertencem ao 3º quadrante e $\alpha > \beta$, então $\cos \alpha > \cos \beta$.

13 Calcule a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo:



14 O valor de cos 1.560° é igual ao valor de:
a) cos 30°
b) sen 30°
c) −sen 60°
d) −cos 60°
e) cos 45°

15 (Unifor-CE) O valor de $\cos \dfrac{26\pi}{3} + \cos \dfrac{89\pi}{3}$ é igual a:
a) −1
b) 0
c) $\dfrac{1}{2}$
d) $\dfrac{3}{4}$
e) 1

16 (UFRN) A expressão $E = \dfrac{\text{sen }(\pi - x) - \text{sen }(\pi + x)}{\text{sen }(2\pi - x)}$, com $\text{sen } x \neq 0$, é equivalente a:
a) $E = 2 \text{ sen } x$
b) $E = -2 \text{ sen } x$
c) $E = 2$
d) $E = -2$
e) $E = \text{sen } x$

17 Simplifique:
a) $E = \dfrac{\cos(-\alpha) + \text{sen}(-\alpha)}{\cos(\pi + \alpha) + \text{sen}(\pi - \alpha)}$, em que $\cos \alpha \neq \text{sen } \alpha$.
b) $E = \dfrac{\cos 0° - \cos^2 (180° + \alpha)}{\text{sen } 90° + \cos (360° - \alpha)}$, em que $\cos \alpha \neq -1$.

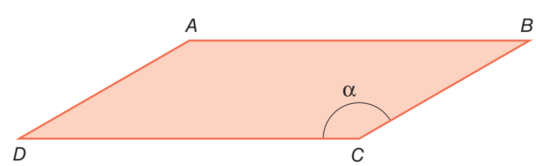
18 Em relação à expressão $E = \cos (k\pi - x)$, com $k \in \mathbb{Z}$, podemos afirmar que:
a) $E = \cos x$, para qualquer valor de k.
b) $E = -\cos x$, para qualquer valor de k.
c) $E = \cos x$, se k for um número par.
d) $E = \text{sen } x$, se k for um número par.
e) $E = -\text{sen } x$, se k for um número ímpar.

19 Calcule o valor da expressão:
$E = \text{sen}^2\, 20° + \text{sen}^2\, 40° + \text{sen}^2\, 50° + \text{sen}^2\, 70°$

20 Calcule o valor da expressão:
$$E = \frac{\text{sen}^2\, 30° + \cos^2 60°}{\text{sen}^2\, 40° + \cos^2 140°}$$

21 Um triângulo tem um ângulo agudo interno de medida α, com $\text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Calcule o cosseno da soma dos outros dois ângulos.

22 No paralelogramo $ABCD$ a seguir, o lado $\overline{AD}$ mede 20 cm e $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Calcule a distância do ponto D à reta $\overleftrightarrow{AB}$.



23 Sabendo que $\text{sen } x + \cos x = 0{,}6$, calcule o produto $\text{sen } x \cdot \cos x$.

24 Determine o valor do sen x sabendo que $4 \cos^2 x + 5 \text{ sen } x - 5 = 0$ e que $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

25 Resolva, na variável x, a equação $x^2 - 4x + 4 \cos^2 \alpha = 0$.

26 Sabendo que sen $x \neq 0$, simplifique a expressão:

$$E = \frac{\cos 0 + \cos (2\pi - x) \cdot \cos (\pi + x)}{\text{sen } (-x) \cdot \text{sen } (\pi + x)}$$

27 (UFJF-MG) Considere a equação $x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$, sendo k um número real negativo.

a) Determine a soma das raízes da equação dada em função de k.

b) Determine o produto das raízes da equação dada em função de k.

c) Determine o valor de k sabendo que as raízes da equação dada são o seno e o cosseno de um mesmo ângulo.

28 (Fuvest-SP) Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

a) sen $210° <$ cos $210° <$ tg $210°$

b) cos $210° <$ sen $210° <$ tg $210°$

c) tg $210° <$ sen $210° <$ cos $210°$

d) tg $210° <$ cos $210° <$ sen $210°$

e) sen $210° <$ tg $210° <$ cos $210°$

29 (Ufop-MG) Se tg $\alpha = 2$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então cos α é igual a:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **e)** $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

30 Dado que tg $\alpha = -2$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule sen α e cos α.

31 Determine sen α e cos α sabendo que tg $\alpha = -7$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

32 Calcule os valores de sen α e cos α sabendo que tg $\alpha = -\frac{1}{3}$ e $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

33 (Covest-PE) Sabendo que
$\text{sen}^2 x - 3 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + 2 \cdot \cos^2 x = 0$, temos que os possíveis valores para tg x são:

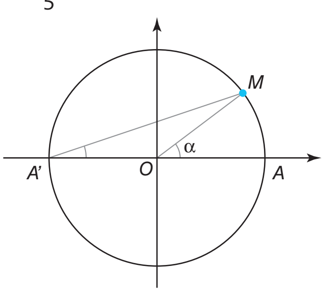
a) 0 e -1 **d)** -1 e -2

b) 0 e 1 **e)** -2 e 0

c) 1 e 2

34 Sendo $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ e sen $\alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$, calcule tg α.

35 Na circunferência trigonométrica abaixo, a ordenada do ponto M é $\frac{3}{5}$ e o ângulo AÔM mede α.



Calcule:

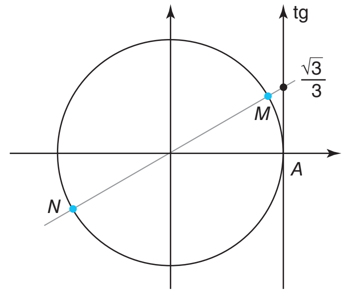
a) tg α

b) a medida do ângulo AÂ'M em função de α

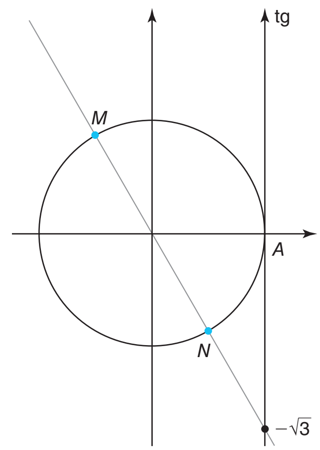
c) tg $\frac{\alpha}{2}$

36 As figuras a seguir representam a circunferência trigonométrica e o eixo das tangentes. Em cada item, determine as medidas α, com $0 \leq \alpha < 2\pi$, associadas aos pontos M e N.

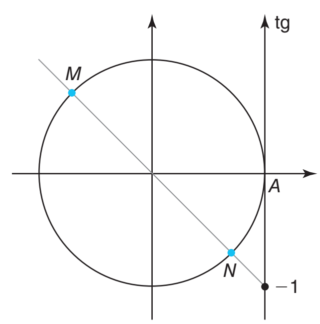
a)



b)

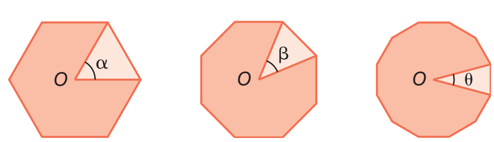


c)



37 As figuras abaixo representam três polígonos regulares: hexágono, octógono e dodecágono, sendo α, β e θ as medidas de seus ângulos centrais, respectivamente.

[*Nota*: Ângulo central de um polígono regular é o ângulo cujo vértice é o centro da circunferência circunscrita (ou inscrita) ao polígono e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono.]



Calcule:

a) tg 17α **b)** tg 29β **c)** tg 16θ

38 A expressão $E = \dfrac{\text{tg}^2(\pi - x) - \text{tg}(\pi + x)}{\text{tg}(2\pi - x)}$, com $\text{tg}\, x \neq 0$, é equivalente a:

a) $E = 1 + \text{tg}\, x$
b) $E = -\text{tg}\, x$
c) $E = -1$
d) $E = -2$
e) $E = 1 - \text{tg}\, x$

39 Calcule o valor de:

a) $\text{tg}(-30°)$
b) $\text{tg}(-120°)$
c) $\text{tg}(-225°)$
d) $\text{tg}(-300°)$
e) $\text{tg}(-1.110°)$
f) $\text{tg}(-1.860°)$

40 Calcule o valor de:

a) $\text{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
b) $\text{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$
c) $\text{tg}\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)$
d) $\text{tg}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$
e) $\text{tg}\left(\dfrac{33\pi}{4}\right)$
f) $\text{tg}\left(\dfrac{31\pi}{3}\right)$

41 A expressão $E = \dfrac{\text{tg}(-\alpha) + \text{tg}(\pi - \alpha)}{\text{tg}(\pi + \alpha) - \text{tg}(2\pi - \alpha)}$, em que $\text{tg}\, \alpha \neq 0$, é equivalente a:

a) $E = -1$
b) $E = -2$
c) $E = \text{tg}\, \alpha$
d) $E = -\text{tg}\, \alpha$
e) $E = \text{sen}\, \alpha$

42 A expressão $E = \dfrac{\text{tg}(-\alpha) - \text{sen}(\pi + \alpha) \cdot \cos(-\alpha)}{\text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}$, em que $\cos \alpha \neq 0$, é equivalente a:

a) $E = -2$
b) $E = -1$
c) $E = -\text{tg}^3\, \alpha$
d) $E = \text{sen}^2\, \alpha$
e) $E = \cos^2 \alpha$

43 Resolva as equações a seguir para $0° \leq x < 360°$.

a) $\text{sen}\, x = 1$
b) $\cos x = 0$
c) $\text{sen}\, x = \dfrac{1}{2}$
d) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

44 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações dos itens **a** e **b** do exercício anterior.

45 Resolva as equações para $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\text{tg}^2\, x = 0$
b) $\text{tg}^2\, x = 1$
c) $\text{tg}^2\, x = 3$
d) $|\text{tg}\, x| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

46 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações dos itens **b** e **c** do exercício anterior.

47 Considerando o universo $U = [-\pi, \pi[$, resolva a equação $\text{sen}^2\, x = \dfrac{1}{2}$.

48 Resolva a equação $3\,\text{sen}\, x = \sqrt{3} \cos x$ para $0 \leq x < 2\pi$.

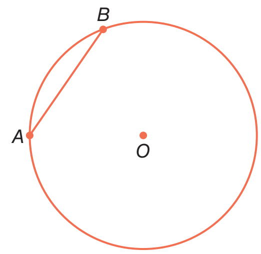
49 (Ufac) O maior valor de x, com $0 \leq x < 2\pi$, tal que $4^{3\cos x} = 8$ é:

a) $\dfrac{5\pi}{3}$
b) $\dfrac{\pi}{3}$
c) $\dfrac{7\pi}{6}$
d) $\dfrac{11\pi}{6}$
e) $\dfrac{17\pi}{3}$

50 Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AC}$ mede 16 cm e a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 8 cm. A medida do ângulo $A\hat{C}B$ é:

a) 60°
b) 60° ou 120°
c) 30°
d) 30° ou 150°
e) 45°

51 A figura abaixo mostra uma corda $\overline{AB}$, de $10\sqrt{3}$ cm, em uma circunferência de centro O e 10 cm de raio. Calcule a medida do ângulo agudo que essa corda forma com o diâmetro que tem o ponto A como um dos extremos.



52 Calcule a soma das raízes da equação $\text{tg}^2\, x = 4$ para $0 \leq x < 2\pi$.

53 Obtenha o conjunto solução da equação $5\,\text{sen}\, x - \cos x = 4\,\text{tg}\, x \cdot \cos x$ para $0 \leq x < 2\pi$ sabendo que $\cos x \neq 0$ e $\text{sen}\, x \neq 0$.
(*Sugestão*: Divida ambos os membros por $\cos x$.)

54 No universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a equação:

$$\frac{1}{2 + \text{tg}\, x} + \frac{1 + \text{tg}\, x}{3} = 1$$

55 Obtenha o conjunto dos valores de x, com $0 \leq x \leq 2\pi$, tais que $\text{sen}\, x \cdot \cos x = 0$.

56 Resolva a equação $\text{sen}\, x \cdot \cos x - 3\,\text{sen}\, x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

57 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:

$2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x - \sqrt{2} \cos x = 0$

58 Resolva a equação $2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x = \cos x$, para $0 \leq x < 2\pi$.
(*Cuidado*: Não divida os dois membros por $\cos x$, pois, se o fizer, você perderá a possibilidade de ter $\cos x$ igual a zero e, portanto, perderá raízes da equação. Obtenha uma equação equivalente com um dos membros igual a zero.)

59 (Fuvest-SP) Ache todas as soluções da equação $\text{sen}^3\, x \cdot \cos x - 3 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi[$.

60 Considerando o universo $U = [0, 2\pi]$, resolva as equações:

a) $(4\,\text{sen}^2\, x - 3)(\cos x - 1) = 0$
b) $\cos^2 x \cdot \text{sen}\, x - \text{sen}\, x = 0$
c) $4 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x + 2 \cdot \text{sen}\, x - 2 \cdot \cos x - 1 = 0$
d) $2\,\text{sen}^2\, x - \text{sen}\, x = 0$
e) $\text{tg}^2\, x - \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = 0$
f) $\text{tg}^5\, x - \text{tg}\, x = 0$

61 (FGV-SP) A soma das raízes da equação $\text{sen}^2\, x + \text{sen}(-x) = 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) $\dfrac{7\pi}{2}$
b) $\dfrac{9\pi}{2}$
c) $\dfrac{5\pi}{2}$
d) 3π
e) $\dfrac{3\pi}{2}$

62 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $(\text{tg}^2 x - 3)(\cos^2 x - 1) = 0$.

63 Resolva a equação $\text{tg}\, x \cdot \text{sen}\, x - \text{tg}\, x - \text{sen}\, x + 1 = 0$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.
(*Sugestão*: Fatore o 1º membro da equação.)

64 Resolva a equação
$\text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x + \text{sen}\, x - \text{tg}\, x \cdot \cos x - \cos x = 0$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

65 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\text{tg}\, x \cdot \text{sen}\, x = \text{tg}\, x$.

66 Resolva as equações a seguir para $x \in [0, 2\pi[$.
a) $\cos^2 x - 4 \cos x + 3 = 0$
b) $\text{sen}^2 x - 3\, \text{sen}\, x + 2 = 0$
c) $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$

67 Quantas raízes possui a equação $\text{tg}^2 x + \text{tg}\, x - 6 = 0$ no intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$?

68 Qual é a maior raiz da equação
$\text{tg}^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot \text{tg}\, x + \sqrt{3} = 0$ no intervalo $[0, 2\pi[$?

69 (UFPB) O número de soluções da equação
$2\, \text{sen}^2 x - 3\, \text{sen}\, x + 1 = 0$ no intervalo $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$ é:
a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

70 Obtenha o conjunto solução da equação
$\text{sen}^2 x - 2 \cos x - 2 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

71 (UFC-CE) Encontre as soluções da equação
$9 - 2 \cos^2 x = 15\, \text{sen}\, x$, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

72 (UFPB) Dê o conjunto solução da equação:
$3\, \text{sen}^2 x + \text{sen}\, x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = 3$, para $x \in [0, \pi]$

73 Resolva equação $8\, \text{sen}^4 x + 2 \cos^2 x = 3$, para $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

74 (UFRJ) A equação $x^2 - 2x \cdot \cos \theta + \text{sen}^2 \theta = 0$, na variável x, possui raízes reais e iguais. Determine θ, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

75 (PUC-PR) Todo x, com $0° \leqslant x \leqslant 360°$, que satisfaz a equação $\frac{16^{\text{sen}^2 x}}{4^{5\, \text{sen}\, x}} = \frac{1}{64}$ pertence ao intervalo:
a) $0° \leqslant x \leqslant 72°$
b) $72° \leqslant x \leqslant 144°$
c) $144° \leqslant x \leqslant 216°$
d) $216° \leqslant x \leqslant 288°$
e) $288° \leqslant x \leqslant 360°$

76 O número de soluções da equação $\text{sen}^4 x = \cos^4 x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:
a) 4 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 1 **e)** 5

77 Resolva as inequações para $0 \leqslant x < 2\pi$.
a) $\text{sen}\, x > \frac{1}{2}$
b) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$
c) $\cos x > \frac{1}{2}$
d) $\text{tg}\, x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $\text{tg}\, x > -1$
f) $\text{tg}\, x \leqslant -1$

78 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações dos itens **b**, **c** e **d** do exercício anterior.

79 Resolva os sistemas de inequações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.
a) $\begin{cases} \text{sen}\, x < \frac{1}{2} \\ \cos x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$
b) $\begin{cases} \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\, x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
c) $\begin{cases} \text{tg}\, x > \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$
d) $\begin{cases} \text{tg}\, x > -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

80 Resolva em $\mathbb{R}$ os sistemas dos itens **a** e **d** do exercício anterior.

81 Resolva as inequações para $0 \leqslant x < 2\pi$.
a) $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$
b) $-\frac{1}{2} \leqslant \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $|\cos x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $|\text{tg}\, x| < \sqrt{3}$
e) $|\text{tg}\, x| \geqslant 1$
f) $|\text{tg}\, x| + 1 > |2\, \text{tg}\, x|$

82 (UFPA) As soluções de $\frac{1}{2} < \text{sen}\, x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi[$, são todas as medidas x, em radiano, tais que:
a) $\frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leqslant x < \frac{5\pi}{6}$
b) $\frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x \leqslant \frac{5\pi}{6}$
c) $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x \leqslant \frac{3\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{3}$

83 Resolva as inequações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.
a) $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 < 0$
b) $4 \cos^2 x - 1 > 0$
c) $\text{sen}^2 x < 2\, \text{sen}\, x$
d) $4 \cos^2 x - \left(2\sqrt{2} + 2\right) \cos x + \sqrt{2} \leqslant 0$
e) $\frac{\text{sen}^2 x}{3} + \frac{\cos x}{2} - \frac{1}{2} \leqslant 0$
f) $(2 \cos^2 x - 1)(2 \cos x - 1) < 0$
g) $\text{sen}\, x \left(\text{sen}\, x - \frac{1}{2}\right)\left(2\, \text{sen}\, x - \sqrt{2}\right) > 0$
h) $\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\text{sen}^2 x - \frac{1}{2}\right) > 0$
i) $\frac{4 \cos^2 x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}} \leqslant 0$
j) $\frac{4 \cos^2 x - 3}{\cos x} \leqslant 0$
k) $\frac{-2 \cos^2 x + 1}{\text{sen}\, x} > 0$

84 Resolva as inequações para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $tg^2\, x - \sqrt{3}\, tg\, x \leqslant 0$

b) $tg^3\, x - tg\, x > 0$

c) $tg^2\, x - 3 \geqslant 0$

85 (Cesgranrio-RJ) O maior valor de x, com $0 \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$, tal que $2\,sen\,x \geqslant \frac{1}{sen\,x}$ é:

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{4}$ e) $\frac{3\pi}{2}$

86 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva as inequações:

a) $3tg^2\, x - 2\sqrt{3}\, tg\, x - 3 \leqslant 0$

b) $tg^2\, x - (1 + \sqrt{3})\, tg\, x + \sqrt{3} > 0$

c) $(tg^2\, x - 3)(tg\, x - 1) \geqslant 0$

d) $\frac{tg^2\, x - 3}{tg\, x + 1} \leqslant 0$

Exercícios contextualizados

87 Um ciclista partiu de um ponto A de uma pista circular de 100 m de raio e percorreu $\frac{117\pi}{20}$ rad, em um mesmo sentido, estacionando em um ponto B. Adotando $\pi = 3{,}14$, concluímos que a medida, em metro, do menor arco $\widehat{AB}$ dessa pista é:

a) 67,6 m

b) 38,9 m

c) 534,6 m

d) 24,2 m

e) 47,1 m

88 A Lua gira ao redor da Terra em uma órbita quase circular, com raio médio de 384.000 km, percorrendo aproximadamente $\frac{\pi}{15}$ rad por dia, para leste, em relação ao Sol. Admitindo que essa órbita seja uma circunferência, concluímos que a velocidade da Lua em volta da Terra é:

a) $\frac{1.300\pi}{3}$ km/h

b) 25.600π km/h

c) 12.800π km/h

d) $\frac{2.203\pi}{5}$ km/h

e) $\frac{3.200\pi}{3}$ km/h

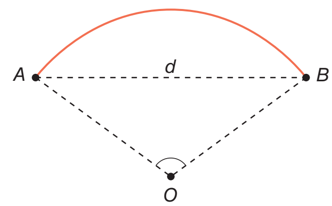
89 Se um ponto gira *n* radianos em um tempo *t* sobre uma circunferência, dizemos que a velocidade angular média ω_a do ponto é dada por $\omega_a = \frac{n}{t}$. Se essa velocidade for sempre a mesma para quaisquer valores correspondentes de *n* e *t*, dizemos que a velocidade angular do ponto é constante.

a) Com velocidade angular constante, um ponto P leva 2 min para percorrer um arco de 30 cm sobre uma circunferência com 10 cm de raio. Qual é a velocidade angular do ponto P em rad/min?

b) A velocidade angular constante de um ponto Q sobre uma circunferência é 3,6 rad/s. Se esse ponto leva 3 s para percorrer um arco de 54 cm, qual é a medida do raio dessa circunferência?

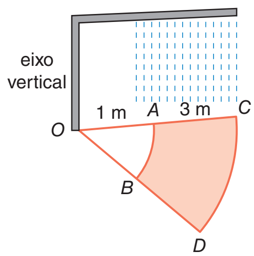
90 Um ponto P gira sobre uma circunferência de 6 cm de raio à velocidade angular constante de $\frac{5\pi}{8}$ rad/s. Calcule a velocidade desse ponto em cm/s.

91 (UFBA) Uma ponte, com formato de um arco de circunferência e comprimento igual a $\frac{4\pi}{3}$ km, liga dois pontos, *A* e *B*, situados em margens opostas de um rio, conforme a figura. Sabe-se que *O* é o centro da circunferência e que o ângulo $A\hat{O}B$ mede $\frac{2\pi}{3}$ rad.



Calcule a distância *d*, em quilômetro, entre os pontos *A* e *B*.

92 (Vunesp) A figura mostra um sistema rotativo de irrigação sobre uma região plana, que gira em torno de um eixo vertical perpendicular à região. Se denotarmos a medida em radiano do ângulo $A\hat{O}B$ por θ, a área irrigada, representada pela parte sombreada do setor circular, será uma função A que dependerá do valor de θ, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.



Se $OA = 1$ m e $AC = 3$ m, determine:

a) a expressão matemática para a função $A(\theta)$;

b) o valor de θ, em grau, se a área irrigada for de $8\ m^2$. (Para facilitar os cálculos, use a aproximação $\pi = 3$.)

(*Nota*: Lembre-se de que a área do setor circular é proporcional ao ângulo que o determina.)

93 Duas estrelas são vistas sob um ângulo de 2′ (dois minutos). Qual é a medida desse ângulo em radiano?

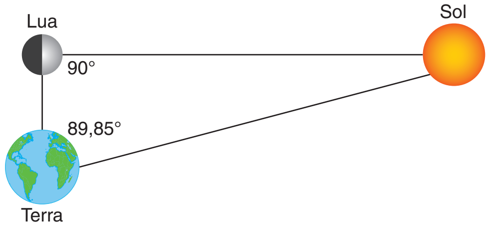
94 (Cesgranrio-RJ) Um mecanismo liga o velocímetro (marcador de velocidade) a uma das rodas dianteiras de um automóvel de tal maneira que, quando essa roda gira 72π rad, uma engrenagem que compõe o velocímetro gira 2π rad. Quando a roda gira $\frac{18\pi}{5}$ rad, essa engrenagem gira:

a) 15° b) 12° c) 34,4° d) 18° e) 9°

95 Quando o ponteiro das horas de um relógio desloca-se 48°, qual é o deslocamento, em radiano, do ponteiro dos minutos?

96 (UFPA) Aristarco de Samos, matemático que viveu por volta de 300 a.C., querendo calcular as distâncias relativas da Terra ao Sol e da Terra à Lua, utilizou o seguinte raciocínio: "No momento em que a Lua se encontra exatamente à meia-lua, os três astros formam um triângulo retângulo, com a Lua ocupando o vértice do ângulo reto. Sabendo a medida do ângulo que a visão da Lua forma com a visão do Sol, será possível determinar a relação entre as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol".

Sabe-se que o ângulo formado pelas direções Terra--Lua e Terra-Sol, na situação de meia-lua, é de, aproximadamente, 89,85° e que a distância da Terra à Lua é de, aproximadamente, 384.000 km.



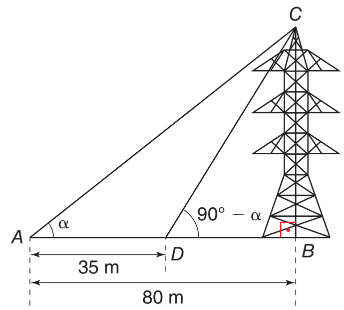
Para ângulos de medidas inferiores a 1° (um grau), uma boa aproximação para o seno do ângulo é a medida do mesmo ângulo em radiano.
Utilizando esses dados e o raciocínio de Aristarco, pode-se concluir que a distância da Terra ao Sol é de aproximadamente:

a) 2.500.000 km
b) 3.800.000 km
c) 34.600.000 km
d) 147.000.000 km
e) 7.000.000.000 km

97 Um satélite artificial gira em torno da Terra descrevendo uma circunferência cujo centro O coincide com o centro da Terra. A função $f(t) = 300 \cos \frac{4\pi t}{3}$ expressa a abscissa da posição do satélite no instante t, em hora, em relação a um sistema cartesiano ortogonal de origem O, contido no plano da órbita do satélite, em que a unidade adotada nos eixos é o quilômetro.

a) Qual é a abscissa da posição do satélite 1,5 h após o início da medição do tempo?
b) Qual é a ordenada da posição do satélite 2,5 h após o início da medição do tempo?
c) Qual é o raio da órbita do satélite?
d) Em quanto tempo o satélite completa uma volta ao redor da Terra?

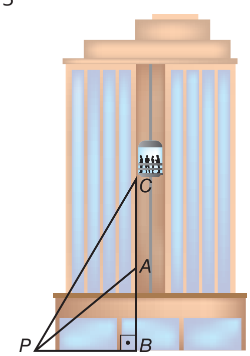
98 Dois pontos, A e D, estão alinhados com o centro B da base de uma torre de transmissão elétrica, de altura BC, tal que $AD = 35$ m, $AB = 80$ m, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto e os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{D}B$ têm medidas α e $90° - \alpha$, respectivamente. Calcule a altura da torre.



99 Uma escada de 4 m de comprimento será apoiada em um ponto A de um piso plano e horizontal e em um ponto B de uma parede vertical. A distância do ponto A à parede pode variar de, no mínimo, $2\sqrt{2}$ m a, no máximo, $2\sqrt{3}$ m. As possíveis medidas α do ângulo agudo que a escada formará com o piso são tais que:

a) $30° \leqslant \alpha \leqslant 45°$
b) $30° \leqslant \alpha \leqslant 60°$
c) $45° \leqslant \alpha \leqslant 60°$
d) $45° \leqslant \alpha < 90°$
e) $60° \leqslant \alpha < 90°$

100 Um ponto P está no mesmo plano horizontal de um ponto B da trajetória vertical de um elevador panorâmico, com $PB = 10$ m, conforme a figura. Durante a subida, o elevador passa por dois pontos, A e C, com $AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ m e $CB = 10\sqrt{3}$ m.



Enquanto o elevador E percorre a distância AC, a medida α do ângulo agudo $E\hat{P}B$ é tal que:

a) $30° \leqslant \alpha \leqslant 45°$
b) $45° \leqslant \alpha \leqslant 60°$
c) $30° \leqslant \alpha \leqslant 60°$
d) $30° \leqslant \alpha < 90°$
e) $45° \leqslant \alpha < 90°$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Construa o gráfico da função $f(x) = |2x + 4| + 3$, dê seu domínio e seu conjunto imagem.

2 Uma indústria de óleo produziu 200.000 litros no seu primeiro ano de funcionamento. Em cada um dos anos seguintes, a produção aumentou 5% em relação ao ano anterior.

a) Determine o número de litros de óleo produzidos por essa empresa no n-ésimo ano de funcionamento.
b) Determine o número de litros de óleo produzidos por essa empresa desde sua inauguração até o final do n-ésimo ano de funcionamento.

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

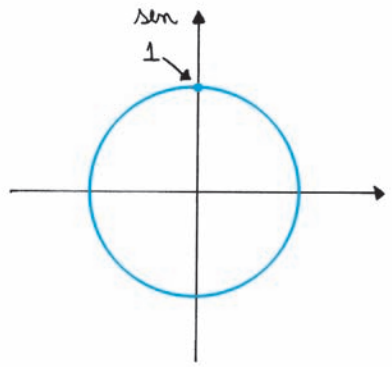
Exercício

Resolva a equação sen $2x = 1$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Substituindo $2x$ por α na equação, temos:

sen $\alpha = 1$



$\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ Incompleto!

Assim:

$2x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

Logo: $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$

Comentário

O aluno cometeu um erro ao admitir que α é uma medida da primeira volta positiva da circunferência trigonométrica. Para determinar o intervalo de variação de α, multiplicamos por 2 os membros da desigualdade $0 \leqslant x < 2\pi$, obtendo $0 \leqslant 2x < 4\pi$. Como $\alpha = 2x$, concluímos que $0 \leqslant \alpha < 4\pi$, ou seja, α é uma medida da primeira ou da segunda volta da circunferência trigonométrica.

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo 4

Outras razões trigonométricas, adição de arcos e resolução de triângulos

Em Astronomia, Topografia, Geografia etc., a necessidade de medir distâncias e ângulos, por meio da Trigonometria, estimulou o desenvolvimento de fórmulas auxiliares, visando a simplificação dos cálculos. Neste capítulo, estudaremos algumas dessas fórmulas.

4.1 Secante, cossecante e cotangente

Às razões inversas do cosseno, seno e tangente daremos os nomes de secante, cossecante e cotangente, respectivamente.

4.2 Identidades

Identidades trigonométricas são expressões que se igualam para qualquer valor possível atribuído à variável.

4.3 Adição de arcos

As identidades trigonométricas de adição de arcos são aplicadas no desenvolvimento de expressões trigonométricas cujos arcos são representados por uma soma ou uma diferença.

4.4 Arco duplo

As identidades trigonométricas de arco duplo são aplicadas no desenvolvimento de expressões trigonométricas cujos arcos são representados pela soma de dois valores iguais.

4.5 Resolução de triângulos

Resolver um triângulo significa determinar as medidas desconhecidas de lados ou ângulos do triângulo com base nas medidas conhecidas dos outros lados ou ângulos.

Astronauta Mark Lee flutuando perto do ônibus espacial durante missão em 1994.

Para pensar

De um ponto P do espaço, um astronauta vê a Terra sob um ângulo de medida θ, conforme mostra a figura ao lado.

Admitindo que o raio da Terra meça 6.400 km, obtenha uma equação que expresse a distância d entre o astronauta e a superfície da Terra, em função de θ.

Secante, cossecante e cotangente

Objetivo

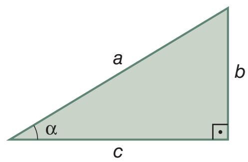
- **Aplicar** as razões inversas do seno, cosseno e tangente em cálculos numéricos e na resolução de equações e inequações.

Termos e conceitos

- secante
- cossecante
- cotangente

As razões trigonométricas inversas de um ângulo agudo

No triângulo retângulo, estudamos três razões trigonométricas: o seno, o cosseno e a tangente, que revisamos a seguir.



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

As inversas (ou recíprocas) dessas razões também são chamadas de razões trigonométricas e recebem nomes especiais, conforme as definições:

- a recíproca do cosseno é chamada de **secante** (sec):

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

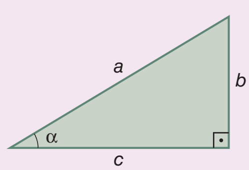
- a recíproca do seno é chamada de **cossecante** (cossec):

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

- a recíproca da tangente é chamada de **cotangente** (cotg):

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

Podemos concluir que, para qualquer ângulo agudo de medida α, temos:



$$\sec \alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cossec } \alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

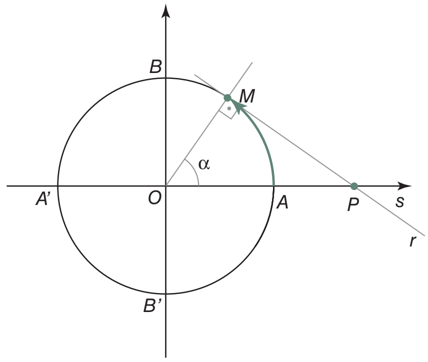
Nota:

Existem outras abreviações para cossecante (cosec ou csc) e para cotangente (cot).

Do mesmo modo que fizemos para o seno, o cosseno e a tangente, podemos representar as razões recíprocas no sistema trigonométrico. Partiremos, como sempre, da ideia de triângulo retângulo e estenderemos os conceitos para arcos trigonométricos.

Secante de um arco trigonométrico

Considere um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e a reta tangente à circunferência em M interceptando o eixo das abscissas no ponto P, conforme a figura abaixo.



No triângulo OPM temos:

$$\cos\alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{OP} \Rightarrow OP = \frac{1}{\cos\alpha}$$

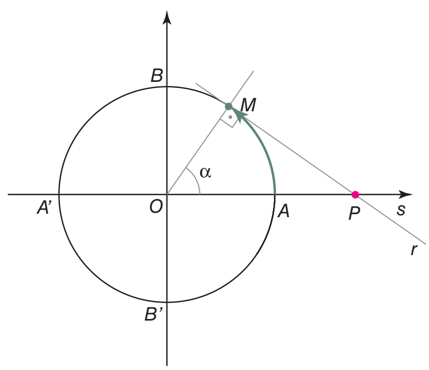
$$\therefore OP = \sec\alpha$$

Pela definição a seguir, generalizamos essa ideia para qualquer arco trigonométrico cuja extremidade não pertença ao eixo das ordenadas.

Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das ordenadas, define-se a **secante de α** por:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Geometricamente, a secante de α é a abscissa do ponto P, obtido pela intersecção do eixo das abscissas com a reta tangente à circunferência em M. Por isso, podemos nos referir ao eixo das abscissas como **eixo das secantes**.



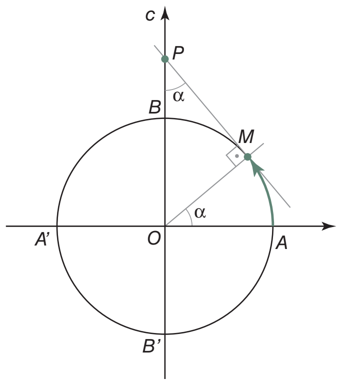
$\sec\alpha = x_P$

Essa definição permite concluir que:

- O ponto M não pode coincidir com B nem com B', pois as retas tangentes à circunferência em B ou B' não interceptam o eixo das secantes. Por isso, não existe a secante de um arco com extremidade B ou B'. Em outras palavras, existe a $\sec\alpha$ se, e somente se, $\cos\alpha \neq 0$.
- Qualquer reta tangente à circunferência em um ponto do 1º ou do 4º quadrante intercepta o eixo das secantes em um ponto de abscissa positiva; e qualquer reta tangente à circunferência em um ponto do 2º ou do 3º quadrante intercepta o eixo das secantes em um ponto de abscissa negativa. Logo, a secante é positiva no 1º e no 4º quadrante, e negativa no 2º e no 3º quadrante. Note que a secante tem o mesmo sinal que o cosseno.
- A secante assume qualquer valor no conjunto $A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, e somente nesse conjunto, isto é, ela não assume valor no intervalo $]-1, 1[$.

Cossecante de um arco trigonométrico

Considere um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e a reta tangente à circunferência em M interceptando o eixo das ordenadas no ponto P, conforme a figura abaixo.



No triângulo retângulo OPM, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{OP} \Rightarrow OP = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha}$$

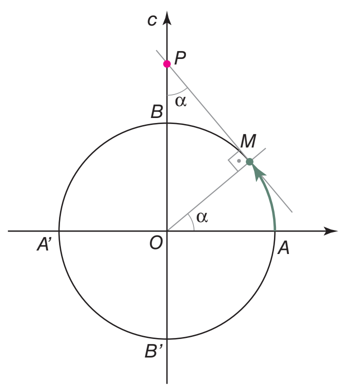
$\therefore OP = \text{cossec}\ \alpha$

Pela definição a seguir, generalizamos essa ideia para qualquer arco trigonométrico cuja extremidade não pertença ao eixo das abscissas.

Dado um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das abscissas, define-se a **cossecante de α** por:

$$\text{cossec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha}$$

Geometricamente, a cossecante de α é a ordenada do ponto P, obtido pela intersecção do eixo das ordenadas com a reta tangente à circunferência em M. Por isso, podemos nos referir ao eixo das ordenadas como **eixo das cossecantes**.



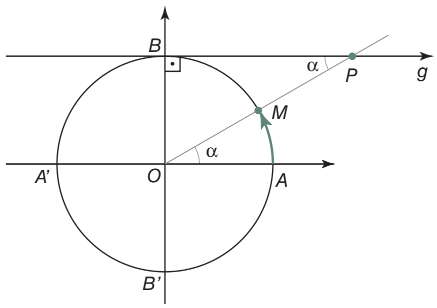
$\text{cossec}\ \alpha = y_P$

Essa definição permite concluir que:

- O ponto M não pode coincidir com A nem com A', pois as retas tangentes à circunferência em A ou A' não interceptam o eixo das cossecantes. Por isso, não existe a cossecante de um arco com extremidade A ou A'. Em outras palavras, existe a cossec α se, e somente se, sen $\alpha \neq 0$.
- Qualquer reta tangente à circunferência em um ponto do 1º ou do 2º quadrante intercepta o eixo das cossecantes em um ponto de ordenada positiva; e qualquer reta tangente à circunferência em um ponto do 3º ou do 4º quadrante intercepta o eixo das cossecantes em um ponto de ordenada negativa. Por isso, a cossecante é positiva no 1º e no 2º quadrante, e negativa no 3º e no 4º quadrante. Note que a cossecante tem o mesmo sinal do seno.
- A cossecante assume qualquer valor no conjunto $A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, e somente nesse conjunto, isto é, ela não assume valor no intervalo $]-1, 1[$.

Cotangente de um arco trigonométrico

Na circunferência trigonométrica abaixo, considere um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Considere também o eixo real g, de origem $B(0, 1)$, tangente à circunferência em B, com a mesma unidade adotada nos eixos coordenados e a mesma orientação do eixo das abscissas. A reta $\overleftrightarrow{OM}$ intercepta o eixo g em P.



No triângulo OBP, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{OB}{BP} = \frac{1}{BP} \Rightarrow BP = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$$

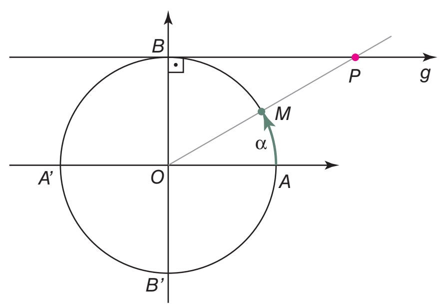
$$\therefore BP = \text{cotg}\ \alpha$$

Pela definição a seguir, generalizamos essa ideia para qualquer arco trigonométrico cuja extremidade não pertença ao eixo das abscissas.

Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das abscissas, define-se a **cotangente de α** por:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}$$

Geometricamente, a cotangente de α é a abscissa do ponto P, obtido pela intersecção da reta $\overleftrightarrow{OM}$ com o eixo das cotangentes. Por isso, o eixo g é chamado de **eixo das cotangentes**.



cotg $\alpha = x_P$

Essa definição permite concluir que:

- O ponto M não pode coincidir com A nem com A', pois as retas obtidas pelos prolongamentos dos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ não interceptam o eixo das cotangentes. Por isso, não existe a cotangente de um arco com extremidade A ou A'. Em outras palavras, existe a cotg α se, e somente se, sen $\alpha \neq 0$.
- Se, além de sen $\alpha \neq 0$, tivermos $\cos\alpha \neq 0$, então, $\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$.
- O prolongamento do raio que passa por qualquer ponto do 1º ou do 3º quadrante intercepta o eixo das cotangentes em um ponto de abscissa positiva; e o prolongamento do raio que passa por qualquer ponto do 2º ou do 4º quadrante intercepta o eixo das cotangentes em um ponto de abscissa negativa. Por isso, a cotangente é positiva no 1º e no 3º quadrante, e negativa no 2º e no 4º quadrante. Note que a cotangente tem o mesmo sinal que a tangente.
- A cotangente assume qualquer valor real.

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *A origem dos nomes das razões trigonométricas.*

1 Calcular:
a) cotg 30° b) sec 180° c) cossec 90°

Resolução

a) $\text{cotg } 30° = \dfrac{\cos 30°}{\text{sen } 30°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$

Veja outro modo de resolver:

$\text{cotg } 30° = \dfrac{1}{\text{tg } 30°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3}$

b) $\sec 180° = \dfrac{1}{\cos 180°} = \dfrac{1}{-1} = -1$

c) $\text{cossec } 90° = \dfrac{1}{\text{sen } 90°} = \dfrac{1}{1} = 1$

2 Dado que $\text{cotg } x = 2$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcular cossec x.

Resolução
Usando a relação fundamental da Trigonometria, montamos o sistema:

$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 2 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$ que é equivalente a

$\begin{cases} \cos x = 2 \text{ sen } x & \text{(I)} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):
$\text{sen}^2 x + (2 \text{ sen } x)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x + 4 \text{ sen}^2 x = 1$

$\therefore 5 \text{ sen}^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{5}$

$\therefore \text{sen } x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como x é uma medida associada a um ponto do 3º quadrante, temos $\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Concluímos então:

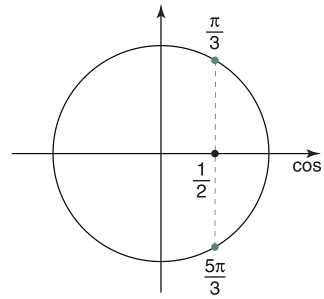
$\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x} = \dfrac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = -\dfrac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$

3 Resolver a equação $\sec x = 2$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução
Como $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, a condição de existência para essa equação é:
$\cos x \neq 0$
Desenvolvendo a equação, temos:

$\sec x = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = 2$

$\therefore \cos x = \dfrac{1}{2}$

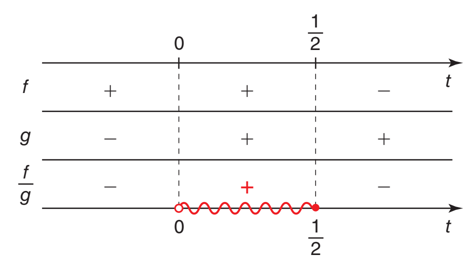


$\therefore x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

4 Resolver a inequação $\text{cossec } x \geqslant 2$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

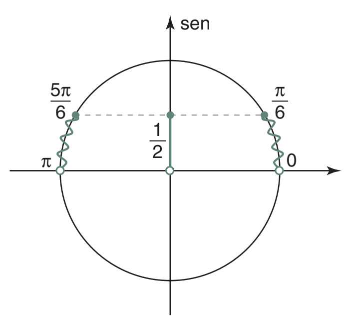
Resolução
$\text{cossec } x \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen } x} \geqslant 2$
Efetuando a mudança de variável $\text{sen } x = t$, obtemos:
$\dfrac{1}{t} \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{1}{t} - 2 \geqslant 0$
$\therefore \dfrac{1 - 2t}{t} \geqslant 0$
Condição de existência: $t \neq 0$
Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(t) = 1 - 2t$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{1 - 2t}{t}$, temos:



Note que $\dfrac{f(t)}{g(t)} \geqslant 0$ para $0 < t \leqslant \dfrac{1}{2}$, portanto,

$0 < \text{sen } x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Na circunferência trigonométrica, representamos:



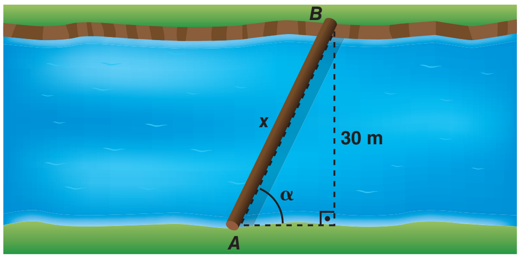
Assim, o conjunto solução da inequação é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{6} \leqslant x < \pi\right\}$

5 Em certo trecho de um rio, a largura é 30 m e as margens são paralelas. Uma ponte será construída em linha reta, oblíqua às margens do rio, ligando dois pontos, A e B, dessas margens. Sabe-se que $3 \sec \alpha = 4 \text{ tg } \alpha$, sendo α a medida do ângulo agudo que a ponte formará com cada uma das margens. Calcular a distância entre os pontos A e B.

Resolução

Indicando por x a distância entre A e B, esquematizamos:



$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{30}{x} \\ 3 \sec \alpha = 4 \text{ tg } \alpha \end{cases} \quad \text{que é equivalente a}$$

$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{30}{x} \\ \dfrac{3}{\cos \alpha} = 4 \cdot \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{30}{x} & \text{(I)} \\ \text{sen } \alpha = \dfrac{3}{4} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$\frac{3}{4} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 40$$

Logo, a distância entre A e B é 40 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Calcule:

a) cotg 45°   b) sec 0°   c) cossec 270°

2 Calcule o valor numérico da expressão: $E = \text{cossec } x + \sec^2 2x + \text{cotg } \dfrac{3x}{2}$, para $x = \dfrac{\pi}{6}$

3 Sendo $\sec x = 3$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcule cossec x.

4 Dado que $\text{cotg } x = 4$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule sec x.

5 Resolva as equações para $0 < x < 2\pi$:

a) $\text{cossec } x = 1$

b) $\sec x = -1$

c) $\text{cossec } x = 2$

d) $\sec x = -2$

e) $\sec x = \sqrt{2}$

f) $\text{cossec } x = -\sqrt{2}$

6 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a equação: $\text{tg } x + \text{cotg } x = \sec x$

7 (PUC-PR) Se x pertence ao 4º quadrante e $\sec x = \sqrt{2}$, então a expressão $\dfrac{1 + \text{tg } x + \text{cossec } x}{1 + \text{cotg } x - \text{cossec } x}$ é igual a:

a) -1 b) 0   c) 1   d) -2 e) 2

8 Resolva as inequações no universo $U = [0, 2\pi[$.

a) $\sec x \geq 2$ b) $\text{cossec } x < 2$ c) $\sec x > -2$

9 Um cabo de aço esticado liga uma estaca P do solo, plano e horizontal, a um ponto Q de um poste vertical, com $PQ = 2{,}6$ m. Sendo α a medida do ângulo agudo que o cabo de aço forma com o solo, tem-se $\text{cossec } \alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Calcule a distância entre a estaca e o poste.

Resolva os exercícios complementares 1 a 9, 29 e 30.

Identidades

Objetivo

- **Conceituar** identidades e apresentar algumas técnicas de demonstração.

Termo e conceito

- identidade

Vamos considerar o conjunto universo $\mathbb{R}$, dos números reais, e as igualdades:

- $3x = 6$ (I)
- $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$ (II)

A igualdade (I) torna-se uma proposição verdadeira **apenas para $x = 2$**. Já a igualdade (II) é uma proposição verdadeira para **qualquer valor real** atribuído à variável x. Por isso dizemos que a igualdade (I) não é uma identidade em $\mathbb{R}$ e que a igualdade (II) é uma identidade em $\mathbb{R}$.

Sendo f e g duas funções na variável x, dizemos que a igualdade $f(x) = g(x)$ é uma **identidade** num conjunto universo U se, e somente se, $f(\alpha) = g(\alpha)$ para qualquer α pertencente a U.

Exemplos

a) São identidades em $U = \mathbb{R}$ as seguintes igualdades:

- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $x + x = 2x$
- $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

b) Não são identidades no universo $U = \mathbb{R}$ as seguintes igualdades:

- $\dfrac{x}{x} = 1$, pois a sentença não se torna verdadeira para $x = 0$.
- $\sqrt{x^2} = x$, pois a sentença não se torna verdadeira para valores negativos de x, como $x = -3$.
- $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, pois a sentença não se torna verdadeira para valores de x para os quais não existe a tangente, por exemplo, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Nota:

Uma igualdade pode não ser identidade em um universo, mas ser identidade em outro universo. Por exemplo, a igualdade $\dfrac{x}{x} = 1$ não é identidade em $\mathbb{R}$, porém é identidade em $\mathbb{R}^*$.

Técnicas para demonstração de identidades

Entre as várias técnicas para a demonstração de identidades, vamos estudar três.

1ª técnica

Para provar que uma igualdade $f(x) = g(x)$ é uma identidade em um conjunto universo U, podemos seguir estes passos:

Passo 1: provamos que f e g estão definidas em U, isto é, provamos que existem $f(x)$ e $g(x)$ para qualquer x do universo U.

Passo 2: escolhemos um dos membros da igualdade e, através de simplificações algébricas e de identidades já conhecidas, obtemos o outro membro.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6 Demonstrar que a igualdade tg x + cotg x = sec $x \cdot$ cossec x é uma identidade no universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$.

Resolução

Vamos aplicar a 1ª técnica de demonstração.

Passo 1:

- Para existir a expressão tg x + cotg x, devemos ter cos $x \neq 0$ e sen $x \neq 0$. Logo, o 1º membro da igualdade está definido em U.
- Para existir a expressão sec $x \cdot$ cossec x, devemos ter cos $x \neq 0$ e sen $x \neq 0$. Portanto, o 2º membro da igualdade está definido em U.

Passo 2:

Partindo do 1º membro da igualdade, temos:

$$\overbrace{\text{tg } x + \text{cotg } x}^{1^{\text{o}} \text{ membro}} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \text{sen } x} = \frac{1}{\cos x \cdot \text{sen } x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\text{sen } x} = \underbrace{\sec x \cdot \text{cossec } x}_{2^{\text{o}} \text{ membro}}$$

Assim, pelos passos 1 e 2, provamos que a igualdade proposta é uma identidade em U.

2ª técnica

Para provar que uma igualdade $f(x) = g(x)$ é uma identidade em um conjunto universo U, podemos transformá-la na igualdade equivalente $f(x) - g(x) = 0$ e aplicar a 1ª técnica.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

7 Demonstrar que a igualdade cos $x \cdot$ tg x = cossec $x \cdot$ sen^2 x é uma identidade no conjunto universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$.

Resolução

Pela 2ª técnica, transformamos a igualdade cos $x \cdot$ tg x = cossec $x \cdot$ sen^2 x na igualdade equivalente cos $x \cdot$ tg x − cossec $x \cdot$ sen^2 x = 0. Então, aplicamos a 1ª técnica.

Passo 1:

- Para existir a expressão cos $x \cdot$ tg x − cossec $x \cdot$ sen^2 x, devemos ter sen $x \neq 0$ e cos $x \neq 0$. Logo, o 1º membro da igualdade está definido em U.
- A expressão do 2º membro da igualdade é a constante zero; logo, está definida em U, pois não depende de x.

Passo 2:

Partindo do 1º membro da igualdade, temos:

$$\overbrace{\cos x \cdot \text{tg } x - \text{cossec } x \cdot \text{sen}^2 x}^{1^{\text{o}} \text{ membro}} = \cos x \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} - \frac{1}{\text{sen } x} \cdot \text{sen}^2 x = \text{sen } x - \text{sen } x = \underbrace{0}_{2^{\text{o}} \text{ membro}}$$

Pelos passos 1 e 2, provamos que a igualdade proposta é uma identidade em U.

3ª técnica

Para provar que uma igualdade é uma identidade em um conjunto universo *U*, podemos considerar outra identidade válida em *U* e, por meio de simplificações algébricas e de identidades já conhecidas, transformá-la na igualdade inicial.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8 Demonstrar que a igualdade $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$ é uma identidade em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$.

Resolução

Nesta demonstração, vamos aplicar a 3ª técnica.

Sabemos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ é identidade em $\mathbb{R}$ e, portanto, também é identidade em U, pois $U \subset \mathbb{R}$.

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por $\cos^2 x$ (podemos efetuar essa divisão, pois os elementos x de U são tais que $\cos x \neq 0$), temos:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

Assim, mostramos que a igualdade proposta é uma identidade em *U*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10 Verifique se as sentenças a seguir são ou não identidades nos respectivos universos *U*.

a) $5(x + 2) = 5x + 10$, em $U = \mathbb{R}$
b) $6x = 12$, em $U = \mathbb{R}$
c) $0 \cdot x = 0$, em $U = \mathbb{R}$
d) $\frac{0}{x} = 0$, em $U = \mathbb{R}$
e) $\frac{0}{x} = 0$, em $U = \mathbb{R}^*$
f) $1x = x$, em $U = \mathbb{R}$
g) $(x + 3)^2 = x^2 + 9$, em $U = \mathbb{R}$
h) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, em $U = \mathbb{R}$
i) $\sqrt{x^2} = |x|$, em $U = \mathbb{R}$
j) $\sqrt[3]{x^3} = x$, em $U = \mathbb{R}$

11 Assinale a única alternativa que apresenta uma identidade no respectivo conjunto universo *U*.

a) $\text{tg}\, x \cdot \text{cotg}\, x = 1$, em $U = \mathbb{R}$
b) $\sec x \cdot \cos x = 1$, em $U = \mathbb{R}$
c) $\cos x \cdot \text{tg}\, x = \text{sen}\, x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0\}$
d) $\text{cossec}\, x \cdot \text{sen}\, x = 1$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0\}$
e) $\sec^2 x \cdot \text{tg}\, x \cdot \text{sen}\, x = \sec x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0\}$

12 Demonstre que cada uma das igualdades abaixo é identidade no respectivo universo *U*.

a) $\text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x = \sec x - \cos x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$
b) $\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0\}$
c) $\sec^2 x + \text{cossec}^2 x = \sec^2 x \cdot \text{cossec}^2 x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0 \ \cos x \neq 0\}$
d) $\text{sen}^4 x - \cos^4 x = 2\, \text{sen}^2 x - 1$, em $U = \mathbb{R}$

Resolva os exercícios complementares 10 a 12.

Adição de arcos

Objetivo

- **Calcular** o seno, o cosseno e a tangente da soma ou da diferença de dois arcos.

Frequentemente teremos que operar com expressões trigonométricas em que os arcos são representados por adições, $a + b$, ou subtrações, $a - b$. Por isso, estudaremos neste item as identidades trigonométricas de adição de arcos. Para entender a necessidade dessas identidades, analise a sentença:

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a + \text{sen}\,b$$

Essa sentença é uma identidade no universo U de todos os valores reais de a e b?

Para que fosse identidade em U, essa sentença deveria se tornar verdadeira para quaisquer valores reais atribuídos às variáveis a e b. Vejamos o que acontece, por exemplo, ao atribuirmos às variáveis a e b os valores π e $\frac{\pi}{2}$, respectivamente:

$$\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,\pi + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1$$

$$\therefore \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \qquad \textbf{(Falso!)}$$

Essa igualdade é falsa, pois $\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$. Concluímos, então, que a sentença $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a + \text{sen}\,b$ não é identidade em U.

Conclusões análogas são obtidas para o cosseno e a tangente.

A seguir, apresentamos seis identidades, chamadas de **fórmulas de adição de arcos**, que nos auxiliarão no estudo de funções trigonométricas cujos arcos envolvam uma soma ou uma diferença.

I. $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$

II. $\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$

III. $\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

IV. $\cos\,(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

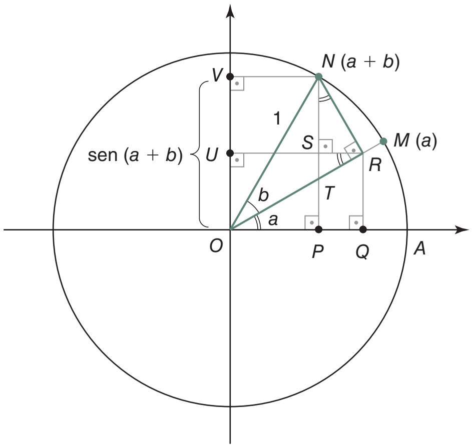
V. $\text{tg}\,(a + b) = \dfrac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$

VI. $\text{tg}\,(a - b) = \dfrac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$

Consideramos obedecidas as condições de existência nas identidades V e VI.

Demonstração da identidade (I) no 1º quadrante

Vamos considerar no 1º quadrante os arcos trigonométricos $\widehat{AM}$ e $\widehat{AN}$, de medidas a e $a + b$ respectivamente, e traçar as perpendiculares auxiliares mostradas na figura ao lado:



Temos:

- $P\hat{O}T \cong S\hat{R}T$, pois $\overline{SR} \,/\!/\, \overline{OP}$.
- $T\hat{N}R \cong T\hat{O}P$, pois os triângulos TNR e TOP são semelhantes.

- Do triângulo ONR:

$$\begin{cases} \text{sen } b = \dfrac{RN}{ON} = \dfrac{RN}{1} \\ \cos b = \dfrac{OR}{ON} = \dfrac{OR}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RN = \text{sen } b \\ OR = \cos b \end{cases}$$

- Do triângulo RUO:

$$\text{sen } a = \frac{OU}{OR} = \frac{OU}{\cos b} \Rightarrow OU = \text{sen } a \cdot \cos b$$

- Do triângulo RSN:

$$\cos a = \frac{SN}{RN} = \frac{SN}{\text{sen } b} \Rightarrow SN = \text{sen } b \cdot \cos a$$

Como $\text{sen } (a + b) = OV = OU + UV$ e $UV = SN$, concluímos que:

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

Notas:

1. Essa demonstração pode ser repetida nos demais quadrantes, considerando-se os módulos dos senos e cossenos.
2. Se a ou b for a medida de um arco com extremidade sobre um dos eixos coordenados, isto é, se a ou b for da forma $\frac{\pi}{2} \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$, constatamos a validade da fórmula substituindo diretamente a ou b por seu valor particular.

Demonstração da identidade (II)

Para essa demonstração, lembramos que a função seno é ímpar e a função cosseno é par, isto é, para qualquer número real x, temos:

$$\text{sen } (-x) = -\text{sen } x$$
$$\cos (-x) = \cos x$$

Representando a expressão $a - b$ pela equivalente $a + (-b)$ e aplicando a identidade (I), temos:

$\text{sen } (a - b) = \text{sen } [a + (-b)] = \text{sen } a \cdot \cos (-b) + \text{sen } (-b) \cdot \cos a =$

$= \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$

Demonstração da identidade (III)

Lembrando que o cosseno de um arco é igual ao seno do complementar desse arco e aplicando a identidade (II), temos:

$\cos (a + b) = \text{sen } [90° - (a + b)] = \text{sen } [(90° - a) - b] =$

$= \text{sen } (90° - a) \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos (90° - a) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \text{sen } a =$

$= \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

Demonstração da identidade (IV)

Representando a expressão $a - b$ pela equivalente $a + (-b)$ e aplicando a identidade (III), temos:

$\cos (a - b) = \cos [a + (-b)] = \cos a \cdot \cos (-b) - \text{sen } a \cdot \text{sen } (-b) =$

$= \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

Demonstração da identidade (V)

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{sen } (a + b)}{\cos (a + b)} = \frac{\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b}$$

Dividimos o numerador e o denominador dessa expressão por $\cos a \cdot \cos b$ (com $\cos a \cdot \cos b \neq 0$), obtendo:

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen } a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \dfrac{\text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \dfrac{\text{sen } a \cdot \text{sen } b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

A demonstração da identidade (VI) é análoga à demonstração da identidade (V).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9 Calcular sen 75°.

Resolução

O arco de 75° é a soma dos arcos notáveis de 45° e 30°. Assim, temos:

$\text{sen } 75° = \text{sen } (45° + 30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 30° \cdot \cos 45° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

10 Calcular cos 15°.

Resolução

O arco de 15° é a diferença entre os arcos notáveis de 45° e 30°. Então:

$\cos 15° = \cos (45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Também poderíamos ter representado 15° como a diferença entre 60° e 45°.
(*Nota*: Observe que os valores obtidos nas questões 9 e 10 são iguais (sen 75° = cos 15°). Isso ocorreu porque os arcos de 75° e de 15° são complementares.)

11 Calcular o valor da expressão $E = \text{sen } 20° \cdot \cos 40° + \text{sen } 40° \cdot \cos 20°$.

Resolução

Comparando a expressão E com o 2º membro da identidade

$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$,

concluímos:

$$E = \text{sen } 20° \cdot \cos 40° + \text{sen } 40° \cdot \cos 20° = \text{sen } (20° + 40°) \Rightarrow E = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

12 Demonstrar que a sentença $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\text{sen } x$ é identidade em $\mathbb{R}$.

Resolução

Observando que os dois membros da igualdade estão definidos em $\mathbb{R}$, vamos desenvolver o 1º membro e chegar à expressão do 2º membro:

$$\overbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}^{1^{\underline{o}}\text{ membro}} = \cos\frac{3\pi}{2} \cdot \cos x + \text{sen } \frac{3\pi}{2} \cdot \text{sen } x = 0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \text{sen } x = \underbrace{-\text{sen } x}_{2^{\underline{o}}\text{ membro}}$$

13 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sqrt{3}$.

Resolução

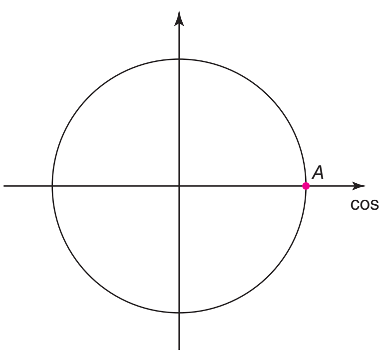
$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \text{sen } \frac{\pi}{6} \cdot \text{sen } x = \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \cancel{\frac{1}{2} \cdot \text{sen } x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \cancel{\frac{1}{2} \cdot \text{sen } x} = \sqrt{3} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = \sqrt{3}$$

$$\therefore \cos x = 1$$

Há um único ponto da circunferência trigonométrica no qual o cosseno vale 1: é o ponto A, representado a seguir, cujos números reais associados são $x = 0 + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.



Logo, o conjunto solução da equação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

14 Calcular tg 105°.

Resolução

O arco de 105° é a soma dos arcos notáveis de 60° e 45°. Assim, temos:

$$\text{tg } 105° = \text{tg } (60° + 45°) = \frac{\text{tg } 60° + \text{tg } 45°}{1 - \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 45°} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

Racionalizando o denominador, concluímos:

$$\text{tg } 105° = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

15 Demonstrar que a sentença $\text{tg}\,(-x) = -\text{tg}\,x$ é uma identidade no universo

$U = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{R}\right\}$.

Resolução

Passo 1: Observamos que os dois membros da igualdade estão definidos em U, pois, para que exista cada um deles, basta que $\cos x \neq 0$, ou seja, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{R}$.

Passo 2: Desenvolvemos um dos membros até obter o outro:

$$\text{tg}\,(-x) = \text{tg}\,(0 - x) = \frac{\text{tg}\,0 - \text{tg}\,x}{1 + \text{tg}\,0 \cdot \text{tg}\,x} = \frac{0 - \text{tg}\,x}{1 + 0 \cdot \text{tg}\,x} = -\text{tg}\,x$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13 Calcule:

a) $\cos 75°$

b) $\text{sen}\,15°$

c) $\text{tg}\,75°$

14 Demonstre que a sentença

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2\,\text{sen}\,x$$

é uma identidade em $\mathbb{R}$.

15 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

16 Calcule o valor de cada expressão.

a) $\text{sen}\,10° \cdot \cos 20° + \text{sen}\,20° \cdot \cos 10°$

b) $\cos 5° \cdot \cos 55° - \text{sen}\,5° \cdot \text{sen}\,55°$

c) $\dfrac{\text{tg}\,\frac{\pi}{3} - \text{tg}\,\frac{\pi}{12}}{1 + \text{tg}\,\frac{\pi}{3} \cdot \text{tg}\,\frac{\pi}{12}}$

17 (Unifesp) A expressão

$\text{sen}\,(x - y) \cdot \cos y + \cos\,(x - y) \cdot \text{sen}\,y$ é equivalente a:

a) $\text{sen}\,(2x + y)$

b) $\cos\,(2x)$

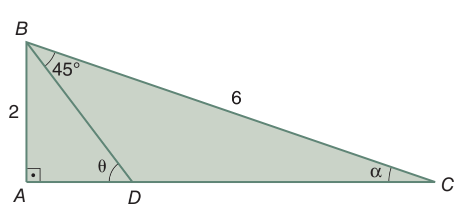
c) $\text{sen}\,x$

d) $\text{sen}\,(2x)$

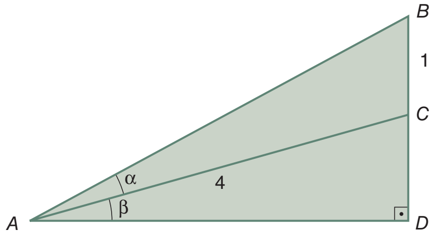
e) $\cos\,(2x + 2y)$

18 Dado $\cos x = \frac{5}{13}$, com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule o valor de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

19 Determine a medida do segmento $\overline{BD}$ do triângulo retângulo ABC representado abaixo.



20 (UFSCar-SP) Na figura, $A\hat{D}B$ é reto, $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$ medem α e β, respectivamente, $AC = 4$ dm e $BC = 1$ dm.



Sabendo que $\cos\,(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, o valor de $\text{sen}\,\alpha$ é:

a) $\frac{2}{3}$

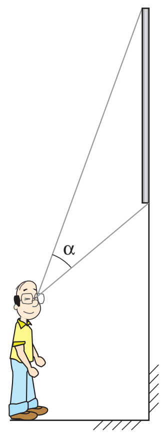
b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

21 Em um museu de arte, um visitante observa, em uma parede vertical, um quadro retangular de 2 m de altura. A base horizontal do quadro dista 2,70 m do piso, e os olhos do visitante estão a 1 m de distância da parede e a 1,70 m de altura em relação ao piso. Calcule a tangente do ângulo sob o qual o visitante vê toda a extensão vertical do quadro.



Resolva os exercícios complementares 13 a 21, 31 e 32.

Arco duplo

Objetivo

- **Estudar** as relações entre as razões trigonométricas dos arcos de medidas x e $2x$.

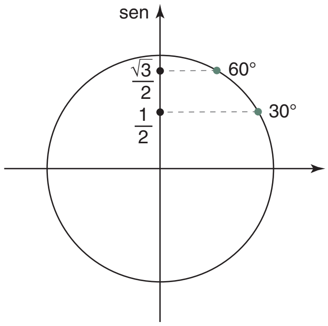
O objetivo da reflexão sobre a questão a seguir é destacar uma característica comum às funções trigonométricas:

Na função $y = \text{sen } x$, as medidas x dos arcos são diretamente proporcionais aos correspondentes valores y do seno?

Em outras palavras:

Na função $y = \text{sen } x$, podemos afirmar que $\text{sen } (kx) = k \text{ sen } x$ para qualquer constante real k?

Analisando um caso particular, vamos considerar um arco de 30° e um arco com o dobro de sua medida, isto é, um arco de 60°, e comparar os senos desses dois arcos.



Observando que $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ não é o dobro de $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, constatamos que:

$$\text{sen } (2 \cdot 30°) \neq 2 \cdot \text{sen } 30°$$

Concluímos que, na função $y = \text{sen } x$, as medidas x dos arcos **não** são diretamente proporcionais aos correspondentes valores y do **seno**.

A não proporcionalidade entre as medidas dos arcos e os correspondentes valores da função é uma característica comum a todas as funções trigonométricas. Por isso, para cada uma delas, é necessário um estudo dos **arcos múltiplos**: duplos, triplos, quádruplos etc. A seguir, apresentamos três importantes identidades envolvendo arcos duplos, sendo (I) e (II) identidades em $\mathbb{R}$ e (III) identidade em $U = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \text{ e } \mathbb{Z}\right\}$.

I. $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

II. $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

III. $\text{tg } 2x = \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$

Demonstrações

Substituindo $2x$ por $x + x$ e aplicando as fórmulas de adição de arcos, temos:

I. $\text{sen } 2x = \text{sen } (x + x) = \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos x = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x$

II. $\cos 2x = \cos (x + x) = \cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \text{sen } x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

III. $\text{tg } 2x = \text{tg } (x + x) = \dfrac{\text{tg } x + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x \cdot \text{tg } x} = \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$

Como consequências de (II), temos as identidades abaixo, que serão demonstradas nos exercícios resolvidos 17 e 18.

- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- $\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 Sendo $\text{sen}\, x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular sen 2x.

Resolução

Sabemos que $\text{sen}\, 2x = 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x$; logo, para esse cálculo, necessitamos do valor de cos x, além de $\text{sen}\, x = \frac{1}{3}$.

Pela relação fundamental, temos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\therefore \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, deduzimos que o cosseno é negativo, ou seja, $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Assim, concluímos:

$$\text{sen}\, 2x = 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\therefore \text{sen}\, 2x = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

17 Dado que $\cos x = -\frac{2}{7}$, calcular cos 2x.

Resolução

Para o cálculo de cos 2x, que é dado por $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, poderíamos determinar o valor de sen x, além de $\cos x = -\frac{2}{7}$. Porém, isso não é necessário, pois podemos expressar cos 2x em função de cos x, usando a identidade $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Observe:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Assim, concluímos:

$$\cos 2x = 2 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^2 - 1 = -\frac{41}{49}$$

18 Dado que $\text{sen}\, x = -\frac{5}{6}$, calcular cos 2x.

Resolução

Vamos expressar cos 2x em função de sen x, do seguinte modo:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = (1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$$

Assim, concluímos:

$$\cos 2x = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{7}{18}$$

19 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x$.

Resolução

Substituímos sen 2x por $2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x$:

$$2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x = 2\,\text{sen}\, x \Rightarrow \text{sen}\, x \cdot \cos x = \text{sen}\, x$$

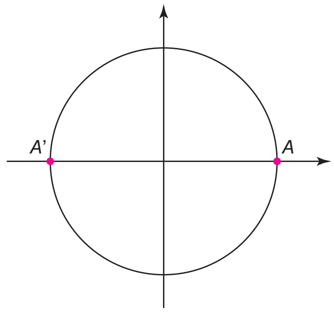
$$\therefore \text{sen}\, x \cdot \cos x - \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x \cdot (\cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \text{sen}\, x = 0 \text{ ou } \cos x - 1 = 0$$

(*Cuidado*: Na igualdade $\text{sen}\, x \cdot \cos x = \text{sen}\, x$ não podemos dividir ambos os membros por sen x, pois estaríamos supondo que $\text{sen}\, x \neq 0$ e, portanto, perderíamos a possibilidade $\text{sen}\, x = 0$.)

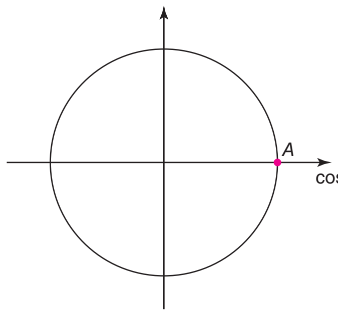
- $\text{sen}\, x = 0$

  Os pontos da circunferência trigonométrica nos quais o seno é nulo são A e A', representados a seguir, cujos números reais associados são da forma $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (I).



- $\cos x = 1$

  Há um único ponto da circunferência trigonométrica no qual o cosseno é 1; é o ponto A, representado a seguir, cujos números reais associados são: $x = k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (II).



Observe que o conjunto (II) dos números reais da forma $x = k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, está contido no conjunto (I) dos números reais da forma $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Como o conjunto solução S da equação proposta deve ser a união de (I) e (II), concluímos que: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

20 Expressar sen 3x em função de sen x.

Resolução

Substituindo 3x por (x + 2x) e aplicando as fórmulas de adição de arcos e de arco duplo, temos:

$\text{sen } 3x = \text{sen } (x + 2x) =$

$= \text{sen } x \cdot \cos 2x + \text{sen } 2x \cdot \cos x =$

$= \text{sen } x (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x \cdot \cos x =$

$= \text{sen } x (1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x \cdot \cos^2 x =$

$= \text{sen } x (1 - 2 \text{ sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x (1 - \text{sen}^2 x) =$

$= \text{sen } x - 2 \text{ sen}^3 x + 2 \text{ sen } x - 2 \text{ sen}^3 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } 3x = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x$

21 Resolver a equação $\text{sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$:

a) em $\mathbb{R}$. **b)** para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

a) Multiplicando por 2 ambos os membros da igualdade, obtemos:

$2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \text{sen } 2x = 1$

Para facilitar, efetuamos a mudança de variável: $2x = \alpha$. Feito isso, resolvemos a equação $\text{sen } \alpha = 1$ nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica, obtendo:

$\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Finalmente, retornamos à variável original x. Para isso, substituímos α por 2x na igualdade anterior:

$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Concluímos apresentando o conjunto solução:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Para obter as raízes da equação na 1ª volta positiva da circunferência trigonométrica, basta atribuir à variável k, na solução do item **a**, valores inteiros de modo que $0 \leqslant x < 2\pi$:

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

Nenhum outro valor de k nos interessa, pois, para qualquer outro inteiro k, teremos um valor de x fora do intervalo $[0, 2\pi[$. Portanto, o conjunto solução nesse intervalo é:

$S' = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

22 Aplicando as fórmulas de arco duplo, expressar:

a) cos x em função de $\text{sen } \frac{x}{2}$

b) cos x em função de $\cos \frac{x}{2}$

Resolução

a) Observando que a medida x é o dobro da medida $\frac{x}{2}$, temos:

$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2} =$

$= 1 - \text{sen}^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \text{ sen}^2 \frac{x}{2}$

b) $\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2} =$

$= \cos^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

Notas:

- Isolando $\text{sen } \frac{x}{2}$ e $\cos \frac{x}{2}$, nos itens **a** e **b**, respectivamente, obtemos as identidades a seguir, conhecidas como **fórmulas do arco metade**:

  $\text{sen } \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ e $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

- Dividindo membro a membro as identidades acima, obtemos a **fórmula do arco metade** para a tangente, considerando obedecidas as condições de existência:

  $\text{tg } \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

23 Calcular sen 22°30′.

Resolução

Pelo item **a** do exercício resolvido anterior, temos

$\cos x = 1 - 2 \text{ sen}^2 \frac{x}{2}$. Substituindo x por 45°, obtemos:

$\cos 45° = 1 - 2 \text{ sen}^2 22°30' \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2 \text{ sen}^2 22°30'$

$\therefore \text{sen}^2 22°30' = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$

$\therefore \text{sen } 22°30' = \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

Como 22°30′ é medida de um arco do 1º quadrante, concluímos:

$\text{sen } 22°30' = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

24 Dado que $\cos x = \frac{5}{8}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular $\cos \frac{x}{2}$.

Resolução

Pelo item **b** do exercício resolvido 22, temos

$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$. Logo:

$\frac{5}{8} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \dfrac{\frac{5}{8} + 1}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}$

$\therefore \frac{13}{16} = \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{16}} = \pm\frac{\sqrt{13}}{4}$

Como x é um arco do 1º quadrante, $\frac{x}{2}$ também é um arco do 1º quadrante. Assim, concluímos que $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

25 Sabendo que $\cos \frac{x}{2} = \frac{4}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular sen x.

Resolução

Pelo item **b** do exercício resolvido 22, temos

$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$.

Logo:

$\cos x = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 \Rightarrow \cos x = \frac{7}{25}$

Substituindo cos *x* por $\frac{7}{25}$ na relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos:

$$\text{sen}^2 x + \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \frac{49}{625}$$

$$\therefore \text{sen}^2 x = \frac{576}{625} \Rightarrow \text{sen } x = \pm\sqrt{\frac{576}{625}} = \pm\frac{24}{25}$$

Como *x* é a medida de um arco do 1º quadrante, concluímos que $\text{sen } x = \frac{24}{25}$.

(*Nota*: Essa questão também pode ser resolvida pela fórmula de arco duplo: $\text{sen } 2\alpha = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$. Basta observar que, se $2\alpha = x$, então $\alpha = \frac{x}{2}$ e, portanto, $\text{sen } x = 2 \cdot \text{sen } \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$. Resolva-a dessa maneira.)

26 Dado que tg *x* = 6, calcular tg 2*x*.

Resolução

$$\text{tg } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot 6}{1 - 6^2} = -\frac{12}{35}$$

27 Dado que tg 3*x* = 4, calcular tg 6*x*.

Resolução

Substituindo 6*x* por (2 · 3*x*) e aplicando a fórmula de arco duplo, temos:

$$\text{tg } 6x = \text{tg } (2 \cdot 3x) = \frac{2 \text{ tg } 3x}{1 - \text{tg}^2 3x} = \frac{2 \cdot 4}{1 - 4^2} = -\frac{8}{15}$$

28 Sabendo que tg *x* = 5, calcular tg 3*x*.

Resolução

Substituindo 3*x* por (*x* + 2*x*) e aplicando as fórmulas de adição de arcos e de arco duplo, temos:

$$\text{tg } 3x = \text{tg } (x + 2x) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } 2x}{1 - \text{tg } x \cdot \text{tg } 2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg } 3x = \frac{\text{tg } x + \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}}{1 - \text{tg } x \cdot \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}}$$

Substituindo tg *x* por 5, concluímos:

$$\text{tg } 3x = \frac{5 + \frac{2 \cdot 5}{1 - 5^2}}{1 - 5 \cdot \frac{2 \cdot 5}{1 - 5^2}} = \frac{5 - \frac{5}{12}}{1 + \frac{25}{12}} = \frac{\frac{55}{12}}{\frac{37}{12}} = \frac{55}{37}$$

29 Aplicando a fórmula de arco duplo, expressar tg *x* em função de $\text{tg } \frac{x}{2}$.

Resolução

Observando que a medida *x* é o dobro da medida $\frac{x}{2}$, temos:

$$\text{tg } x = \text{tg}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \frac{2 \text{ tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

30 Dado que $\text{tg } \frac{x}{2} = 3$, calcular tg *x*.

Resolução

Pela questão resolvida anterior, temos:

$$\text{tg } x = \frac{2 \text{ tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Logo: $\text{tg } x = \frac{2 \cdot 3}{1 - 3^2} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

22 Calcule sen 2*x* e cos 2*x* sabendo que $\text{sen } x = \frac{1}{3}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

23 Dado que sen *x* = 2 cos *x* e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule sen 2*x*.

24 Calcule cos 10*x* sabendo que $\cos 5x = \frac{5}{6}$.

25 O valor da expressão $\frac{\text{sen } 27°}{\text{sen } 9°} - \frac{\cos 27°}{\cos 9°}$ é:

a) sen 9°
b) sen 9° · cos 27°
c) cos 27°
d) 1
e) 2

26 (PUC-MG) Sendo $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x$, o valor de $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ é:

a) 1
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\frac{1}{4}$

27 Dado cos *x* = *k*, calcule cos 3*x* em função de *k*.

28 Sabendo que sen *x* = *a*, calcule sen 3*x* em função de *a*.

29 (Ufac) O número de soluções da equação sen 2*x* = cos *x*, no intervalo [0, 2π], é:

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

30 (Fuvest-SP) Determine todos os valores de x pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \text{sen}^2\, x$.

31 (PUC-RS) A expressão

$\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$ é idêntica a:

a) $2 \cos 2\alpha$

b) $2\, \text{sen}\, 2\alpha$

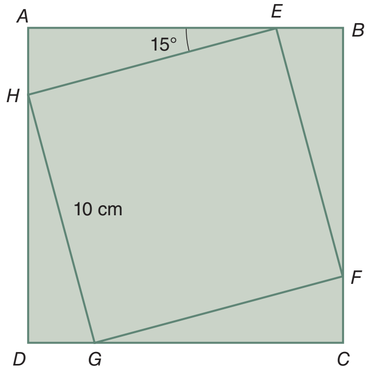
c) $\cos 2\alpha$

d) $\text{sen}\, 2\alpha$

e) $\cos 2\alpha - \text{sen}\, 2\alpha$

32 Um arco de medida x tem a extremidade no 3º quadrante da circunferência trigonométrica e verifica a equação $10 \cos 2x + \text{sen}\, x = 9$. Determine os valores de sen x e cos x.

33 A figura mostra um quadrado *EFGH* inscrito em um quadrado *ABCD*. Sabendo que o lado do quadrado menor mede 10 cm e que o ângulo *AÊH* mede 15°, calcule a área do quadrado maior.



34 (Fuvest-SP) Se $\text{tg}\, \theta = 2$, o valor de $\frac{\cos 2\theta}{1 + \text{sen}\, 2\theta}$ é:

a) -3

b) $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{3}{4}$

35 Dado que $\text{sen}\, \frac{x}{2} = 0{,}6$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule sen x.

36 Sabendo que $\text{sen}\, x = \frac{12}{13}$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos \frac{x}{2}$ e $\text{sen}\, \frac{x}{2}$.

37 Calcule o valor de $\cos 22°30'$.

38 (Ufam) Dado $\text{tg}\, \frac{x}{2} = 2$. Então, tg x é igual a:

a) $-\frac{3}{5}$

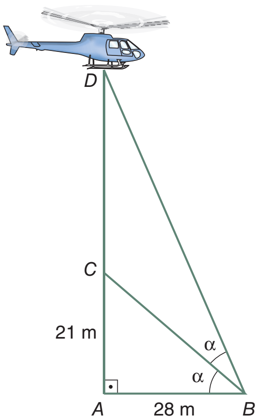
b) $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{4}{3}$

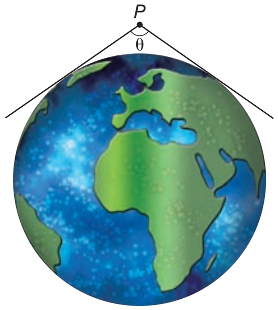
d) $\frac{4}{3}$

e) $-\frac{5}{3}$

39 Um helicóptero, que decola verticalmente a partir de um ponto *A* de uma pista plana e horizontal, é observado de um ponto *B* da pista, localizado a 28 m de *A*. Ao subir 21 m, até um ponto *C*, o aparelho é visto sob um ângulo de medida α com a pista; e, quando atinge um ponto *D*, é visto sob um ângulo de medida 2α, conforme a figura. A que altura, em relação à pista, está o helicóptero ao atingir o ponto *D*?



40 De um ponto *P* do espaço, um astronauta vê a Terra sob um ângulo de medida θ, conforme a figura:



Admitindo-se que o raio da Terra meça 6.400 km e que $\cos \theta = -0{,}62$, conclui-se que o ponto *P* está, em relação à superfície da Terra, a uma altura aproximada de:

a) 300 km

b) 530 km

c) 580 km

d) 623 km

e) 711 km

Resolva os exercícios complementares 33 e 34.

Resolução de triângulos

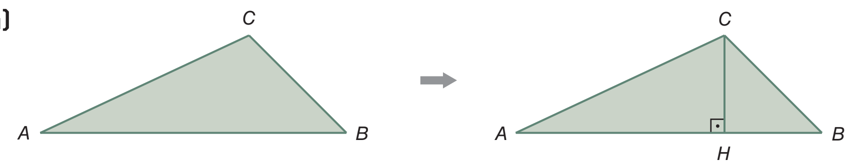
Objetivo

- **Determinar** as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo com base em elementos conhecidos.

Embora as razões trigonométricas sejam definidas apenas em triângulos retângulos, é possível aplicá-las em situações que envolvem triângulos não retângulos, considerando que podemos tanto decompor um triângulo não retângulo em dois triângulos retângulos quanto compor triângulos retângulos a partir de um triângulo não retângulo.

Exemplos

a)



O triângulo não retângulo *ABC* pode ser decomposto nos triângulos retângulos *HBC* e *HAC*.

b)

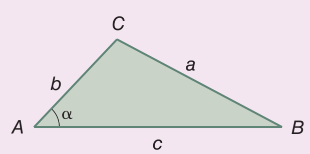
Com o triângulo não retângulo *ABC*, podemos compor os triângulos retângulos *HBC* e *HBA*.

Pelos processos de composição ou decomposição mostrados nesses exemplos, podemos relacionar as medidas dos ângulos internos com as medidas dos lados de um triângulo não retângulo através das razões trigonométricas, como comprovam os teoremas a seguir.

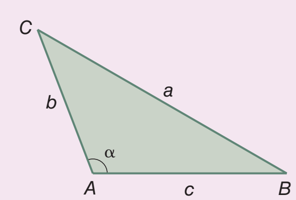
Lei dos cossenos

Sendo a, b e c as medidas dos lados de um triângulo qualquer e α a medida do ângulo oposto ao lado de medida a, temos:

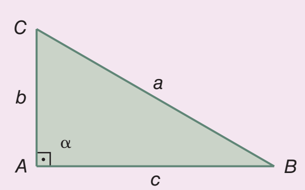
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$



$\alpha < 90°$



$\alpha > 90°$



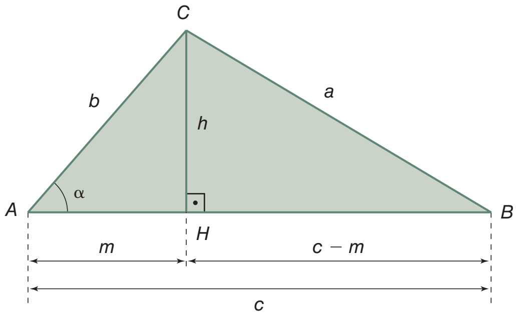
$\alpha = 90°$

Demonstração

1º caso: $\alpha < 90°$

Sejam:

- $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, com $CH = h$;
- $\overline{AH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{AC}$ sobre o lado $\overline{AB}$, com $AH = m$;
- $\overline{BH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre o lado $\overline{AB}$, com $BH = c - m$.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos HBC e HAC, temos:

$h^2 + (c - m)^2 = a^2$ (I)

$h^2 + m^2 = b^2$ (II)

Subtraindo membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos:

$(c - m)^2 - m^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 - 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$ (III)

Do triângulo HAC, temos: $\cos\alpha = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos\alpha$ (IV)

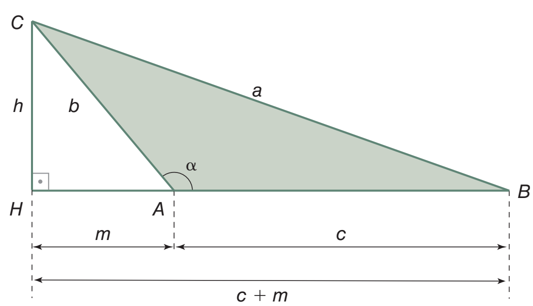
Substituindo (IV) em (III), concluímos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

2º caso: $\alpha > 90°$

Sejam:

- $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, com $CH = h$;
- $\overline{AH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{AC}$ sobre a reta que contém o lado $\overline{AB}$, com $AH = m$;
- $\overline{BH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre a reta que contém o lado $\overline{AB}$, com $BH = c + m$.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos HBC e HAC, temos:

$h^2 + (c + m)^2 = a^2$ (I)

$h^2 + m^2 = b^2$ (II)

Subtraindo membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos:

$(c + m)^2 - m^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 + 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$ (III)

No triângulo HAC, a medida do ângulo $H\hat{A}C$ é $180° - \alpha$, portanto:

$\cos(180° - \alpha) = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos(180° - \alpha)$

Como $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, essa igualdade é equivalente a: $m = -b \cdot \cos\alpha$ (IV)

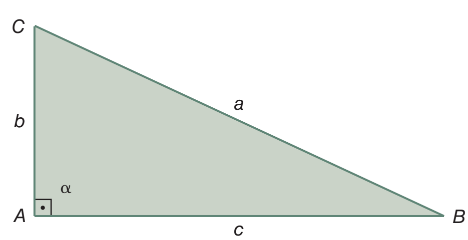
Substituindo (IV) em (III), concluímos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

3º caso: $\alpha = 90°$

Observe que o teorema também vale para $\alpha = 90°$:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90°$

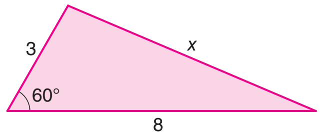
Como $\cos 90° = 0$, temos $a^2 = b^2 + c^2$, que é o teorema de Pitágoras.



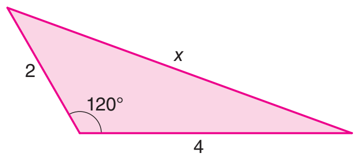
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

31 Determinar a medida x em cada figura:

a)



b)



Resolução

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

a) $x^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60°$

$\therefore x^2 = 9 + 64 - 48 \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore x^2 = 49$

Logo: $x = 7$

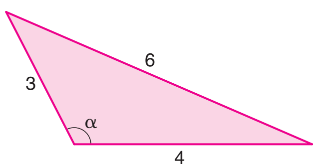
b) $x^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 120°$

$\therefore x^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore x^2 = 28$

Portanto: $x = 2\sqrt{7}$

32 Calcular o valor de $\cos \alpha$ na figura:



Resolução

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

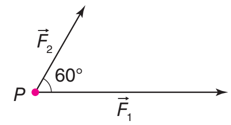
$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha$

$\therefore 36 = 9 + 16 - 24 \cos \alpha$

$\therefore 24 \cos \alpha = -11$

Logo: $\cos \alpha = -\frac{11}{24}$

33 Sobre um ponto material P, são aplicadas apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, de intensidades $|\vec{F}_1| = 5$ N e $|\vec{F}_2| = 3$ N, conforme mostra a figura abaixo. Calcular a intensidade da força resultante que atua sobre esse ponto.



Resolução

Aprendemos em Física que a resultante $\vec{F}$ dessas forças é representada pela diagonal $\overline{PL}$ do paralelogramo $PQLM$ da figura 1 abaixo. Como dois ângulos consecutivos quaisquer de um paralelogramo são suplementares e $Q\hat{P}M$ mede 60°, deduzimos que $P\hat{Q}L$ mede 120°, conforme a figura 2.

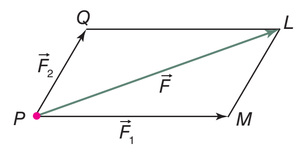


Figura 1

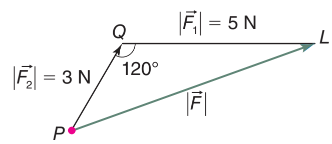


Figura 2

Pela lei dos cossenos, temos:

$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2| \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{F}|^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120°$

$\therefore |\vec{F}|^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow |\vec{F}|^2 = 49$

$\therefore |\vec{F}| = 7$

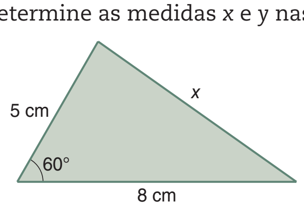
Logo, a intensidade da força resultante é 7 N.

(*Nota*: O símbolo N, que é a abreviação de newton, representa uma unidade de medida de força que expressa uma aceleração de 1 m/s^2 para um corpo de 1 kg, na direção e no sentido da força.)

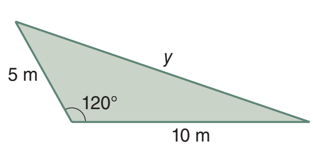
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

41 Determine as medidas x e y nas figuras:

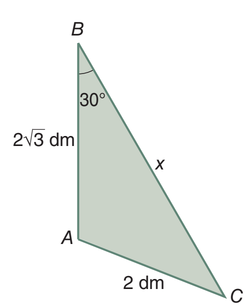
a)



b)



42 Calcule a medida x do lado $\overline{BC}$ do triângulo abaixo, observando que o ângulo $B\hat{A}C$ é obtuso.



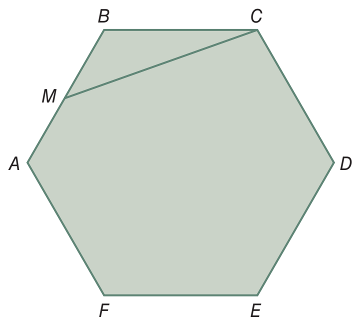
43 Os lados de um triângulo medem 4 cm, 5 cm e 7 cm.

a) Calcule o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo.

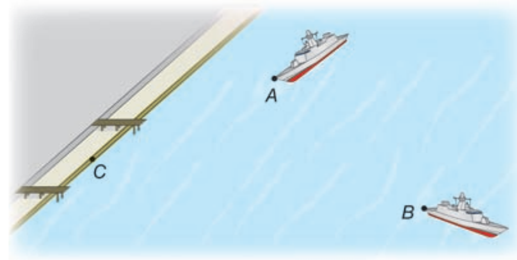
b) O maior ângulo interno desse triângulo é agudo, reto ou obtuso? Justifique sua resposta.

44 Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 5 cm e 10 cm e formam entre si um ângulo de 120°. Calcule as medidas das diagonais desse paralelogramo.

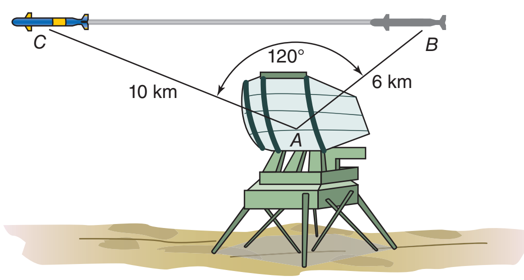
45 A figura abaixo representa um hexágono regular *ABCDEF* com 6 cm de lado. Sendo *M* o ponto médio do lado $\overline{AB}$, calcule a medida do segmento $\overline{MC}$.



46 Dois navios, *A* e *B*, estão ancorados nas proximidades de um cais. De um ponto *C* do cais observam-se os dois navios de modo que $m(A\hat{C}B) = 60°$, $CA = 5$ km e $CB = 8$ km. Calcule a distância entre os dois navios.



47 Um míssil em trajetória retilínea foi detectado por um radar *A* em dois pontos, *B* e *C*, com $AB = 6$ km, $AC = 10$ km e $m(C\hat{A}B) = 120°$. Determine a distância percorrida pelo míssil do ponto *B* ao ponto *C*.

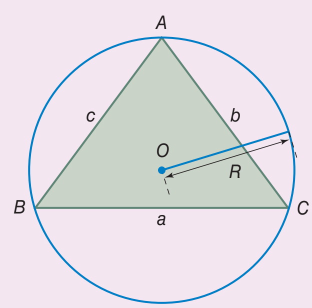


Resolva os exercícios complementares 22 a 28 e 35.

Lei dos senos

Sendo $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ as medidas dos lados de um triângulo *ABC* e *R* o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo, temos:

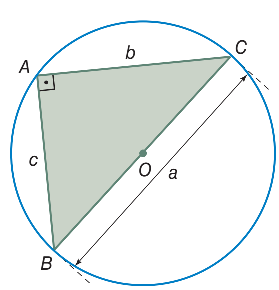
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$



Demonstração

1º caso: O triângulo é retângulo.

Note que, nesse caso, o centro *O* da circunferência circunscrita pertence à hipotenusa do triângulo e, portanto, $a = 2R$. Assim, temos:



$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

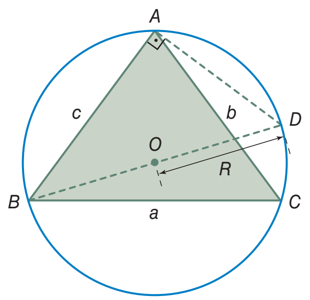
Como $a = 2R$, temos: $\dfrac{a}{2R} = 1$

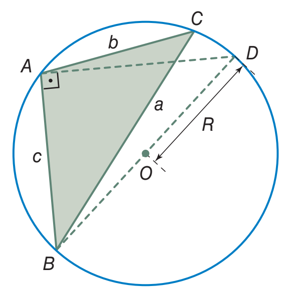
Mas $1 = \text{sen } 90° = \text{sen } \hat{A}$, logo: $\dfrac{a}{2R} = \text{sen } \hat{A} \Rightarrow 2R = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}}$

Concluímos que: $2R = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

2º caso: O triângulo não é retângulo.

Nesse caso, o centro O da circunferência circunscrita é um ponto interior ou exterior ao triângulo.





Se $\overline{BD}$ é um diâmetro dessa circunferência, o ângulo $D\hat{A}B$ é reto, pois está inscrito numa semicircunferência. Então: $\text{sen } \hat{D} = \dfrac{c}{2R}$

Os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{C}$ são congruentes, pois estão inscritos na circunferência e determinam o mesmo arco. Logo:

$$\text{sen } \hat{D} = \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

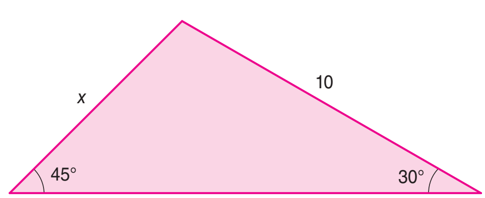
De maneira análoga, traçando por A um diâmetro $\overline{AD'}$ e por C um diâmetro $\overline{CD''}$, temos:

$$2R = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \quad \text{e} \quad 2R = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}$$

Concluímos que: $2R = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

34 Determinar a medida x na figura:



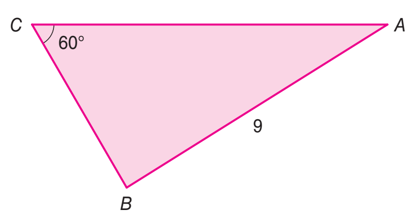
Resolução

Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{10}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\therefore x = 5\sqrt{2}$

35 Calcular a medida R do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC abaixo.



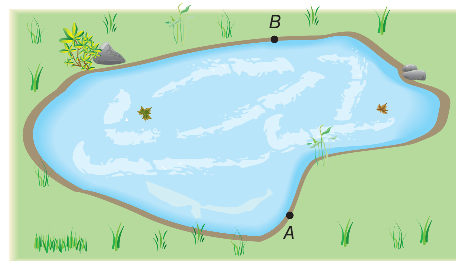
Resolução

Pela lei dos senos, a razão entre a medida de um lado do triângulo e o seno do ângulo oposto a esse lado é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo. Logo:

$$\frac{9}{\text{sen } 60°} = 2R \Rightarrow \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

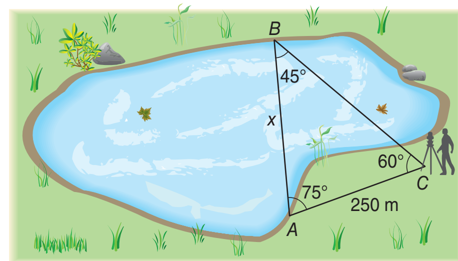
$\therefore R = 3\sqrt{3}$

36 Dois pontos, A e B, estão localizados na margem de um lago, conforme mostra a figura ao lado.
Para calcular a distância entre esses pontos, um topógrafo caminhou em linha reta 250 m a partir de A até um ponto C, com $m(B\hat{A}C) = 75°$. A seguir, mediu o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 60°. Com esses dados, obteve a distância AB. Qual é essa distância em metro?



Resolução

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°; logo, no triângulo ABC, deduzimos que $A\hat{B}C$ mede 45°. Sendo x a distância, em metro, entre os pontos A e B, temos o esquema ao lado.



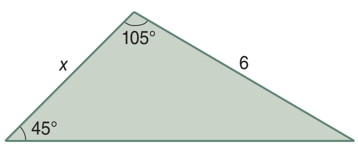
Pela lei dos senos, concluímos: $\dfrac{x}{\text{sen } 60°} = \dfrac{250}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{250}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\therefore x = \dfrac{250\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 125\sqrt{6}$

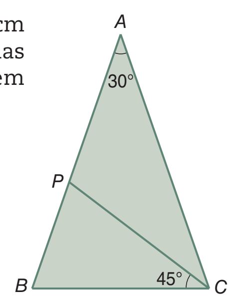
A distância AB é $125\sqrt{6}$ m ou, aproximadamente, 306 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

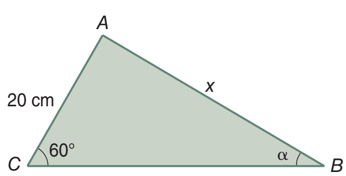
48 Determine a medida x na figura:



49 No triângulo ao lado, $BC = 2$ cm e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ têm medidas iguais. Calcule a medida, em centímetro, do segmento $\overline{BP}$.

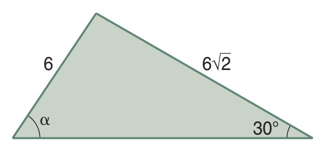


50 No triângulo ABC representado abaixo, são dados $AC = 20$ cm e $\cos \alpha = 0,6$. Calcule a medida x do lado $\overline{AB}$.

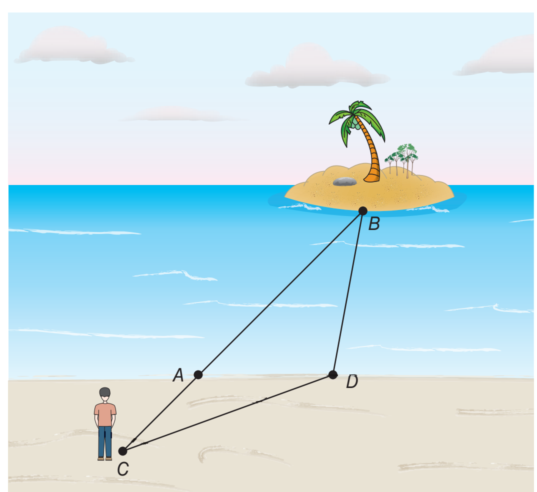


51 Calcule a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo abaixo.

52 Determine a medida α do ângulo agudo no triângulo a seguir.



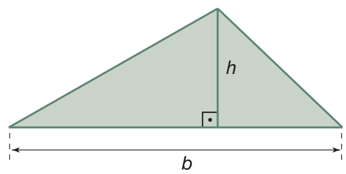
53 Para calcular a distância entre um ponto A de uma praia e uma ilhota B, um observador afastou-se 30 m de A, sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ até o ponto C, e depois caminhou 100 m em linha reta até o ponto D, conforme mostra a figura. A seguir, mediu os ângulos $D\hat{C}B$ e $B\hat{D}C$ obtendo, respectivamente, 40° e 110°. Adotando a aproximação sen 110° = 0,94, qual é a distância entre A e B?



Resolva os exercícios complementares 36 e 37.

Área de um triângulo em função das medidas de dois lados e do ângulo compreendido por eles

Sabemos que a área A de um triângulo pode ser calculada como metade do produto das medidas da base e da altura relativa a essa base:

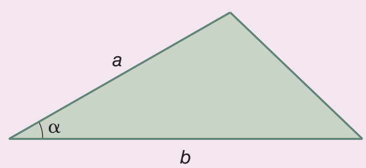


$$A = \frac{bh}{2}$$

Agora faremos o cálculo dessa área de outra maneira. Vamos calcular a área do triângulo em função das medidas de dois lados e da medida do ângulo determinado por eles, conforme o teorema a seguir.

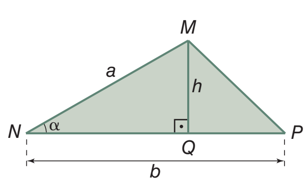
Se dois lados de um triângulo têm medidas a e b e o ângulo determinado por esses lados tem medida α, então a área A do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \text{sen}\ \alpha$$

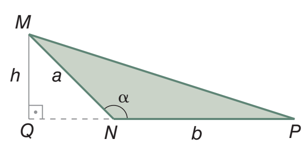


Demonstração

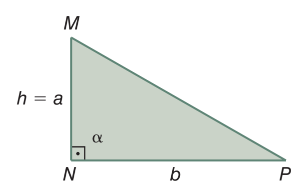
Indicando por MNP um triângulo com $NM = a$, $NP = b$ e $m(M\hat{N}P) = \alpha$, seja h a medida da altura $\overline{MQ}$ relativa ao lado $\overline{NP}$:



$\alpha < 90°$



$\alpha > 90°$



$\alpha = 90°$

Em qualquer um dos três casos, a área A do triângulo é dada por:

$$A = \frac{bh}{2} \quad \text{(I)}$$

1º caso: $\alpha < 90°$

No triângulo MNQ, $\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{a}$, ou ainda:

$$h = a \cdot \text{sen}\ \alpha \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos a área do triângulo em função de a, b e α:

$$A = \frac{b \cdot a \cdot \text{sen}\ \alpha}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \text{sen}\ \alpha$$

2º caso: $\alpha > 90°$

No triângulo *MNQ*, $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \dfrac{h}{a}$, ou ainda:

$$h = a \cdot \text{sen}\,(180° - \alpha)$$

Mas sabemos que $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$. Logo:

$$h = a \cdot \text{sen}\,\alpha \quad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (I), obtemos a área do triângulo em função de *a*, *b* e α:

$$A = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \text{sen}\,\alpha$$

3º caso: $\alpha = 90°$

Temos: $A = \dfrac{bh}{2} = \dfrac{bh \cdot 1}{2}$

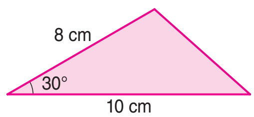
Como $h = a$, $1 = \text{sen}\,90°$, $\alpha = 90°$, concluímos:

$$A = \frac{b \cdot a \cdot \text{sen}\,90°}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \text{sen}\,\alpha$$

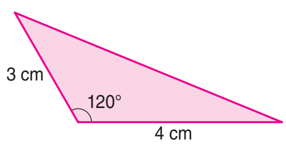
EXERCÍCIO RESOLVIDO

37 Calcular a área de cada triângulo.

a)



b)



Resolução

a) A área *A*, em centímetro quadrado, é dada por:

$A = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \text{sen}\,30° = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \dfrac{1}{2}$, ou seja, $A = 20\ \text{cm}^2$.

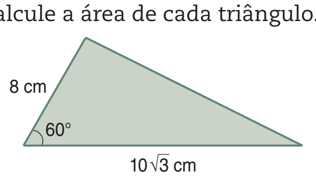
b) A área *A*, em centímetro quadrado, é dada por:

$A = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \text{sen}\,120° = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $A = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

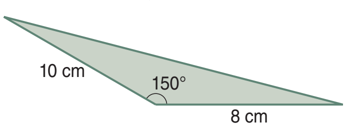
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

54 Calcule a área de cada triângulo.

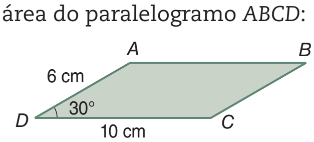
a)



b)

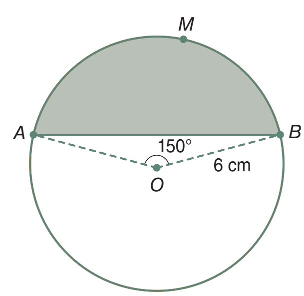


55 Calcule a área do paralelogramo *ABCD*:



56 Em um triângulo *ABC* de $5\ \text{dm}^2$ de área, temos $AB = 4$ dm e $AC = 5$ dm. Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

57 Calcule a área do segmento circular *AMB* no círculo de centro *O* e raio igual a 6 cm:



(*Nota*: Toda corda $\overline{AB}$, com $A \neq B$, de um círculo de centro O divide-o em duas regiões chamadas de **segmentos circulares**. Se um segmento circular *AMB* é menor que o semicírculo, sua área é a diferença entre a área do setor circular *OAMB* e a área do triângulo *AOB*.)

Resolva os exercícios complementares 38 e 39.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Calcule o valor da expressão:
$E = \text{cotg}^2\ 60° + \sec 300° - \text{cossec } 330°$

2 Calcule cotg x sabendo que cossec $x = 1{,}25$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

3 Sabendo que cotg $x = -2{,}4$ e que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule a soma sen x + cos x.

4 (Uece) Se cotg θ + tg $\theta = 8$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então $(\text{sen } \theta + \cos \theta)^2$ é igual a:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{3}$

5 (UFRR) Sabendo que tg $x = -\frac{1}{3}$ e sen $x < 0$, podemos afirmar que:

a) cossec $x = -\sqrt{10}$
b) cossec $x = \sqrt{10}$
c) cossec $x = -\sqrt{3}$
d) cossec $x = \sqrt{3}$
e) cossec $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6 (Mackenzie-SP) A soma de todas as soluções da equação tg a + cotg $a = 2$, com $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, é:

a) $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{7\pi}{4}$ e) $\frac{7\pi}{3}$

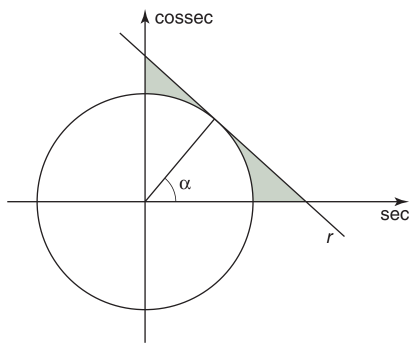
7 (UFSCar-SP) O valor de x, com $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, tal que $4(1 - \text{sen}^2\ x)(\sec^2 x - 1) = 3$ é:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) 0

8 Resolva as inequações no universo $U = [0, 2\pi[$.

a) $\sec x \leqslant \sqrt{2}$
b) cossec $x > -\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3} \sec x > 1$

9 Na circunferência trigonométrica abaixo, estão representados os eixos das secantes e das cossecantes. A reta r tangencia a circunferência na extremidade do arco de medida α, com $0° < \alpha < 90°$. Calcule, em função de α, a área da região colorida.



10 Demonstre que cada uma das igualdades abaixo é identidade no respectivo universo U.

a) $(\sec x - \cos x)(\text{cossec } x - \text{sen } x)(\text{tg } x + \text{cotg } x) = 1$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$

b) $\frac{1 + \cos x}{\text{sen } x} + \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} = 2 \text{ cossec } x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq -1\}$

c) $\frac{\text{cossec } (\pi - x)}{\sec(-x)} - \text{cotg } (\pi + x) = 0$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$

d) $(\text{tg } x + \text{cotg } x) \text{ sen } x = \sec x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \cdot \cos x \neq 0\}$

e) $(\sec^2 x - 1)(\text{cossec}^2\ x - 1) = 1$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$

11 No exercício resolvido 8 e no exercício proposto 12.b, foram demonstradas as identidades:
$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2\ x$, para $\cos x \neq 0$; e
$\text{cossec}^2\ x = 1 + \text{cotg}^2\ x$, para sen $x \neq 0$. Usando essas identidades, resolva os exercícios apresentados nos itens a seguir.

a) Sabendo que tg $x = 3$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule sec x e cos x.

b) Sabendo que cotg $x = \sqrt{15}$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule cossec x e sen x.

c) Determine a, com $a \in \mathbb{R}$, de modo que $\sec x = a + 1$ e tg $x = \sqrt{a^2 + 2}$.

d) Demonstre que a igualdade $\frac{1}{1 + \text{tg}^2\ x} + \frac{1}{1 + \text{cotg}^2\ x} = 1$ é identidade no universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$.

e) Demonstre que a igualdade $\text{sen}^2\ x + \text{sen}^2\ x \cdot \text{tg}^2\ x = \text{tg}^2\ x$ é identidade em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$.

12 (Ufac) Seja $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$. Então, a expressão $\sec x \cdot \cos x - \text{tg } x \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos^2 x$ é igual a:

a) $1 - \text{sen } \pi$
b) $1 + \cos 3\pi$
c) $1 - \cos \pi$
d) $1 + 2 \cos \pi$
e) $1 - 3 \cos \pi$

13 Calcule:

a) sen 165°
b) cos 105°
c) tg 240°
d) cotg 15°
e) cossec 255°
f) sec (−15°)

14 Aplicando as fórmulas da adição de arcos, complete a tabela:

	20°	40°	45°	65°
sen	0,3		0,7	
cos	0,9		0,7	

(*Nota*: Os valores apresentados nessa tabela são aproximados.)

15 Aplicando as fórmulas de adição de arcos, complete a tabela:

	13°	22°	35°	57°	70°
tg		0,4	0,7		

(*Nota*: Os valores apresentados nessa tabela são aproximados.)

16 (UFMA) A equação $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, com $0 \leq x < 2\pi$:

a) tem infinitas soluções.
b) não tem solução.
c) admite apenas as soluções $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.
d) admite apenas as soluções $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.
e) admite apenas as soluções $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

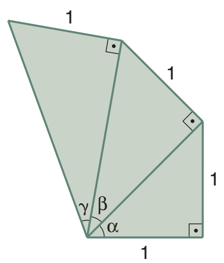
17 Obtenha o valor de $E = \text{sen}\, 6x \cdot \cos x - \text{sen}\, x \cdot \cos 6x$ para $x = \frac{\pi}{10}$.

18 Sendo $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x - \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, 3x$, calcule $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

19 (Ufam) Se $\text{sen}\, x = -\frac{3}{5}$, então $\text{sen}\,(x + \pi)$ é igual a:

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $-\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{5}{3}$ **d)** $-\frac{5}{3}$ **e)** $\frac{4}{5}$

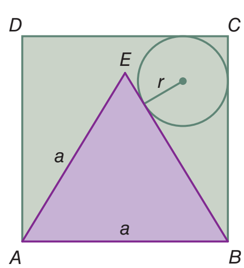
20 (UFRN) A figura abaixo é formada por três triângulos retângulos. As medidas dos catetos do primeiro triângulo são iguais a 1. Nos demais triângulos, um dos catetos é igual à hipotenusa do triângulo anterior e o outro cateto tem medida igual a 1.



Considerando os ângulos α, β e γ na figura, atenda às solicitações seguintes.

a) Calcule tg α, tg β e tg γ.
b) Calcule os valores de α e γ.
c) Justifique por que $105° < \alpha + \beta + \gamma < 120°$.

21 (UFMS) Na figura abaixo, estão representados um quadrado *ABCD*, um triângulo equilátero *ABE*, ambos de lado *a* unidades de comprimento e uma circunferência de raio *r* unidades de comprimento.



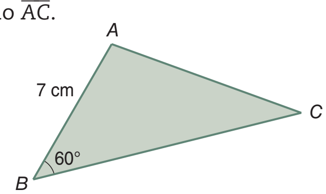
Considerando que a circunferência é tangente ao lado do triângulo e a dois lados consecutivos do quadrado, calcule a medida *r*.

22 Em um triângulo *ABC*, tem-se $m(C\hat{A}B) = 150°$, $CA = 5\sqrt{3}$ cm e $CB = 5\sqrt{7}$ cm. Determine a medida do lado $\overline{AB}$.

23 (UFMA) Um losango tem um ângulo agudo de 60° e a diagonal maior medindo $3\sqrt{2}$ m. Nessas condições, a medida do lado do losango é:

a) 2 m **b)** 3 m **c)** $\sqrt{2}$ m **d)** $\sqrt{3}$ m **e)** $\sqrt{6}$ m

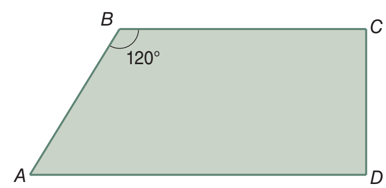
24 No triângulo *ABC*, abaixo, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 60°, o lado $\overline{AB}$ mede 7 cm e o lado $\overline{BC}$ tem 1 cm a mais que o lado $\overline{AC}$.



A medida do lado $\overline{BC}$ é:

a) 8,6 cm **b)** 9,6 cm **c)** 8,4 cm **d)** 9,4 cm **e)** 8,5 cm

25 (UFMG) Esta figura representa o quadrilátero *ABCD*:



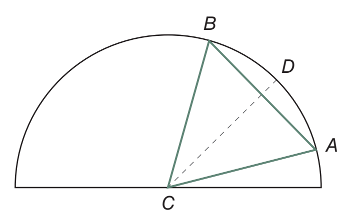
Sabe-se que
- $AB = 1$ cm e $AD = 2$ cm;
- o ângulo $A\hat{B}C$ mede 120°; e
- o segmento $\overline{CD}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Então, é correto afirmar que o comprimento do segmento $\overline{BD}$ é:

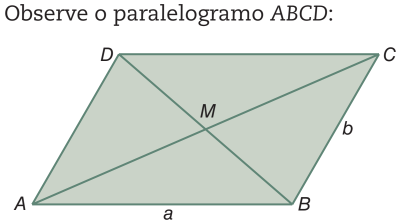
a) $\sqrt{3}$ cm **b)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm **c)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm **d)** $\sqrt{2}$ cm

26 (Fuvest-SP) Em uma semicircunferência de centro *C* e raio *R*, inscreve-se um triângulo equilátero *ABC*. Seja *D* o ponto onde a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intercepta a semicircunferência. O comprimento da corda $\overline{AD}$ é:

a) $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
b) $R\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
c) $R\sqrt{\sqrt{2} - 1}$
d) $R\sqrt{\sqrt{3} - 1}$
e) $R\sqrt{3 - \sqrt{2}}$



27 (Uerj) Observe o paralelogramo *ABCD*:



Calcule $(AC)^2 + (BD)^2$ em função de $AB = a$ e $BC = b$.

28 A medida do lado de um dodecágono regular inscrito em uma circunferência de 4 cm de raio é:

a) 4 cm

b) $4\sqrt{3}$ cm

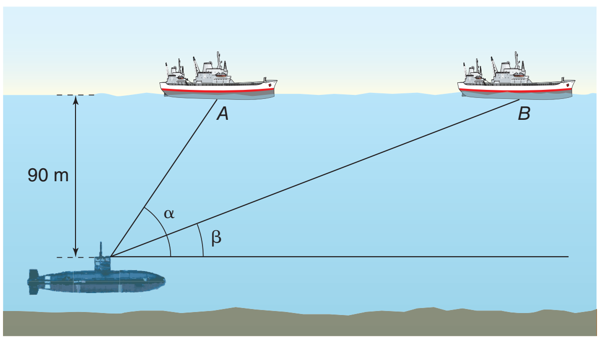
c) $4\sqrt{3-\sqrt{2}}$ cm

d) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm

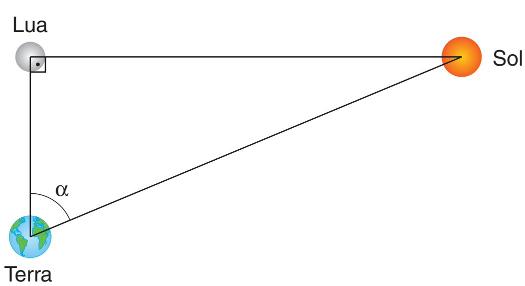
e) $4\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ cm

Exercícios contextualizados

29 Um submarino, a 90 m de profundidade, detecta à sua frente dois navios sob ângulos de medidas α e β com a horizontal, conforme a figura, tal que $\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{6}$ e $\sec \beta = \frac{13}{12}$. Calcule a distância entre os navios.



30 No instante em que observamos a Lua em quarto crescente, os raios solares são perpendiculares à reta que passa pelo centro da Terra e pelo centro da Lua, conforme a figura:



Considere esta tabela:

α	sec α
89,4°	95,49
89,5°	114,59
89,6°	143,24
89,7°	190,98
89,8°	286,47
89,9°	572,95

Supondo que, no momento da observação, a distância da Terra à Lua seja $3{,}85 \cdot 10^5$ km e que a distância entre a Terra e o Sol seja $1{,}5 \cdot 10^8$ km, podemos afirmar que a medida α do ângulo agudo formado pelas direções Terra-Lua e Terra-Sol obedece à condição:

a) $89{,}4° < \alpha < 89{,}5°$

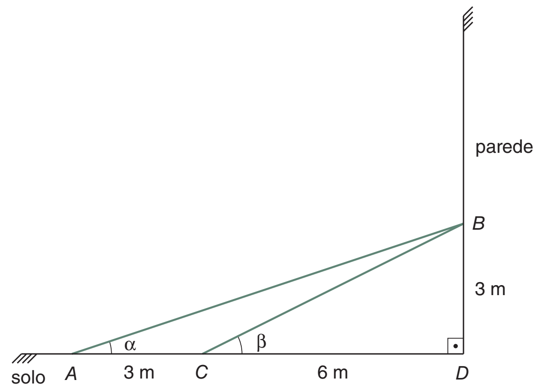
b) $89{,}5° < \alpha < 89{,}6°$

c) $89{,}6° < \alpha < 89{,}7°$

d) $89{,}7° < \alpha < 89{,}8°$

e) $89{,}8° < \alpha < 89{,}9°$

31 Duas vigas retas, *AB* e *CB*, escoram uma parede vertical, de modo que os pontos *A* e *C* do solo estão em uma reta horizontal que passa por um ponto *D* da parede, conforme mostra a figura a seguir.

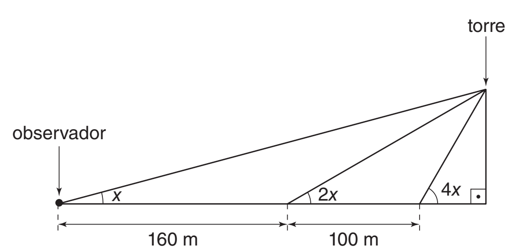


Calcule a soma das medidas α e β, em grau, dos ângulos agudos que as vigas formam com o solo.

32 Um ponto *A* está localizado em uma das margens de uma estrada reta com 12 m de largura, e dois pontos, *B* e *C*, estão na outra margem, com $BC < BA$, de modo que $AB = 15$ m e $AC = 20$ m. Calcule o seno do ângulo $B\hat{A}C$.

33 De um ponto *C* de um terreno plano e horizontal, observa-se o topo *B* de uma torre vertical de 30 m de altura sob um ângulo de medida α, com $\text{tg}\ \alpha = 0{,}4$. Caminhando em linha reta até um ponto *D*, entre o ponto *C* e a base da torre, constata-se que o ângulo $D\hat{B}C$ é congruente ao ângulo $D\hat{C}B$. Calcule a distância entre o ponto *D* e a base da torre.

34 (Uerj) Considere o ângulo segundo o qual um observador vê uma torre. Esse ângulo duplica quando ele se aproxima 160 m e quadruplica quando ele se aproxima mais 100 m, como mostra o esquema abaixo.



A altura da torre, em metro, equivale a:

a) 96

b) 98

c) 100

d) 102

35 A figura 1 representa uma folha retangular com 8 cm de comprimento por 6 cm de largura. Essa folha foi dobrada de modo que o vértice D coincidisse com o ponto médio M da diagonal $\overline{AC}$ do retângulo, conforme mostra a figura 2. Calcule a medida do segmento $\overline{EM}$.

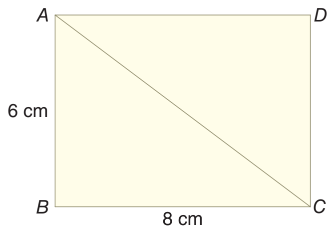


Figura 1

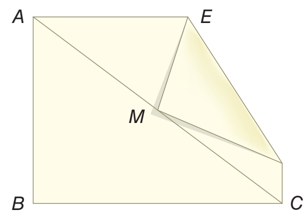
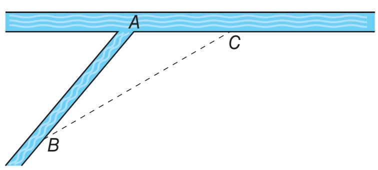


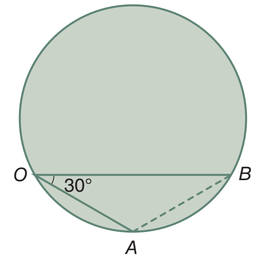
Figura 2

36 Dois rios são retos nas proximidades do ponto A de confluência de ambos. Pela construção de um canal, o curso do rio afluente deve ser desviado, ligando, em linha reta, um ponto B a um ponto C, conforme mostra a figura.



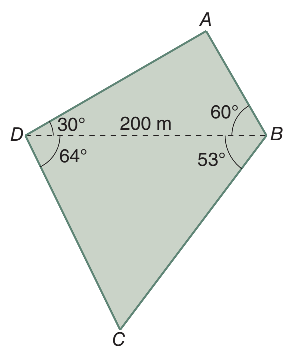
Sabendo que $m(B\hat{A}C) = 120°$, $m(A\hat{B}C) = 15°$ e $BA = 800$ m, calcule o comprimento do canal a ser construído de B a C.

37 (UFRN) Para medir o raio de um pequeno lago circular, uma pessoa usa o seguinte procedimento: traça um ângulo $A\hat{O}B$ de 30°, sendo que os pontos A, O e B estão sobre a margem do lago, e, em seguida, mede a distância de A a B, conforme a figura ao lado.



Justifique por que a medida do segmento $\overline{AB}$ corresponde ao raio do lago.

38 Para calcular a área de um terreno plano com a forma de um quadrilátero $ABCD$, um topógrafo mediu a diagonal $\overline{DB}$ e os ângulos $A\hat{D}B$, $A\hat{B}D$, $C\hat{B}D$ e $C\hat{D}B$, obtendo 200 m, 30°, 60°, 53° e 64°, respectivamente. Com o auxílio da tabela abaixo, calcule a área desse terreno.



	sen	cos
30°	0,50	0,87
53°	0,80	0,60
63°	0,89	0,45
64°	0,90	0,44

39 Um artesão pretende construir o tampo de uma mesa na forma de um triângulo isósceles ABC tal que $AB = AC = 50$ cm. Para que esse tampo tenha a maior área possível, o lado $\overline{BC}$ deve medir:

a) 80 cm
b) 90 cm
c) 95 cm
d) $25\sqrt{3}$ cm
e) $50\sqrt{2}$ cm

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Resolva a equação $\text{sen}^3 x - \text{sen}^2 x - 4 \text{ sen } x + 4 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

2 (UFRN) A fim de comemorar o Dia das Crianças, uma escola promoveu uma brincadeira, visando premiar algumas delas. Para isso, reuniu 100 crianças, formando uma grande roda. Todas foram numeradas sucessivamente, de 1 até 100, no sentido horário. A professora de Matemática chamava cada uma pelo número correspondente – na sequência 1, 16, 31, 46, e assim por diante – e lhe dava um chocolate. A brincadeira encerrou-se quando uma das crianças, já premiada, foi chamada novamente para receber seu segundo chocolate.
O número de chocolates distribuídos durante a brincadeira foi:

a) 25 b) 16 c) 21 d) 19

3 Determine os valores reais de x, com $x \in [0, 2\pi]$, de modo que a sequência $(\text{sen}^2 x, 12 \cos x, 16 \text{ tg}^2 x)$ seja uma progressão geométrica.

4 (Unemat-MT) Um barco atravessa um rio num trecho onde a largura é 100 m, seguindo uma direção que forma um ângulo de 30° com uma das margens. Assinale a alternativa correta para a distância percorrida pelo barco para atravessar o rio.

a) 100 m
b) $\dfrac{200}{\sqrt{2}}$ m
c) $\dfrac{200}{\sqrt{3}}$ m
d) 200 m
e) 150 m

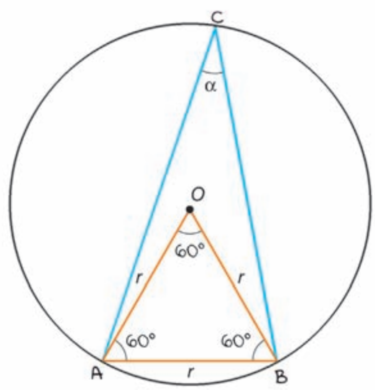
Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

O raio da circunferência circunscrita a um triângulo *ABC* tem o mesmo comprimento do lado $\overline{AB}$. Calcule a medida, em grau, do ângulo $A\hat{C}B$.

Resolução

- O é o centro da circunferência
- r é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC
- α é a medida do ângulo $A\hat{C}B$



O triângulo AOB é equilátero, por isso cada um de seus ângulos internos mede 60°.

Como a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente, temos:

$$\alpha = \frac{m(A\hat{O}B)}{2} = \frac{60°}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$ Incompleto!

Comentário

Embora a argumentação do aluno esteja correta, a conclusão está incompleta, pois ele não considerou outra medida possível para o ângulo $A\hat{C}B$, que ocorre para outra posição do triângulo *ABC*.

Agora, corrija a resolução, refazendo-a de dois modos diferentes:

1º Aplique a lei dos senos no triângulo *ABC* e obtenha as duas medidas possíveis do ângulo $A\hat{C}B$.

2º Construa as figuras mostrando o triângulo para as duas medidas encontradas do ângulo $A\hat{C}B$.

3º Aplique o teorema que relaciona as medidas do ângulo inscrito na circunferência e do ângulo central correspondente.

Capítulo
5

Funções trigonométricas

O movimento dos planetas, as marés, as estações do ano, as fases da Lua são fenômenos que se repetem em intervalos iguais de tempo, por isso, chamados de fenômenos periódicos. Esses fenômenos podem ser modelados por funções trigonométricas, que serão estudadas neste capítulo.

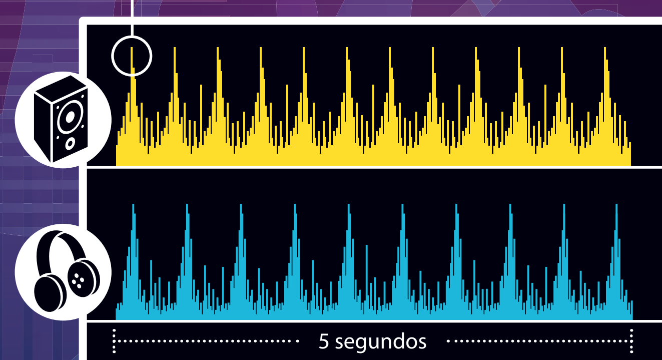
Discotecagem

Um DJ (disc jockey) pode tocar por horas, sobrepondo o fim de uma música ao começo da outra, sem pausas ou mudanças de ritmo. Para isso, ele controla o movimento periódico dos vinis nos toca--discos e, consequentemente, a velocidade das batidas das músicas, sincronizando seus ritmos.

A música não pode parar

Basicamente, o equipamento de um DJ é composto por dois toca-discos e um *mixer*, que permite que duas músicas sejam sincronizadas e tocadas simultaneamente. Assim, o DJ consegue misturar os sons das músicas, passando de uma para outra sem interromper a batida, mantendo o agito da festa.

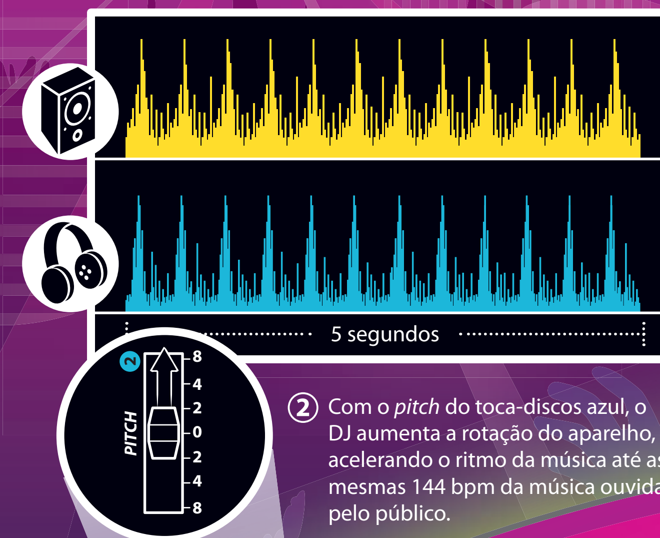
Os picos do gráfico são as batidas da música, como uma percussão pulsando periodicamente. Um dos jeitos de contar esse ritmo é em batidas por minuto, bpm.



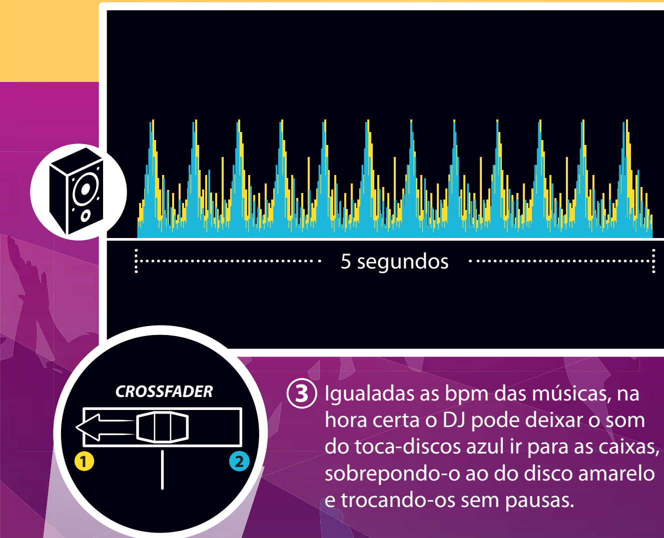
① O gráfico representa um trecho de cinco segundos de uma música. O som do disco amarelo agita o público com uma música de 144 bpm, um ritmo bem intenso. Pelos fones, só o DJ ouve o disco azul, com a música que vai entrar em seguida. O ritmo original dela é menor, 120 bpm.

Para pensar

1. Você conhece outras situações que envolvem movimentos periódicos?
2. Se uma música tem 15 batidas a cada 10 segundos, qual é sua velocidade em bpm?



② Com o *pitch* do toca-discos azul, o DJ aumenta a rotação do aparelho, acelerando o ritmo da música até as mesmas 144 bpm da música ouvida pelo público.



③ Igualadas as bpm das músicas, na hora certa o DJ pode deixar o som do toca-discos azul ir para as caixas, sobrepondo-o ao do disco amarelo e trocando-os sem pausas.

Glossário

***Pitch*:** Controle deslizante que altera a velocidade de rotação do toca-discos.

Toca-discos: Esses são os tradicionais, para discos de vinil, mas existem equipamentos que permitem discotecar com arquivos digitais de CDs ou direto do computador.

***Crossfader*:** Altera o volume da música, permite que o DJ passe o som de um toca-discos para o outro ou mande o som dos dois juntos para as caixas.

Seção 5.1

As funções seno e cosseno

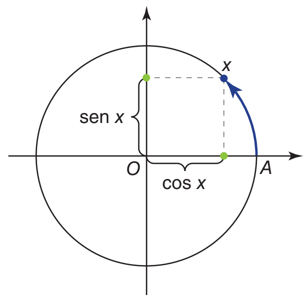
Objetivos

- **Identificar** as funções seno e cosseno e suas representações gráficas.
- **Analisar** as funções seno e cosseno segundo sua periodicidade, sinal, raízes e conjunto imagem.

Termos e conceitos

- função seno
- função cosseno
- período

Vimos anteriormente que a medida x rad associada a um ponto da circunferência trigonométrica pode ser identificada com o número real x. Assim, a cada número real x podemos associar um único sen x e um único cos x.

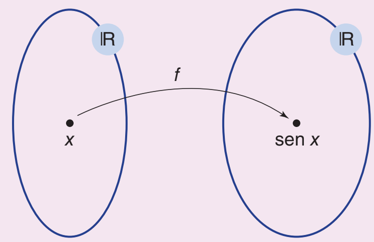


Desse modo, definimos as funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$:

$f(x) = $ sen x

$D = \mathbb{R}$

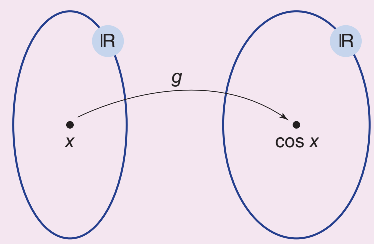
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$



$g(x) = \cos x$

$D = \mathbb{R}$

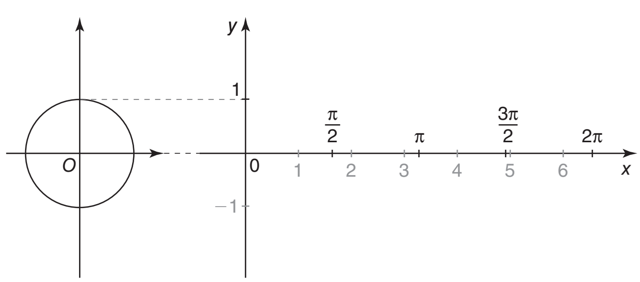
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$



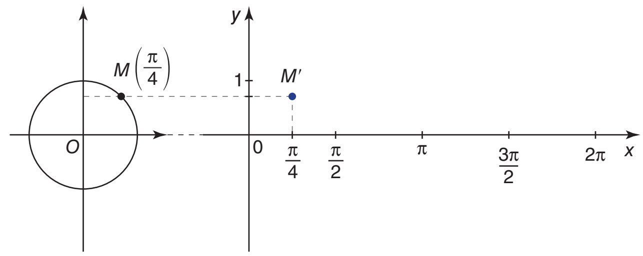
O gráfico da função seno

Vamos usar um método geométrico para a construção do gráfico $y = \text{sen } x$.

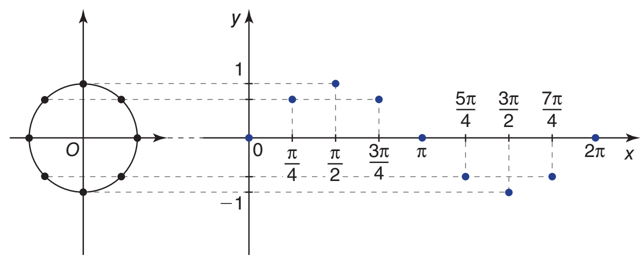
Para isso, construímos a circunferência trigonométrica ao lado de um sistema cartesiano de eixos ortogonais. O eixo das abscissas desse sistema deve estar na mesma reta que o eixo dos cossenos, e a unidade adotada nos eixos deve ser igual ao raio da circunferência trigonométrica, conforme a figura:



A seguir, marcamos no plano cartesiano os pontos (x, y) tais que $y = \text{sen } x$. Por exemplo, transportamos o seno do arco de medida $\frac{\pi}{4}$ para o eixo Oy como ordenada do ponto M', cuja abscissa é $\frac{\pi}{4}$. Assim, o ponto M' pertence ao gráfico da função $y = \text{sen } x$, conforme mostra a figura:

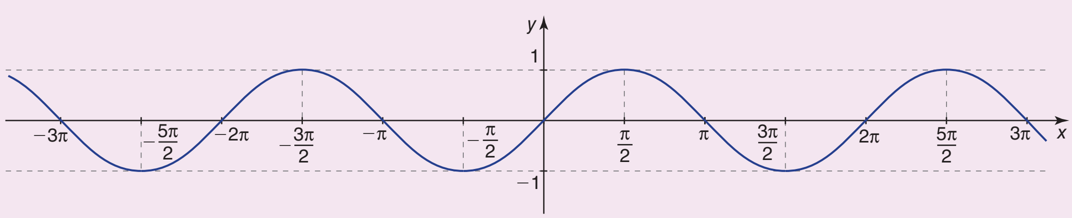


Repetimos o procedimento obtendo vários pontos do gráfico:



Então, considerando os infinitos pontos das infinitas voltas da circunferência trigonométrica, concluímos a construção do gráfico:

$y = \text{sen } x$



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Note que o gráfico é formado pela repetição da curva obtida quando x assume todos os valores de uma volta completa da circunferência trigonométrica; por isso dizemos que a função seno é periódica e que seu período é 2π.

Em uma linguagem mais precisa, dizemos que a função $y = \text{sen } x$ é periódica, porque existe pelo menos um número real positivo p que satisfaz a condição $\text{sen } (x + p) = \text{sen } x$ para qualquer número real x. Por exemplo: $\text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x$; $\text{sen } (x + 4\pi) = \text{sen } x$; $\text{sen } (x + 6\pi) = \text{sen } x$.

O menor número positivo p que satisfaz essa condição é chamado de **período** da função $y = \text{sen } x$. Como se observa, nesse caso, o menor número p é 2π.

Observe que a função seno é **ímpar**, pois seu gráfico é simétrico em relação à origem do sistema de eixos, isto é, $\text{sen } (-x) = -\text{sen } x$ para qualquer número real x.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Gráfico da função seno.*

Usamos aqui o método geométrico para obter o formato do gráfico da função $y = \text{sen } x$. Por questões de praticidade, porém, vamos resolver as próximas questões com o auxílio de uma tabela.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Esboçar o gráfico da função $y = 3 \text{ sen } x$.

Resolução

Para esboçar o gráfico, construímos uma tabela, atribuindo à variável x alguns valores e calculando os correspondentes valores de y. Para facilitar, atribuímos a x os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

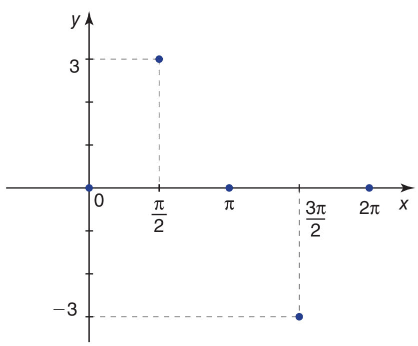
Aqui, atribuímos a x somente valores positivos, mas poderíamos ter atribuído também valores negativos, já que o domínio da função seno é $\mathbb{R}$.

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	3
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-3
2π	0

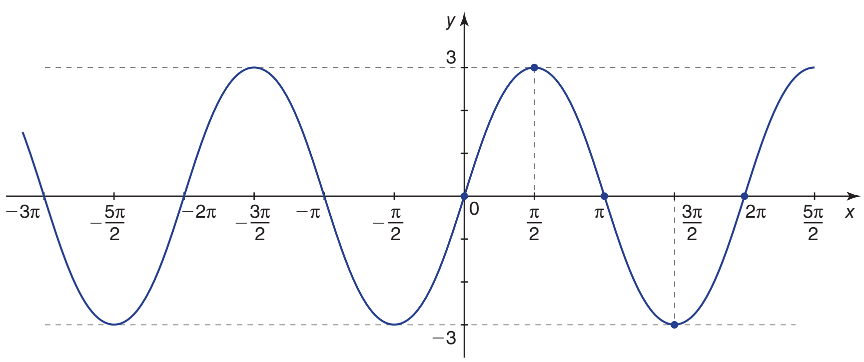
Veja como calculamos, por exemplo, o valor de y quando $x = \frac{\pi}{2}$:

$y = 3 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 = 3$

Marcando no plano cartesiano os pontos $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$ e $(2\pi, 0)$, temos:



O gráfico da função passa por esses cinco pontos e tem o seguinte traçado:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

$p = 2\pi$

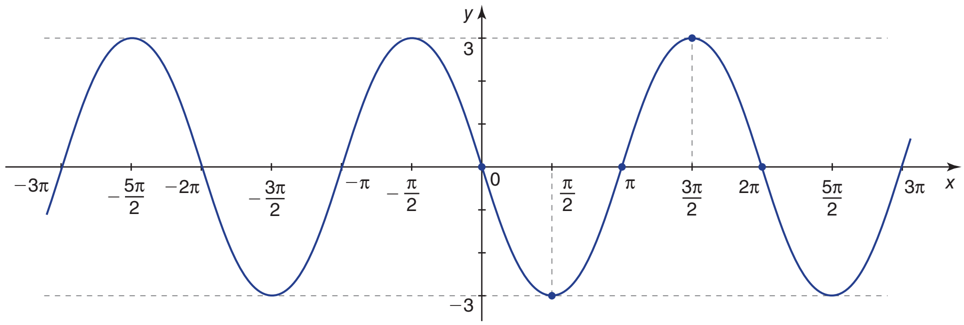
Devemos entender que esse traçado é apenas uma parte do gráfico que deve ser imaginado ao longo de todo o eixo das abscissas, repetindo a figura obtida quando x assume os valores de uma volta da circunferência trigonométrica.

Observe que a função seno é **ímpar**, pois seu gráfico é simétrico em relação à origem, isto é, $\text{sen } (-x) = -\text{sen } x$ para qualquer número real x.

2 Esboçar o gráfico da função y = −3 sen x.

Resolução

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	−3
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	3
2π	0



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

$p = 2\pi$

Note que esse gráfico é o **simétrico** do gráfico y = 3 sen x em relação ao eixo das abscissas.

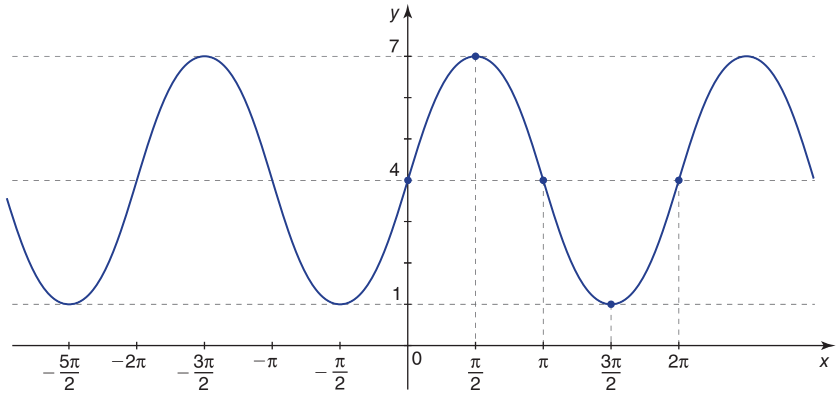
3 Esboçar o gráfico da função y = 4 + 3 sen x.

Resolução

x	y
0	4
$\frac{\pi}{2}$	7
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	4

Veja como calculamos, por exemplo, o valor de y quando $x = \frac{\pi}{2}$:

$y = 4 + 3 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 4 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7$



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 7\}$

$p = 2\pi$

Note que esse gráfico é uma **translação vertical**, de 4 unidades para cima, do gráfico: y = 3 sen x

4 Esboçar o gráfico da função $y = \text{sen } 2x$.

Resolução

Quando a medida do arco da função seno tem a forma $(ax + b)$, com a não nulo e $a \neq 1$ ou $b \neq 0$, podemos construir uma tabela com três colunas: a primeira para o arco $(ax + b)$, a segunda para os valores de x, e a terceira para os valores de y.

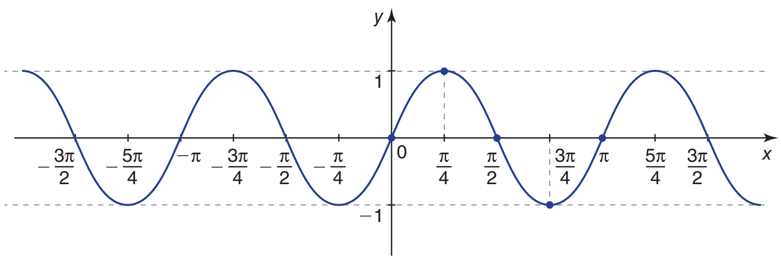
Para obter o gráfico que representa um período da função $y = \text{sen } 2x$, atribuímos ao arco $2x$ os valores $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π, e a seguir determinamos os correspondentes valores de x e y.

Veja como calculamos, por exemplo, os valores de x e y quando $2x = \pi$.

- $2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- $\begin{cases} 2x = \pi \\ y = \text{sen } 2x \end{cases} \Rightarrow y = \text{sen } \pi = 0$

$2x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0

Assim, considerando a repetição do período obtido na tabela, temos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

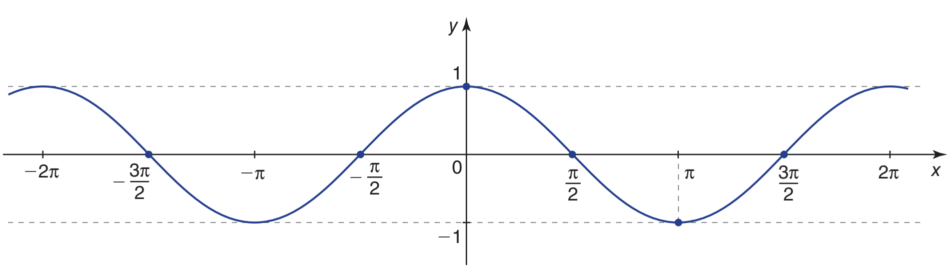
$p = \pi$

Note que ocorreu uma **mudança no período** em relação ao gráfico da função: $y = \text{sen } x$

5 Esboçar o gráfico da função $y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Resolução

$\frac{\pi}{2} + x$	x	y
0	$-\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	π	-1
2π	$\frac{3\pi}{2}$	0



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

$p = 2\pi$

Note que esse gráfico é uma **translação horizontal**, de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda, do gráfico da função: $y = \text{sen } x$

6 Determinar o conjunto imagem da função $f(x) = 5 + 4 \text{ sen } x$.

Resolução

Sabemos que sen x varia de -1 a 1, isto é:

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$

Multiplicando por 4 os membros dessa desigualdade, temos:

$-4 \leqslant 4 \text{ sen } x \leqslant 4$

Adicionando 5 a cada membro da desigualdade, obtemos:

$5 - 4 \leqslant 5 + 4 \text{ sen } x \leqslant 5 + 4 \Rightarrow 1 \leqslant \underbrace{5 + 4 \text{ sen } x}_{f(x)} \leqslant 9$

Logo: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 9\}$

7 Obter os valores reais de m de modo que exista a igualdade $\text{sen } x = 2m - 5$.

Resolução

Sabemos que $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$. Então, devemos ter:

$-1 \leqslant 2m - 5 \leqslant 1$

Adicionando 5 aos membros dessa desigualdade, obtemos:

$-1 + 5 \leqslant 2m - 5 + 5 \leqslant 1 + 5$

Ou seja: $4 \leqslant 2m \leqslant 6$

Dividindo por 2 os membros da desigualdade, concluímos:

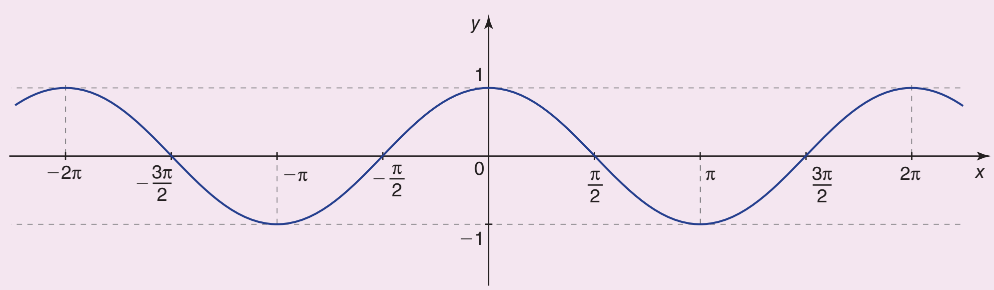
$2 \leqslant m \leqslant 3$

Assim, a igualdade $\text{sen } x = 2m - 5$ existe se, e somente se, m é um número real tal que $2 \leqslant m \leqslant 3$.

O gráfico da função cosseno

Para qualquer valor de x, temos $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$. Por isso, podemos concluir que o gráfico da função $y = \cos x$ é o mesmo gráfico da função $y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, que já foi construído no exercício resolvido 5. Temos, então, o seguinte traçado como o gráfico da função $y = \cos x$:

$y = \cos x$



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

$p = 2\pi$

Observe que a função cosseno é **par**, pois seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, isto é, $\cos(-x) = \cos x$ para qualquer número real x.

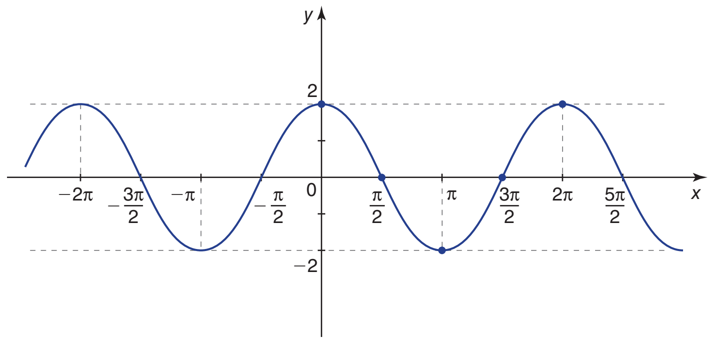
Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Gráfico da função cosseno.*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Esboçar o gráfico da função $y = 2 \cos x$.

Resolução

x	y
0	2
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-2
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	2



$D = \mathbb{R}$

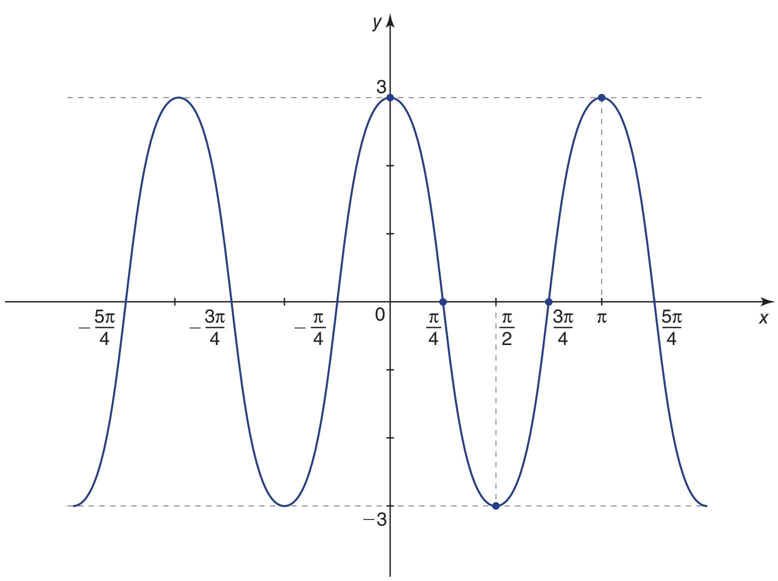
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y \leqslant 2\}$

$p = 2\pi$

9 Esboçar o gráfico da função $y = 3 \cos 2x$.

Resolução

$2x$	x	y
0	0	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
π	$\frac{\pi}{2}$	-3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	0
2π	π	3



$D = \mathbb{R}$

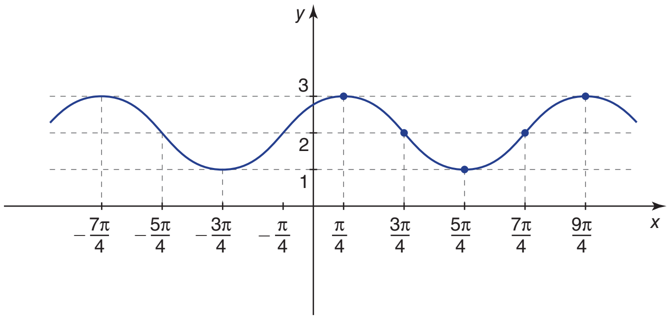
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

$p = \pi$

10 Esboçar o gráfico da função $y = 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução

$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{4}$	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2
π	$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2
2π	$\frac{9\pi}{4}$	3



$D = \mathbb{R}$

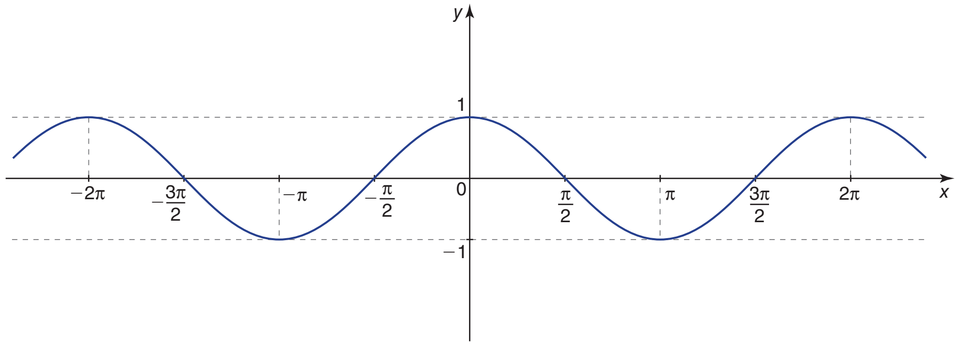
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 3\}$

$p = 2\pi$

11 Esboçar o gráfico da função $y = |\cos x|$.

Resolução

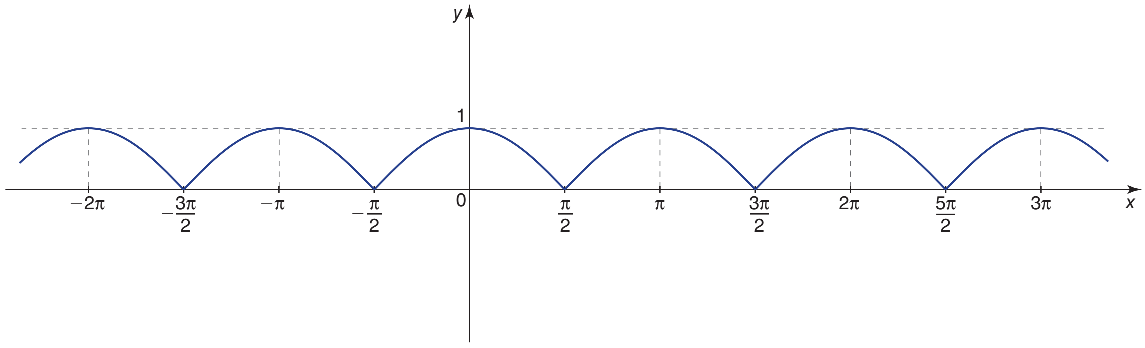
Primeiro, construímos o gráfico da função auxiliar $y_1 = \cos x$:



Depois, construímos o gráfico da função $y = |\cos x|$, do seguinte modo:

- Se $\cos x \geqslant 0$, então $|\cos x| = \cos x$. Graficamente, isso significa que os pontos do gráfico auxiliar que tiverem ordenada positiva ou nula permanecem inalterados.
- Se $\cos x < 0$, então $|\cos x| = -\cos x$. Graficamente, isso significa que os pontos do gráfico auxiliar que tiverem ordenada negativa devem ser transformados nos simétricos em relação ao eixo das abscissas.

  Por fim, traçamos o gráfico da função $y = |\cos x|$:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

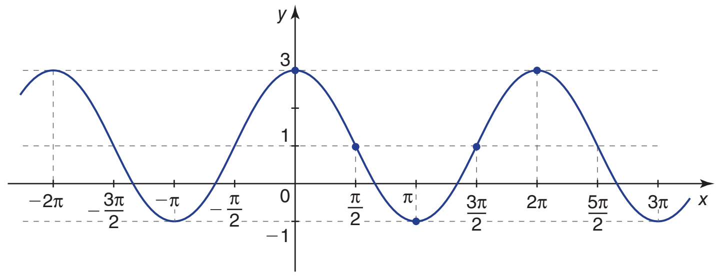
$p = \pi$

12 Esboçar o gráfico da função $y = |1 + 2\cos x|$.

Resolução

Primeiro, construímos o gráfico auxiliar $y_1 = 1 + 2\cos x$:

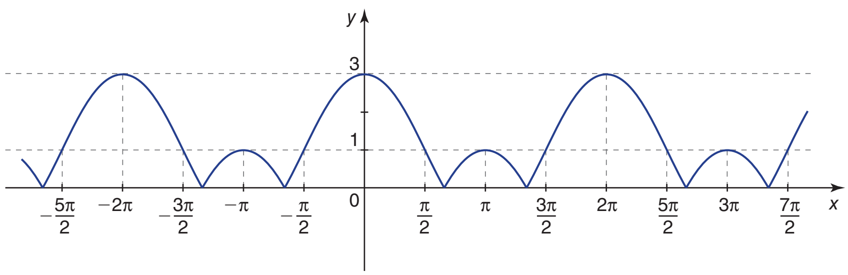
x	y
0	3
$\frac{\pi}{2}$	1
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	3



Depois, construímos o gráfico da função $y = |1 + 2\cos x|$. Para isso, no gráfico anterior:

- Conservamos os pontos de ordenadas não negativas.
- Transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas.

Assim, temos o gráfico de $y = |1 + 2\cos x|$:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 3\}$

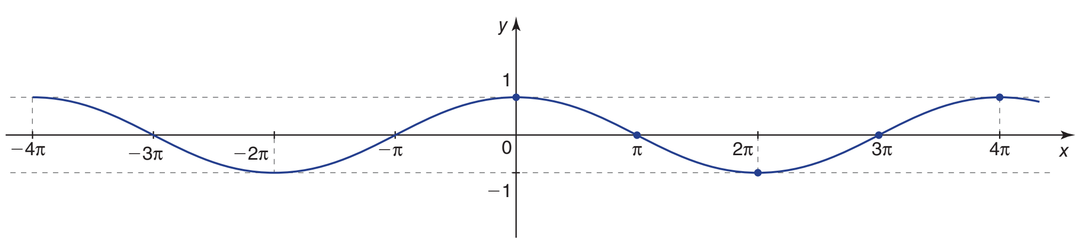
$p = 2\pi$

13 Esboçar o gráfico da função $y = 1 + \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.

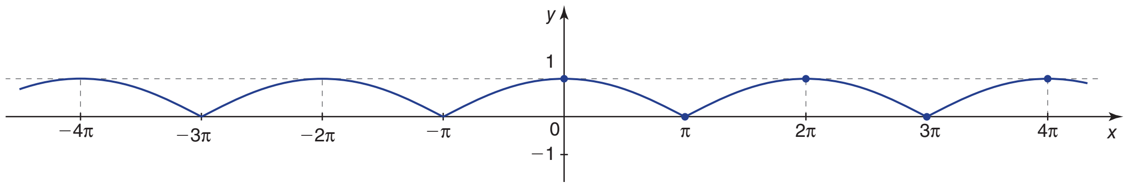
Resolução

Primeiro, construímos o gráfico auxiliar $y_1 = \cos \frac{x}{2}$.

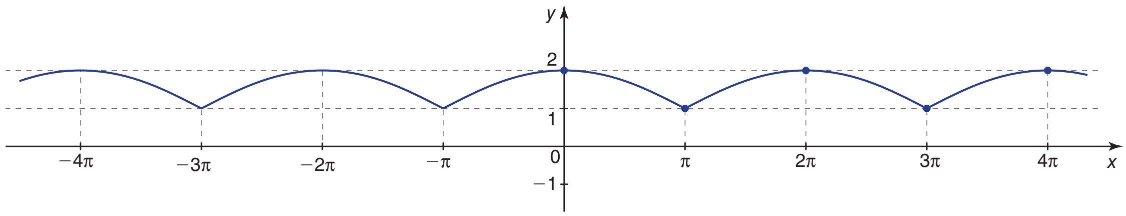
$\frac{x}{2}$	x	y_1
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	2π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3π	0
2π	4π	1



Depois, traçamos o gráfico de $y_2 = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$:



Por fim, transladamos o gráfico $y_2 = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$ em 1 unidade verticalmente para cima obtendo o gráfico $y = 1 + \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

$p = 2\pi$

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Transformações nos gráficos das funções seno e cosseno.*

Período das funções seno e cosseno

Obtemos o período da função $y = a + b \cdot \text{sen}\,(mx + q)$ ou da função $y = a + b \cdot \cos\,(mx + q)$, em que $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$, fazendo a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais associados a uma volta completa da circunferência trigonométrica. Por exemplo, quando essa medida assume os valores de 0 a 2π, temos:

$$0 \leqslant mx + q \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 - q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q$$

(I) Se $m > 0$:

$$-q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q \Rightarrow -\frac{q}{m} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi - q}{m}$$

O período p da função é a diferença entre o maior e o menor valor obtidos para x, nessa ordem, isto é :

$$p = \frac{2\pi - q}{m} - \left(-\frac{q}{m}\right) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{m}$$

(II) Se $m < 0$:

$$-q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q \Rightarrow -\frac{q}{m} \geqslant x \geqslant \frac{2\pi - q}{m}$$

Calculando o período p:

$$p = -\frac{q}{m} - \frac{2\pi - q}{m} \Rightarrow p = -\frac{2\pi}{m}$$

Por (I) e (II), concluímos que:

$$\boxed{p = \frac{2\pi}{|m|}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 Determinar o período das funções:

a) $y = 3 \text{ sen } 2x$

b) $y = 2 + 6 \cos(-4x)$

c) $y = 2 \text{ sen } \frac{x}{3}$

d) $y = 3 - 4 \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{5}\right)$

Resolução

a) $p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

b) $p = \frac{2\pi}{|-4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

c) $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

d) $p = \frac{2\pi}{|\pi|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

15 A grande Roda de Pequim é uma das maiores rodas-gigantes do mundo. Podemos descrever seu movimento de giro por meio de uma função trigonométrica. Por exemplo, considerando um extremo A de um diâmetro horizontal, podemos descrever o movimento através da função $f(t) = 112 + 97 \text{ sen } \frac{\pi t}{15}$, em que $f(t)$ é a altura, em metro, do ponto A em relação ao terreno no instante t, em minuto, a partir do início da medição do tempo ($t = 0$).

a) Qual é a altura máxima atingida pelo ponto A?

b) Em quantos minutos a roda dá uma volta completa?

Resolução

a) A altura máxima atingida pelo ponto A é o valor máximo da função f. Para calcular esse valor, vamos determinar o conjunto imagem de f.

Temos: $-1 \leqslant \text{sen } \frac{\pi t}{15} \leqslant 1$

Multiplicando os membros dessa desigualdade por 97, chegamos a:

$-97 \leqslant 97 \text{ sen } \frac{\pi t}{15} \leqslant 97$

Adicionando 112 aos membros da desigualdade, concluímos:

$112 - 97 \leqslant 112 + 97 \text{ sen } \frac{\pi t}{15} \leqslant 112 + 97 \Rightarrow 15 \leqslant f(t) \leqslant 209$

Portanto, a altura máxima atingida pelo ponto A é 209 m.

b) O tempo necessário para o ponto A girar uma volta completa é o período p da função f, ou seja:

$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{15}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} \Rightarrow p = 30$

Logo, a roda completa uma volta em 30 minutos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Esboce o gráfico de cada função.

a) $y = 2 \text{ sen } x$

b) $y = -2 \text{ sen } x$

c) $y = 5 + 2 \text{ sen } x$

d) $y = -1 + 2 \text{ sen } x$

e) $y = -4 - 2 \text{ sen } x$

f) $y = 4 \cos x$

g) $y = 3 + 4 \cos x$

2 Esboce o gráfico de cada função.

a) $y = \text{sen } 4x$

b) $y = 2 + 3 \text{ sen } 2x$

c) $y = -1 + 2 \text{ sen } \frac{x}{2}$

d) $y = \cos 4x$

e) $y = 1 - 2 \cos 2x$

f) $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

g) $y = -2 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

3 Determine o período das funções.

a) $y = 8 \text{ sen } x$

b) $y = \text{sen } 8x$

c) $y = \text{sen } \frac{x}{8}$

d) $y = \cos(-3x)$

e) $y = 2 + 3 \text{ sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

f) $y = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$

4 Obtenha o conjunto imagem de cada uma das funções.

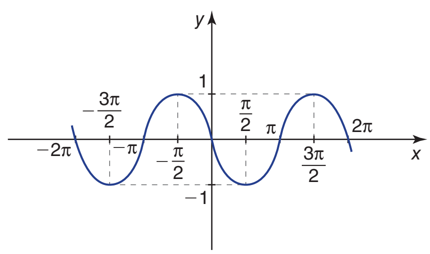
a) $y = 10 \text{ sen } x$

b) $y = -10 \text{ sen } x$

c) $y = 3 + 2 \cos x$

d) $y = -4 + 5 \cos \frac{x}{2}$

5 (Vunesp) Sabe-se que h é o menor número positivo para o qual o gráfico de $y = \text{sen}(x - h)$ é:



Então, $\cos\left(\frac{2h}{3}\right)$ é igual a:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

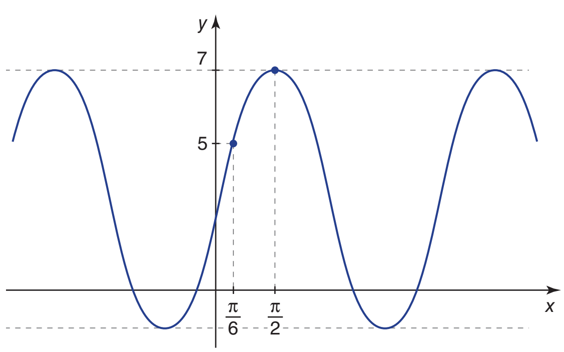
b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6 O gráfico da função $y = a + b \cdot \text{sen } x$ é:



Determine os valores das constantes reais a e b.

7 Esboce o gráfico das funções:

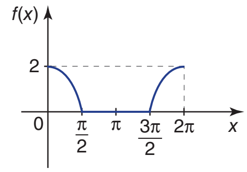
a) $y = |1 + 3 \cos x|$

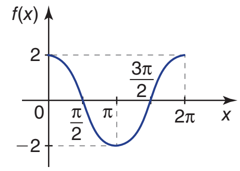
b) $y = |-2 + 3 \text{ sen } x|$

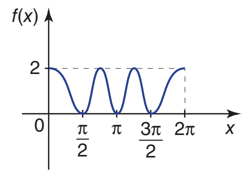
c) $y = 1 + |\text{sen } 2x|$

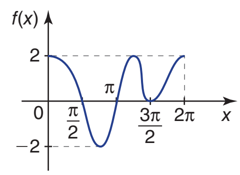
d) $y = -2 + \left|\cos \frac{x}{2}\right|$

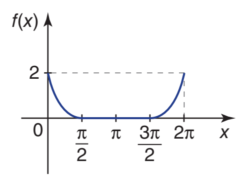
8 (Ufes) O gráfico da função $f(x) = \cos x + |\cos x|$, para $x \in [0, 2\pi]$ é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

9 Os gráficos das funções trigonométricas podem auxiliar a resolução de uma inequação, conforme mostra este exercício.

a) Construa, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$.

b) Analisando o gráfico do item **a**, resolva a inequação $\text{sen } x > \cos x$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

10 Para que valores reais de m existe a igualdade $\text{sen } x = 4m - 5$?

11 (FGV) No mês de abril, o mercado financeiro viveu uma certa instabilidade, e o preço de determinada ação oscilou de tal forma que ele poderia ser descrito pela função periódica: $f(x) = 4{,}50 + \text{sen}(2\pi x)$, em que $f(x)$ é o preço da ação, $x = 0$ representa o 1º dia útil de abril, $x = \frac{1}{4}$, o 2º dia útil, $x = \frac{1}{2}$, o 3º dia útil, e assim por diante.

a) Esboce o gráfico da função $f(x)$ correspondente aos primeiros 5 dias úteis de abril.

b) Considerando que o dia 1º de abril foi segunda-feira, determine em que dias da 1ª semana útil de abril o preço dessa ação atingiu o maior e o menor valor.

c) Quais foram o maior e o menor valor dessa ação na 1ª semana útil de abril?

Resolva os exercícios complementares 1 a 13 e 49.

Movimentos periódicos

Objetivos

- **Analisar** situações que apresentam movimento periódico.
- **Obter** uma função trigonométrica que descreva um fenômeno periódico.
- **Resolver** problemas que envolvem funções trigonométricas.

Termo e conceito

- **movimento periódico**

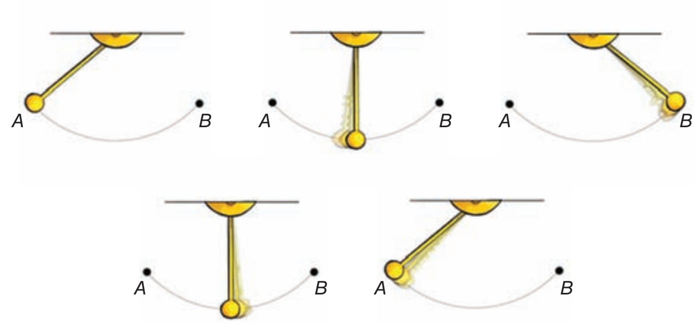
Quando um móvel descreve o mesmo movimento repetidas vezes consecutivas em intervalos de tempo iguais, dizemos que ele realiza um **movimento periódico**. O tempo necessário para a realização de cada um desses movimentos recebe o nome de **período** (p); e o número de movimentos realizados em determinada unidade de tempo é chamado de **frequência** (F) do movimento.

Exemplos

a) Se um pêndulo realiza uma oscilação completa a cada 2 segundos, dizemos que ele realiza um movimento periódico de período $p = 2$ s e de frequência $F = \frac{1}{2}$ oscilação por segundo.

Observe que o período é o inverso da frequência, ou seja, $p = \frac{1}{F}$.

A figura abaixo mostra o pêndulo partindo de A, indo até B e voltando ao ponto A. Essa trajetória é uma oscilação completa do pêndulo.



b) Se um ponto P, distinto do centro de um DVD, gira com velocidade constante de 300 rotações por minuto em um DVD *player*, dizemos que esse ponto realiza um movimento periódico de frequência $F = 300$ rotações por minuto. O período é $p = \frac{1}{300}$ min, pois esse é o tempo que o ponto P leva para completar uma volta.

c) O fenômeno de elevação e abaixamento das águas do mar recebe o nome de maré. O maior e o menor nível das águas do mar são chamados, respectivamente, de maré alta e maré baixa. O tempo decorrente entre duas marés altas consecutivas (ou entre duas marés baixas consecutivas) é de 12 horas, aproximadamente. Esse movimento das águas é periódico, de período $p = 12$ h e frequência $F = \frac{1}{12}$ oscilação por hora. As marés são provocadas pela força gravitacional da Lua e, secundariamente, pela do Sol, sobre a Terra.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Movimentos periódicos.*

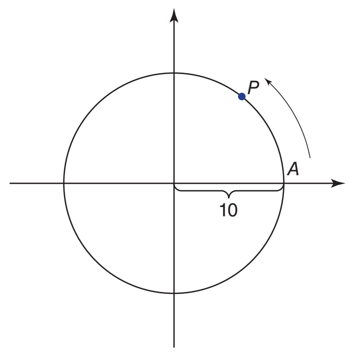
O movimento periódico e as funções trigonométricas

As funções trigonométricas são periódicas, isto é, repetem-se em intervalos consecutivos e de mesmo comprimento. As funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$, por exemplo, repetem-se a cada volta completa na circunferência trigonométrica. Por isso, essas funções são utilizadas para descrever fenômenos periódicos como o movimento das marés, a propagação de ondas, o movimento dos planetas, os batimentos cardíacos, as estações do ano etc.

O chamado movimento periódico circular é fundamental para entender a relação entre as funções trigonométricas e os movimentos periódicos. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo

No plano cartesiano, considere uma circunferência de 10 cm de raio, centrada na origem do sistema, e um ponto P girando sobre essa circunferência no sentido anti-horário, com velocidade constante de 80 rotações por minuto (rpm). Vamos descrever o movimento desse ponto por meio de uma função trigonométrica.

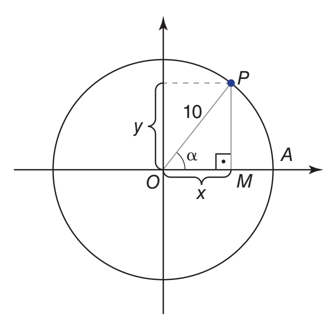


Por descrever o mesmo movimento em intervalos consecutivos e de mesma duração, o movimento desse ponto é periódico, de frequência $F = 80$ rpm e período $p = \dfrac{1}{80}$ min, pois esse é o tempo que o ponto leva para completar uma volta na circunferência.

Para descrever o movimento do ponto, precisamos determinar a medida α do arco $\overset{\frown}{AP}$ em função do tempo t, considerando como instante zero um instante em que P passe pelo ponto $A(10, 0)$. Para isso, montamos a regra de três:

Medida do arco (rad)		Tempo (min)	
2π	——	$\dfrac{1}{80}$	$\Rightarrow \alpha = 160\pi t$ rad
α	——	t	

Considere um momento em que P esteja no 1º quadrante. Como o raio mede 10 cm, temos, pelo triângulo OPM ao lado:



$$\cos \alpha = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cos \alpha = 10 \cos (160\pi t)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \text{ sen } \alpha = 10 \text{ sen } (160\pi t)$$

Podemos generalizar essas relações para os outros quadrantes e descrever o movimento do ponto P, em função do tempo t, em minuto, por meio de:

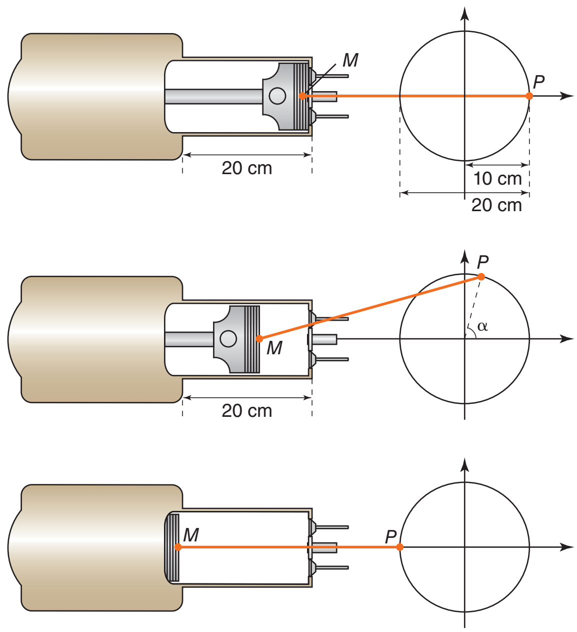
- sua abscissa: $f(t) = 10 \cos (160\pi t)$; ou
- sua ordenada: $g(t) = 10 \text{ sen } (160\pi t)$

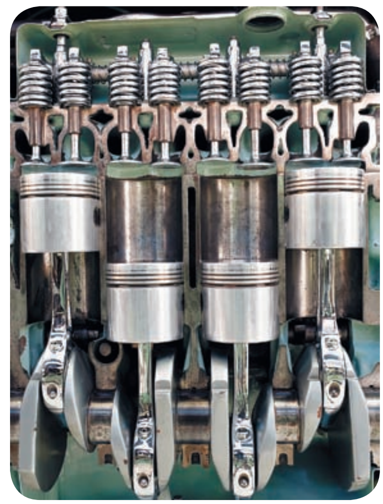
Associando um movimento circular a um movimento periódico

Muitas vezes, o movimento periódico não se associa explicitamente a uma circunferência, mas usando a imaginação conseguimos relacionar o fenômeno a um movimento circular. Acompanhe.

Exemplo

Considere um pistão em movimento periódico tal que seu percurso seja 20 cm e o trajeto de ida e volta (40 cm) seja realizado 80 vezes por minuto. Vamos imaginar uma circunferência de diâmetro 20 cm, com o centro na origem de um sistema cartesiano, tal que, quando um ponto P gira na circunferência, uma haste rígida MP acompanha o movimento do pistão, conforme a figura abaixo.





O pistão de um motor é uma peça cilíndrica metálica deslizante que recebe um movimento de vaivém no interior de um cilindro de motor de combustão interna.

Observe que o diâmetro da circunferência deve ter o mesmo comprimento que o percurso do pistão.

Assim, usando os cálculos do exemplo anterior e admitindo que a velocidade de P seja constante, podemos descrever o movimento do pistão pelo movimento do ponto P, em função do tempo t, em minuto:

- pela abscissa do ponto P: $f(t) = 10 \cos(160\pi t)$; ou
- pela ordenada do ponto P: $g(t) = 10 \operatorname{sen}(160\pi t)$

Ampliando esse raciocínio, é possível descrever o movimento das marés por meio de uma função trigonométrica, como se o mar fosse um imenso pistão que sobe e desce. Enfim, qualquer movimento periódico, como o movimento de um pêndulo, a propagação de ondas, o movimento dos braços de uma pessoa em exercício de caminhada, os batimentos cardíacos etc., pode ser descrito por uma função trigonométrica.

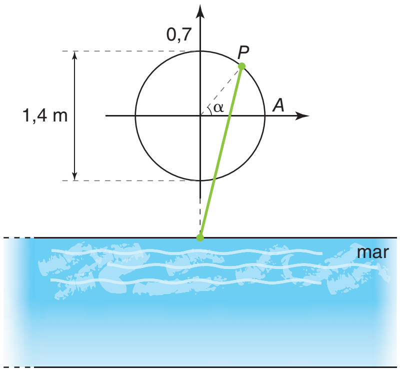
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 A amplitude das marés é a diferença entre os níveis da maré alta e da maré baixa. Ela varia dependendo da posição da Lua. Em uma região, em determinado dia, a amplitude das marés é 1,4 m, e o intervalo de tempo entre duas marés altas consecutivas (ou entre duas marés baixas consecutivas) é 12 horas. Sabendo que uma maré alta ocorre às 3 h, descrever, por meio de uma função trigonométrica, o movimento das marés nessa região em função do horário t, em hora, nesse dia.

Resolução

Imaginemos, em um plano vertical, uma circunferência acima do nível do mar e uma haste rígida ligando um ponto P da circunferência a um ponto do nível do mar, no prolongamento do eixo Oy, conforme mostra a figura ao lado.

O subir e descer da maré, que lembra o movimento de um imenso pistão, provoca um movimento circular do ponto P. Como o intervalo entre duas marés altas consecutivas é 12 horas, o ponto P deve demorar 12 horas para percorrer toda a circunferência. Supondo esse movimento com velocidade constante e no sentido anti-horário, vamos calcular a medida α do arco $\widehat{AP}$, em função do tempo t em hora, em que $t = 0$, corresponda a um instante em que P passou pelo ponto $A(0{,}7; 0)$:



Medida do arco (rad)		Tempo (h)
2π	———	12
α	———	t

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi t}{6}$ rad

Assim, podemos descrever o movimento da maré nesse dia, em função do tempo t, em hora $(0 \leqslant t \leqslant 24)$:

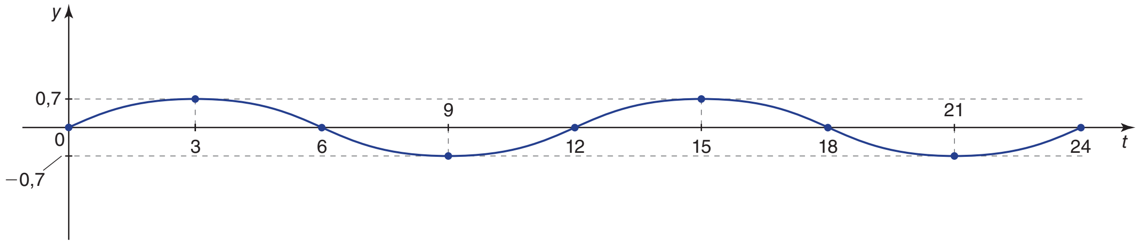
- pela ordenada do ponto P: $f(t) = 0{,}7 \text{ sen } \dfrac{\pi t}{6}$; ou
- pela abscissa do ponto P: $g(t) = 0{,}7 \cos \dfrac{\pi t}{6}$

Note que:

1. O período p da função $f(t) = 0{,}7 \text{ sen } \dfrac{\pi t}{6}$ ou da função $g(t) = 0{,}7 \cos \dfrac{\pi t}{6}$ é dado por $p = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$.

   Esse período, no contexto do problema, chamado de período das marés, é o tempo, em hora, transcorrido entre duas marés altas (ou duas marés baixas) consecutivas.

2. O gráfico da função $f(t) = 0{,}7 \text{ sen } \dfrac{\pi t}{6}$, para $0 \leqslant t \leqslant 24$, é:



   Interpretando esse gráfico no contexto do problema, concluímos, por exemplo:
   - À zero hora, a maré estava em seu nível médio.
   - Às 3 h e às 15 h, a maré estava em seu nível máximo, 0,7 m acima do nível médio.
   - Às 9 h e às 21 h, a maré estava em seu nível mínimo, 0,7 m abaixo do nível médio.

3. A amplitude da maré varia de acordo com a posição da Lua em relação ao Sol e à Terra. Nessa questão, admitimos que a amplitude da maré calculada com quaisquer marés alta e baixa de um mesmo dia seja a mesma, o que é muito próximo da realidade, pois a variação da posição da Lua em relação ao Sol e à Terra é pequena em 24 horas.

4. O enunciado informa que uma maré alta ocorre às 3 h. Usamos essa informação ao adotar o sentido anti-horário e a posição do ponto no instante zero. Se adotássemos o sentido horário, nessa mesma posição inicial, às 3 h ocorreria uma maré baixa.

17 A partir da zero hora de cada dia, a pressão interna p, em bar (unidade de medida de pressão que corresponde aproximadamente à pressão da água do mar a 10 m de profundidade), de uma caldeira é controlada automaticamente, variando com o tempo t, em hora, de acordo com a função $p(t) = 300 + 200 \text{ sen } \dfrac{(t-1)\pi}{2}$.

a) Qual é a pressão interna máxima ($p_{máx}$) dessa caldeira?

b) Em que horários, de zero hora às 12 horas, a pressão interna na caldeira é máxima?

Resolução

a) A pressão $p(t) = 300 + 200 \text{ sen } \frac{(t-1)\pi}{2}$ é máxima quando a expressão $\text{sen } \frac{(t-1)\pi}{2}$ assume seu valor máximo, que é 1. Assim:

$p_{\text{máx}} = (300 + 200 \cdot 1) \text{ bars} = 500 \text{ bars}$

b) Sabemos que quando $\text{sen } \frac{(t-1)\pi}{2} = 1$ a pressão é máxima. Assim, para determinar os horários em que a pressão é máxima, basta resolver a equação:

$\text{sen } \frac{(t-1)\pi}{2} = 1 \Rightarrow \frac{(t-1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore t = 2 + 4k$, com $k \in \mathbb{Z}$

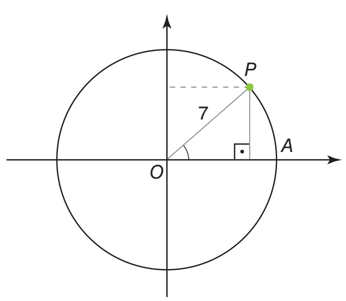
A seguir, atribuímos valores inteiros a k, em $t = 2 + 4k$, de modo que $0 \leqslant t \leqslant 12$:

$$k = 0 \Rightarrow t = 2$$
$$k = 1 \Rightarrow t = 6$$
$$k = 2 \Rightarrow t = 10$$

Para qualquer outro valor inteiro de k, a variável t não pertence ao intervalo [0, 12]. Logo, de zero hora às 12 horas, a pressão interna da caldeira é máxima às 2, às 6 e às 10 horas.
Note que primeiro resolvemos a equação em $\mathbb{R}$, para depois atribuir valores a k.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 No plano cartesiano, considere uma circunferência de 7 cm de raio, centrada na origem do sistema, e um ponto P girando sobre essa circunferência, no sentido anti-horário, com velocidade constante de 30 rpm. Esse ponto descreve uma volta completa na circunferência a cada $\frac{1}{30}$ min. Por descrever o mesmo movimento em intervalos consecutivos e de igual duração, dizemos que o movimento desse ponto é periódico.



Como vimos, movimentos periódicos podem ser descritos por funções trigonométricas. Considerando que no instante zero o ponto P esteja no ponto $A(7, 0)$, as coordenadas do ponto P, em função do tempo t, em minuto, são dadas, respectivamente, por:

a) $f(t) = 7 \cos (6\pi t)$ e $g(t) = 7 \text{ sen } (6\pi t)$

b) $f(t) = 7 \cos \frac{\pi t}{6}$ e $g(t) = 7 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$

c) $f(t) = 7 \cos \frac{\pi t}{60}$ e $g(t) = 7 \text{ sen } \frac{\pi t}{60}$

d) $f(t) = 7 \cos (60\pi t)$ e $g(t) = 7 \text{ sen } (60\pi t)$

e) $f(t) = 7 \cos (\pi t)$ e $g(t) = 7 \text{ sen } (\pi t)$

13 Um pistão realiza um movimento periódico no interior de um cilindro, percorrendo 16 cm na subida e 16 cm na descida, tal que cada oscilação completa de 32 cm (subida e descida) é realizada pelo pistão em $\frac{1}{60}$ min.

Considerando que no instante zero o pistão está subindo e que sua cabeça (tampa) está a 8 cm da base do cilindro, a função que descreve a altura $f(t)$, atingida pela cabeça do pistão em relação à base, em função do tempo t, em minuto, é:

a) $f(t) = 8 \cos (60\pi t)$

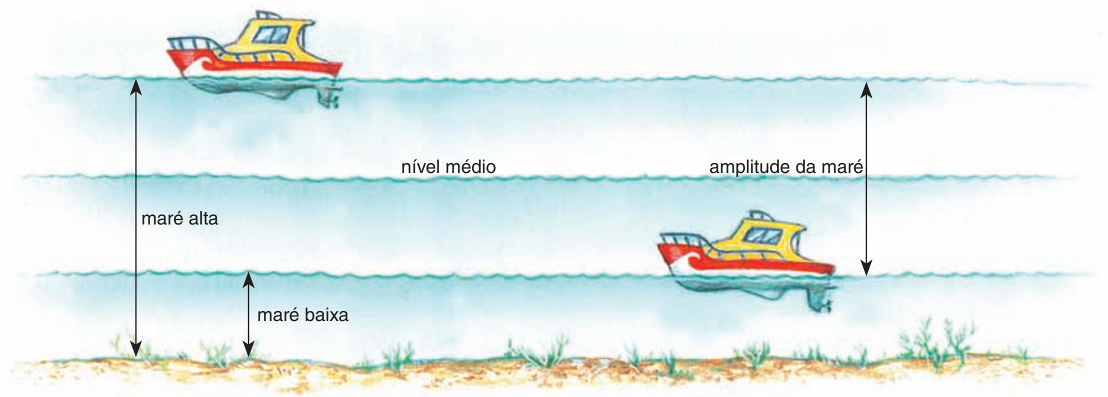
b) $f(t) = 16 \cos (60\pi t)$

c) $f(t) = 8 \cos (120\pi t)$

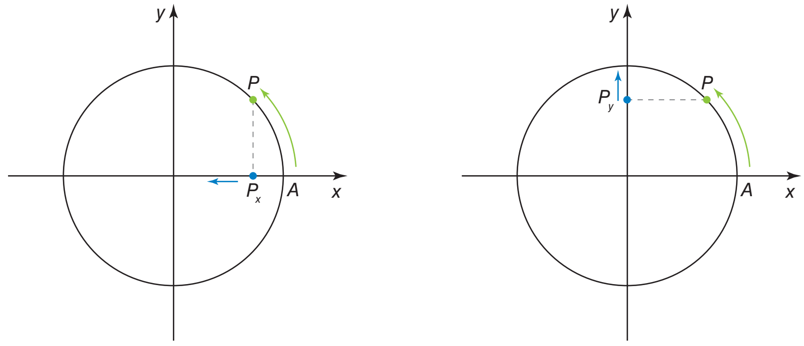
d) $f(t) = 8 \text{ sen } (120\pi t)$

e) $f(t) = 16 \cos \left(\frac{\pi t}{60}\right)$

14 Em uma região, em determinado dia, a amplitude da maré é 2,6 m, e o intervalo de tempo entre duas marés altas consecutivas (ou entre duas marés baixas consecutivas) é 12 horas. Sabendo que uma maré alta ocorre às 5 h, descreva, por meio de uma função trigonométrica, o movimento das marés nessa região em função do horário t, em hora, durante um dia. (Vamos supor que a amplitude seja constante nesse dia.)

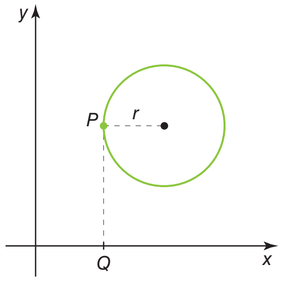


15 Quando um ponto P gira com velocidade constante, repetidas vezes, sobre uma circunferência, a projeção ortogonal de P sobre qualquer um dos eixos coordenados realiza um movimento periódico de vaivém chamado de Movimento Harmônico Simples (MHS). Nas figuras abaixo, P_x e P_y representam respectivamente as projeções ortogonais de P sobre os eixos das abscissas e das ordenadas.



Considere 5 cm para a medida do raio da circunferência e que o ponto P gire no sentido anti-horário, completando uma volta a cada 3 s. Determine as funções f e g que descrevem respectivamente os movimentos de P_x e P_y, sendo t a medida do tempo em segundo, tal que no instante zero P esteja no ponto $A(5, 0)$.

16 (Enem) Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leqslant r$ sobre a circunferência



Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por:

a) $r\left(1 - \text{sen}\,\dfrac{d}{r}\right)$

b) $r\left(1 - \cos\dfrac{d}{r}\right)$

c) $r\left(1 - \text{tg}\,\dfrac{d}{r}\right)$

d) $r\,\text{sen}\left(\dfrac{r}{d}\right)$

e) $r\cos\left(\dfrac{r}{d}\right)$

Resolva os exercícios complementares 50 a 65.

Seção 5.3

Outras funções trigonométricas

Objetivos

- **Identificar** as funções tangente, cotangente, cossecante e secante e suas representações gráficas.
- **Analisar** cada função segundo sua peridiocidade, sinal, raízes e conjunto imagem.

Termos e conceitos

- função tangente
- função cotangente
- função cossecante
- função secante

Já estudamos as funções trigonométricas seno e cosseno. Neste tópico, vamos definir as funções tangente, cotangente, cossecante e secante.

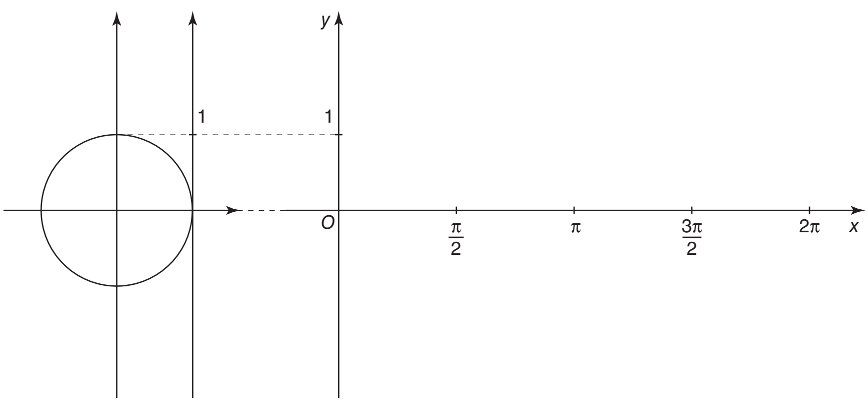
Função tangente

A **função tangente** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que:

$$y = \text{tg } x$$

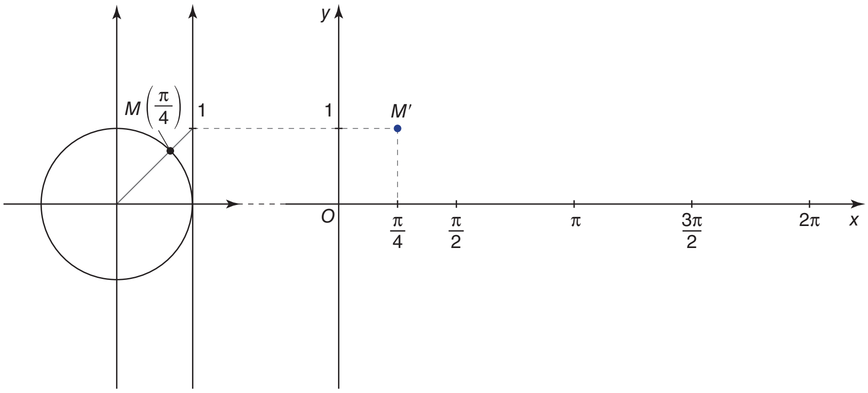
O gráfico da função tangente

Assim como fizemos com o seno, vamos aplicar um método geométrico na construção do gráfico da tangente. Para isso, construímos a circunferência trigonométrica ao lado de um sistema cartesiano, conforme a figura:

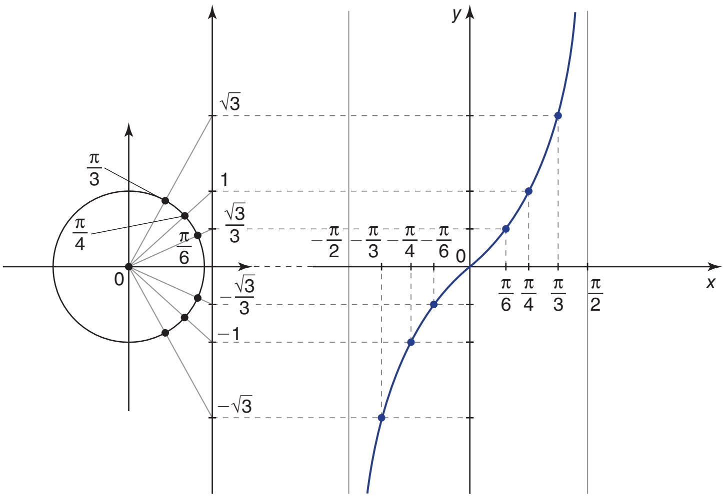


A unidade adotada nos eixos deve ser igual ao raio da circunferência trigonométrica.

A seguir, marcamos no plano cartesiano os pontos (x, y) tais que $y = \text{tg } x$. Por exemplo, transportamos a tangente do arco de medida $\frac{\pi}{4}$ para o eixo Oy como ordenada do ponto M', cuja abscissa é $\frac{\pi}{4}$. Assim, o ponto M' pertence ao gráfico da função $y = \text{tg } x$, conforme a figura:

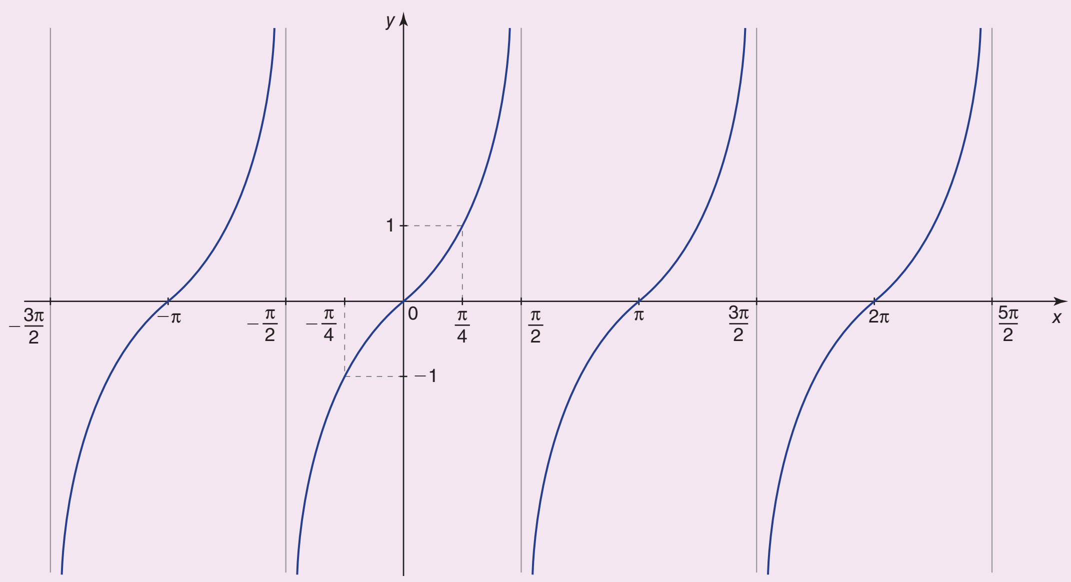


Repetindo o procedimento para outros pontos da circunferência trigonométrica, obtemos mais pontos do gráfico. Quanto mais pontos determinamos, mais nos aproximamos da figura a seguir, que é o gráfico de um período da função $y = \text{tg } x$.



Considerando as infinitas voltas da circunferência trigonométrica, concluímos a construção do gráfico:

$y = \text{tg } x$



- As retas verticais que passam pelos pontos de abscissa ..., $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, ... não têm ponto comum com o gráfico. E, quando x se aproxima indefinidamente de uma dessas retas, a distância entre essa reta e o gráfico tende a zero. Essas retas são chamadas **assíntotas verticais** do gráfico.
- Na função $y = \text{tg } x$, a variável x pode assumir qualquer valor real tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, o domínio D dessa função é:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Como tg x pode assumir qualquer valor real, o conjunto imagem (Im) da função $y = \text{tg } x$ é: $Im = \mathbb{R}$.
- O gráfico se repete a cada comprimento π no eixo Ox, ou seja, $\text{tg } (x + \pi) = \text{tg } x$; logo, a função tangente é periódica de período $p = \pi$, pois π é o menor valor positivo p tal que $\text{tg } (x + p) = \text{tg } x$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

18 Determinar o domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{tg } 3x$.

Resolução

Sabemos que $\text{tg } 3x = \dfrac{\text{sen } 3x}{\cos 3x}$; logo, a condição de existência dessa função é $\cos 3x \neq 0$ e, portanto:

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Então, o domínio da função é o conjunto $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Como $\text{tg } 3x$ pode assumir qualquer valor real, concluímos que o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

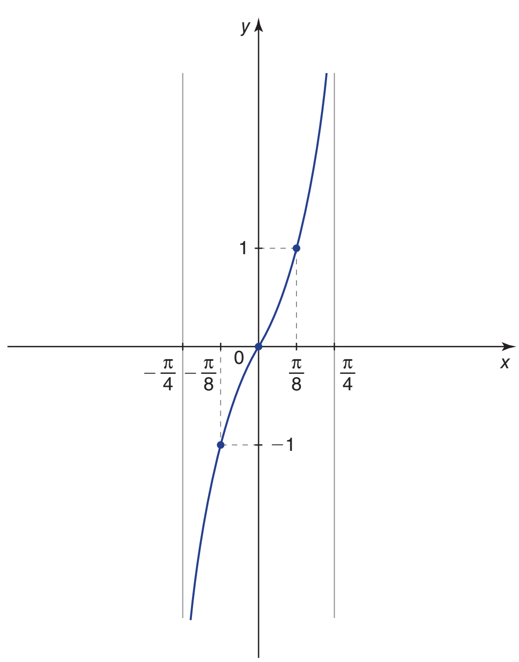
19 Esboçar o gráfico da função $y = \text{tg } 2x$.

Resolução

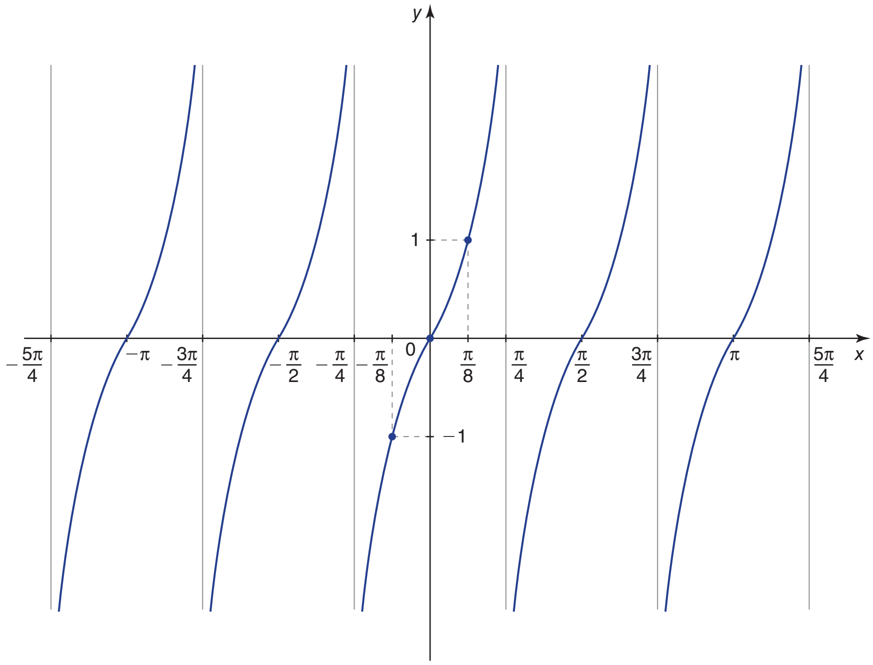
Construindo uma tabela, vamos determinar alguns pontos como referência para o esboço do gráfico de um período dessa função. Para isso, atribuímos ao arco $2x$ os valores $-\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{4}$, 0, $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{\pi}{2}$. Assim, obtemos a tabela ao lado.

$2x$	x	y
$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\nexists$
$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{8}$	-1
0	0	0
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{8}$	1
$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\nexists$

A tabela mostra que o gráfico passa pelos pontos $\left(-\dfrac{\pi}{8}, -1\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\dfrac{\pi}{8}, 1\right)$. Indica ainda que não existe $\text{tg } 2x$ para $x = -\dfrac{\pi}{4}$ e $x = \dfrac{\pi}{4}$; logo, duas assíntotas verticais passam pelos pontos de abscissa $-\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{\pi}{4}$. Concluímos que o gráfico de um período da função $y = \text{tg } 2x$ tem o traçado apresentado na figura abaixo.



Podemos então deduzir o gráfico completo da função, que será formado por infinitas repetições do período já determinado, como sugere a figura:



O domínio é obtido impondo-se a condição de existência para tg 2*x*, isto é:

$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o domínio da função é o conjunto:

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

O conjunto imagem da função é:

$Im = \mathbb{R}$

O período *p* da função é a distância entre duas assíntotas consecutivas, isto é:

$p = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

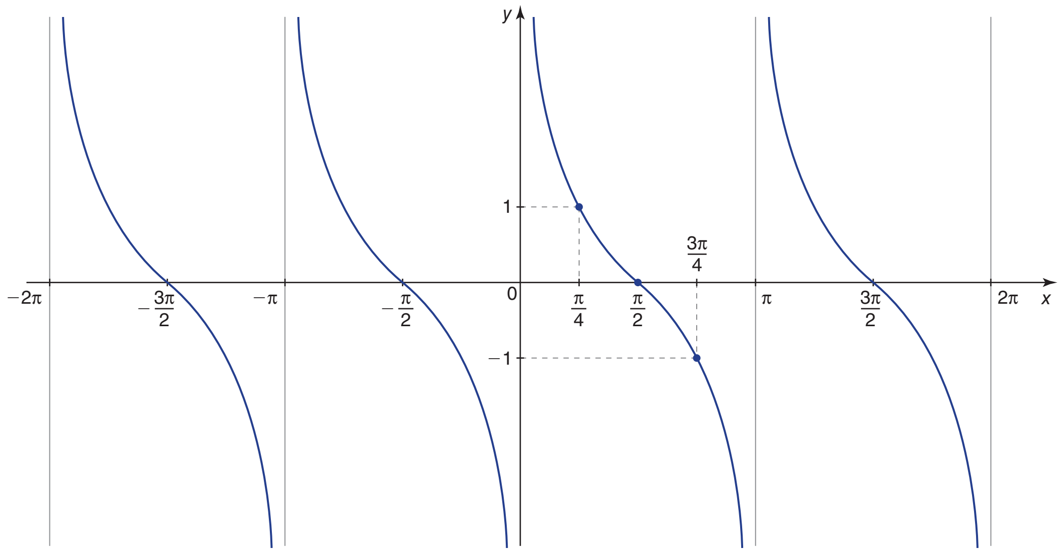
20 Esboçar o gráfico da função $y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Resolução

Para esboçar o gráfico de um período dessa função, podemos atribuir ao arco $\frac{\pi}{2} - x$ os valores $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$, obtendo os correspondentes valores de *x* e *y*:

$\frac{\pi}{2} - x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	π	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
0	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0	$\nexists$

Assim, com base na repetição do período considerado na tabela, temos o gráfico:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

$Im = \mathbb{R}$

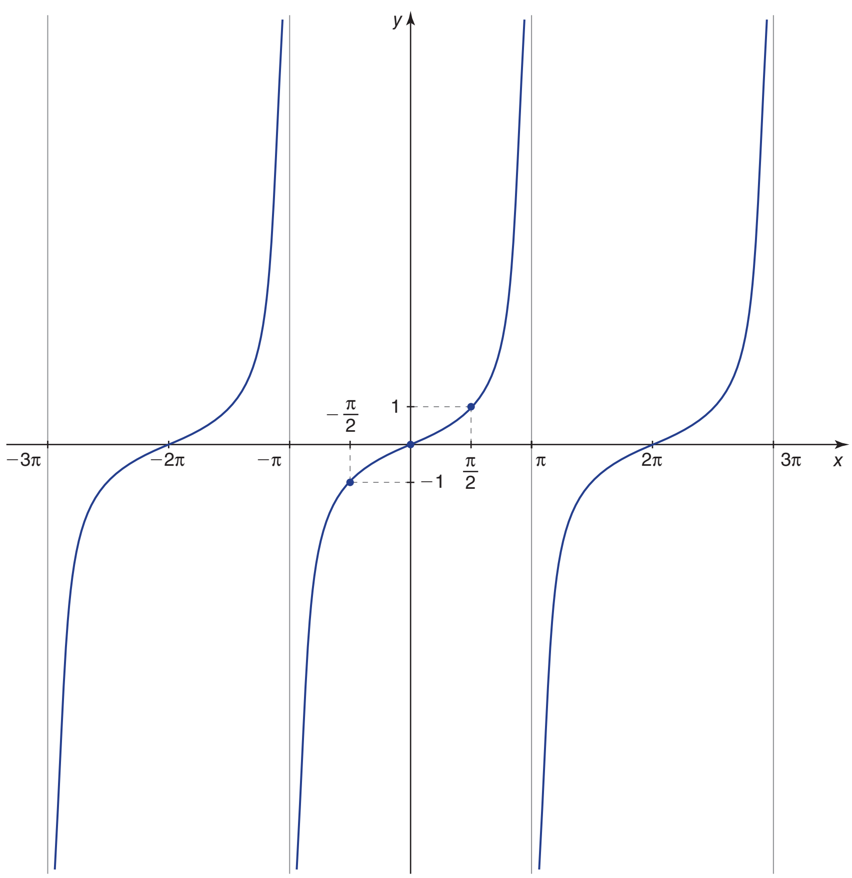
$p = \pi$

21 Esboçar o gráfico da função $y = \left|\text{tg } \frac{x}{2}\right|$.

Resolução

Como fizemos nos exercícios resolvidos 11 e 12, vamos construir primeiro o gráfico auxiliar $y_1 = \text{tg } \frac{x}{2}$:

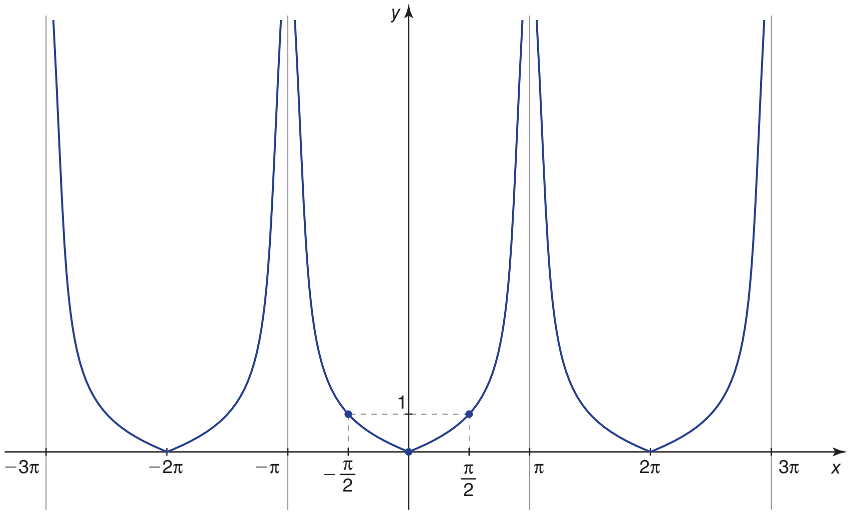
$\frac{x}{2}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	$\nexists$



Com base no gráfico auxiliar, construímos o gráfico da função $y = \left|\text{tg } \frac{x}{2}\right|$, da seguinte maneira:

- Conservamos os pontos de ordenadas não negativas.
- Transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas.

Assim, obtemos o gráfico da função $y = \left|\text{tg}\ \frac{x}{2}\right|$:



O domínio é obtido impondo-se a condição de existência para $\left|\text{tg}\ \frac{x}{2}\right|$, isto é:

$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Portanto, o domínio da função é o conjunto: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

O conjunto imagem é $Im = \mathbb{R}_+$.

O período p da função é a distância entre duas assíntotas consecutivas, isto é: $p = \pi - (-\pi) = 2\pi$

Período de funções que envolvem tangente

Determinamos o período da função $y = a + b \cdot \text{tg}\ (mx + q)$, com $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, $b \neq 0$ e $m \neq 0$, fazendo a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais associados à meia-volta da circunferência trigonométrica, pois, a cada meia-volta, a função tangente assume todos os valores de sua imagem $\mathbb{R}$. Por exemplo, quando essa medida assume os valores reais do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:

$$-\frac{\pi}{2} < mx + q < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q$$

(I) Se $m > 0$:

$$-\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q \Rightarrow \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} < x < \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}$$

O período p da função é a diferença entre o maior e o menor extremo do intervalo acima, nessa ordem:

$$p = \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m} - \left(\frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m}\right) = \frac{\pi}{m}$$

(II) Se $m < 0$:

$$-\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q \Rightarrow \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} > x > \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}$$

Calculando o período p:

$$p = \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} - \left(\frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}\right) = -\frac{\pi}{m}$$

Por (I) e (II), concluímos que:

$$\boxed{p = \frac{\pi}{|m|}}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

22 Determinar o período das funções:

a) $y = \text{tg } 4x$ **b)** $y = 5 \text{ tg } (-2x)$ **c)** $y = 6 + 4 \text{ tg}\left(\frac{\pi}{7} - 3x\right)$

Resolução

Aplicando a fórmula $p = \frac{\pi}{|m|}$, temos:

a) $p = \frac{\pi}{|4|} = \frac{\pi}{4}$ **b)** $p = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$ **c)** $p = \frac{\pi}{|-3|} = \frac{\pi}{3}$

Função cotangente

A **função cotangente** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que:

$$y = \text{cotg } x$$

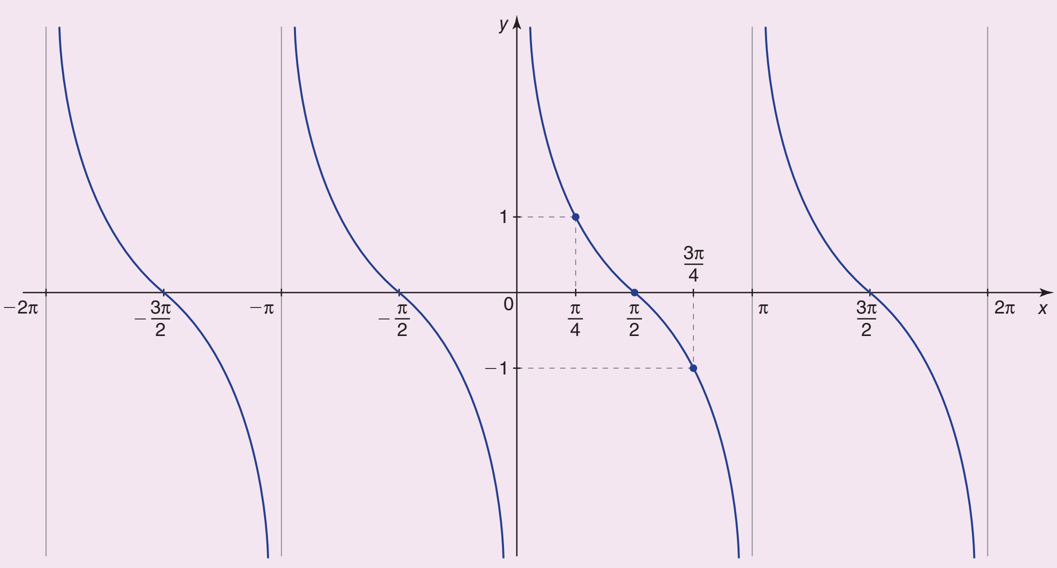
O gráfico da função cotangente

Lembrando que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$, temos:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \text{cotg } x$$

Portanto, o gráfico da função $y = \text{cotg } x$ é igual ao gráfico da função $y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, já construído no exercício resolvido 20:

$y = \text{cotg } x$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \pi$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

23 Determinar o domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{cotg}\, \frac{x}{2}$.

Resolução

Sabemos que $\text{cotg}\, \frac{x}{2} = \dfrac{\cos \frac{x}{2}}{\text{sen}\, \frac{x}{2}}$; logo, a condição de existência dessa função é $\text{sen}\, \frac{x}{2} \neq 0$ e, portanto:

$\frac{x}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o domínio da função é o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

Como $\text{cotg}\, \frac{x}{2}$ pode assumir qualquer valor real, concluímos que o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

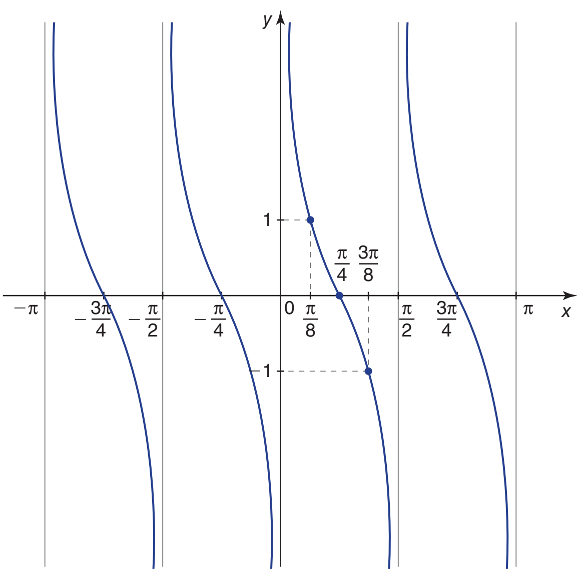
24 Esboçar o gráfico da função $y = \text{cotg}\, 2x$.

Resolução

Para esboçar o gráfico de um período da função, construímos uma tabela e atribuímos ao arco $2x$ os valores $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ e π, obtendo os correspondentes valores de x e y.

$2x$	x	y
0	0	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	-1
π	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$

Assim, com base na repetição do período considerado na tabela, temos o gráfico:



O domínio é obtido impondo-se a condição de existência para $\text{cotg}\, 2x$, isto é:

$2x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o domínio da função é o conjunto: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

O conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

O período p da função é a distância entre duas assíntotas consecutivas, isto é: $p = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

17 Determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $y = \text{tg}\, 4x$

b) $y = 5\, \text{tg}\, \frac{3x}{2}$

c) $y = 4 + \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

18 Esboce o gráfico das funções.

a) $y = \text{tg}\, 4x$

b) $y = -\text{tg}\, 4x$

c) $y = \text{tg}\, \frac{x}{2}$

19 Calcule o período de cada função.

a) $y = \text{tg}\, 6x$

b) $y = \text{tg}\, \frac{x}{6}$

c) $y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

20 Obtenha o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $y = \text{cotg}\, 2x$

b) $y = \text{cotg}\, \frac{x}{3}$

21 Esboce o gráfico de:

a) $y = \text{cotg}\, \frac{x}{2}$

b) $y = -2 + \text{cotg}\, x$

Resolva os exercícios complementares 14 a 21.

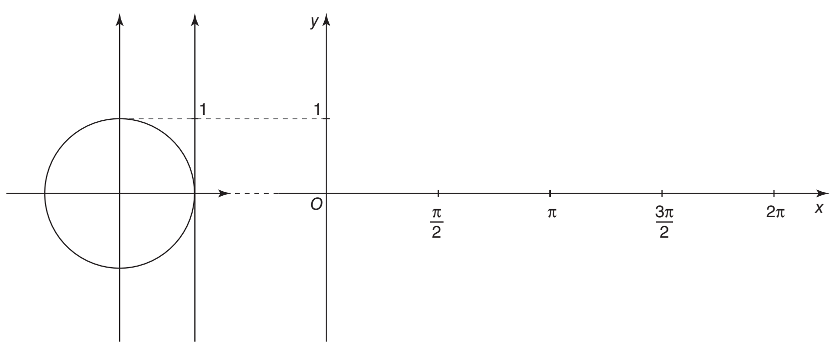
Função cossecante

A **função cossecante** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que:

$$y = \text{cossec}\, x$$

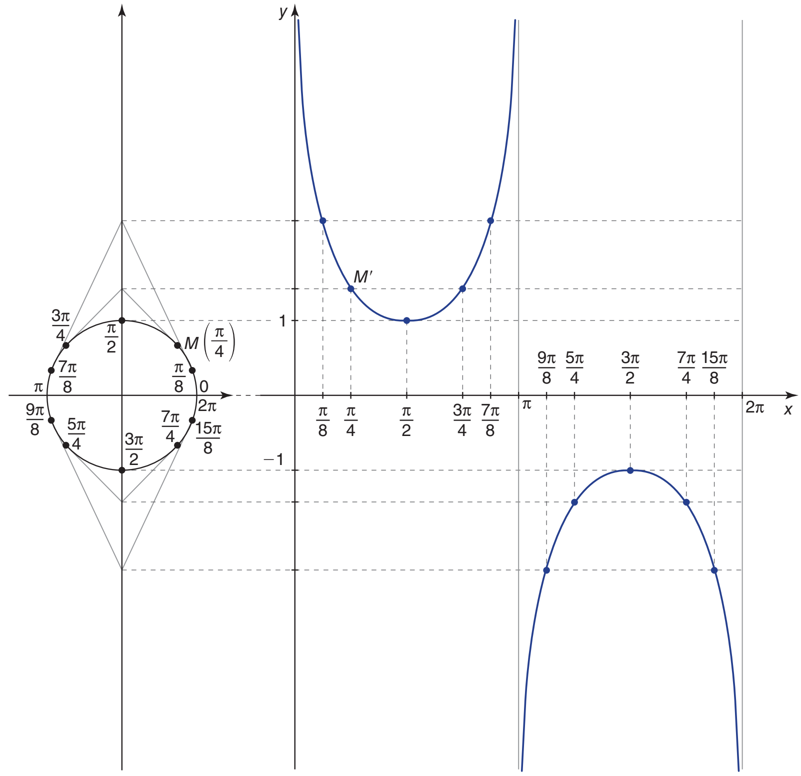
O gráfico da função cossecante

Assim como fizemos para as funções anteriores, vamos aplicar um método geométrico na construção do gráfico da cossecante. Para isso, construímos a circunferência trigonométrica ao lado de um sistema cartesiano, conforme a figura:



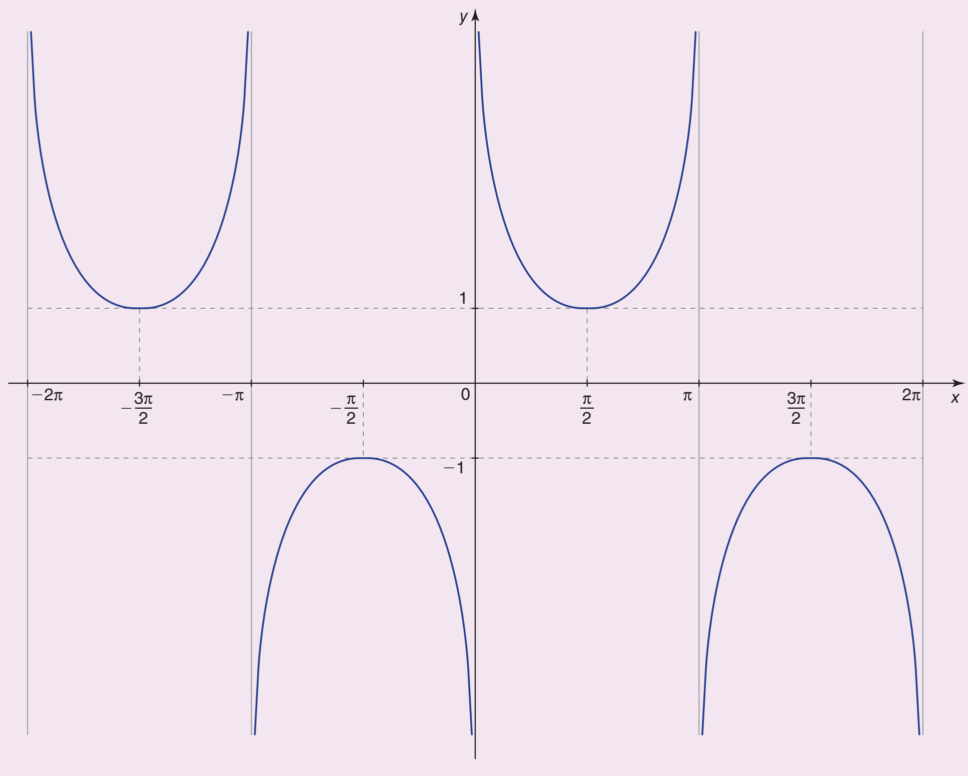
A unidade adotada nos eixos deve ser igual ao raio da circunferência trigonométrica.

A seguir, marcamos no plano cartesiano os pontos (x, y) tais que $y = \text{cossec}\, x$. Por exemplo, transportamos a cossecante do arco de medida $\frac{\pi}{4}$ para o eixo Oy como ordenada do ponto M', cuja abscissa é $\frac{\pi}{4}$. Assim, o ponto M' pertence ao gráfico da função $y = \text{cossec}\, x$. Repetindo o procedimento para outros pontos da circunferência trigonométrica, obtemos mais pontos do gráfico. Quanto mais pontos determinarmos, mais nos aproximaremos da figura a seguir, que é o gráfico de um período da função $y = \text{cossec}\, x$.



O gráfico completo da função cossecante é obtido pela repetição do gráfico de um período da função ao longo do eixo Ox:

y = cossec x



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$

$p = 2\pi$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

25 Determinar o domínio da função $y = \text{cossec}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Resolução

Sabemos que $\text{cossec}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$; logo, a condição de existência dessa função é:

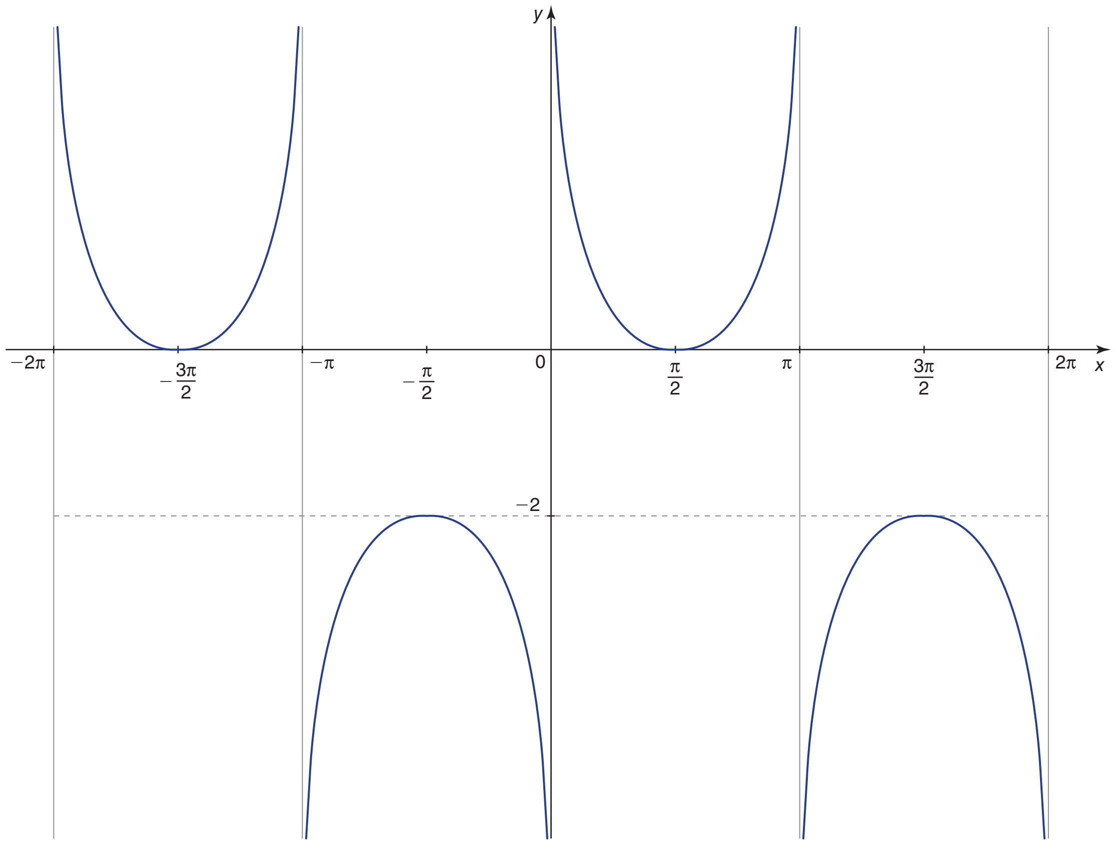
$\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$ e, portanto: $2x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o domínio da função é o conjunto: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

26 Esboçar o gráfico da função $y = -1 + \text{cossec } x$.

Resolução

Basta transladar verticalmente, em 1 unidade para baixo, o gráfico da função $y = \text{cossec } x$. Então, o gráfico da função $y = -1 + \text{cossec } x$ é:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \{x \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -2 \text{ ou } y \geqslant 0\}$
$p = 2\pi$

27 Determinar o conjunto imagem da função $y = 4 + 2 \text{ cossec } x$.

Resolução

$y = 4 + 2 \text{ cossec } x \Rightarrow \dfrac{y - 4}{2} = \text{cossec } x$

Como $\text{cossec } x \leqslant -1$ ou $\text{cossec } x \geqslant 1$, temos: $\dfrac{y-4}{2} \leqslant -1$ ou $\dfrac{y-4}{2} \geqslant 1$

Resolvendo as duas últimas inequações, concluímos que $y \leqslant 2$ ou $y \geqslant 6$ e, portanto, o conjunto imagem da função é:
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2 \text{ ou } y \geqslant 6\}$

Função secante

A **função secante** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que:

$$y = \sec x$$

O gráfico da função secante

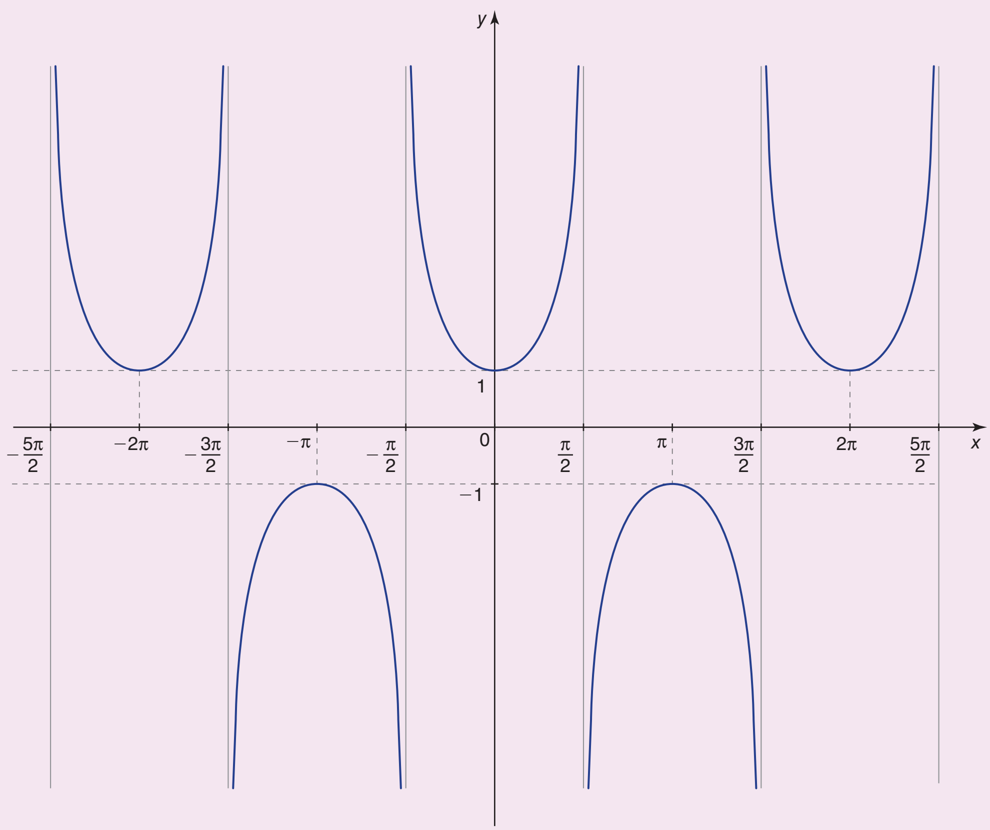
Lembrando que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, temos:

$$\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Portanto, o gráfico da função $y = \sec x$ é igual ao gráfico da função $y = \text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, que é uma translação horizontal, de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda, do gráfico da função $y = \text{cossec}\, x$.

Assim, temos:

$y = \sec x$



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$

$p = 2\pi$

28 Determinar o domínio da função: $y = \sec\left(2x + \dfrac{3\pi}{5}\right)$

Resolução

Sabemos que $\sec\left(2x + \dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{\cos\left(2x + \dfrac{3\pi}{5}\right)}$; logo, a condição de existência dessa função é $\cos\left(2x + \dfrac{3\pi}{5}\right) \neq 0$ e, portanto:

$$2x + \frac{3\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Assim, o domínio da função é o conjunto:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

29 Para que valores reais de m é possível a igualdade $\sec x = 2m - 3$?

Resolução

Como $\sec x \leqslant -1$ ou $\sec x \geqslant 1$, os valores de m devem satisfazer a condição:

$2m - 3 \leqslant -1$ ou $2m - 3 \geqslant 1$

Resolvendo as duas últimas inequações, obtemos: $m \leqslant 1$ ou $m \geqslant 2$

Concluímos que existe a igualdade $\sec x = 2m - 3$ apenas para os números reais m tal que $m \leqslant 1$ ou $m \geqslant 2$.

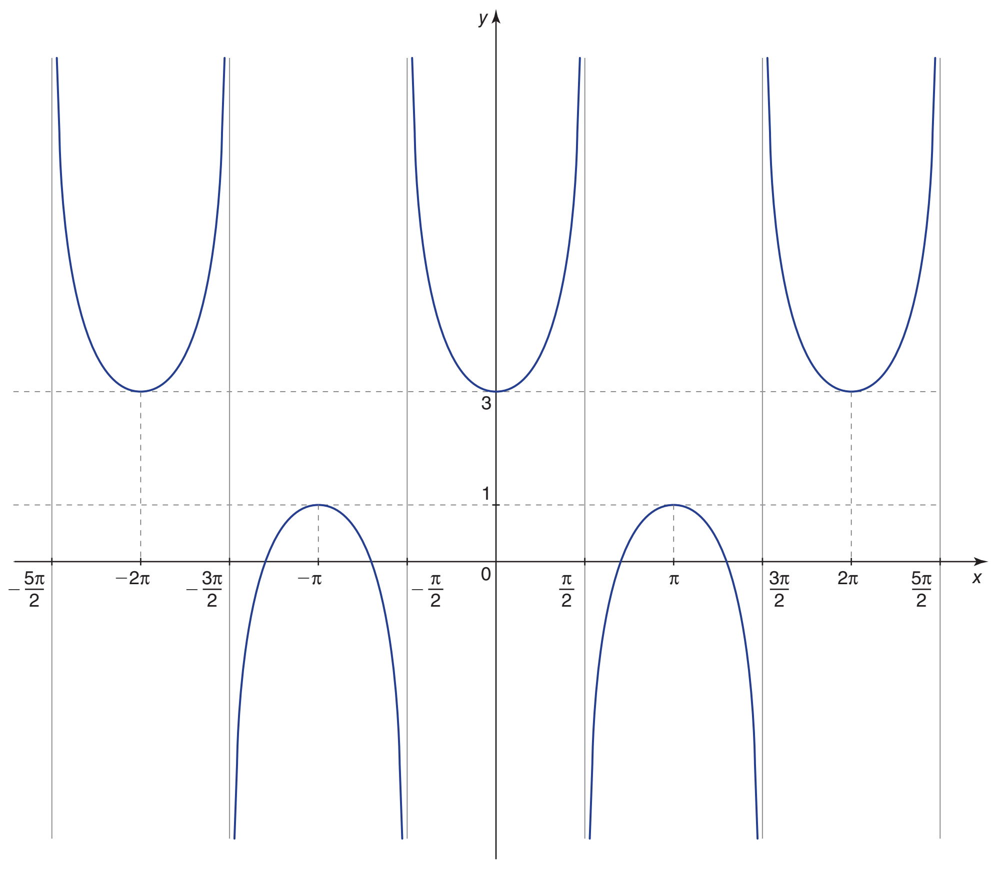
30 Esboçar o gráfico da função $y = |2 + \sec x|$.

Resolução

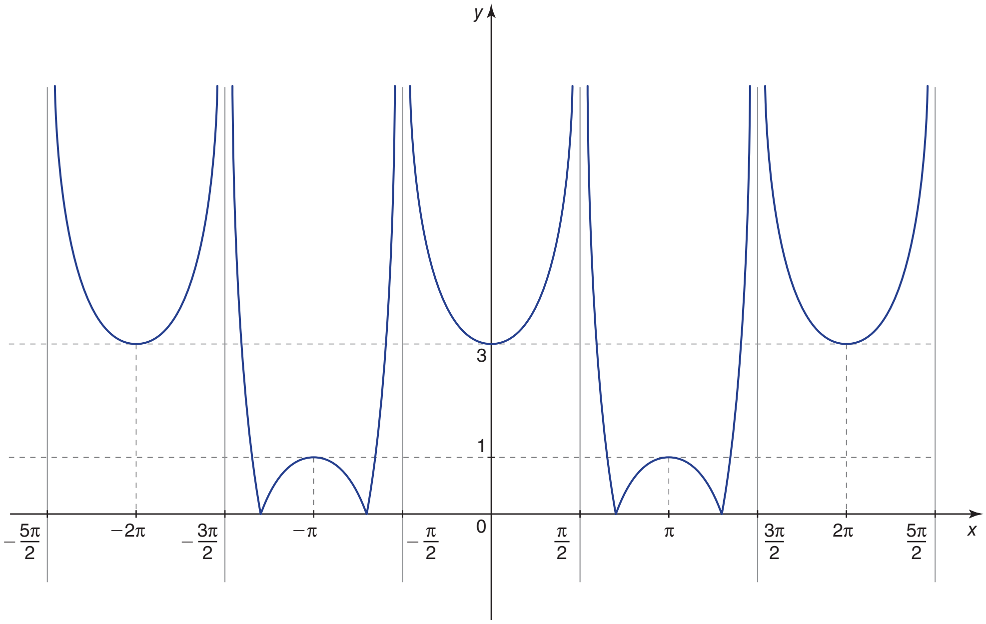
Primeiro, construímos o gráfico auxiliar $y_1 = 2 + \sec x$.

Esse gráfico é obtido por translação vertical, de 2 unidades para cima, do gráfico da função $f(x) = \sec x$.

Assim, o gráfico auxiliar é:



Por uma transformação do gráfico auxiliar, construímos o gráfico da função $y = |2 + \sec x|$:



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

$p = 2\pi$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

22 Determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $y = \text{cossec } 2x$

b) $y = 2 + \text{cossec } \frac{x}{2}$

23 Obtenha os valores reais de k para os quais existe a igualdade: $k - 2 \text{ cossec } x = 5$.

24 Esboce o gráfico das funções:

a) $y = 3 + \text{cossec } x$

b) $y = -\text{cossec } x$

c) $y = |-2 + \text{cossec } x|$

25 Obtenha o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $y = \sec 4x$

b) $y = 2 \sec \frac{x}{2}$

26 Encontre os valores reais de k para os quais seja possível a igualdade: $2k + \sec x = 5$.

Resolva os exercícios complementares 22 a 27.

Seção 5.4

Funções trigonométricas inversas

Objetivos

- **Usar** calculadora científica.
- **Identificar** as funções arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente e suas representações gráficas.
- **Resolver** equações trigonométricas.

Termos e conceitos

- **função arco-seno**
- **função arco-cosseno**
- **função arco-tangente**

Funções trigonométricas na calculadora

Em uma calculadora científica, ao digitar a medida de um ângulo seguida da tecla $\boxed{\text{sin}}$ e da tecla $\boxed{=}$, surgirá no visor um número que é o seno da medida digitada inicialmente.

Inversamente, digitando-se um número maior ou igual a -1 e menor ou igual a 1 seguido da tecla $\boxed{\text{sin}^{-1}}$ e da tecla $\boxed{=}$, surgirá no visor a medida de um ângulo cujo seno é o valor digitado inicialmente.

Essa experiência provoca, inevitavelmente, uma dúvida: para cada valor do seno, há infinitos arcos que têm esse seno; por que a calculadora apresenta apenas um resultado?

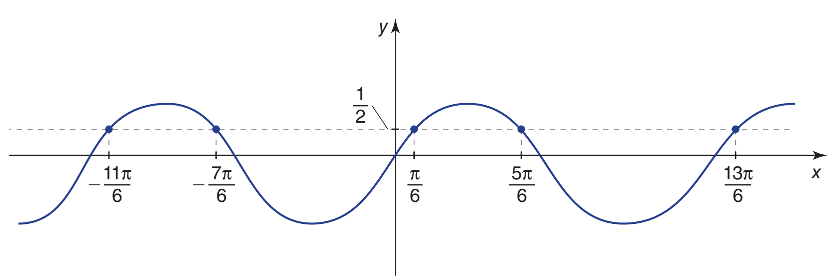
A explicação para esse fato, que também ocorre para o cosseno e a tangente, será apresentada no próximo tópico, sobre as funções trigonométricas inversas.

Notas:

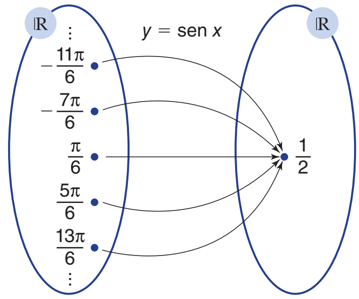
1. Os símbolos "sin" e "tan" são, respectivamente, abreviações das palavras *sine* e *tangent*, que significam seno e tangente em inglês.
2. Os símbolos "sin^{-1}", "cos^{-1}" e "tan^{-1}" (ou "arcsin", "arccos" e "arctan") indicam, respectivamente, as inversas das funções seno, cosseno e tangente, sob certas restrições, que serão estudadas no próximo tópico.
3. Há calculadoras em que se digita a tecla "sin" (ou "cos" e "tan") antes da medida do ângulo.
4. Há calculadoras que apresentam: a tecla $\boxed{\text{arcsin}}$ em vez de $\boxed{\text{sin}^{-1}}$; a tecla $\boxed{\text{arccos}}$ em vez de $\boxed{\text{cos}^{-1}}$; e a tecla $\boxed{\text{arctan}}$ em vez de $\boxed{\text{tan}^{-1}}$.

Restrições a domínios e contradomínios

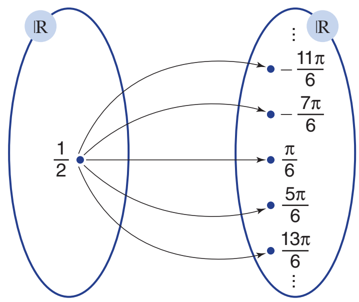
O gráfico abaixo representa a função $y = \text{sen } x$.



Observe que existem infinitas medidas de arcos que têm o mesmo seno:



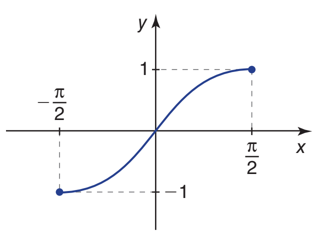
Como há pelo menos dois valores distintos do domínio dessa função que têm a mesma imagem, concluímos que a função $y = \text{sen } x$ não é bijetora e, portanto, não admite função inversa, pois a relação inversa não é função. Por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ do domínio da relação inversa tem mais de uma imagem, logo, essa relação não é função; observe:



Raciocinando de maneira análoga, concluímos que as funções cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante também não admitem função inversa, pois nenhuma delas é bijetora. Porém, restringindo convenientemente o domínio e o contradomínio de cada uma delas, podemos obter novas funções que sejam bijetoras e, por isso, admitem inversas. Estudaremos esse tipo de restrição para as funções seno, cosseno e tangente.

Função arco-seno

Vamos considerar a restrição da função $y = \text{sen } x$, com domínio $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e contradomínio $CD = [-1, 1]$. O gráfico dessa restrição é:



Essa função é bijetora e, portanto, admite inversa. A inversa dessa restrição da função seno será indicada por:

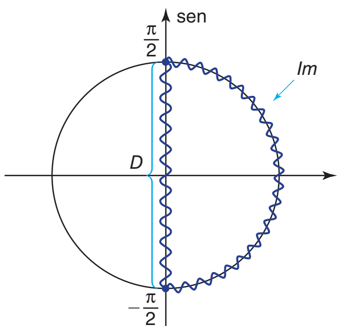
$$\boxed{y = \text{arcsen } x}$$

e deve ser entendida da seguinte maneira:

$$\boxed{y \text{ é o arco cujo seno vale } x}$$

Note que esse arco é único, pois fizemos uma restrição à função seno.

O domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arcsen } x$ são:



$D = [1, -1]$

$Im = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Observe que o domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arcsen } x$ são respectivamente iguais ao conjunto imagem e ao domínio da restrição feita à função seno, pois essas duas funções são inversas entre si.

Nota:

Na calculadora científica, ao digitar o valor de um possível seno, seguido da tecla $\boxed{\sin^{-1}}$ e da tecla $\boxed{=}$, o visor mostrará apenas o arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cujo seno é o valor digitado inicialmente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

31 Calcular:

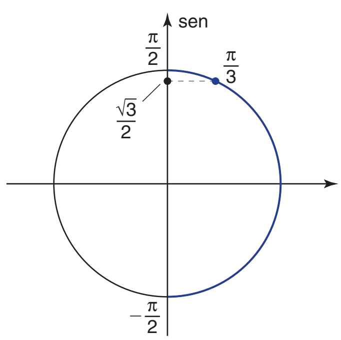
a) $\text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\text{arcsen } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $\text{arcsen } 0$

Resolução

Como o conjunto imagem da função arco-seno é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, os valores pedidos devem pertencer a esse intervalo.

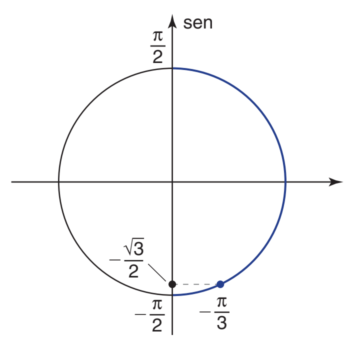
Logo:

a) $\text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2}$ é o arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cujo seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



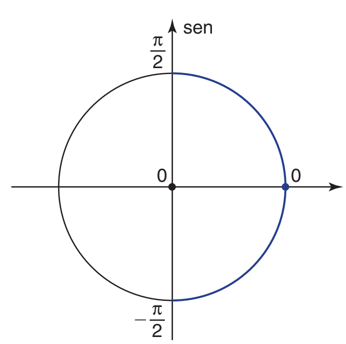
Logo: $\text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

b) $\text{arcsen } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ é o arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cujo seno vale $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Assim: $\text{arcsen } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

c) $\text{arcsen } 0$ é o arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno vale 0.



Logo: $\text{arcsen } 0 = 0$

32 Calcular o valor de $\text{tg}\left(\text{arcsen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Resolução

Sabemos que $\text{arcsen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. Assim, concluímos que $\text{tg}\left(\text{arcsen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

33 Calcular o valor de $\cos\left(\text{arcsen}\,\dfrac{3}{5}\right)$.

Resolução

Sendo $\alpha = \text{arcsen}\,\dfrac{3}{5}$, deduzimos que:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{5}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

Substituindo $\text{sen}\,\alpha$ por $\dfrac{3}{5}$ na relação fundamental $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$, obtemos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Como $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, concluímos que $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, ou seja, $\cos\left(\text{arcsen}\,\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$.

34 Calcular o valor de $\text{sen}\left(2\,\text{arcsen}\,\dfrac{1}{3}\right)$.

Resolução

Sendo $\alpha = \text{arcsen}\,\dfrac{1}{3}$, deduzimos que:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

Substituindo $\text{sen}\,\alpha$ por $\dfrac{1}{3}$ na relação fundamental $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$, obtemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, então $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Aplicando a identidade $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$, concluímos:

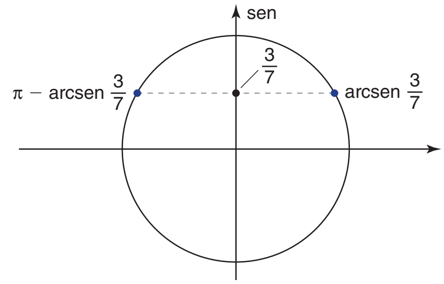
$$\text{sen}\left(2\,\text{arcsen}\,\frac{1}{3}\right) = \text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

35 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen}\,x = \dfrac{3}{7}$.

Resolução

Na 1ª volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:



Logo, $x = \text{arcsen}\,\dfrac{3}{7}$ ou $x = \pi - \text{arcsen}\,\dfrac{3}{7}$.

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \text{arcsen}\,\dfrac{3}{7} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \pi - \text{arcsen}\,\dfrac{3}{7} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arcsen}\,\frac{3}{7} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen}\,\frac{3}{7} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

36 Determinar o domínio da função $y = \text{arcsen}\,3x$.

Resolução

$y = \text{arcsen}\,3x \Rightarrow 3x = \text{sen}\,y$

Como $-1 \leqslant \text{sen}\,y \leqslant 1$, então $-1 \leqslant 3x \leqslant 1$, portanto:

$-\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}$

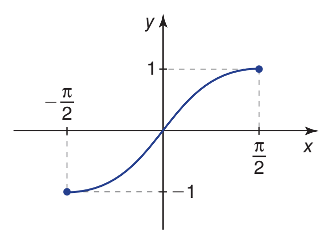
Logo, o domínio da função é o conjunto:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}\right\}$$

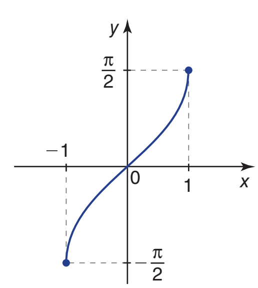
37 Construir o gráfico da função $y = \text{arcsen}\,x$.

Resolução

O gráfico da função $y = \text{sen}\,x$, sob a restrição $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, é:



A inversa dessa função restrita é a função $y = \text{arcsen}\,x$. Como funções inversas entre si têm gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, concluímos que o gráfico de $y = \text{arcsen}\,x$ é:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27 Calcule:

a) $\text{arcsen}\ \frac{1}{2}$

b) $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) arcsen 1

d) arcsen (-1)

e) $\text{arcsen}\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

g) arcsen 2

h) $\text{arcsen}\left(-\sqrt[3]{5}\right)$

28 Obtenha o valor de $\sec\left[\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$.

29 Encontre o valor de $\text{tg}\left(2\ \text{arcsen}\ \frac{1}{2}\right)$.

30 Qual é o valor de $\cos\left(\text{arcsen}\ \frac{12}{13}\right)$?

31 Determine $\cos\left(2\ \text{arcsen}\ \frac{2}{3}\right)$.

32 Determine o domínio da função $y = \text{arcsen}\ 2x$.

33 Qual é o valor da expressão

$\cos\left(\text{arcsen}\ \frac{3}{5} + \text{arcsen}\ 1\right)$?

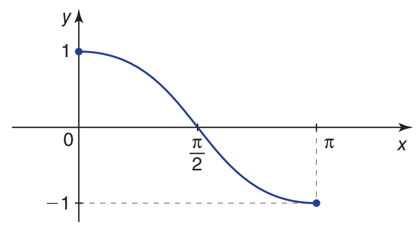
34 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen}\ x = \frac{2}{7}$.

35 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\frac{\pi}{3} = \text{arcsen}\ x$.

Resolva os exercícios complementares 28 a 34.

Função arco-cosseno

Vamos considerar a restrição da função $y = \cos x$ com domínio $D = [0, \pi]$ e contradomínio $CD = [-1, 1]$. O gráfico dessa restrição é o gráfico ao lado:



Essa função é bijetora e, portanto, admite inversa. A inversa dessa restrição da função cosseno será indicada por:

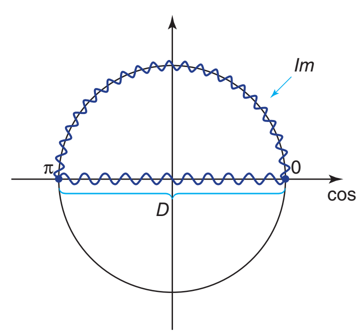
$$\boxed{y = \text{arccos}\ x}$$

e deve ser entendida da seguinte maneira:

y é o arco cujo cosseno vale x

Note que esse arco é único, pois fizemos uma restrição à função cosseno.

O domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arccos}\ x$ são:



$D = [1, -1]$

$Im = [0, \pi]$

Note que o domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arccos}\ x$ são respectivamente iguais ao conjunto imagem e ao domínio da restrição feita à função cosseno, pois essas duas funções são inversas entre si.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

38 Calcular:

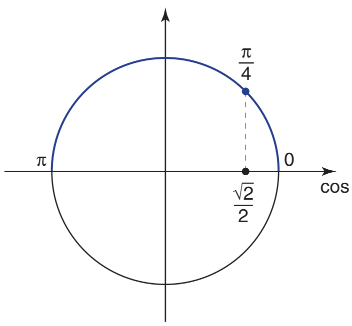
a) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $\arccos 0$

Resolução

O conjunto imagem da função arco-cosseno é o intervalo $[0, \pi]$ e, portanto, os valores pedidos pertencem a esse intervalo.

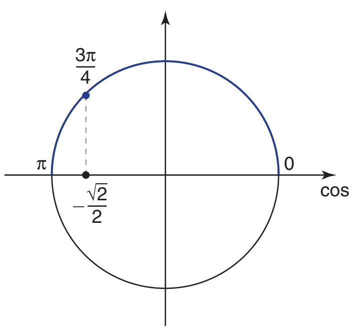
Logo:

a) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



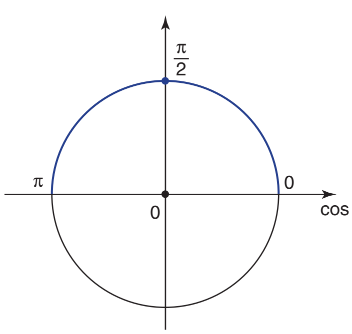
Assim: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é o arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno vale $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Logo: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

c) $\arccos 0$ é o arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno vale 0.



Portanto: $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

39 Calcular o valor de $\operatorname{sen}\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$.

Resolução

Sendo $\alpha = \arccos \frac{5}{13}$, deduzimos que:

$\cos \alpha = \frac{5}{13}$ e $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$

Substituindo $\cos \alpha$ por $\frac{5}{13}$ na relação fundamental

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, obtemos:

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

$\therefore \operatorname{sen} \alpha = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$

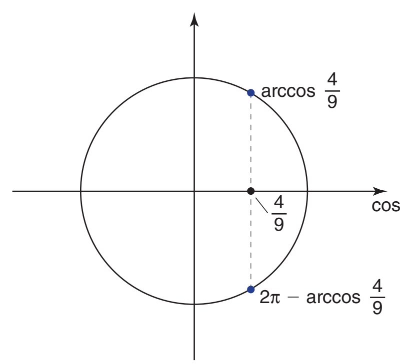
Como $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, concluímos que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{13}$, ou seja:

$\operatorname{sen}\left(\arccos \frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$

40 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\cos x = \frac{4}{9}$.

Resolução

Na 1ª volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:



Logo: $x = \arccos \frac{4}{9}$ ou $x = 2\pi - \arccos \frac{4}{9}$

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \arccos \frac{4}{9} + k \cdot 2\pi$ ou

$x = 2\pi - \arccos \frac{4}{9} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \arccos \frac{4}{9} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = 2\pi - \arccos \frac{4}{9} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Outra maneira possível de apresentar esse conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\arccos \frac{4}{9} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

41 Determinar o domínio da função $y = \text{arccos}\ \frac{x}{2}$.

Resolução

$y = \text{arccos}\ \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \cos y$

Como $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, então

$-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$, portanto: $-2 \leqslant x \leqslant 2$

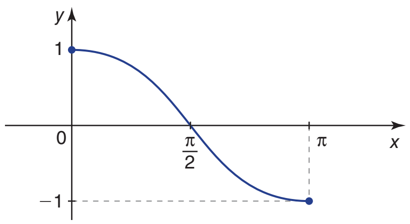
Logo, o domínio da função é o conjunto:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

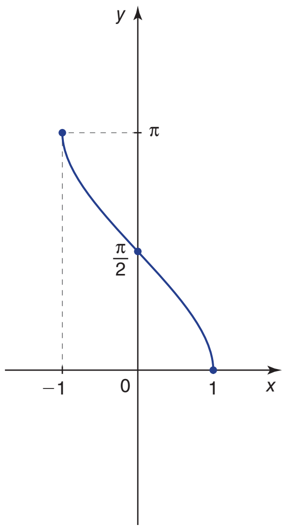
42 Construir o gráfico da função $y = \text{arccos}\ x$.

Resolução

O gráfico da função $y = \cos x$, sob a restrição $0 \leqslant x \leqslant \pi$, é:



A inversa dessa função restrita é a função $y = \text{arccos}\ x$. Como funções inversas entre si têm gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, concluímos que o gráfico de $y = \text{arccos}\ x$ é:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36 Calcule:

a) $\text{arccos}\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\text{arccos}\ 1$

d) $\text{arccos}\ (-1)$

e) $\text{arccos}\ \frac{1}{2}$

f) $\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$

g) $\text{arccos}\ \frac{3}{2}$

37 Qual é o valor de $\text{cossec}\left[\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$?

38 Obtenha o valor de $\text{sen}\left(\text{arccos}\ \frac{15}{17}\right)$.

39 Encontre o valor de $\text{sen}\left(2\ \text{arccos}\ \frac{1}{3}\right)$.

40 Qual é o domínio da função $y = \text{arccos}\ 4x$?

41 Determine o valor da expressão $\text{tg}\left[\text{arccos}\ \frac{4}{5} + \text{arccos}\ (-1)\right]$.

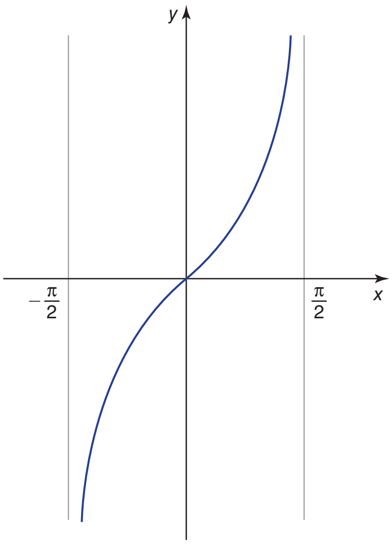
42 Encontre o valor de $\cos\left[\text{arccos}\ \frac{12}{13} + \text{arccos}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$.

43 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\cos x = \frac{2}{3}$.

Resolva os exercícios complementares 35 a 41.

Função arco-tangente

Vamos considerar a restrição da função $y = \text{tg}\, x$ com domínio $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e contradomínio $CD = \mathbb{R}$. O gráfico dessa restrição é:



Essa função é bijetora e, portanto, admite inversa. A inversa dessa restrição da função tangente será indicada por:

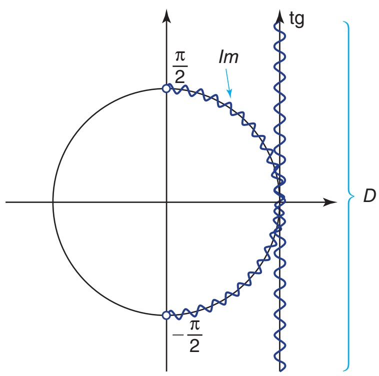
$$\boxed{y = \text{arctg}\, x}$$

e deve ser entendida da seguinte maneira:

y é o arco cuja tangente vale x

Note que esse arco é único, pois fizemos uma restrição à função tangente.

O domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arctg}\, x$ são:



$$D = \mathbb{R}$$

$$Im = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Note que o domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arctg}\, x$ são, respectivamente, iguais ao conjunto imagem e ao domínio da restrição feita à função tangente, pois essas duas funções são inversas entre si.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

43 Calcular:

a) $\text{arctg}\,\sqrt{3}$

b) $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$

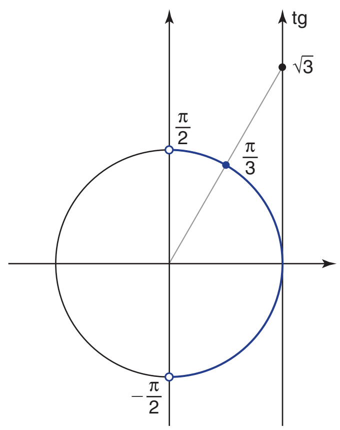
c) $\text{arctg}\,0$

Resolução

O conjunto imagem da função arco-tangente é o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e, portanto, os valores pedidos pertencem a esse intervalo.

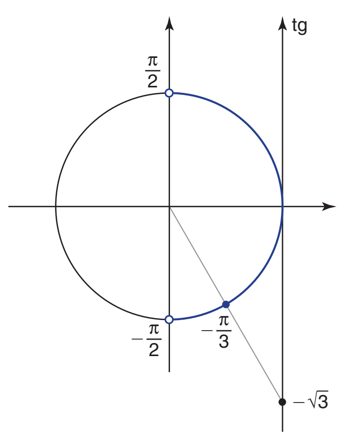
Logo:

a) $\text{arctg}\,\sqrt{3}$ é o arco do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente vale $\sqrt{3}$.



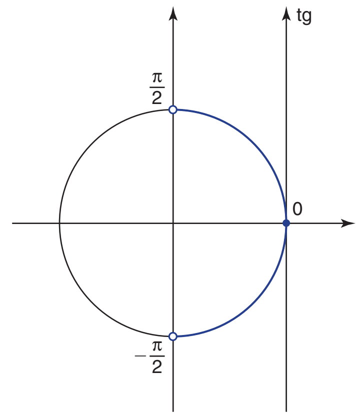
Logo: $\text{arctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

b) $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ é o arco do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente vale $-\sqrt{3}$.



Assim: $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

c) $\text{arctg}\,0$ é o arco do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente vale 0.



Portanto: $\text{arctg}\,0 = 0$

44 Calcular sen (arctg 1).

Resolução

Como $\text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$, concluímos que:

$\text{sen}\,(\text{arctg}\,1) = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

45 Calcular o valor de sen [2 arctg (−3)].

Resolução

Sendo $\alpha = \text{arctg}\,(-3)$, deduzimos que:

$\text{tg}\,\alpha = -3$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Da igualdade $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -3$, temos:

$\text{sen}\,\alpha = -3\cos\alpha \quad \text{(I)}$

Substituindo $\text{sen}\,\alpha$ por $-3\cos\alpha$ na relação fundamental $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obtemos:

$(-3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 10\cos^2\alpha = 1$

$\therefore \cos^2\alpha = \frac{1}{10}$

$\therefore \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$

Como $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, concluímos que:

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Substituindo $\cos\alpha$ por $\frac{\sqrt{10}}{10}$ em (I), obtemos:

$\text{sen}\,\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Finalmente, aplicamos a identidade $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$, concluindo:

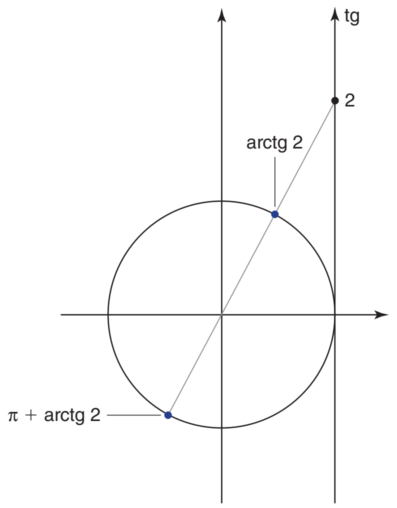
$\text{sen}\,[2\,\text{arctg}\,(-3)] = \text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= 2 \cdot \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = -\frac{3}{5}$

46 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\text{tg } x = 2$.

Resolução

Na 1ª volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos $x = \text{arctg } 2$ ou $x = \pi + \text{arctg } 2$:



Observando que esses valores de x estão associados a pontos da circunferência simétricos em relação ao centro da circunferência, podemos apresentar os infinitos números reais associados a esses pontos pela expressão:

$x = \text{arctg } 2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

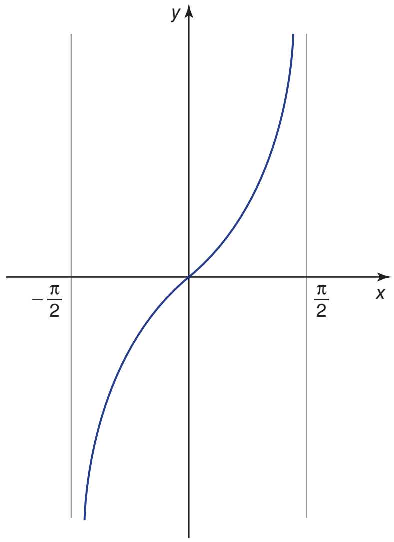
Logo, o conjunto solução da equação é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arctg } 2 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

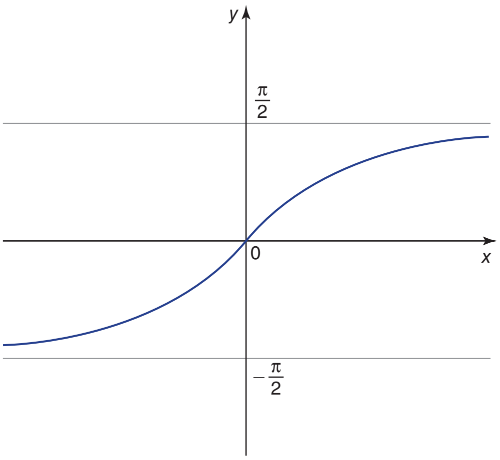
47 Construir o gráfico da função $y = \text{arctg } x$.

Resolução

O gráfico da função $y = \text{tg } x$, sob a restrição $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, é:



A inversa dessa função restrita é a função $y = \text{arctg } x$. Como funções inversas entre si têm gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, concluímos que o gráfico de $y = \text{arctg } x$ é:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

44 Calcule:

a) $\text{arctg } 1$

b) $\text{arctg } (-1)$

c) $\text{arctg } \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{arctg } \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

45 Obtenha o valor de $\cos\left[\text{arctg } \sqrt{3}\right]$.

46 Encontre o valor de $\text{sen}\left[2 \text{ arctg } \left(-\sqrt{3}\right)\right]$.

47 Qual é o valor de $\sec\left(\text{arctg } \sqrt{5}\right)$?

48 Determine $\cos (2 \text{ arctg } 2)$.

49 Determine o conjunto imagem da função $y = 2 \text{ arctg } x$.

50 Encontre o valor de $\text{tg } [\text{arctg } 5 + \text{arctg } 2]$.

51 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\text{tg } x = 10$.

Resolva os exercícios complementares 42 a 48.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Esboce o gráfico de cada função.

a) $y = \frac{\text{sen } x}{2}$

b) $y = 4 - 2 \text{ sen } x$

c) $y = -4 \cos x$

d) $y = \frac{4 \cos x}{3}$

e) $y = -2 + 3 \cos x$

f) $y = 1 - 3 \cos x$

g) $y = -1 - 2 \cos x$

2 Esboce o gráfico de cada função.

a) $y = 2 - 3 \text{ sen } 2x$

b) $y = 2 \text{ sen} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = -2 \text{ sen} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $y = 2 + \text{sen} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

e) $y = 1 + 2 \cos 2x$

f) $y = -2 + \cos \frac{x}{2}$

g) $y = -2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

3 Determine o período das funções:

a) $y = \frac{\text{sen } x}{8}$

b) $y = -3 \cos x$

c) $y = \frac{\cos x}{3}$

d) $y = \cos \frac{x}{3}$

e) $y = -3 + 5 \cos 6x$

f) $y = -1 - 5 \text{ sen} \left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$

4 Obtenha o conjunto imagem das funções:

a) $y = -2 + 3 \text{ sen } x$

b) $y = -1 + 3 \text{ sen } 2x$

c) $y = 6 - 4 \cos \left(2x - \frac{\pi}{7}\right)$

d) $y = \pi + 2\pi \text{ sen} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

5 (Fuvest-SP) O menor valor de $\frac{1}{3 - \cos x}$, com x real, é:

a) $\frac{1}{6}$

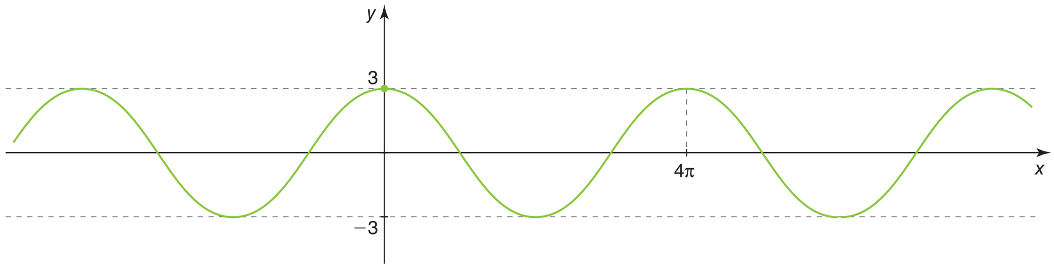
b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

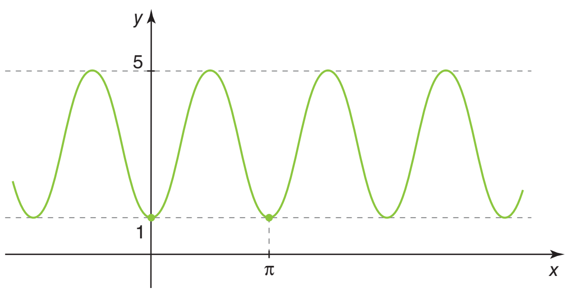
d) 1

e) 3

6 O gráfico abaixo representa a função $f(x) = b \cdot \cos mx$. Determine o valor das constantes reais b e m.



7 Determine as constantes reais a, b e m na função $f(x) = a + b \cdot \cos mx$, dado que o gráfico de f é:



8 Esboce o gráfico das funções:

a) $y = -|\cos x|$

b) $y = 2 - |\cos x|$

c) $y = 3\,|\text{sen } x|$

d) $y = 2 + \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

9 Qual é o número de raízes da equação $\cos x = x^2 - 4x$?
(*Sugestão*: Construa, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $y = \cos x$ e $y = x^2 - 4x$.)

10 Qual é o número de raízes da equação $\text{sen } x = \frac{x}{\pi}$?

11 Determine os valores reais de k para os quais existe a igualdade $\cos x = \frac{2k - 1}{3}$.

12 Determine os possíveis valores da constante p para os quais a equação na variável x, $\cos x = 2p - 1$, tenha solução.

13 Obtenha os valores reais de m para os quais a equação $\text{sen } x = 2m + 5$, na variável x, tenha solução no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

14 Esboce o gráfico das funções:

a) $y = \left|\text{tg}\,\frac{x}{3}\right|$

b) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y = 2 + \text{tg}\,x$

15 Calcule o período de cada função.

a) $y = 5 + 3\,\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $y = 4\,\text{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)$

c) $y = \frac{\text{sen}^3\,6x}{\cos 6x} - \text{sen } 6x \cdot \cos 6x$

16 Quantas raízes possui a equação $\text{tg}\,x = \frac{4x}{\pi}$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$?

17 Sendo $A = \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$, determine o conjunto imagem da função $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{3} + \text{tg}\,4x$.

18 Obtenha o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções:

a) $y = 5\,\text{cotg}\,\frac{3x}{2}$

b) $y = \text{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

19 Esboce o gráfico de:

a) $y = \left|\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$

b) $y = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = -\text{cotg}\,2x$

20 Esboce o gráfico da função $y = \text{tg}\,x \cdot \text{cotg}\,x$ para $x \in [0, 2\pi]$.

21 Quantas raízes possui a equação $\text{cotg}\,x = 2 - x^2$ no universo $U = [0, \pi]$?

22 Determine o domínio e o conjunto imagem de cada função:

a) $y = 5\,\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = -2 + \text{cossec}\,2x$

23 Para que valores reais de m existe a igualdade $\text{cossec}\,x = m^2 - 1$?

24 Determine o número de raízes da equação $\frac{2x}{\pi} = \text{cossec}\,x$ no intervalo $[0, \pi]$.

25 Obtenha o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $y = 1 + \sec x$

b) $y = 4\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

c) $y = 3 + 2\sec 3x$

26 Esboce o gráfico de:

a) $y = -2 + \sec x$

b) $y = -\sec x$

c) $y = |1 + \sec x|$

27 Quantas raízes possui a equação $\sec x = \frac{2x}{\pi} + 1$ no intervalo $[0, 2\pi]$?

28 Calcule $\text{sen}\left(2\,\text{arcsen}\,\frac{3}{4}\right)$.

29 Resolva a expressão:

$\cos(\text{arcsen } 0) + \text{tg}\left(\text{arcsen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \text{sen}\left(\text{arcsen}\,\frac{2}{7}\right)$

30 Obtenha o domínio da função:

$y = \text{arcsen}\left(\frac{3x}{2} + 5\right)$

31 Encontre o valor de:

$\text{sen}\left[\text{arcsen}\,\frac{1}{3} + \text{arcsen}\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$

32 Considerando o universo $\mathbb{R}$, dê o conjunto solução da equação $6\,\text{sen}^2\,x - 7\,\text{sen}\,x + 1 = 0$.

33 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\frac{\pi}{2} = \text{arcsen}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

34 Qual é o número de raízes da equação $\frac{\pi x}{2} = \text{arcsen}\,x$?

35 Determine $\text{cotg}\left(2\,\text{arccos}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

36 Calcule $\cos\left(2\,\text{arccos}\,\frac{5}{6}\right)$.

37 Resolva a expressão:

$$\text{sen}\,(\text{arccos}\ 0) + \text{cotg}\left(\text{arccos}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos\left(\text{arccos}\ \frac{5}{9}\right)$$

38 Obtenha o domínio da função $y = \text{arccos}\left(\frac{x}{4} + 2\right)$.

39 Obtenha, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $5\ \text{sen}^2\ x - 3 \cos x - 3 = 0$.

40 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\frac{\pi}{4} = \text{arccos}\ x$

b) $\frac{\pi}{3} = \text{arccos}\ (2x - 1)$

41 Qual é o número de raízes da equação $-2x^2 + 2 = \text{arccos}\ x$?

42 Calcule tg (2 arctg 6).

43 Resolva a expressão:

$$\text{cossec}\left(\text{arctg}\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \sec\,(\text{arctg}\ 0) + \text{tg}\,(\text{arctg}\ 9)$$

44 Obtenha o conjunto imagem da função: $y = 4\ \text{arctg}\ 3x$

45 Qual é o valor da expressão

$$\cos\left(\text{arctg}\ \frac{3}{4} + \text{arctg}\ 0\right)?$$

46 Considerando o universo $\mathbb{R}$, dê o conjunto solução da equação $\text{tg}^2\ x - 3\ \text{tg}\ x + 2 = 0$.

47 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

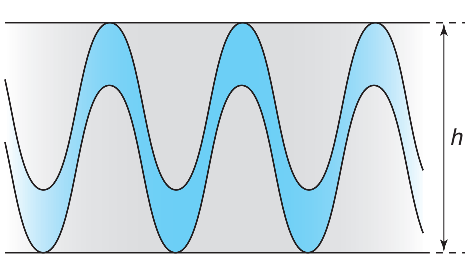
a) $\frac{\pi}{4} = \text{arctg}\ x$

b) $\frac{2\pi}{3} = \text{arctg}\ 2x$

48 Qual é o número de raízes da equação $x^2 - \frac{\pi}{2} = \text{arctg}\ x$?

Exercícios contextualizados

49 No plano cartesiano xOy, em que a unidade adotada nos eixos Ox e Oy é o metro, um arquiteto projetou uma calçada a ser construída na orla reta de uma praia. No piso, serão desenhadas ondas representadas entre os gráficos das funções $f(x) = 4\ \text{sen}\ x$ e $g(x) = 3 + 4\ \text{sen}\ x$, sendo que o gráfico de f tangenciará uma margem da calçada e o de g tangenciará a outra margem, conforme mostra a figura. Calcule a largura h da calçada, em metro.



50 (FGV) Suponha que a temperatura (em °F) de uma cidade localizada em um país de latitude elevada do hemisfério norte, em um ano bissexto, seja modelada pela equação

$$T = 50 \cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi}{366}(d - 91{,}5)\right] + 25$$

na qual d é dado em dias e $d = 0$ corresponde a 1º de janeiro.

a) Esboce o gráfico de T *versus* d para $0 \leqslant d \leqslant 366$.

b) Use o modelo para prever qual será o dia mais quente do ano.

c) Baseado no modelo, determine em quais dias a temperatura será 0 °F.

51 (UFPB) Um objeto desloca-se de tal modo que sua posição x em função do tempo t é dada pela função

$x(t) = 4 \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$, em que t é dado em segundo e x, em metro. Acerca desse movimento são feitas as seguintes afirmações:

(I) No instante $t = 0$, o objeto ocupa a posição $x = 4$ m.

(II) O valor máximo que a posição x pode assumir é 5 m.

(III) O valor mínimo que a posição x pode assumir é -4 m.

(IV) O móvel passa pela posição $x = 4$ nos tempos $t = n\pi - \frac{\pi}{4}$, com $n = 1, 2, 3$.

Estão corretas:

a) I e III

b) II e IV

c) I e II

d) II e III

e) III e IV

52 (Vunesp) No hemocentro de certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. Admita que, nesse hospital, no ano de 2004, esse número, de janeiro ($t = 0$) a dezembro ($t = 11$), seja dado, aproximadamente, pela expressão:

$$S(t) = \lambda - \cos\frac{(t - 1)\pi}{6}$$

com λ uma constante positiva, $S(t)$ em milhares e t em meses, $0 \leqslant t \leqslant 11$. Determine:

a) a constante λ sabendo que, no mês de fevereiro, houve 2 mil doações de sangue;

b) em quais meses houve 3 mil doações de sangue.

53 (Vunesp) Podemos supor que um atleta, enquanto corre, balança cada um de seus braços ritmicamente (para a frente e para trás) segundo a equação

$$y = f(t) = \frac{\pi}{9}\ \text{sen}\left[\frac{8\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)\right],$$

em que y é o ângulo compreendido entre a posição do braço e o eixo vertical, com $-\frac{\pi}{9} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{9}$, e t é o tempo medido em segundo, $t \geqslant 0$. Com base nessa equação, determine quantas oscilações completas (para a frente e para trás) o atleta faz com o braço em 6 segundos.

54 Uma locomotiva se desloca com velocidade constante, e cada uma de suas rodas tem 0,5 m de raio. Um ponto P de uma das rodas toca o trilho a cada 0,36 segundo. Indicando por $t = 0$ um instante em que P toca o trilho, a altura h, em metro, em função do tempo t, em segundo, do ponto P em relação ao trilho pode ser determinada por:

a) $h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{50\pi t}{9}\right)$

b) $h(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{9\pi t}{25}\right)$

c) $h(t) = 1 - \cos\left(\frac{50\pi t}{9}\right)$

d) $h(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{50\pi t}{9}\right)$

e) $h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{9\pi t}{25}\right)$

55 (FGV) Em uma cidade frequentada por viajantes em férias, estima-se que o número de pessoas empregadas dependa da época do ano, e pode ser aproximada pela função: $N = 10 + 2\text{ sen }(2\pi x)$, em que N é o número de pessoas empregadas (em milhares) e $x = 0$ representa o início do ano 2009, $x = 1$ o início do ano 2010, e assim por diante.
O número de empregados atinge o menor valor:

a) no início do 1º trimestre de cada ano.

b) no início do 2º trimestre de cada ano.

c) no início do 3º trimestre de cada ano.

d) no início e no meio de cada ano.

e) no início do 4º trimestre de cada ano.

56 (Vunesp) Uma equipe de mergulhadores, entre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que o fenômeno era periódico e podia ser aproximado pela expressão:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4}\right),$$

em que t é o tempo (em hora) decorrido após o início da observação ($t = 0$), e $P(t)$ é a profundidade da água (em metro) no instante t.

a) Resolva a equação $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$ para $t > 0$.

b) Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.

57 (UFSCar-SP) O número de turistas de uma cidade pode ser modelado pela função $f(x) = 2{,}1 + 1{,}6\text{ sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, em que x representa o mês do ano (1 para janeiro, 2 para fevereiro, 3 para março, e assim sucessivamente) e $f(x)$ o número de turistas no mês x (em milhares).

a) Determine quais são os meses em que a cidade recebe um total de 1.300 turistas.

b) Construa o gráfico da função f, para x real, tal que $x \in [1, 12]$, e determine a diferença entre o maior e o menor número de turistas da cidade em um ano.

58 (Uerj) A temperatura média diária, T, para um determinado ano, em uma cidade próxima ao polo Norte é expressa pela função abaixo.

$$T = 50\text{ sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right] + 7$$

Nessa função, t é dado em dias, $t = 0$ corresponde ao dia 1º de janeiro e T é medida na escala Fahrenheit. A relação entre as temperaturas medidas na escala Fahrenheit (F) e as temperaturas medidas na escala Celsius (C) obedece, por sua vez, à seguinte equação:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Em relação a esse determinado ano, estabeleça:

a) o dia no qual a temperatura será a menor possível;

b) o número total de dias em que se esperam temperaturas abaixo de 0 °C.

59 (Uenf-RJ) Uma população P de animais varia, aproximadamente, segundo a equação abaixo:

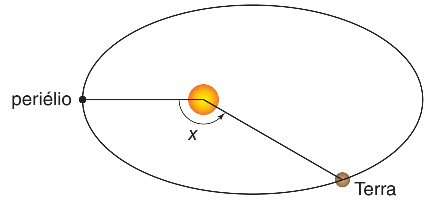
$$P = 800 - 100\text{ sen }\frac{(t + 3)\pi}{6}$$

Considere que t é o tempo medido em meses e que 1º de janeiro corresponde a $t = 0$.
Determine, no período de 1º de janeiro a 1º de dezembro de um mesmo ano, os meses nos quais a população de animais atinge:

a) um total de 750;

b) seu número mínimo.

60 O esquema a seguir representa a órbita elíptica da Terra em torno do Sol, com destaque para o **periélio**, que é o ponto dessa órbita mais próximo do Sol. O ângulo assinalado mede x radianos, com $x \in [0, 2\pi[$, tem um lado que passa pelo periélio e outro que passa pela Terra.



A distância, em milhões de quilômetros, da Terra ao Sol é $d = 149{,}6 - 2{,}5\cos x$, aproximadamente, em que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - \frac{\pi}{183} \cdot \text{sen } x$, sendo:

- t o tempo, em dia, que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até o instante em que o ângulo periélio-Sol-Terra assume a medida x;
- T o tempo que a Terra demora para descrever uma órbita completa (365,24 dias).

a) Determine a distância da Terra ao Sol quando ela se encontra no periélio.

b) Calcule a distância da Terra ao Sol quando $t = T\left(\frac{1}{366} + \frac{x}{2\pi}\right)$.

61 (Vunesp) Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura h, em metro, em que se encontra seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão $h(t) = 11{,}5 + 10\text{ sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 26)\right]$, em que o tempo t é dado em segundo e a medida angular em radiano.

a) Determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar ($t = 0$).

b) Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa (período).

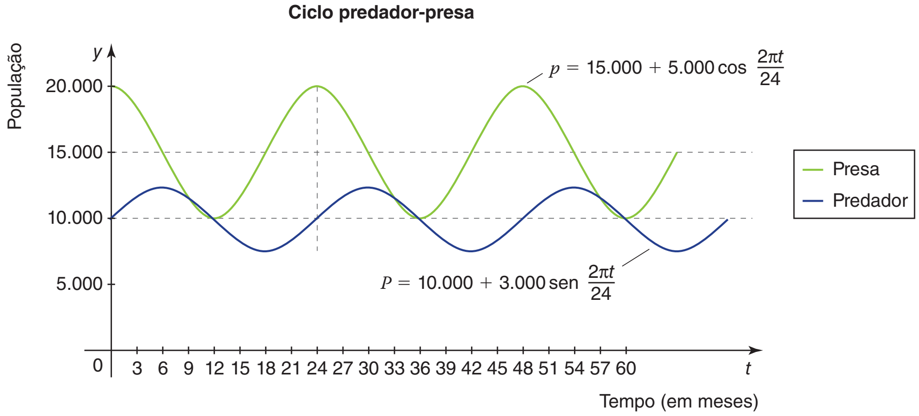
62 (UFMT) Em um determinado ciclo predador-presa, a população P de um predador no instante t (em meses) tem como modelo:

$$P = 10.000 + 3.000 \text{ sen } \frac{2\pi t}{24},$$

e a população p de sua fonte básica de alimento (sua presa) admite o modelo:

$$p = 15.000 + 5.000 \cos \frac{2\pi t}{24}$$

O gráfico a seguir apresenta ambos os modelos no mesmo sistema de eixos cartesianos.



Em relação ao ciclo predador-presa acima, assinale a afirmativa incorreta.

a) Em $t = 48$ meses, a população de predadores é igual à de presas.

b) Os modelos P e p têm o mesmo período, de 24 meses.

c) A maior população de predadores, nesse ciclo, é 13.000.

d) A média aritmética entre os valores da menor população de presas e a menor de predadores, nesse ciclo, é 8.500.

e) No início do ciclo predador-presa ($t = 0$), existem 10.000 predadores e 20.000 presas.

63 (UFPA) O pêndulo simples é formado por uma partícula de massa m fixada na extremidade inferior de uma haste retilínea, de comprimento ℓ (de massa desprezível se comparada com a massa da partícula), cuja extremidade superior está fixada. Suponhamos que o movimento do pêndulo se processe em um plano vertical e designemos por θ o ângulo que a haste faz com a reta vertical OY (veja figura abaixo). Observemos que $\theta = \theta(t)$, isto é, θ é função do tempo $t \geq 0$. O movimento do pêndulo, para pequenas oscilações, é regido pela equação:

$$\theta(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right),\ t \geq 0,$$

em que A é uma constante positiva, g é a aceleração da gravidade e ℓ é o comprimento da haste. Os valores de $t \geq 0$, referentes à passagem do pêndulo pela posição vertical OY, isto é, ao momento em que $\theta(t) = 0$, são dados por:

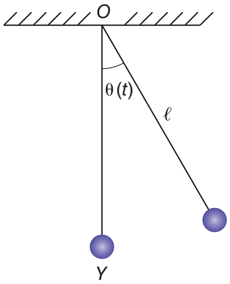
a) $t = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}},\ k = 0, 1, 2, \ldots$

b) $t = 1, 2, 3, \ldots$

c) $t = 0$ ou $t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

d) $t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

e) $t = \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$



64 (Uespi) Em virtude de a procura por certo produto ser maior em determinados meses do ano e menor em outros, seu preço, durante todo o decorrer do ano de 2009, variou segundo a equação:

$$N(t) = 120 + 80 \cos \frac{t\pi}{6},$$

em que $N(t)$ é o preço de uma unidade do produto, em real, e t é o mês do ano, $t \in \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Com base nesses dados, e considerando $\pi = 3{,}14$, analise as afirmativas abaixo:

(1) O valor máximo obtido pela venda de uma unidade do produto foi R$ 200,00.

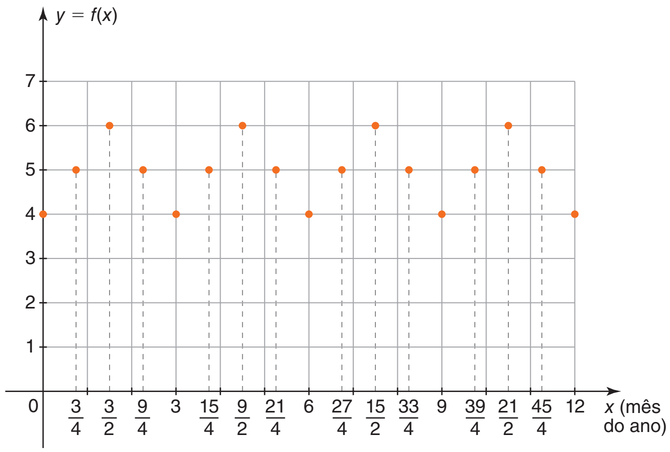
(2) O pior valor de venda da unidade do produto ocorreu no 9º mês.

(3) No 8º mês do ano, o produto foi comercializado por R$ 80,00 a unidade.

Está(ão) correta(s):

a) 1 apenas **b)** 1 e 2 apenas **c)** 1 e 3 apenas **d)** 2 e 3 apenas **e)** 1, 2 e 3

65 (FGV) O gráfico indica a relação entre y e x ao longo dos 12 meses de um ano:



a) Admita que a função $f(x) = 5 + \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ modele a relação de dependência entre y e x indicada com os pontos do gráfico. Determine, através dessa função, o valor de $f(x)$ ao final do primeiro quarto do mês de abril.

b) Determine possíveis valores dos parâmetros reais a, b e c de forma que a representação gráfica da função $g(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x)$ passe por todos os pontos indicados.

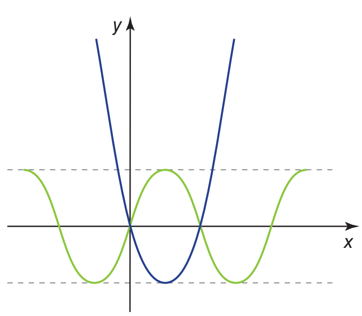
EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 (Fuvest-SP) Os vértices de um triângulo ABC, no plano cartesiano, são: $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = \left(0, \sqrt{3}\right)$. Então, o ângulo $B\hat{A}C$ mede:

a) 60° **b)** 45° **c)** 30° **d)** 18° **e)** 15°

2 (Mackenzie-SP) Na figura, temos os esboços dos gráficos das funções f e g. Sabe-se que $g(x) = \text{sen}(\pi x)$ e que f é uma função polinomial do 2º grau.



Então $f(3)$ é igual a:

a) 22 **b)** 24 **c)** 26 **d)** 28 **e)** 30

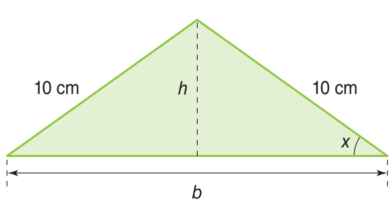
3 (Fuvest-SP) A soma das raízes da equação $\text{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0$, que estão no intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) 2π **b)** 3π **c)** 4π **d)** 6π **e)** 7π

4 Em um triângulo isósceles, os lados congruentes medem 10 cm e cada ângulo da base tem medida x, em radiano, conforme mostra a figura ao lado.

a) Determine, em função de x, a medida h da altura, a medida b da base e a área A do triângulo.

b) Determine x de modo que A, em centímetro quadrado, seja igual a 50 sen x.



ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

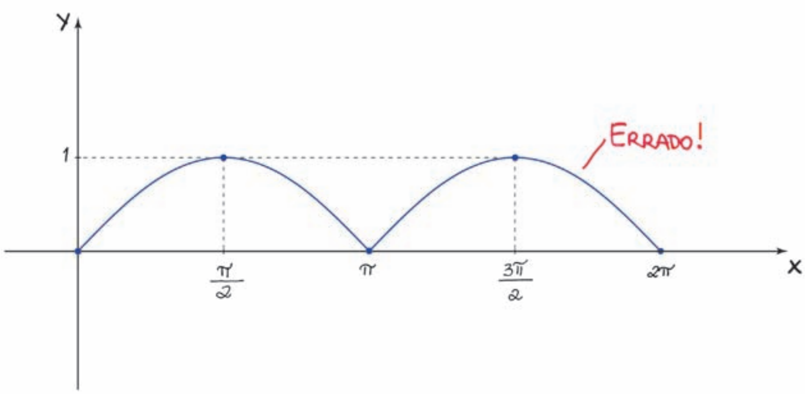
Construa o gráfico da função $y = \text{sen}^2\, x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Resolução

Alguns pontos do gráfico são:

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	0

Marcando esses pontos no plano cartesiano e esboçando o gráfico:



Comentário

Embora o gráfico apresentado passe pelos pontos obtidos na tabela, seu traçado está incorreto. Para obter o traçado correto, o aluno poderia ter recorrido à fórmula de arco duplo $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x$, pela qual se pode obter o $\text{sen}^2\, x$ em função do $\cos 2x$.

Refaça a resolução, corrigindo-a.

RESPOSTAS

CAPÍTULO 1 Sequências

Para pensar

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Exercícios propostos

1 $a_1 = 5$; $a_2 = -4$; $a_3 = 8$; $a_4 = \sqrt{3}$; $a_5 = 6$; $a_6 = 6$; $a_7 = 6$

2 a) (7, 9, 11, 13, ...) d) (4, 9, 14, 19, ...)
b) (2, 6, 12, 20, ...) e) (3, 7, 4, −3, ...)
c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right)$

3 a) 110 c) 10
b) 2 d) $2n$

4 a) 7
DICA: Ao dividir 23 por 4, o quociente é o número de livros novos a que o cliente tem direito, e o resto da divisão é o número de livros já lidos que permanecem com o cliente.
b) (126, 31, 8, 2, 1)

5 a) 225 c) 84
b) n^2 d) $4n + 4$

6 a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144
b) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$

7 a

8 a) É PA. e) Não é PA.
b) Não é PA. f) É PA.
c) É PA. g) Não é PA.
d) É PA.

9 a) 2 d) zero
b) −3 e) $2 - \sqrt{3}$
c) $-\frac{3}{4}$

10 2 **11** c

12 É PA.
DICA: Basta verificar se é constante ou não a diferença:
$a_{n+1} - a_n = 3(n + 1) + 5 - (3n + 5)$

13 a) crescente d) decrescente
b) crescente e) constante
c) decrescente f) crescente

14 a) decrescente c) crescente
b) constante

15 4

16 $a_n = a_1 + (n - 1)r$

17 (−1, 2, 5)

18 (−8, −2, 4, 10)

19 d **20** R$ 930,00

21 431 **22** $22k - 19$

23 $a_n = 6n - 4$ **24** −2

25 $39k - 38$

26 $\left(\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, ...\right)$

27 25 termos **28** 16 termos

29 $\frac{1}{2}$

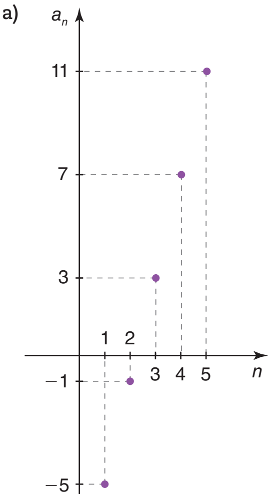
30 $\left(2, \frac{22}{7}, \frac{30}{7}, \frac{38}{7}, \frac{46}{7}, \frac{54}{7}, \frac{62}{7}, 10\right)$

31 $\frac{5}{3}$ **32** 66 **33** $\frac{1}{4}$

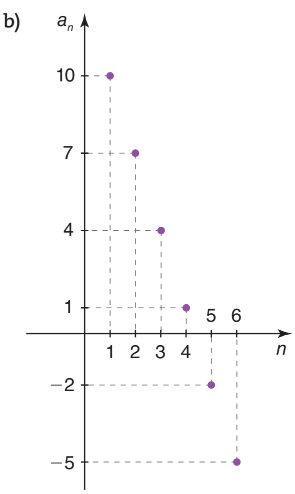
34 c **35** 0,05 km = 50 m

36 c
DICA: O número de emissoras é o número de termos da PA em que $a_1 = 87{,}9$, $a_n = 107{,}9$ e $r = 0{,}2$.

37 a)



b)



38 a **39** $r = 2$ e $a_{40} = 85$

40 18 **41** c **42** 10

43 3 **44** 9.027

45 1.290 **46** 594

47 39.900

48 a) 2.550 b) 2.420

49 a) $5n - 3$ b) $\frac{5n^2 - n}{2}$

50 n^2 **51** 11 **52** c

53 a) 126 ha b) 1.760 ha
DICA: O total de hectares desmatados é calculado pela soma dos 20 primeiros termos da PA sugerida no enunciado.

54 560

55 a) É PG. e) Não é PG.
b) Não é PG. f) É PG.
c) É PG. g) É PG.
d) É PG.

56 a) 2 c) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) −3 d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

57 $\frac{1}{3}$ **58** 2 **59** e

60 $\frac{13}{3}$

61 É PG.
DICA: Basta verificar se é constante ou não a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{5 \cdot 2^n}$.

62 a) crescente f) constante
b) crescente g) quase nula
c) decrescente h) crescente
d) oscilante i) constante
e) constante

63 b

64 (2, 4, 8)

65 $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$

66 c

67 $\frac{3}{16}$

68 c

69 $3 \cdot 2^{n-1}$

70 $\frac{5}{9}$

71 $\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, ...\right)$

72 16

73 3

74 $\left(1, \sqrt[5]{7}, \sqrt[5]{7^2}, \sqrt[5]{7^3}, \sqrt[5]{7^4}, 7\right)$

75 $-\frac{1}{3}$
DICA: Para resolver o sistema, divida membro a membro suas equações.

76 40

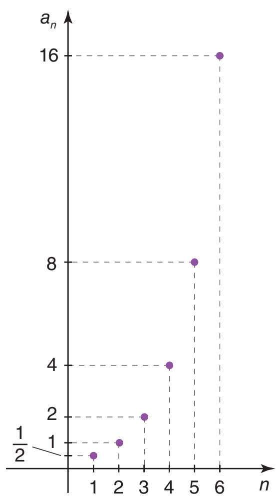
77 $\sqrt[3]{2}$ ou $-\sqrt[3]{2}$

78 e

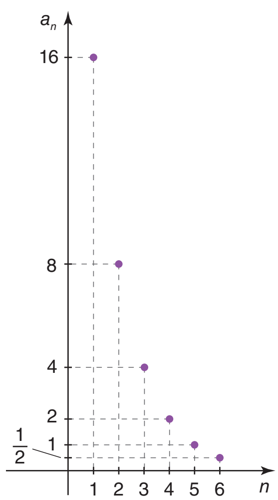
79 c
DICA: Considere 4 horas como 12 períodos de 20 minutos.

80 5 milhões
DICA: Os números de pessoas das gerações 1, 2, 3,... formam uma PG de razão 10.

81 a)



b)



82 e

83 $q = \frac{4}{3}$ e $a_{30} = \left(\frac{4}{3}\right)^{30}$

84 $\sqrt[9]{\frac{4}{3}}$

85 12 ou -12

86 $x = 0$ ou $x = -2$

87 4

88 $a = 2$ e $c = 6$

89 1

90 R$ 121.000,00

91 c

92 1.023

93 $\frac{2.047}{512}$

94 a) zero b) 1

95 3

96 $\frac{1 - k^{30}}{1 - k}$

97 c

98 12

99 a

100 a) 10ª semana b) 20.460

101 512

102 7^{14}

103 $\left(1, \sqrt[7]{3}, \sqrt[7]{3^2}, \sqrt[7]{3^3}, \sqrt[7]{3^4}, \sqrt[7]{3^5}, \sqrt[7]{3^6}, 3\right)$

104 a) $\frac{189}{2}$ b) $\frac{80}{3}$ c) $\frac{4}{9}$

105 $\frac{9}{5}$

106 a) $\frac{47}{9}$ b) $\frac{68}{15}$

DICA: O número 4,5333... pode ser representado como 4,5 + 0,03333...

107 5

108 Não, pois a distância percorrida pelo caminhão após a freada é de aproximadamente 26,66 m, que é menor do que 100 m, distância inicial entre a pedra e o caminhão.

109 40 cm

110 demonstração

111 20 km

DICA: Quando o barco da polícia percorrer uma distância d, o barco dos criminosos percorrerá a distância $\frac{d}{2}$.

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 b

DICA: A cada quatro digitações T, V, T, V, o número 2 volta ao visor.

2 c

DICA: Indicando por A a área da figura 1, as áreas das demais figuras serão $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}, \dots$

3 3

4 a) 13 b) $\frac{360° + \alpha}{\alpha}$

DICA: Uma circunferência tem 360°.

5 11

DICA: Represente alguns termos da sequência até perceber uma repetição.

6 a

7 7

8 a) 9 b) -3 c) $\frac{k}{k + 1}$

9 -11

10 Não é PA.

11 É PA.

12 a) crescente c) decrescente
b) constante

13 (18, 5, -8)

14 (-1, 3, 7, 11) ou $\left(-9, \frac{1}{3}, \frac{29}{3}, \frac{57}{3}\right)$

15 b

16 a

17 20

18 80

19 a

20 $\frac{3}{19}$

21 $\left(1, \frac{25}{6}, \frac{44}{6}, \frac{63}{6}, \frac{82}{6}, \frac{101}{6}, 20\right)$

22 10

23 -6

24 $\frac{5 - k}{11}$

25 105

DICA: Para que a_k seja um múltiplo de k deve existir um número natural n tal que $a_k = nk$.

26 a

27 6

28 3

29 demonstração

30 demonstração

DICA: Basta mostrar que, para qualquer valor de x, o termo médio é diferente da média aritmética dos outros dois.

31 $\frac{365}{2}$

32 432

DICA: Inicialmente, mostre que a sequência é uma PA.

33 3.341

34 37.674

35 29.850

DICA: Observe que existem números que são múltiplos de 2 e também de 3.

36 $n = 11$

37 $S_n = n^2 - n$

DICA: Os números naturais pares são: 0, 2, 4, 6, 8, ...

38 $S_n = n^2 + n$

39 e

40 a

41 d

42 a) $b = \frac{6}{5}$; $r = \frac{12}{5}$ c) 500
b) $\frac{239}{5}$

43 a) 10 b) $n \in \mathbb{N}$ e $n > 7$

44 a

45 a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $k + 1$

46 $k^2 - k + 1$

47 a

48 Não é PG.

49 É PG.

50 a) crescente c) constante
b) crescente d) oscilante

51 $\left(12, 3, \frac{3}{4}\right)$

52 $\left(\frac{1}{2}, 2, 8, 32\right)$

53 $\frac{1}{(k + 2)^2}$

54 24

55 25

56 $\frac{1}{2}$

57 $(10, 10\sqrt[6]{2}, 10\sqrt[6]{2^2}, 10\sqrt[6]{2^3}, 10\sqrt[6]{2^4}, 10\sqrt[6]{2^5}, 20)$ e $(10, -10\sqrt[6]{2}, 10\sqrt[6]{2^2}, -10\sqrt[6]{2^3}, 10\sqrt[6]{2^4}, -10\sqrt[6]{2^5}, 20)$

DICA: Há duas interpolações possíveis quando o número de meios geométricos a serem inseridos for ímpar.

58 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

59 1

60 $\sqrt[7]{\frac{k}{3}}$

61 b

62 77

63 3

64 1

65 3

66 demonstração

67 demonstração

68 e

69 b

70 e

71 c

72 d

73 c

74 $1.533\left(2 + \sqrt{2}\right)$

75 a) $\frac{5^{41} - 5}{4}$ b) $3^{n+1} - 3$

76 11

77 65.654
DICA: Esse somatório pode ser decomposto em duas parcelas: a soma dos 15 termos de uma PA e a soma dos 15 termos de uma PG.

78 14 **79** a **80** 35

81 $P_n = 5^{\frac{n^2 + n}{2}}$

82 a) 3 c) 81
b) 3 d) 3^{12}

83 a) $\frac{5}{3}$ b) $-\frac{12}{5}$ c) $\frac{5}{4}$

84 a) $\frac{247}{33}$ b) $\frac{191}{75}$

85 c
DICA: O perímetro de um círculo de raio r é $2\pi r$.

86 $4\sqrt{2}$ **87** a **88** a

• **Exercícios contextualizados**

89 $\frac{5x + 3}{3x + 2}$

90 b
DICA: Represente a sequência dos dias da semana em que José nada, até perceber uma repetição.

91 a) (48, 58, 68, 78, ..., 2.848)
b) $a_n = 38 + 10n$

92 a) (10.000, 10.200, 10.404, ..., $10.000 \cdot (1{,}02)^{20}$)
b) $a_n = 10.000 \cdot (1{,}02)^{n-1}$

93 a) $\left(\frac{t+1}{2}, \frac{t+1}{4}, \frac{t+1}{8}, \frac{t+1}{16}\right)$
b) 15 horas

94 a) o jogador B b) 40

95 b **96** c **97** a

98 d **99** a **100** b

101 b **102** e

103 a) $(5n^2 + 5n)$ metros
b) $10n$ m/s

104 a) $F_{10} = 76$ e $F_n = F_1 + (n - 1)r$
b) 10.000

105 a **106** b

107 a) 20 b) 55.000

108 a) F
DICA: Observe que os números de fichas distribuídas nos dias (1, 2, 3, ..., n) formam a PA (6, 15, 24, ..., a_n).
b) V
c) V
d) F
e) V

109 b **110** b

111 e
DICA: Multiplicando-se por 4 o número de lados de cada polígono, obtém-se o número de lados do polígono seguinte.

112 b
DICA: Multiplicando-se por $\frac{8}{9}$ a área de uma face, obtém-se a área de uma face da peça seguinte.

113 a) 405 b) 31

114 $1.023x$ **115** b

116 c **117** b

118 c **119** d

120 Não é verdadeira

Exercícios de revisão cumulativa

1 a

2 6.581π m²

3 a

Análise da resolução

S = {1}

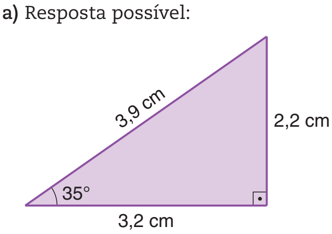
CAPÍTULO 2 Trigonometria no triângulo retângulo

Para pensar

Podemos construir um triângulo semelhante ao triângulo retângulo formado na situação, medir seus lados e obter AB por uma proporção.

Exercícios propostos

1 a) Resposta possível:



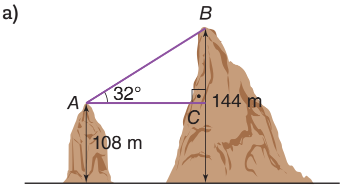
b) Valores aproximados:

	35°	55°
sen	0,56	0,82
cos	0,82	0,56
tg	0,69	1,45

2 a) 3,52 cm
b) 2,3 cm
c) 5,3 dm

3 38,4 m

4 a)



b) ≈ 69,23 m

5 ≈ 38,3 cm

6

	10°	80°
sen	0,17	0,98
cos	0,98	0,17
tg	0,17	5,76

7 14,22 cm **8** $\frac{8}{5}$

9 $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{12}{5}$

10 $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

11 a) $\text{tg}\,\alpha = \frac{8}{15}$ b) 6 m

12 $\frac{1}{16}$ **13** $\frac{1}{6}$ **14** 324 m

15 $50(\sqrt{3} + 1)$ m ou ≈ 137 m

16 c

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 a) sen 35° ≈ 0,57; cos 35° ≈ 0,82; tg 35° ≈ 0,70
b) sen 44° ≈ 0,69; cos 44° ≈ 0,72; tg 44° ≈ 0,96

2 a) 4 b) 6 c) $\frac{44\sqrt{2}}{3}$

3 ≈ 15,19 cm
DICA: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

4 $\frac{7}{9}$

5 demonstração
DICA: Divida a primeira igualdade, membro a membro, por cos α.

6 $\frac{16}{9}$

7 $x = 0{,}31$; $y = 0{,}95$
DICA: Se dois ângulos de medidas α e β são complementares, então sen α = cos β e sen β = cos α.

8 4,5 cm

9 $\text{sen}\,\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{tg}\,\theta = 2\sqrt{2}$

10 $\cos\alpha = 0{,}8$; $\text{tg}\,\alpha = 0{,}75$

11 $\text{sen}\,\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$

12 $20\sqrt{6}$ cm

• **Exercícios contextualizados**

13 a) $\approx 4{,}6$ m
b) 3,56 m na horizontal e 1,72 na vertical.

14 $R = \dfrac{h \operatorname{sen} \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}$

15 21 m

16 a
DICA: Sendo Δs a distância percorrida pelo ciclista em um tempo Δt, a velocidade constante v é dada por $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

17 c
DICA: Aplique o conceito de semelhança de triângulos.

18 $\dfrac{700}{77}$ m ou $\approx 9{,}09$ m

19 d
DICAS:
- A soma S das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por $S = 180°(n - 2)$, em que n é o número de lados (ou de vértices) do polígono.
- Um polígono convexo regular possui os lados congruentes entre si e os ângulos internos congruentes entre si.

20 $\approx 1{,}70$ m
DICA: A medida a_i de cada ângulo interno de um polígono regular de n lados (n vértices) é dada por:
$a_i = \dfrac{(n-2)180°}{n}$.

21 1,786 m **22** $\approx 561{,}7$ m

23 $\approx 82{,}3$ m **24** $\approx 4{,}95$ m

25 2 m **26** e

27 d

28 $50\sqrt{3}$ m ou $\approx 86{,}6$ m

29 60 m

30 b

31 36 degraus
DICA: A medida da hipotenusa do triângulo representado pode ser calculada a partir da velocidade e do tempo.

Exercícios de revisão cumulativa

1 20 mm **2** 5

3 a) $\approx$ R\$ 1.114,95 b) $\approx$ R\$ 114,95

4 a) 17 b) $f(x) = 3x - 13$

Análise da resolução

c

CAPÍTULO 3 A circunferência trigonométrica: seno, cosseno e tangente

Para pensar

1 $\approx 25{,}7°$ **2** ≈ 424 m

3 ≈ 14 m/min

Exercícios propostos

1 4 rad **2** b **3** a

4 a) $\dfrac{\pi}{6}$ rad d) $\dfrac{5\pi}{3}$ rad
b) $\dfrac{2\pi}{3}$ rad e) $\dfrac{4\pi}{3}$ rad
c) $\dfrac{5\pi}{4}$ rad f) $\dfrac{11\pi}{6}$ rad

5 a) 45° d) 72°
b) 270° e) 300°
c) 210°

6 d

7 a) 50°, 410° e 770°
b) $-310°$ e $-670°$

8 a) $\dfrac{6\pi}{7}$ rad, $\dfrac{20\pi}{7}$ rad e $\dfrac{34\pi}{7}$ rad
b) $-\dfrac{8\pi}{7}$ rad e $-\dfrac{22\pi}{7}$ rad

9 a) 43° f) $\dfrac{8\pi}{5}$ rad
b) 172° g) $\dfrac{25\pi}{13}$ rad
c) 320°
d) 320° h) $\dfrac{2\pi}{5}$ rad
e) $\dfrac{\pi}{11}$ rad

10 a) 240° c) 960°
b) 600° d) $-120°$

11 a) $\dfrac{\pi}{6}$ c) $\dfrac{25\pi}{6}$
b) $\dfrac{13\pi}{6}$ d) $-\dfrac{11\pi}{6}$

12 a

13 a) $x = \pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \dfrac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

14 a) $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$
b) resposta possível: $x = \dfrac{5\pi}{3} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

15 a) 72.010° c) 0 h 20 min
b) $\dfrac{14.402}{3}\pi$ rad

16 a) N(158°), P(202°) e Q(338°)
b) $N\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$, $P\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$ e $Q\left(\dfrac{13\pi}{7}\right)$

17 a) M(60°), N(120°), P(240°) e Q(300°)
b) M(30°), N(150°), P(210°) e Q(330°)
c) M(50°), N(130°), P(230°) e Q(310°)
d) $M\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, $N\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$, $P\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$ e $Q\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)$
e) $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $N\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $P\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ e $Q\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$
f) $M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $N\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $P\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ e $Q\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$

18 32°, 212° e 328°, respectivamente

19 a) 1 i) 1 q) 1
b) 0 j) 0 r) -1
c) 0 k) 1 s) 1
d) 1 l) 1 t) -1
e) -1 m) -1 u) 0
f) 0 n) 0 v) -1
g) 0 o) 1
h) -1 p) -1

20 -2

21 a) 2 b) -1 c) -1

22 1

23 O valor máximo de f é 1 e o mínimo é -1.

24 d

25 b
DICA: Se um ângulo entre duas retas r e s mede α, e um segmento de reta de medida d está contido em s, então a medida da projeção ortogonal desse segmento sobre r é dada pelo produto $d \cdot \cos \alpha$.

26 d

27 a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $-\dfrac{1}{2}$ e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
c) $-\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{1}{2}$

28 a) $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ e $Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$
b) $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $Q\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
c) $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $Q\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

29 a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $-\dfrac{1}{2}$ e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
c) $-\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

g) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

i) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

30 a) $-\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $-\frac{1}{2}$

h) $-\frac{1}{2}$

i) $\frac{1}{2}$

j) $\frac{1}{2}$

k) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

l) $\frac{1}{2}$

m) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

31 -1

32 a) $\frac{5}{13}$ c) $-\frac{12}{13}$ e) $\frac{12}{13}$

b) $\frac{12}{13}$ d) $-\frac{5}{13}$

33 $\frac{48}{7}$ cm

34 5 m

35 $-\frac{4}{5}$

36 $\frac{12}{13}$

37 $\text{sen}\ \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

38 2

39 14,4 cm

DICA: A distância entre um ponto P e uma reta r é a medida do segmento $\overline{PP'}$, em que P' é a projeção ortogonal de P sobre r.

40 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

41 $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

42 a

43 2,5 m

44 a) 0 c) 0

b) Não existe. d) 0

45 a) F b) V c) V

46 $-\frac{3}{2}$

47 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$

48 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$

49 $\frac{15}{4}$ cm ou 3,75 cm

DICA: Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio dessa circunferência no ponto de tangência.

50 $\frac{10}{\pi}$ m ou $\approx$ 3,18 m

DICA: Planificando-se a superfície lateral de um cilindro, obtém-se um retângulo.

51 a) $-\sqrt{3}$ e) 1

b) -1 f) -1

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ g) $-\sqrt{3}$

d) $-\sqrt{3}$ h) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

52 1

53 a) -1 b) $\frac{1}{\cos x}$

54 a) 2,6 b) 0 c) $-2{,}6$

DICA: Em todo paralelogramo, ângulos internos consecutivos são suplementares.

55 12 cm

56 a) -1 b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}$

57 10 m

58 a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

f) $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

g) $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

h) $S = \{0\}$

i) $S = \{0, \pi\}$

j) $S = \varnothing$

k) $S = \varnothing$

l) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

m) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

n) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

o) $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

59 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

m) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

n) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

60 a) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $S = \{0, \pi\}$

c) $S = \{0, \pi, 2\pi\}$

d) $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

61 $S = \{60°, 120°, 240°, 300°, 420°, 480°, 600°, 660°\}$

62 seis raízes

63 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

64 a) $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$ c) $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$

65 d

66 30° e 60°

67 60°

68 $\frac{120}{\pi}$ m ou $\approx$ 32,8 m

69 a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

b) $S = \left\{0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

DICA: O produto de dois números reais é nulo se, e somente se, pelo menos um deles for nulo.

d) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

70 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

71 $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

72 a) $S = \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

73 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

74 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi < x < 2\pi\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$

i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$

k) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

l) $S = \varnothing$

m) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\pi\}$

n) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{4\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{5\pi}{3}\right\}$

o) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

p) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

q) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

75 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

o) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

p) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{7\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

76 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{9} \text{ ou } \frac{8\pi}{9} < x < 2x\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{7} \text{ ou } \frac{13\pi}{7} \leq x < 2x\right\}$

77 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x \leq \frac{4\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}\right\}$

78 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x \leq \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

79 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x \leq \frac{4\pi}{3}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi \leq x < \frac{5\pi}{4}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

80 $0° < \alpha < 30°$

81 $30° < x < 90°$

82 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi \leq x < 2\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{4}\right\}$

j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

83 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \pi + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercícios complementares

• Exercícios técnicos

1 90°

2 $\frac{\pi}{6}$ rad

3 e

DICA: Os vértices de um polígono regular qualquer dividem a circunferência circunscrita a ele em arcos de mesma medida.

4 a) 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° e 315°

b) 585° e 945°

c) −45° e −405°

5 a) 0 rad, $\frac{\pi}{3}$ rad, $\frac{2\pi}{3}$ rad, π rad, $\frac{4\pi}{3}$ rad e $\frac{5\pi}{3}$ rad

b) $\frac{8\pi}{3}$ rad e $\frac{14\pi}{3}$ rad

c) $-\frac{\pi}{3}$ rad e $-\frac{7\pi}{3}$ rad

6 e

7 a) $M(47°)$, $N(133°)$, $P(227°)$ e $Q(313°)$

b) $M(54°)$, $N(126°)$, $P(234°)$ e $Q(306°)$

c) $M(20°)$, $N(160°)$, $P(200°)$ e $Q(340°)$

d) $M\left(\frac{13\pi}{36}\right)$, $N\left(\frac{23\pi}{36}\right)$, $P\left(\frac{49\pi}{36}\right)$ e $Q\left(\frac{59\pi}{36}\right)$

e) $M\left(\frac{2\pi}{9}\right)$, $N\left(\frac{7\pi}{9}\right)$, $P\left(\frac{11\pi}{9}\right)$ e $Q\left(\frac{16\pi}{9}\right)$

f) $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $N\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $P\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ e $Q\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

8 d

9 zero

10 1

11 e

12 a) V b) F c) F d) V

13 $(6\sqrt{2} + 4)$ cm

14 d

15 b

16 d

17 a) −1 b) $1 - \cos\alpha$

18 c

19 2

20 $\frac{1}{2}$

DICA: Se a soma das medidas de dois arcos trigonométricos é 180°, então as extremidades desses arcos são simétricas em relação ao eixo dos senos.

21 $-\frac{1}{4}$

22 $\frac{40}{3}$ cm

23 −0,32

DICA: Para quaisquer números reais *a* e *b*, temos:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

24 $\frac{1}{4}$

25 $S = \{2 + 2\cos\alpha, 2 - 2\cos\alpha\}$

26 1

27 a) 2k b) $k^2 + k$ c) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

28 b

29 c

30 $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

31 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$; $\operatorname{sen} \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

32 $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

33 c

34 1

35 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{\alpha}{2}$ c) $\frac{1}{3}$

DICA: A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente.

36 a) $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $N\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

b) $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e $N\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

c) $M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $N\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

37 a) $-\sqrt{3}$ b) 1 c) $-\sqrt{3}$

38 e

39 a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{3}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) -1 f) $-\sqrt{3}$

40 a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) 1

b) $\sqrt{3}$ e) 1

c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\sqrt{3}$

41 a

42 c

43 a) $S = \{90°\}$ c) $S = \{30°, 150°\}$

b) $S = \{90°, 270°\}$ d) $S = \{120°, 240°\}$

44 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

45 a) $S = \{0, \pi\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

46 b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

47 $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

48 $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

49 a

50 d

DICA: A medida α de qualquer ângulo interno de um triângulo satisfaz a condição: $0° < \alpha < 180°$

51 30°

DICA: Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo.

52 4π

53 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

54 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

55 $S = \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

56 $S = \{0, \pi\}$

57 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

58 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

59 $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

60 a) $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

b) $S = \{0, \pi, 2\pi\}$

c) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

d) $S = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, 2\pi\right\}$

e) $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$

f) $S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$

61 a

62 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

63 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

64 $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$

65 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

66 a) $S = \{0\}$ c) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

67 três raízes

68 $\frac{4\pi}{3}$

DICA: Em toda equação do 2º grau da forma $at^2 + bt + c = 0$, a soma das raízes é $-\frac{b}{a}$ e o produto delas é $\frac{c}{a}$.

69 d

70 $S = \{\pi\}$

71 $S = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

72 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right\}$

73 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right\}$

74 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

75 b

76 a

77 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leq x < 2\pi\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{4}\right\}$

78 b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

79 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < 2\pi\right\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3}\right\}$

80 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

81 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

82 a

83 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} \text{ ou } x = 0\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$

k) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

84 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

85 d

86 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leqslant x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{5\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

- **Exercícios contextualizados**

87 e

88 e

89 a) 1,5 rad/min b) 5 cm

90 $\frac{15\pi}{4}$ cm/s ou $\approx$ 11,78 cm/s

91 $d = 2\sqrt{3}$ km ou $\approx$ 3,46 km

92 a) $A(\theta) = \frac{15\theta}{2}$ m² b) 64°

93 $\frac{\pi}{5.400}$ rad **94** d

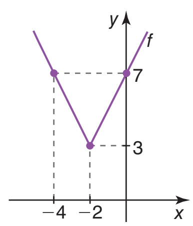
95 $\frac{16\pi}{5}$ rad **96** a

97 a) 300 c) 300 km
b) $-150\sqrt{3}$ d) 1,5 h

98 60 m **99** c **100** c

Exercícios de revisão cumulativa

1



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [3, +\infty[$

2 a) $a_n = 200.000 \cdot 1{,}05^{n-1}$

a) $S_n = \dfrac{200.000 \cdot (1 - 1{,}05^n)}{-0{,}05}$

Análise da resolução

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

CAPÍTULO 4 Outras razões trigonométricas, adição de arcos e resolução de triângulos

Para pensar

$$\frac{6.400\left(1 - \text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}$$

Exercícios propostos

1 a) 1 b) 1 c) −1

2 7 **3** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ **4** $-\frac{\sqrt{17}}{4}$

5 a) $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

b) $S = \{\pi\}$ e) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ f) $S = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

6 $S = \varnothing$ **7** a

8 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \pi < x < 2\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

9 1,3 m

10 a) É identidade em $\mathbb{R}$.
b) Não é identidade em $\mathbb{R}$.
c) É identidade em $\mathbb{R}$.
d) Não é identidade em $\mathbb{R}$.
e) É identidade em $\mathbb{R}^*$.
f) É identidade em $\mathbb{R}$.
g) Não é identidade em $\mathbb{R}$.
h) É identidade em $\mathbb{R}$.
i) É identidade em $\mathbb{R}$.
j) É identidade em $\mathbb{R}$.

11 d

12 demonstrações

13 a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ c) $2 + \sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

14 demonstração

15 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

16 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1

17 c

18 $\frac{17\sqrt{2}}{26}$

19 $\frac{6\left(4 - \sqrt{2}\right)}{7}$

DICA: Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo Ê é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a Ê.

20 d

21 $\frac{1}{2}$

DICA: A pessoa vê a base do quadro sob um ângulo de medida β com a horizontal. Calcule tg β e tg (α + β).

22 sen 2x $= -\frac{4\sqrt{2}}{9}$; cos 2x $= \frac{7}{9}$

23 $\frac{4}{5}$ **24** $\frac{7}{18}$

25 e

26 e

27 $4k^3 - 3k$

28 $3a - 4a^3$

29 b

30 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

31 a

32 $\text{sen } x = -\frac{1}{5}$; $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

33 150 cm^2

DICA: A área S do triângulo *AEH* pode ser calculada por $S = \frac{1}{2} \cdot HE \cdot AE \cdot \text{sen } 15°$.

34 b

35 0,96

36 $\frac{3\sqrt{13}}{3}$; $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

DICA: Se x é a medida de um arco trigonométrico com extremidade no 1º quadrante, então $\frac{x}{2}$ também é medida de um arco com extremidade no 1º quadrante.

37 $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

38 c

39 96 m

40 e

DICA: Sendo *O* o centro do globo terrestre e $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes à Terra em *A* e *B*, os triângulos *OPA* e *OPB* são congruentes.

41 a) 7 cm b) $5\sqrt{7}$ m

42 4 dm

43 a) $-\frac{1}{5}$ b) obtuso

DICA: O maior ângulo interno de um triângulo se opõe ao maior lado.

44 $5\sqrt{3}$ cm e $5\sqrt{7}$ cm

45 $3\sqrt{7}$ cm

46 7 km

47 14 km

48 $3\sqrt{2}$

49 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm

DICA: Em todo triângulo isósceles, são congruentes os ângulos internos opostos aos lados congruentes.

50 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm

51 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

52 45°

53 158 m

54 a) 60 cm^2 b) 20 cm^2

55 30 cm^2

56 30° ou 150°

DICA: Se dois ângulos são suplementares, eles têm o mesmo seno.

57 $3(5\pi - 3)$ cm^2

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 $\frac{13}{3}$

2 $-0{,}75$

3 $\frac{7}{13}$

4 c

5 a

6 c

7 b

8 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

9 $\frac{1}{2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha} - \frac{\pi}{4}$

10 demonstrações

11 a) $\sec x = -\sqrt{10}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\text{cossec } x = 4$; $\text{sen } x = \frac{1}{4}$

c) 1

d) demonstração

e) demonstração

12 b

13 a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

c) $\sqrt{3}$

d) $2 + \sqrt{3}$

e) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$

f) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

14

	20°	40°	45°	65°
sen	0,3	0,54	0,7	0,84
cos	0,9	0,72	0,7	0,42

15

	13°	22°	35°	57°	70°
tg	0,23	0,4	0,7	1,53	2,72

16 d

17 1

18 0

19 a

20 a) $\text{tg } \alpha = 1$; $\text{tg } \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\alpha = 45°$; $\gamma = 30°$

c) demonstração

21 $\frac{(3-\sqrt{3})\alpha}{6}$

DICA: Em um plano, se um ponto *O* equidista dos lados de um ângulo, então *O* pertence à bissetriz desse ângulo.

22 5 cm

23 e

24 b

25 a

26 a

27 $(AC)^2 + (BD)^2 = 2(a^2 + b^2)$

28 d

DICA: Dodecágono regular é um polígono de doze lados congruentes entre si, e doze ângulos internos congruentes entre si.

• **Exercícios contextualizados**

29 201 m

30 e

31 45°

32 $\frac{7}{25}$

DICA: Sendo *P* a projeção ortogonal do ponto *A* sobre a margem oposta, e α e β as medidas dos ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}P$, respectivamente, calcule sen $(\alpha + \beta)$.

33 31,5 m

34 a

35 $\frac{25}{8}$ cm ou $\approx$ 3,1 cm

36 $400\sqrt{6}$ m ou $\approx$ 980 m

37 Pela lei dos senos, tem-se

$$\frac{AB}{\text{sen } 30°} = 2R \Rightarrow AB = R$$

38 $\approx$24.900 m^2

39 e

Exercícios de revisão cumulativa

1 $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

2 c

3 $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

4 d

Análise da resolução

30° ou 150°

CAPÍTULO 5 Funções trigonométricas

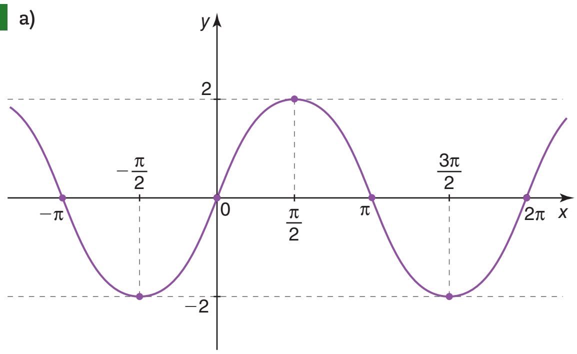
Para pensar

1 resposta pessoal

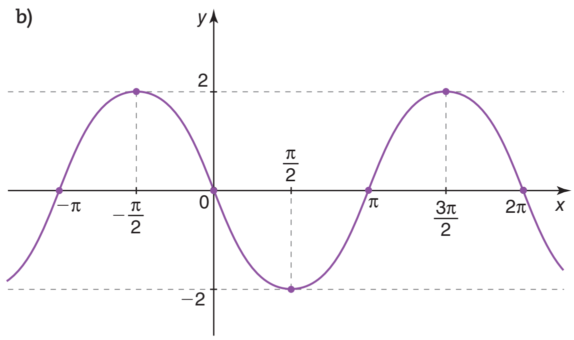
2 90 bpm

Exercícios propostos

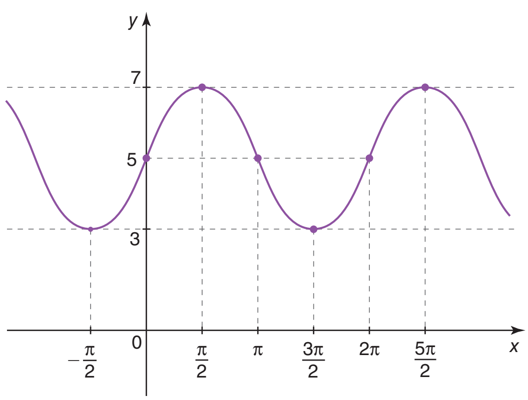
1 a)



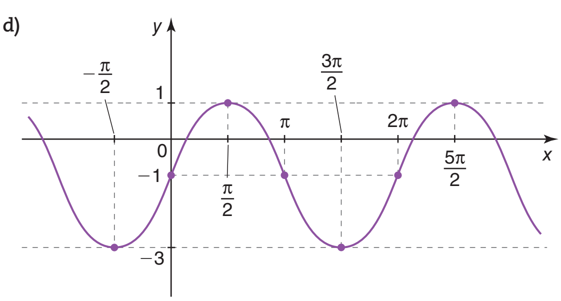
b)



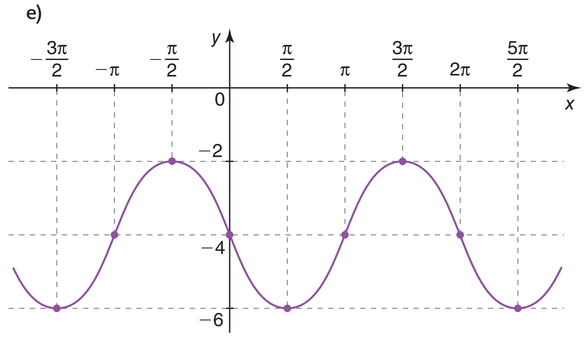
c)



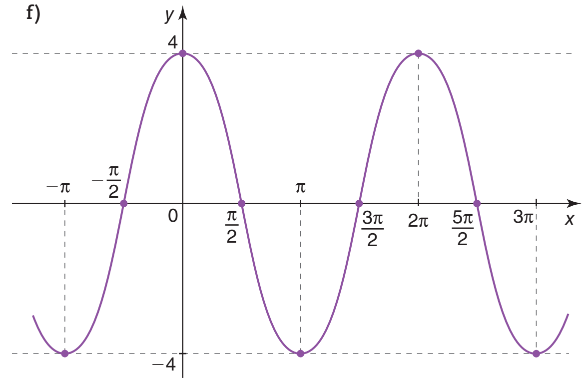
d)



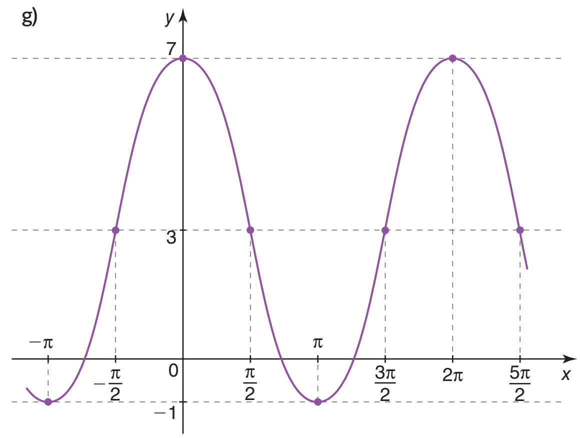
e)



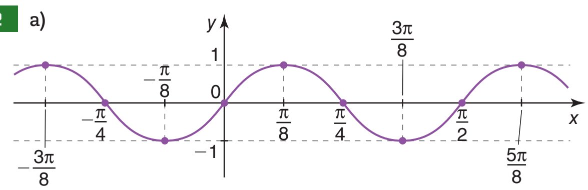
f)



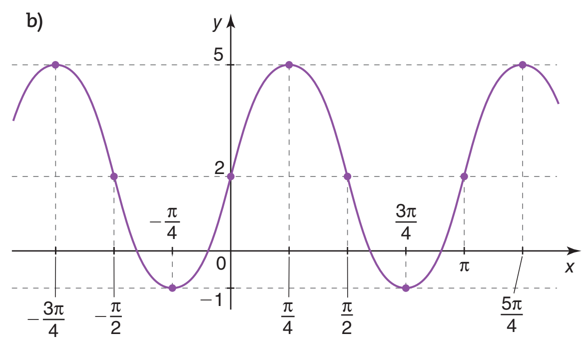
g)



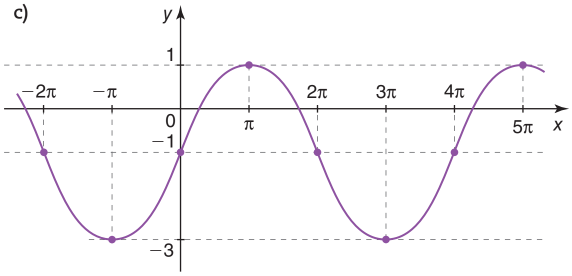
2 a)



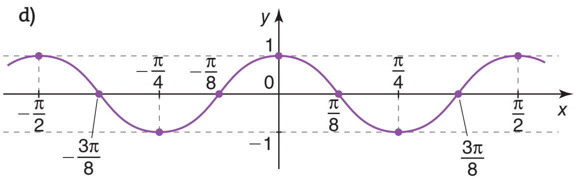
b)



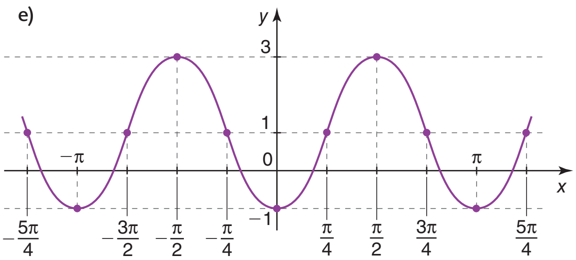
c)



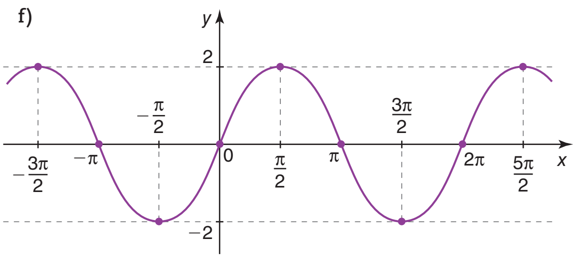
d)



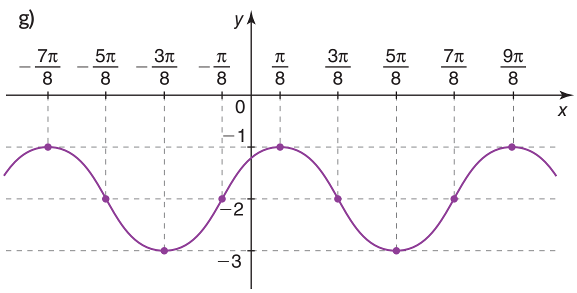
e)



f)



g)



3 a) 2π d) $\frac{2\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

c) 16π f) π

4 a) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant y \leqslant 10\}$

b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant y \leqslant 10\}$

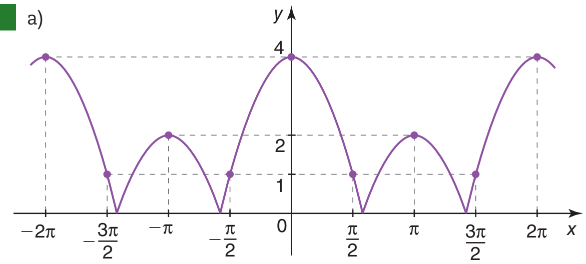
c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 5\}$

d) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -9 \leqslant y \leqslant 1\}$

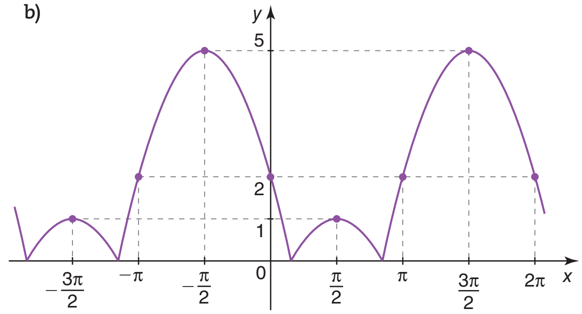
5 c

6 $a = 3$; $b = 4$

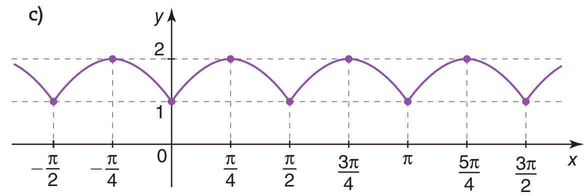
7 a)



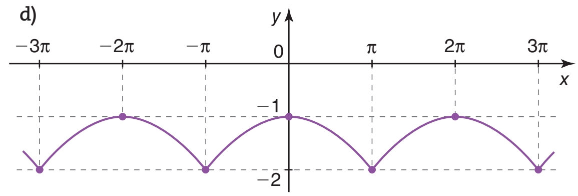
b)



c)

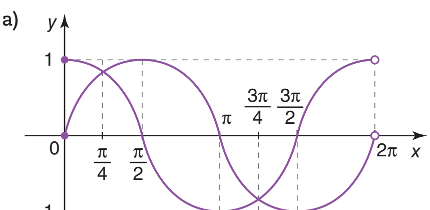


d)



8 a

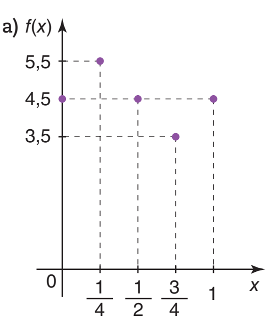
9 a)



b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

10 qualquer m real, com $1 \leqslant m \leqslant \frac{3}{2}$

11 a)



b) terça-feira; quinta-feira

c) 5,5; 3,5

12 d

13 d

14 $f(t) = 1{,}3 \text{ sen } \dfrac{\pi(t-2)}{6}$

15 $f(t) = 5 \cos \dfrac{2\pi t}{3}$; $g(t) = 5 \text{ sen } \dfrac{2\pi t}{3}$

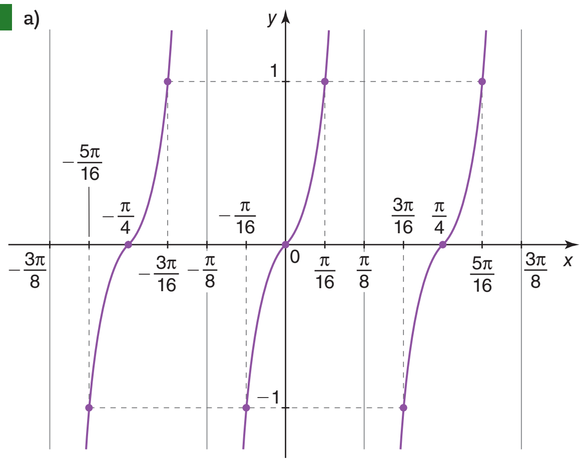
16 b

17 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$; $Im = \mathbb{R}$

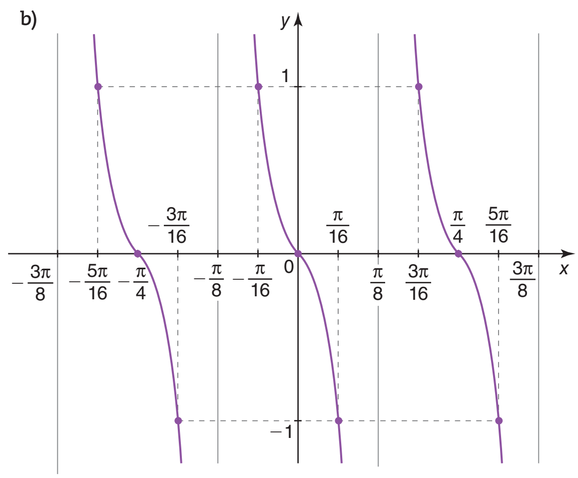
b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$; $Im = \mathbb{R}$

c) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{7\pi}{10} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$; $Im = \mathbb{R}$

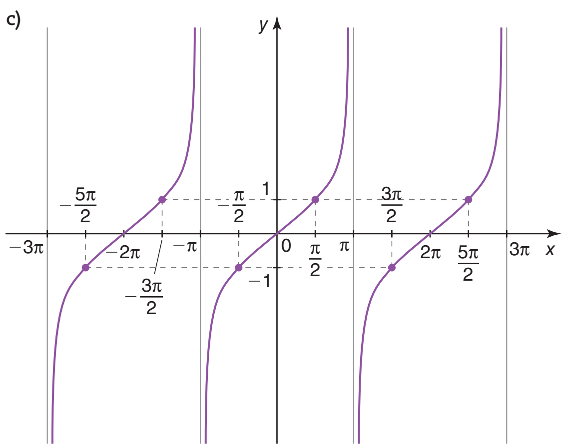
18 a)



b)



c)



19 a) $\dfrac{\pi}{6}$

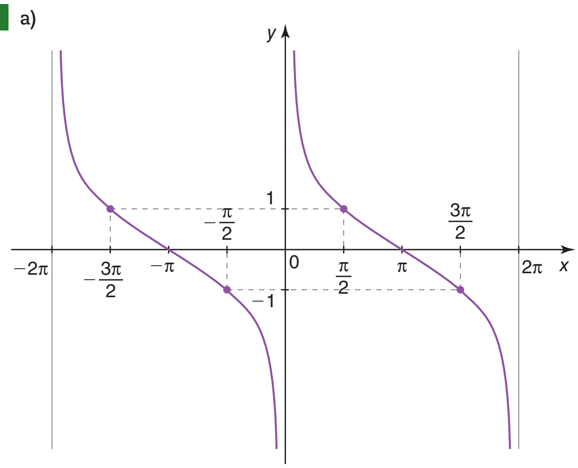
b) 6π

c) $\dfrac{\pi}{2}$

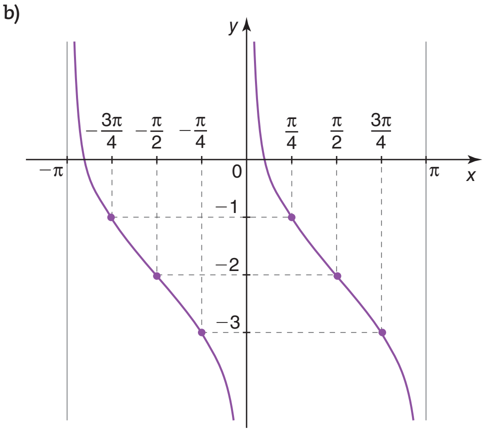
20 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$; $Im = \mathbb{R}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$; $Im = \mathbb{R}$

21 a)



b)

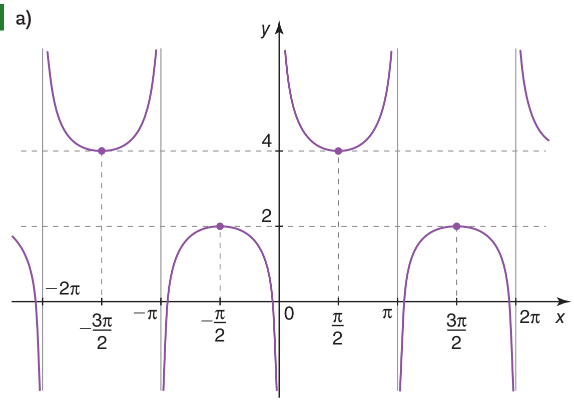


22 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$; $Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

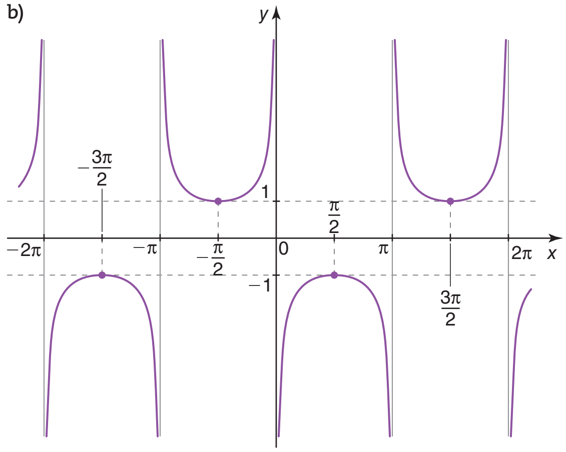
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$; $Im =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$

23 qualquer k real, com $k \leqslant 3$ ou $k \geqslant 7$

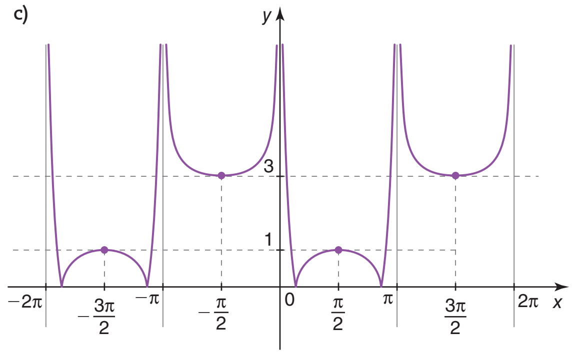
24 a)



b)



c)



25 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$;

$Im =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

26 qualquer k real, com $k \leqslant 2$ ou $k \geqslant 3$

27 a) $\frac{\pi}{6}$ b) $-\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $-\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{4}$ f) $-\frac{\pi}{4}$ g) Não existe. h) Não existe.

28 2

29 $\sqrt{3}$

30 $\frac{5}{13}$

31 $\frac{1}{9}$

32 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

DICA: Temos que $-1 \leqslant \text{sen } y \leqslant 1$ e $y = \text{arcsen } 2x \Rightarrow 2x = \text{sen } y$.

33 $-\frac{3}{5}$

34 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arcsen } \frac{2}{7} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen } \frac{2}{7} + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

35 $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

36 a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) zero d) π e) $\frac{\pi}{3}$ f) $\frac{2\pi}{3}$ g) Não existe.

37 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

38 $\frac{8}{17}$

39 $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

40 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\right\}$

41 $\frac{3}{4}$

42 $-\frac{56}{65}$

43 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arccos } \frac{2}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\text{arccos } \frac{2}{3} + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

44 a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{\pi}{6}$

45 $\frac{1}{2}$

46 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

47 $\sqrt{6}$

DICA: Para agilizar a resolução, pode-se aplicar a identidade $\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$.

48 $-\frac{3}{5}$

49 $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -\pi < y < \pi\}$

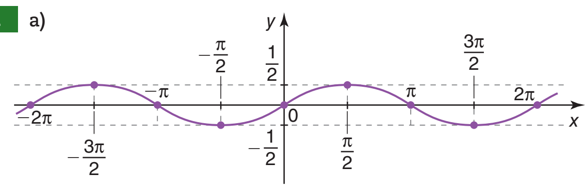
50 $-\frac{7}{9}$

51 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arctg } 10 + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$

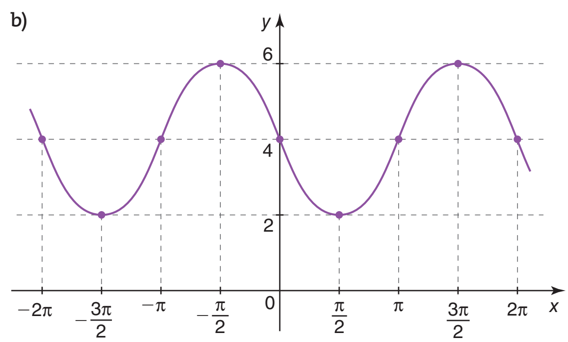
Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

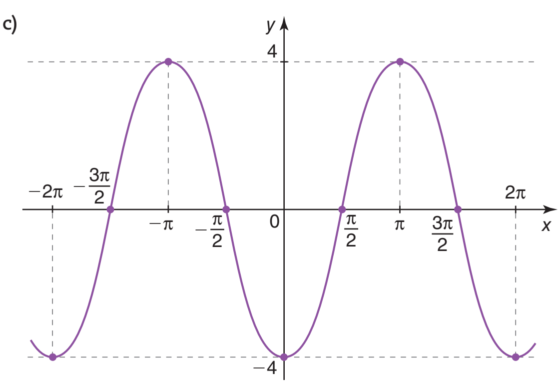
1 a)



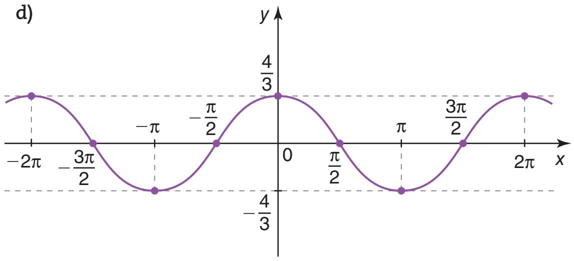
b)



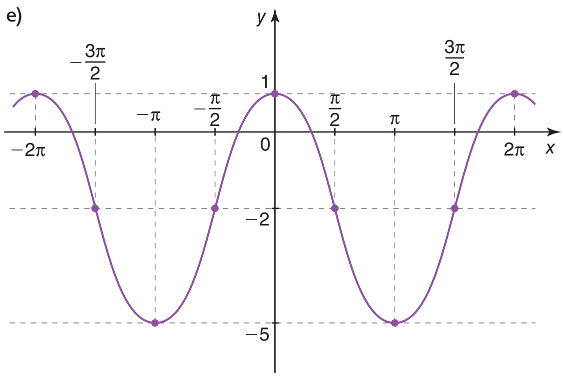
c)



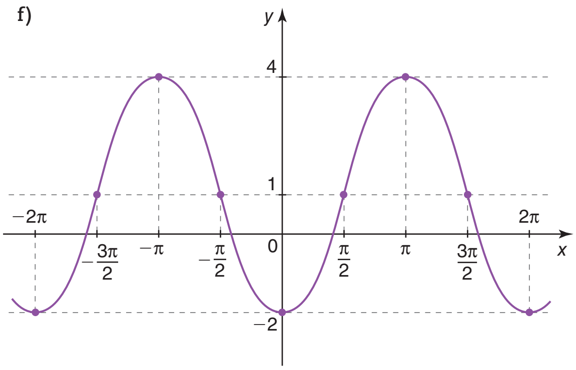
d)



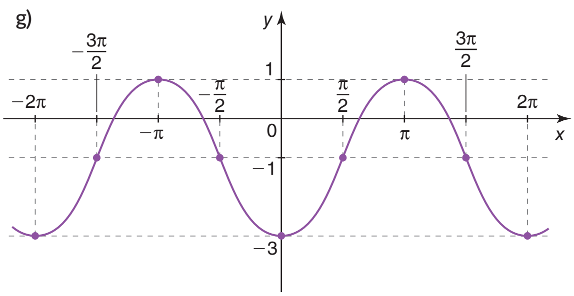
e)



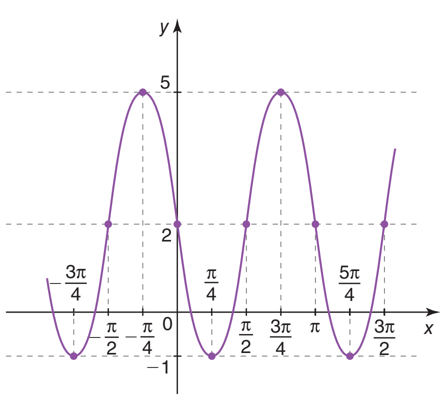
f)



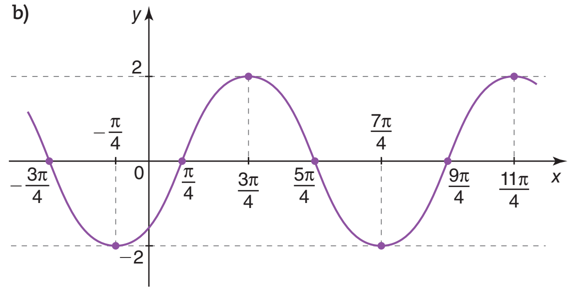
g)



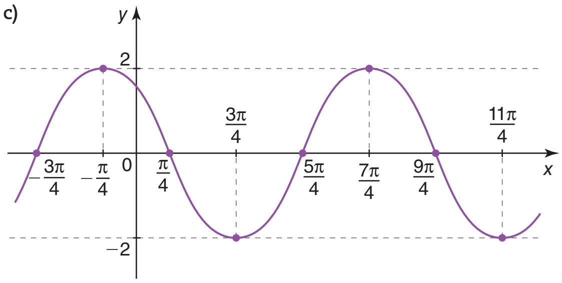
2 a)



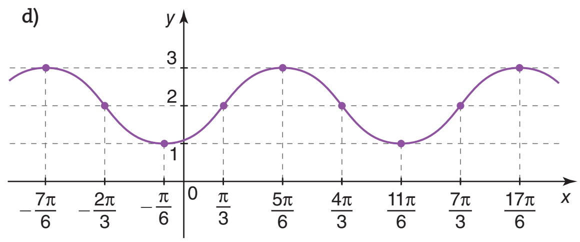
b)



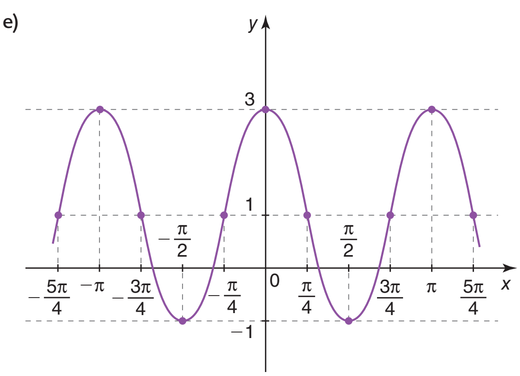
c)



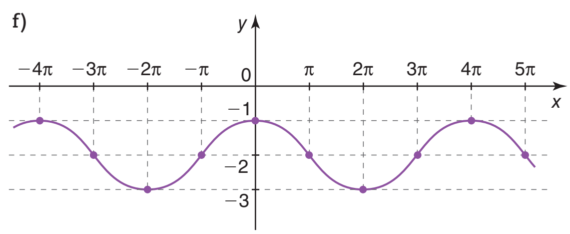
d)



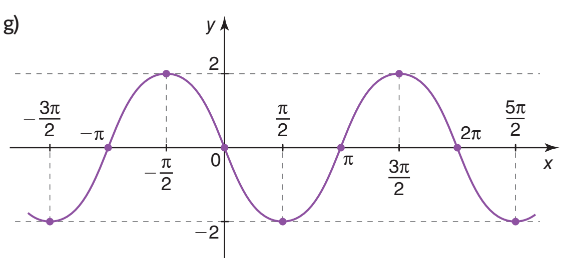
e)



f)



g)



3 a) 2π b) 2π c) 2π d) 6π e) $\frac{\pi}{3}$ f) 1

4 a) $Im = [-5, 1]$ b) $Im = [-4, 2]$ c) $Im = [2, 10]$ d) $Im = [-\pi, 3\pi]$

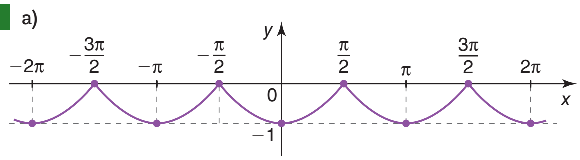
5 b

6 $m = \frac{1}{2}$ e $b = 3$ ou $m = -\frac{1}{2}$ e $b = 3$

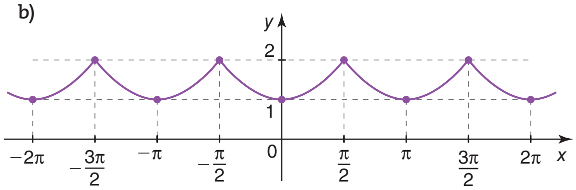
DICA: A função $f(x) = \cos x$ é par, isto é, $f(x) = f(-x)$

7 $m = 2$, $a = 3$ e $b = -2$ ou $m = -2$, $a = 3$ e $b = -2$

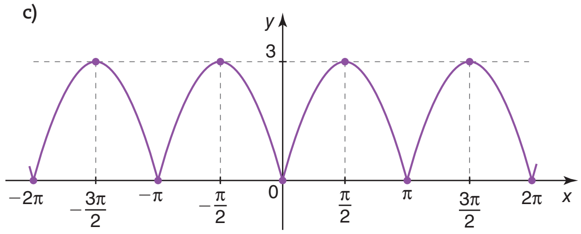
8 a)



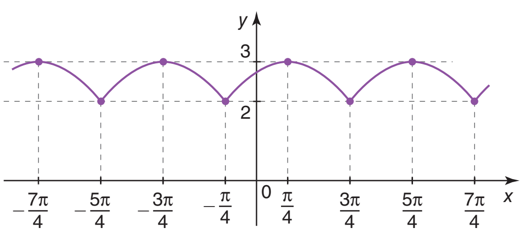
b)



c)



d)



9 exatamente duas raízes

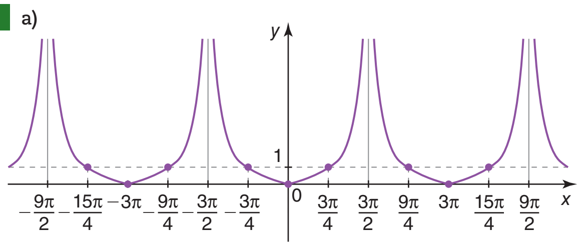
10 exatamente três raízes

11 qualquer k real, com $-1 \leqslant k \leqslant 2$

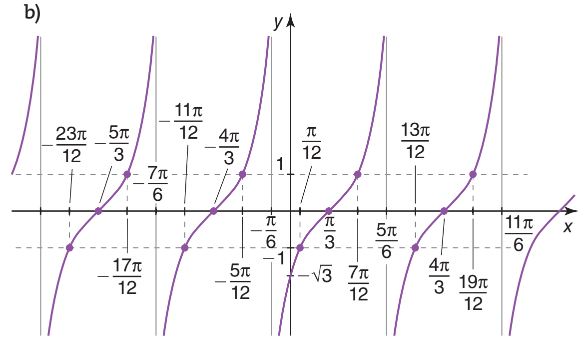
12 qualquer p real, com $0 \leqslant p \leqslant 1$

13 qualquer m real, com $-\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant -2$

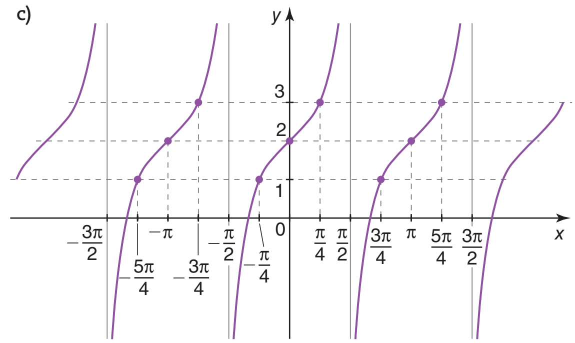
14 a)



b)



c)



15 a) π b) 2π c) $\frac{\pi}{6}$

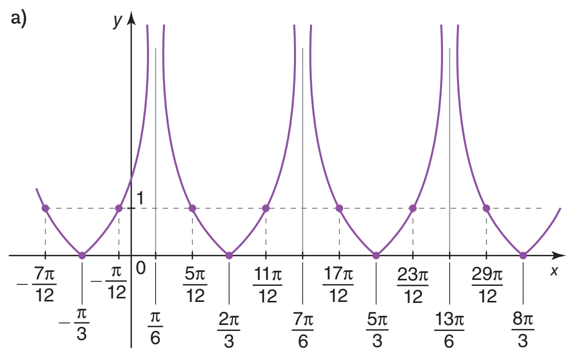
16 exatamente três raízes

17 $Im = \left[0, 2\sqrt{3}\right]$

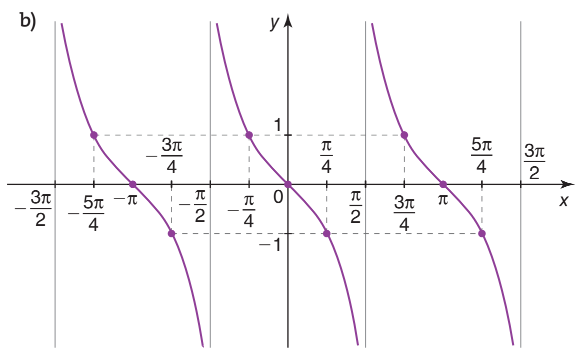
18 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{2k\pi}{3}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $Im = \mathbb{R}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $Im = \mathbb{R}$

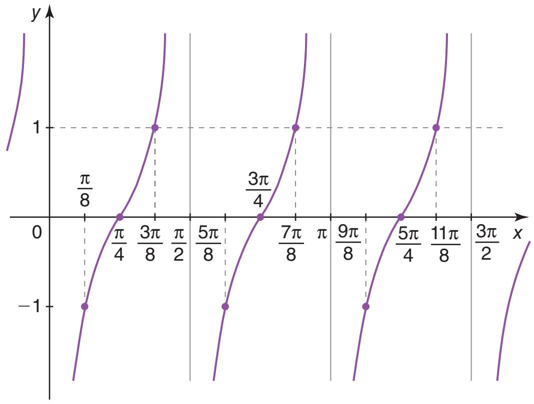
19 a)



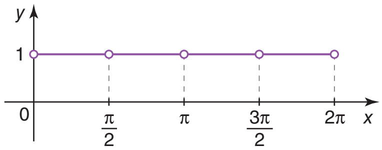
b)



c)



20



21 exatamente três raízes

22 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -5 \text{ ou } y \geq 5\}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -3 \text{ ou } y \geq -1\}$

23 $m = 0$ ou qualquer m real, com $m \leq -\sqrt{2}$ ou $m \geq \sqrt{2}$

24 exatamente duas raízes

25 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0 \text{ ou } y \geq 2\}$

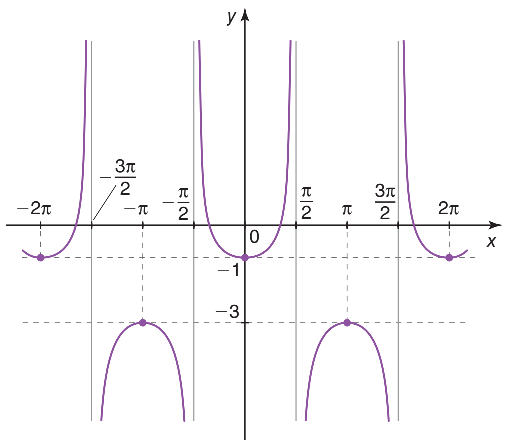
b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -4 \text{ ou } y \geq 4\}$

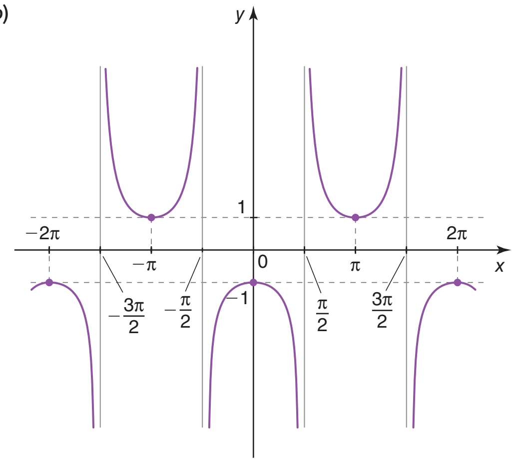
c) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1 \text{ ou } y \geq 5\}$

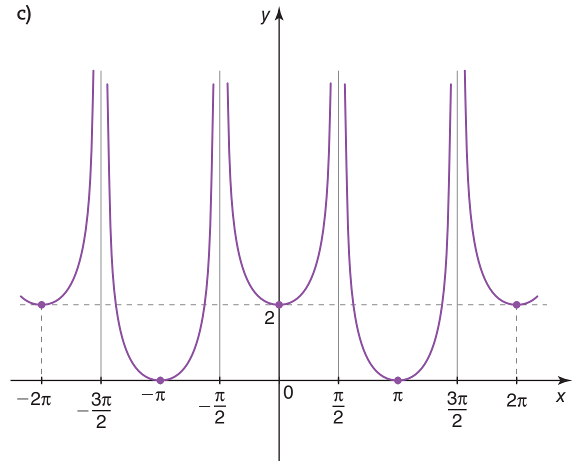
26 a)



b)



c)



27 exatamente três raízes

28 $\frac{3\sqrt{7}}{8}$

29 $\frac{16}{7}$

30 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -\frac{8}{3}\right\}$

31 $\frac{\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{9}$

32 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \text{arcsen } \frac{1}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen } \frac{1}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

33 $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

34 3 raízes

DICA: Construa os gráficos das funções $f(x) = \frac{\pi x}{2}$ e $g(x) = \text{arcsen } x$.

35 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

36 $\frac{7}{18}$

37 $\frac{23}{9}$

38 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -12 \leq x \leq -4\}$

39 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \arccos\frac{2}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = -\arccos\frac{2}{5} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

40 **a)** $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ **b)** $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

41 3 raízes

42 $-\frac{12}{35}$

43 12

44 $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2\pi < y < 2\pi\}$

45 $\frac{4}{5}$

46 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \text{arctg } 2 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

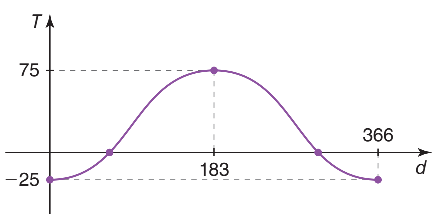
47 **a)** $S = \{1\}$ **b)** $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

48 2 raízes

• **Exercícios contextualizados**

49 11 m

50 **a)**



b) 183º dia, que corresponde a 2 de julho.
c) 61º e 305º dia, que correspondem, respectivamente, a 2 de março e 1º de novembro.
DICA: O n-ésimo dia de um ano se completa às 24 horas do dia de número n. Por exemplo, o dia 5 de janeiro se completa às 24 horas do dia 5; assim, às 12 horas do dia 5 de janeiro terão decorridos 4,5 dias do ano.

51 e

52 **a)** 3 **b)** maio e novembro

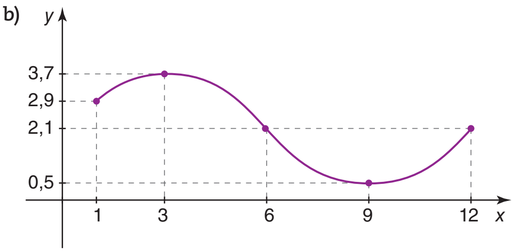
53 8 oscilações completas

54 a

55 e

56 **a)** $S = \left\{t \in \mathbb{R} \mid t = -\frac{15}{2} + 12k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}_+^*\right\}$
b) 4,5 h

57 **a)** julho e novembro
b)



A diferença entre o maior e o menor número de turistas da cidade é 3.200.

58 **a)** 10 de janeiro
b) ≈243 dias
DICA: Sendo t o tempo em dia, o número de dias tal que $a < t < b$ é dado por $b - a$.

59 **a)** março e novembro
b) janeiro

60 **a)** 147,1 milhões de quilômetros
b) 149,6 milhões de quilômetros

61 **a)** 6,5 m
b) As alturas mínima e máxima são 1,5 m e 21,5 m, respectivamente, e o tempo gasto em uma volta completa é 24 s.

62 a

63 a

64 c

65 **a)** $\frac{10 - \sqrt{3}}{2}$
b) $a = 5$, $b = -1$ e $c = \frac{2\pi}{3}$ ou $a = 5$, $b = -1$ e $c = -\frac{2\pi}{3}$

Exercícios de revisão cumulativa

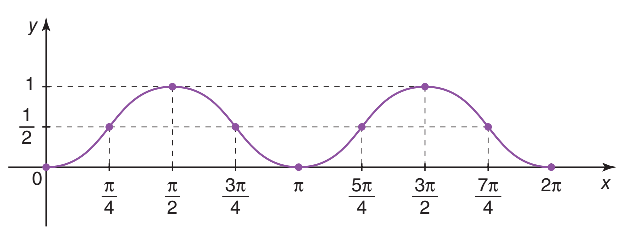
1 e

2 b

3 c

4 **a)** $h = 10 \cdot \text{sen } x$, $b = 20 \cdot \cos x$ e $A = 100 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$
b) $\frac{\pi}{3}$ rad

Análise da resolução



CONTEÚDO DIGITAL - PARTE 1

Animações

Demonstração do teorema de Pitágoras

Matemática 2 > Parte 1 > Cap. 02 > Seção 2.2

A animação apresenta uma forma de demonstrar o teorema de Pitágoras.

Gráfico da função seno

Matemática 2 > Parte 1 > Cap. 5 > Seção 5.1

Mostra a representação gráfica da função seno em correspondência ao seno de um ângulo na circunferência trigonométrica.

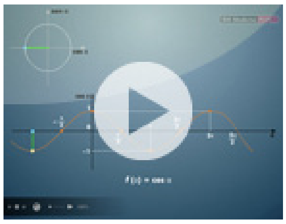


Gráfico da função cosseno

Matemática 2 > Parte 1 > Cap. 5 > Seção 5.1

Mostra a representação gráfica da função cosseno em correspondência ao cosseno de um ângulo na circunferência trigonométrica.

PARTE II

PARTE
II

Capítulo

6

Matrizes

As tabelas são uma forma de organizar várias informações em pequenos espaços proporcionando uma consulta rápida, dada a simplicidade de sua apresentação em linhas e colunas. Seu uso é largamente difundido em praticamente todos os ramos do conhecimento, visando a comunicação, a investigação e a análise de dados. Neste capítulo, estudaremos as tabelas como uma importante ferramenta matemática.

6.1 O conceito de matriz

Vamos conceituar matriz como uma forma de tabela, definindo igualdade entre duas matrizes.

6.2 Operações entre matrizes

Assim como efetuamos operações com números reais, podemos adicionar, subtrair e multiplicar matrizes.

A reciclagem de latas de alumínio é uma das atividades mais rentáveis da indústria de sucata. Com a adoção de postos de coleta e de reciclagem de latas de bebidas, muitos benefícios foram conquistados, como geração de empregos, economia de água e de energia e redução dos danos ao meio ambiente.

O Brasil mantém programas de reciclagem de latas de alumínio há décadas, atingindo o maior volume de latas recicladas do mundo. Pelos dados coletados em 1998, 2003 e 2008, registram-se, para o Brasil, respectivamente, as seguintes porcentagens de reciclagem de latas de alumínio: 65,2%, 89% e 91,5%; para o Japão, respectivamente, 73%, 82% e 87,3%; para a Argentina, 48%, 80% e 90,8% e para os Estados Unidos, 67%, 50% e 54,2%. Esses países são os que mais reciclam.

Para pensar

- Construa uma tabela reunindo os países citados no texto, os anos de registro dos dados e as porcentagens de latas recicladas.

Seção 6.1

O conceito de matriz

Objetivos

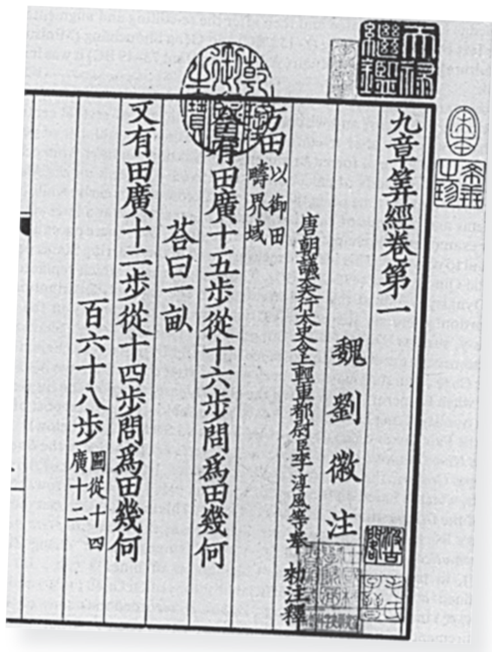
- **Representar** genericamente uma matriz.
- **Construir** uma matriz a partir de sua lei de formação.
- **Reconhecer** uma matriz quadrada e identificar a diagonal principal e a secundária.
- **Reconhecer** as matrizes identidade e nula.
- **Obter** a transposta de uma matriz.

Termos e conceitos

- **matriz $m \times n$**
- **matriz quadrada**
- **matriz identidade**
- **matriz nula**
- **matriz transposta**

Um pouco de história

Por volta de 250 a.C., foi escrito na China o livro *Chiu-Chang Suan-Shu* (em português, *Os nove capítulos da arte matemática*), de autor desconhecido.



九章算經卷第一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勑注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步

Página do 1º capítulo do livro *Chiu-Chang Suan-Shu*.

Essa obra trata de 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, impostos, equações etc. Um dos problemas apresenta o seguinte sistema de equações do 1º grau:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Nesse livro, o sistema é resolvido por meio de operações efetuadas com os elementos da seguinte tabela, que organiza seus coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$$

Atualmente, essa tabela é chamada de **matriz**. Esse é um dos registros mais antigos sobre matrizes, o que nos leva a crer que o estudo das matrizes teve como motivação histórica inicial a necessidade de resolver sistemas do 1º grau.

Somente no século XIX, o matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) sistematizou a teoria das matrizes, com base em um estudo sobre transformações.

As matrizes facilitam significativamente o estudo de fenômenos que envolvem mais de uma variável. Como exemplo, podemos citar o estudo de circuitos elétricos e linhas de transmissão, modelos estatísticos e de computação gráfica.

Introdução

Em 2008, a expectativa de vida do brasileiro era de 73 anos. É possível detalhar mais essa informação, conforme exposto na tabela abaixo, que apresenta a expectativa de vida no Brasil, em 2008, segundo as regiões brasileiras (numeradas de 1 a 5) e gêneros (1 e 2).

	(1) Norte	(2) Nordeste	(3) Sudeste	(4) Sul	(5) Centro-Oeste
(1) Homens	69,1	66,5	70,4	71,6	70,6
(2) Mulheres	74,9	73,8	78,5	78,5	77,5

Disponível em: <http://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 9 nov. 2009.

A expectativa de vida no Brasil vem aumentando ao longo dos anos.

Note a simplicidade dessa tabela. Se quisermos saber, por exemplo, qual era a expectativa de vida de uma mulher (gênero 2) residente na região Sul (região 4), basta olhar o cruzamento da linha 2 com a coluna 4 e encontraremos 78,5 anos.

As tabelas são muito úteis no cotidiano, pois permitem a visualização simplificada e global do cruzamento de duas ou mais informações sobre um ou mais objetos de estudo. Essa ideia também é aplicada nas Ciências, com o mesmo objetivo, isto é, simplificar a representação do cruzamento de informações a respeito de objetos de estudo.

Em Matemática, as tabelas como essa são chamadas de **matrizes**, sobre as quais definiremos a relação de igualdade e algumas operações.

Definição

Chama-se **matriz do tipo $m \times n$** (lemos "m por n") toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas.

Essa tabela deve ser representada entre parênteses ( ) ou entre colchetes [ ].

Exemplos

a) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2, pois tem 3 linhas e 2 colunas.

b) $\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 1×3, pois tem 1 linha e 3 colunas.

Representação genérica

Indicamos por $\boldsymbol{a_{ij}}$ o elemento posicionado na linha i e na coluna j de uma matriz A.

Exemplo

Na matriz:

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- o elemento 6 está na linha 1 e na coluna 1; por isso, ele é indicado por a_{11}, ou seja, $a_{11} = 6$;
- o elemento 7 está na linha 1 e na coluna 2; por isso, ele é indicado por a_{12}, ou seja, $a_{12} = 7$;
- analogamente, temos $a_{21} = -4$, $a_{22} = 0$, $a_{31} = 2$ e $a_{32} = -1$.

Representamos genericamente uma matriz A do tipo $m \times n$ da seguinte maneira:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como essa representação é muito extensa, vamos convencionar uma forma abreviada. Essa matriz pode ser representada simplesmente por $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou, quando não houver possibilidade de confusão quanto ao tipo da matriz, por $A = (a_{ij})$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 Representar explicitamente a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$ tal que $a_{ij} = 2i + j$.

Resolução

Primeiro, representamos genericamente a matriz A, do tipo 2×4:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

A seguir, calculamos o valor de cada elemento a_{ij} pela lei $a_{ij} = 2i + j$:

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

$a_{14} = 2 \cdot 1 + 4 = 6$

$a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$a_{23} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$a_{24} = 2 \cdot 2 + 4 = 8$

Concluindo, temos a matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Algumas matrizes especiais

Matriz quadrada

Matriz quadrada é toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

O número de linhas (ou de colunas) de uma matriz quadrada é chamado de **ordem** da matriz.

Exemplos

a) $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

c) (5) é uma matriz quadrada de ordem 1.

Numa matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ formam a **diagonal principal** da matriz, e os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**. Por exemplo:

diagonal secundária

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal principal

Matriz identidade

A matriz (1) e qualquer matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais elementos são iguais a zero são chamadas de **matriz identidade**.

Indicamos por I_n a matriz identidade de ordem n.

Exemplos

a) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $I_1 = (1)$

Matriz nula

Toda matriz cujos elementos são iguais a zero é chamada de **matriz nula**.

Exemplos

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) (0)

Transposta de uma matriz

Transposta de uma matriz A é a matriz A^t tal que os números que formam cada coluna i da matriz A^t são, ordenadamente, iguais aos números que formam cada linha i de A.

Exemplos

a) A transposta de $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ é a matriz $A^t_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

b) A transposta de $B_{1 \times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ é a matriz $B^t_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Note que a transposta de uma matriz do tipo $m \times n$ é uma matriz do tipo $n \times m$.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes do mesmo tipo são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais.

Nota:

Em duas matrizes do mesmo tipo, elementos correspondentes são aqueles que ocupam a mesma posição em relação a cada matriz.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2 Determinar o número real x tal que: $\begin{pmatrix} 6 & x^2 - 5 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Resolução

As matrizes são do mesmo tipo (2 × 2). Logo, elas serão iguais se, e somente se, os elementos correspondentes forem iguais, isto é:

$$\begin{cases} 6 = 6 \\ x^2 - 5 = 11 \\ 0 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ x = 4 \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \pm 4 \\ x = 4 \end{cases}$$

Como o número 4 é a única solução comum às duas equações do sistema, concluímos que as matrizes são iguais se, e somente se, $x = 4$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Para controlar a alimentação, uma pessoa fez uma pesquisa sobre a quantidade de energia e de proteínas presentes em 100 gramas de alguns tipos de carne.
Constatou que 100 g de filé de frango grelhado tem 159 kcal de energia e 32 g de proteína; a sardinha assada tem 164 kcal e 32,2 g de proteína; e o contrafilé grelhado tem 278 kcal e 32,4 g de proteína.

a) Organize esses dados em uma tabela.
b) Escreva uma matriz correspondente a essa tabela.
c) Qual é o tipo dessa matriz?

2 Uma rede comercial é formada por cinco lojas, numeradas de 1 a 5. A tabela abaixo mostra o faturamento, em real, de cada loja nos quatro primeiros dias de janeiro:

$$\begin{pmatrix} 1.950 & 2.030 & 1.800 & 1.950 \\ 1.500 & 1.820 & 1.740 & 1.680 \\ 3.010 & 2.800 & 2.700 & 3.050 \\ 2.500 & 2.420 & 2.300 & 2.680 \\ 1.800 & 2.020 & 2.040 & 1.950 \end{pmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no dia j.

a) Qual foi o faturamento da loja 3 no dia 2?
b) Qual foi o faturamento dessa rede de lojas no dia 3?
c) Qual foi o faturamento da loja 1 nos quatro dias?

3 Represente explicitamente cada uma das matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ tal que $a_{ij} = i + 2j$
b) $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $b_{ij} = i^2 + 3j$
c) $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $c_{ij} = 2i$
d) $D = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ i + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$
e) $E = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

4 Sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2, determine o número real x tal que:

$$\begin{pmatrix} x^2 - 15 & 0 \\ 0 & x - 3 \end{pmatrix} = I_2$$

5 Considere a matriz identidade I_3 e uma matriz qualquer $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$. É possível a igualdade $I_3 = A$? Justifique sua resposta.

6 Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, determine as matrizes:

a) A^t
b) $(A^t)^t$

7 Obtenha os valores reais de x e y de modo que a matriz abaixo seja nula.

$$\begin{pmatrix} 3x + y - 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5x - y - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8 (Faap-SP) Sabendo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x^2 - 2 & 5 \\ x + 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ obedecem à condição $A^t = B$, conclui-se que x é um número:

a) ímpar positivo.
b) ímpar negativo.
c) par positivo.
d) par negativo.
e) racional não inteiro.

Resolva os exercícios complementares 1 a 6 e 29 a 31.

Operações entre matrizes

Objetivos

- **Adicionar** e subtrair matrizes.
- **Multiplicar** um número real por uma matriz.
- **Multiplicar** matrizes.
- **Obter** a inversa de uma matriz.

Termos e conceitos

- matriz oposta
- matriz inversa

Adição de matrizes

Acompanhe a situação a seguir.

Indústria de televisores *widescreen*.

Uma indústria de televisores possui duas filiais, A e B. Cada uma delas produz o modelo 1 e o modelo 2 de televisor. As tabelas abaixo apresentam as produções das filiais nos três primeiros dias do mês de fevereiro:

Produção da filial A	Dia 1	Dia 2	Dia 3
Modelo 1	49	60	70
Modelo 2	90	48	73

Produção da filial B	Dia 1	Dia 2	Dia 3
Modelo 1	76	80	45
Modelo 2	93	60	50

Para representar a produção total diária das duas filiais, nesse período, podemos construir uma tabela em que cada posição apresente a soma dos valores correspondentes nessas duas tabelas, ou seja:

Produção das filiais A e B	Dia 1	Dia 2	Dia 3
Modelo 1	125	140	115
Modelo 2	183	108	123

Essa situação poderia ser representada pela seguinte operação com matrizes:

$$\begin{pmatrix} 49 & 60 & 70 \\ 90 & 48 & 73 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 76 & 80 & 45 \\ 93 & 60 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 140 & 115 \\ 183 & 108 & 123 \end{pmatrix}$$

A matriz resultante é chamada de **matriz soma**, que definimos a seguir:

> A **soma** de duas matrizes do mesmo tipo, A e B, é a matriz em que cada elemento é a soma de seus correspondentes em A e em B.

Indicamos essa soma por $A + B$.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

Sendo A, B e C matrizes de mesmo tipo, valem as seguintes propriedades:

- Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

  Por isso, a soma dessas matrizes pode ser indicada sem os parênteses, simplesmente por $A + B + C$.
- Comutativa: $A + B = B + A$
- Elemento neutro: Qualquer que seja o tipo da matriz A existe a matriz O, do mesmo tipo de A, tal que:

  $$A + O = O + A = A$$

  A matriz O é a matriz nula, chamada de elemento neutro da adição de matrizes.
- Elemento oposto: Qualquer que seja o tipo da matriz A, existe a matriz $-A$ tal que:

  $$A + (-A) = (-A) + A = O$$

  em que O é a matriz nula.

  A matriz $-A$ é a **matriz oposta** de A.

Exemplo

Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$, sua oposta é $-A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$, pois:

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Subtração de matrizes

Voltando ao exemplo da indústria de televisores, se quisermos uma matriz que compare a produção da filial A com a produção da filial B, podemos construir a matriz $D_{2 \times 3}$, na qual cada elemento d_{ij} seja a diferença entre seus elementos correspondentes nas matrizes A e B, nesta ordem:

$$D = \begin{pmatrix} 49 - 76 & 60 - 80 & 70 - 45 \\ 90 - 93 & 48 - 60 & 73 - 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -20 & 25 \\ -3 & -12 & 23 \end{pmatrix}$$

Observe, por exemplo, que:

- comparando as produções do modelo 1 no dia 2 de fevereiro, d_{12}, constatamos que a filial A produziu 20 televisores a menos que a filial B;
- comparando as produções do modelo 2 no dia 3 de fevereiro, d_{23}, constatamos que a filial A produziu 23 televisores a mais que a filial B.

A matriz D é chamada de **matriz diferença** entre A e B.

Definimos:

> A **diferença** de duas matrizes do mesmo tipo, A e B, nessa ordem, é a soma de A com a oposta de B.

Indicamos essa diferença por $A - B$.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, temos:

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Para simplificar esse procedimento, podemos subtrair os elementos correspondentes em A e B:

$$A - B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 2 & 6 - 4 \\ 4 - (-3) & 0 - 5 \\ -4 - 1 & -1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Considere que a filial A, da situação anterior, decida dobrar sua produção diária de televisores no mesmo período do ano seguinte. A nova produção seria representada pela seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 98 & 120 & 140 \\ 180 & 96 & 146 \end{pmatrix}$$

Note que, para obter essa matriz, cada elemento da matriz que representa a produção da filial A foi multiplicado por dois. Nesse caso, efetuamos uma **multiplicação de um número real por uma matriz**, que definimos a seguir.

O **produto** de um número real k por uma matriz A é a matriz em que cada elemento é o produto de seu correspondente em A pelo número k.

Indicamos esse produto por $k \cdot A$ ou kA.

Exemplo

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 30 & 6 \\ 0 & 6\sqrt{2} & -12 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$ determine:

a) $A + B$
b) $2A - B$
c) $3A - \frac{1}{2} \cdot C^t$

10 Determine a matriz X tal que:

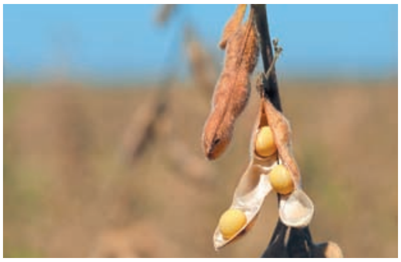
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} + X = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

11 Determine as matrizes X e Y tais que:

$$X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

12 Duas regiões, A e B, são produtoras de arroz e soja. Suas produções, em três anos consecutivos, são descritas pelas matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 11 \\ 15 & 20 & 18 \end{pmatrix}$, respectivamente, em que são obedecidas estas convenções:

- o arroz e a soja são denominados "grão 1" e "grão 2", respectivamente;
- os anos considerados, em ordem crescente, são numerados por 1, 2 e 3;
- em cada matriz, o elemento x_{ij} representa a produção, em milhões de toneladas, do grão i no ano j.



Vagens de soja.

Espiguetas de arroz.

a) Qual foi a produção de arroz da região A no ano 3?
b) Qual foi a produção de arroz da região B no ano 3?
c) Qual foi a produção de arroz das duas regiões, juntas, no ano 3?
d) Qual foi a produção de soja das duas regiões, juntas, no ano 3?
e) Represente por uma matriz C a produção anual desses grãos das duas regiões juntas, no período considerado.
f) Construa uma matriz D que compare a produção anual desses grãos da região A com a da região B, no período considerado.

Resolva os exercícios complementares 7 a 10 e 32.

Multiplicação de matrizes

Para o controle de estoque de um restaurante, a *chef* de cozinha estimou que, para certa semana, seriam necessárias as quantidades de frutas descritas na tabela 1 abaixo.

A avaliação de custo desses alimentos foi realizada com dois fornecedores, cujos preços por quilograma são descritos na tabela 2.

Tabela 1

	Fruta 1	Fruta 2	Fruta 3	Fruta 4
	Maçã	Uva	Laranja	Mamão
Quantidade (kg)	25	30	100	20

Tabela 2

	Preço por quilograma (R$)	
	Fornecedor 1	Fornecedor 2
Maçã	2,00	2,40
Uva	3,50	3,00
Laranja	0,80	0,85
Mamão	1,70	1,80

- Para suprir o estoque de frutas, qual será o gasto do restaurante se a compra for feita com o fornecedor 1? E com o fornecedor 2?

Essas tabelas podem ser representadas pelas matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 100 & 20 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2{,}00 & 2{,}40 \\ 3{,}50 & 3{,}00 \\ 0{,}80 & 0{,}85 \\ 1{,}70 & 1{,}80 \end{pmatrix}$$

Em que:

- cada elemento a_{ij} da matriz A indica a quantidade da fruta j que deve ser comprada;
- cada elemento b_{ij} da matriz B representa o preço por quilograma da fruta i no fornecedor j.

Para calcular o orçamento de cada fornecedor, efetuamos as seguintes operações:

Fornecedor 1: $25 \cdot 2{,}00 + 30 \cdot 3{,}50 + 100 \cdot 0{,}80 + 20 \cdot 1{,}70 = 269{,}00$

Fornecedor 2: $25 \cdot 2{,}40 + 30 \cdot 3{,}00 + 100 \cdot 0{,}85 + 20 \cdot 1{,}80 = 271{,}00$

Representando esses resultados em uma matriz C, tal que cada elemento c_{ij} representa o orçamento com o fornecedor j, temos:

$$C = \begin{pmatrix} 269{,}00 & 271{,}00 \end{pmatrix}$$

A matriz C é chamada de **matriz produto** de A por B, nessa ordem, e a representamos por $A \cdot B = C$ ou $AB = C$. Desse modo, os dados numéricos dessa consulta de preços podem ser representados por:

$$\begin{pmatrix} 25 & 30 & 100 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}00 & 2{,}40 \\ 3{,}50 & 3{,}00 \\ 0{,}80 & 0{,}85 \\ 1{,}70 & 1{,}80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 269{,}00 & 271{,}00 \end{pmatrix}$$

Essa situação vai ajudar a entender o conceito de multiplicação de matrizes. Mas, antes desse conceito, vamos definir o produto de uma linha por uma coluna.

Produto de linha por coluna

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times k}$ e $B = (b_{ij})_{k \times n}$, em que consideramos a linha i de A e a coluna j de B, isto é:

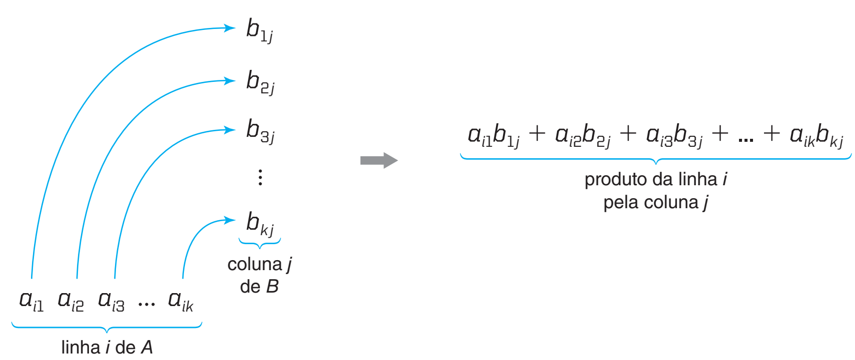
$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ik} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$$

O produto da linha i pela coluna j é definido por:

$$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

ou seja, multiplicamos, ordenadamente, os elementos da linha i pelos elementos da coluna j e adicionamos os resultados obtidos.

O esquema a seguir ajuda a visualizar essa definição:



Note que, para existir o produto de uma linha por uma coluna, ambas devem ter o mesmo número de elementos.

Exemplo

Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

- Para calcular o produto da 1ª linha de A pela 2ª coluna de B, efetuamos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 28$$

- Para calcular o produto da 2ª linha de A pela 3ª coluna de B, efetuamos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$6 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 10$$

Multiplicação de matrizes

O **produto** da matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ pela matriz $B = (b_{ij})_{n \times p}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$ tal que cada elemento c_{ij} é o produto da linha i de A pela coluna j de B.

Esse produto é indicado por $A \cdot B$ ou AB.

Exemplos

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 & 3 \cdot 5 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 20 & 9 \\ 8 & 10 & -4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 6 \\ 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 17 & 26 \\ 1 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

Notas:

1. Se A e B são matrizes, existe o produto AB se, e somente se, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Veja os exemplos:

a) Existe o produto $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 5}$

iguais

b) Não existe o produto $A_{2 \times 3} \cdot B_{4 \times 2}$

diferentes

2. A matriz C, tal que $C = AB$, possui o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B, isto é:

$$A_{m \times k} \cdot B_{k \times n} = C_{m \times n}$$

Por exemplo:

a) $A_{3 \times 5} \cdot B_{5 \times 8} = C_{3 \times 8}$

b) $A_{1 \times 4} \cdot B_{4 \times 1} = C_{1 \times 1}$

Propriedades da multiplicação de matrizes

- Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, em que $A_{m \times n}$, $B_{n \times k}$ e $C_{k \times p}$.
  Por isso, o produto dessas matrizes pode ser indicado sem os parênteses, simplesmente por $A \cdot B \cdot C$.
- Distributiva à direita: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, em que $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$ e $C_{n \times k}$.
- Distributiva à esquerda: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$, em que $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$ e $C_{k \times m}$.
- Elemento neutro: $A \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot A = A$
  em que I_n e I_m são as matrizes identidade de ordens n e m, respectivamente, e $A_{m \times n}$.
- $(r \cdot A) \cdot B = A \cdot (r \cdot B) = r \cdot (A \cdot B)$, em que $A_{m \times n}$ e $B_{n \times k}$.
- Transposta do produto: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, em que $A_{m \times n}$ e $B_{n \times k}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3 Determinar a matriz X tal que: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$

Resolução

Primeiro, vamos determinar o tipo da matriz X:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{X}_{m \times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}}_{2 \times 1}$$

O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas de X; portanto, $m = 2$.

O número de colunas da matriz X deve ser igual ao número de colunas da matriz produto; portanto, $n = 1$.

Assim, a matriz X é do tipo 2×1.

Sendo $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ a - 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Portanto: $\begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ a - 4b = -9 \end{cases}$

Para resolver esse sistema de equações, multiplicamos a segunda equação por -2:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ -2a + 8b = 18 \end{cases}$$

Adicionando essas equações membro a membro, temos:

$0a + 11b = 22 \Rightarrow b = 2$

Substituindo b por 2 em $2a + 3b = 4$, obtemos:

$2a + 3 \cdot 2 = 4 \Rightarrow a = -1$

Assim, concluímos: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$, determine, se possível:

a) $A \cdot B$
b) $A \cdot C$
c) $B \cdot C$
d) A^2
e) B^2

(*Observação*: $A^2 = A \cdot A$)

14 Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determine:

a) $A \cdot B$
b) $B \cdot A$
c) $A \cdot I_3$
d) $I_2 \cdot A$
e) $B \cdot C$

15 Observando sua resolução dos exercícios anteriores, classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a) Se P e Q são matrizes quaisquer tais que existam os produtos PQ e QP, então PQ = QP.
b) Se P é uma matriz qualquer do tipo $m \times n$, então: $P \cdot I_n = P$ e $I_m \cdot P = P$
c) Se o produto de duas matrizes, P e Q, é igual à matriz nula, então pelo menos uma das matrizes, P ou Q, é nula.

16 Dada a definição "Duas matrizes A e B **comutam** na multiplicação se, e somente se, $A \cdot B = B \cdot A$", verifique se as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ comutam na multiplicação.

17 (UFC-CE) O valor de a para que a sentença

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ seja verdadeira é:

a) 1
b) 2
c) 0
d) -2
e) -1

18 Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{9 \times 8}$, com $a_{ij} = 2j$; $B = (b_{ij})_{8 \times 6}$, com $b_{ij} = i$; e $C = A \cdot B$, determine o elemento c_{45} da matriz C.

19 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$, obtenha a matriz X tal que $A \cdot X = B$.

20 Observe na resolução do exercício anterior que a equação matricial resultou em um sistema de equações. De maneira análoga:

a) Escreva o sistema de equações correspondente a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

b) Escreva a equação matricial correspondente a cada um dos sistemas:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ x + 2y = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = 8 \end{cases}$$

Resolva os exercícios complementares 11 a 24 e 33 a 39.

Matrizes inversas

O conceito de matrizes inversas tem muita semelhança com o de **números reais inversos**; por isso, vale a pena relembrar:

Dois números reais, a e b, são **inversos** entre si se, e somente se, $ab = ba = 1$.

Indicamos que a e b são inversos entre si pelo símbolo $a = b^{-1}$ ou por $b = a^{-1}$.

Exemplos

a) Os números $\frac{5}{4}$ e $\frac{4}{5}$ são inversos entre si, pois: $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1$

b) O número 0 não tem inverso, pois não existe número real x tal que: $0 \cdot x = 1$

De maneira análoga ao conceito de números inversos, definem-se **matrizes inversas**:

> Uma matriz quadrada A de ordem n é **invertível** se, e somente se, existe uma matriz B tal que:
>
> $$AB = BA = I_n$$
>
> em que I_n é a matriz identidade de ordem n.

As matrizes A e B são chamadas de **inversas entre si**, e tal fato é indicado por $B = A^{-1}$ (lemos: "B é igual à inversa de A") ou $A = B^{-1}$ (lemos: "A é igual à inversa de B").

Exemplo

As matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ são inversas entre si, pois:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Assim, indicamos $B = A^{-1}$ ou, de maneira equivalente, $A = B^{-1}$.

Propriedade

> Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem n e $AB = I_n$, então $BA = I_n$.

Em outras palavras, essa propriedade afirma que se o produto de duas matrizes quadradas, A e B, é a matriz identidade, então A e B comutam na multiplicação.

Observe que essa propriedade facilita significativamente o reconhecimento de matrizes inversas. No exemplo anterior, após a constatação de que $AB = I_2$, pode-se concluir que A e B são inversas entre si, pois essa propriedade garante que BA também será igual a I_2.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4 Determinar, se existir, a inversa de cada uma das matrizes.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Resolução

a) Admitindo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa da matriz A, devemos ter $A \cdot A^{-1} = I_2$, ou seja:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou ainda:

$$\begin{pmatrix} a + 3c & b + 3d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando os elementos correspondentes, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ 2c = 0 \\ b + 3d = 0 \\ 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3c = 1 & \text{(I)} \\ c = 0 & \text{(II)} \\ b + 3d = 0 & \text{(III)} \\ d = \frac{1}{2} & \text{(IV)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos: $a = 1$

Substituindo (IV) em (III), temos: $b = -\frac{3}{2}$

Assim, concluímos: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) Admitindo que $B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa da matriz B, devemos ter $B \cdot B^{-1} = I_2$, ou seja:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou ainda:

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando os elementos correspondentes, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ 2a + 4c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ 2b + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ b + 2d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Equações incompatíveis

Equações incompatíveis

A incompatibilidade das duas primeiras ou das duas últimas equações do sistema pode ser explicada pela propriedade transitiva da igualdade. Por exemplo, para as duas primeiras equações: se $a + 2c = 1$ e $a + 2c = 0$, poderíamos concluir que $1 = 0$, o que é absurdo; logo, não existem números a e c que satisfaçam essas equações. Portanto, o sistema não tem solução e, consequentemente, não existe a inversa da matriz B.

EXERCÍCIO PROPOSTO

21 Obtenha, se existir, a inversa de cada matriz.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resolva os exercícios complementares 25 a 28.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *As matrizes e as transformações geométricas*.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Represente explicitamente as matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 3, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

b) $B = (b_{ij})_{2 \times 4}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i \geq j \\ 0, \text{ se } i < j \end{cases}$

c) $C = (c_{ij})_{1 \times 5}$ tal que $c_{ij} = 3j$

d) $D = (d_{ij})_{4 \times 1}$ tal que $d_{ij} = i + \text{sen } \frac{\pi j}{2}$

e) $E = (e_{ij})_{2 \times 4}$ tal que $e_{ij} = 2j + \log_2 i$

2 (UFG-GO) Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada de ordem n, em que $a_{ij} = i + j$. Nessas condições, a soma dos elementos da diagonal principal dessa matriz é:

a) n^2
b) $2n + 2n^2$
c) $2n + n^2$
d) $n^2 + n$
e) $n + 2n^2$

3 Indicando por $O_{m \times n}$ a matriz nula do tipo $m \times n$, represente explicitamente as matrizes:

a) $O_{2 \times 3}$ **b)** $O_{3 \times 3}$ **c)** $O_{1 \times 3}$

4 Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é tal que $A^t = A$, pode-se afirmar que:

a) A é a matriz identidade de ordem n.
b) A é a matriz nula de ordem n.
c) Todos os elementos a_{ij} de A são iguais a 1.
d) Para qualquer elemento a_{ij} de A tem-se $a_{ij} = a_{ji}$.
e) Os elementos da diagonal principal de A são iguais.

5 Obtenha os valores reais de x e y de modo que a matriz abaixo seja nula.

$$\begin{bmatrix} |x| - 8 & 0 & 0 \\ 0 & x + 2y & 0 \end{bmatrix}$$

6 Obtenha o número real x, de modo que a matriz $A = \begin{bmatrix} x^2 - 7x + 13 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{bmatrix}$ seja igual à matriz identidade de ordem 2.

7 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, efetue:

a) $A + B$
b) $A - B$
c) $A + B - C^t$
d) $2A$
e) $3A + 2C^t$
f) $A - 2B + 4C^t$
g) $A + (-A)$
h) $2 \cdot (3B)$

8 Determine a matriz Y tal que:

$$Y - \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9 Determine as matrizes X e Y tais que:

$2X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

10 (UFSCar-SP) A matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ está sendo usada para representar as coordenadas dos vértices $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ e $C(4, 3)$ de um triângulo ABC. Multiplicando-se M por um número real positivo k, a matriz resultante da operação indicará os vértices do triângulo $A'B'C'$, de acordo com o mesmo padrão anterior de representação. Em tais condições, a área do triângulo $A'B'C'$ será igual a:

a) $3k$ **b)** $6k$ **c)** k^2 **d)** $3k^2$ **e)** $6k^2$

11 Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, tal que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ se } i \geq j \\ 0, \text{ se } i < j \end{cases}$, determine:

a) $A \cdot B$ **b)** $A \cdot I_3$ **c)** $I_2 \cdot A$ **d)** $B \cdot A$

12 (ESPM-SP) Se $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ x + z \end{bmatrix}$, com $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$, o valor de $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ é:

a) 1 **b)** −1 **c)** 3 **d)** 2 **e)** −2

13 (UFV-MG) Uma matriz quadrada A é denominada matriz ortogonal se $AA^t = A^tA = I$, em que A^t denota a transposta da matriz A e I é a matriz identidade de ordem n. Verifique se $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é ortogonal.

14 Determine a matriz A tal que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

15 Determine a matriz X tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

16 Sabendo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 4 \end{pmatrix}$ comutam na multiplicação, determine o número real x.

17 Sendo A uma matriz quadrada qualquer de ordem n, define-se:

- $A^0 = I_n$
- $A^1 = A$
- $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k \text{ fatores}}$, para qualquer número natural k, com $k \geq 2$.

De acordo com essa definição, calcule as seguintes potências da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

a) A^0 **c)** A^2 **e)** A^{50}
b) A^1 **d)** A^3 **f)** A^{73}

18 (UFV-MG) Seja a matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Determine M^2. **b)** Determine M^{73}.

19 Sendo $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$, calcule:

a) A^2 **b)** A^{50} **c)** A^{79}

20 (UFPB) Seja $A = \begin{bmatrix} x + 1 & 0 \\ 0 & y - 2 \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $A^2 = A$. Determine os possíveis valores de x e y.

21 (UFPB) Sendo a e b números reais, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Sabendo-se que $A^2 = 2A$, o valor de $a - b$ é:

a) −2 **b)** −1 **c)** 0 **d)** 1 **e)** 2

22 (UFPE) Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações seguintes:

a) $AB = BA$
b) $A^4 = I$
c) $B^6 = I$
d) $(AB)^{12} = I$
e) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

23 De acordo com as equações matriciais $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, qual das alternativas a seguir apresenta a matriz $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ em função da matriz $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

a) $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 64 \\ 128 & 256 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 26 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 4 \\ 62 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

24 As matrizes quadradas de ordem 2, A, B, C e D, são tais que $D \cdot A = I_2$ e $C \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. A matriz $(A \cdot B)^t \cdot (C \cdot D)^t$ é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 19 & 50 \\ 30 & 79 \end{pmatrix}$ **e)** I_2

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 19 & 30 \\ 50 & 79 \end{pmatrix}$

25 Obtenha, se existir, a inversa de cada uma das matrizes.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

26 (Ufam) Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz quadrada de ordem 2, definida por: $a_{ij} = \begin{cases} i^2, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Nessas condições, a transposta da inversa de A [notação: $(A^{-1})^t$] é igual a:

a) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

27 A matriz quadrada M tem ordem n, com $n > 1$, e satisfaz a equação $M^2 = M - I$, em que I é a matriz identidade de ordem n. Nessas condições, tem-se:

a) $M = I - M^{-1}$
b) $M = I + M^{-1}$
c) $M = M^{-1}$
d) $M = 2M^{-1}$
e) $M = 2I - M^{-1}$

28 Sabendo que é verdadeira a sentença

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

determine a matriz M.

Exercícios contextualizados

29 Num mesmo dia, um investidor aplicou, a juro composto, os capitais de R$ 1.000,00 e R$ 2.000,00 nos fundos 1 e 2, respectivamente. Durante três anos de aplicação, os rendimentos anuais dos fundos 1 e 2 foram 10% e 20%, respectivamente.

a) Determine os elementos a_{12}, a_{13}, a_{22} e a_{23} da matriz A abaixo, em que cada elemento a_{ij} representa o montante (capital aplicado mais os rendimentos) do fundo i ao final do ano j da aplicação.

$$A = \begin{pmatrix} 1.100 & a_{12} & a_{13} \\ 2.400 & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

b) Os elementos dessa matriz podem ser representados por uma lei de formação do tipo $a_{ij} = \begin{cases} x \cdot 1.000, \text{ se } i = 1 \\ y \cdot 2.000, \text{ se } i = 2 \end{cases}$, em que cada elemento a_{ij} é o valor localizado na linha i e coluna j da matriz A. Determine essa lei.

30 (Uenf-RJ) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em grau Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j.

$$\begin{bmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 38{,}0 & 36{,}0 \\ 36{,}1 & 37{,}0 & 37{,}2 & 40{,}5 & 40{,}4 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 36{,}1 & 37{,}0 & 39{,}2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;
b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

31 (FMTM-MG) A matriz $A = (a_{ij})_{20 \times 20}$ indica a pontuação das 20 equipes que disputaram um torneio de futebol para cada um dos jogos. Em relação às regras do torneio e à matriz A, sabe-se que:

- as equipes jogaram entre si uma única vez no torneio;
- em cada jogo, cada equipe ganhou 3 pontos por vitória, 1 por empate ou 0 por derrota;
- foi considerada campeã a equipe que totalizou o maior número de pontos;
- as equipes foram numeradas de 1 a 20;
- a_{ij} representa os pontos ganhos pela equipe i no jogo contra a equipe j, sendo que para $i = j$ adota-se $a_{ij} = 0$;
- cada uma das 20 equipes empatou ao menos um jogo.

Sabendo-se que a equipe número 5 foi a campeã do torneio, com um total de 48 pontos, é correto afirmar que $\sum_{i=1}^{20} a_{i5}$ é igual a:

a) 6 b) 9 c) 10 d) 12 e) 15

32 Uma rede é formada pelas lojas A e B, concessionárias de automóveis. Em um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos nos quatro primeiros dias de fevereiro, foram obtidos os resultados:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

sendo que:

- a matriz A descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j.
- a matriz B descreve o desempenho da loja B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j.

a) Quantas unidades do modelo 2 foram vendidas no dia 3 de fevereiro pela loja A?
b) Quantas unidades do modelo 1 foram vendidas no dia 2 de fevereiro pela loja B?
c) Para o período considerado, construa uma matriz que descreva, dia a dia, as vendas de cada modelo nas duas lojas juntas.
d) Para o período considerado, construa uma matriz que compare o desempenho da loja A com o da loja B nas vendas diárias de cada modelo.

33 (Vunesp) Uma fábrica produz dois tipos de peça, P_1 e P_2. Essas peças são vendidas a duas empresas, E_1 e E_2. O lucro obtido pela fábrica com a venda de cada peça P_1 é R$ 3,00 e de cada peça P_2 é R$ 2,00. A matriz abaixo fornece a quantidade de peças P_1 e P_2 vendidas a cada uma das empresas, E_1 e E_2, no mês de novembro.

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 8 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

A matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, em que x e y representam os lucros, em real, obtidos pela fábrica, no referido mês, com a venda das peças às empresas E_1 e E_2, respectivamente, é:

a) $\begin{bmatrix} 35 \\ 20 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 90 \\ 48 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 76 \\ 69 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 84 \\ 61 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 28 \\ 27 \end{bmatrix}$

34 (Vunesp) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produto, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, com $i, j = 1, 2, 3$.

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que:

a) A quantidade de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_2 é 11.

b) A quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30.

c) A soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.

d) A soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pelas lojas L_i, $i = 1, 2, 3$, é 52.

e) A soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

35 (UFBA) Uma empresa de microcomputadores vende alguns produtos em pacotes, de acordo com a tabela:

	Monitor (unidade)	Processador (unidade)	Gravador (unidade)	Preço (em real)
Pacote 1	2	1	3	2.736
Pacote 2	1	0	2	840
Pacote 3	1	2	0	2.952

(01) A soma dos preços de uma unidade de cada produto é um múltiplo de 8.

(02) É possível que o preço de um monitor seja menor que R$ 300,00.

(04) O preço do gravador é maior que R$ 420,00.

(08) Se o preço de um monitor é igual a R$ 400,00, então a soma dos preços unitários de cada um dos outros produtos é um número divisível por 5.

(16) Se A é a matriz 2×3, formada com as duas primeiras linhas e as três primeiras colunas da tabela, e B é a matriz 3×2, formada com as três linhas e as duas primeiras colunas, então

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Qual é a soma dos números que antecedem as alternativas corretas?

36 (UFPB) As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Rapa, são trocadas usando uma linguagem de códigos, na qual cada número inteiro de 0 a 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Rapa o nome de um espião codificado na matriz: $A = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Para decodificar uma palavra de cinco letras, dada por uma matriz A, de ordem 5×1, formada por inteiros de 0 a 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão: $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e, usando-se a tabela dada, converter os números em letras. Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

a) DIEGO
b) SHUME
c) SADAN
d) RENAN
e) RAMON

37 (UEL-PR) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (fruta, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em grama) daqueles alimentos. A matriz M fornece a quantidade (em grama) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por cada grama ingerida dos alimentos citados.

$$D = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{fruta} \\ \text{leite} \\ \text{cereais} \end{array}$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{fruta} & \text{leite} & \text{cereais} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{proteínas} \\ \text{gorduras} \\ \text{carboidratos} \end{array}$$

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em grama) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é:

a) $\begin{bmatrix} 18{,}20 \\ 36{,}30 \\ 454{,}20 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 29{,}70 \\ 16{,}20 \\ 460{,}20 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 48{,}30 \\ 36{,}00 \\ 432{,}40 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 51{,}90 \\ 48{,}30 \\ 405{,}60 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 75{,}90 \\ 21{,}50 \\ 411{,}00 \end{bmatrix}$

38 (UFMG) Milho, soja e feijão foram plantados nas regiões P e Q com ajuda dos fertilizantes X, Y e Z. A matriz A indica a área plantada de cada cultura, em hectare, por região:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{milho} & \text{soja} & \text{feijão} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 50 & 20 & 20 \\ 40 & 10 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{P} \\ \text{Q} \end{array}$$

A matriz B indica a massa usada de cada fertilizante, em quilograma, por hectare, em cada cultura:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 15 & 20 & 20 \\ 30 & 20 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{milho} \\ \text{soja} \\ \text{feijão} \end{array}$$

a) Calcule a matriz $C = AB$.

b) Explique o significado de C_{23}, o elemento da 2ª linha e 3ª coluna da matriz C.

39 (Uepa) Para a confecção de um cartaz, uma gráfica dispõe das cores: preto, amarelo, vermelho e azul, cujas doses têm preços unitários, em real, representados pela matriz A abaixo. Atendendo à solicitação do cliente, a gráfica apresentou um orçamento com as possíveis combinações de cores, cujas quantidades de doses utilizadas em cada cartaz estão representadas pela matriz B abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \text{preto} \\ \to \text{amarelo} \\ \to \text{vermelho} \\ \to \text{azul} \end{array} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \text{cartaz 1} \\ \to \text{cartaz 2} \\ \to \text{cartaz 3} \\ \to \text{cartaz 4} \end{array}$$

Nessas condições, o cartaz de menor custo terá preço de:

a) R$ 13,00
b) R$ 12,00
c) R$ 11,00
d) R$ 10,00
e) R$ 9,00

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo desse capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 (Ufal) O valor de sen 5 está compreendido entre:

a) $\frac{1}{2}$ e 1 **b)** 0 e $\frac{1}{2}$ **c)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 0 **d)** -1 e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** -2 e -1

(*Nota*: Quando a medida de um arco trigonométrico é indicada por um número real x sem a unidade de medida, deve-se entender x rad. Assim, nesse exercício, o número 5 deve ser entendido como 5 rad.)

2 Resolvendo em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x = 0$, obtém-se como conjunto solução:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

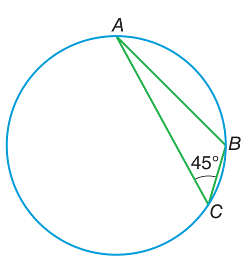
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

3 Demonstre que a igualdade $\operatorname{tg}^4 x - \sec^4 x = 1 - 2\sec^2 x$ é uma identidade no universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$.

4 (Vunesp) Na figura abaixo, os pontos A, B e C estão sobre uma circunferência de raio 1 cm e o ângulo $A\hat{C}B$ mede 45°.



Nessas condições, o comprimento da corda $\overline{AB}$, em centímetro, é:

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$ **e)** $\sqrt{2} - 1$

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Obtenha todas as matrizes X, com $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ e $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$, tal que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolução

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab \\ ac & bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 + bc = 0 & \text{(I)} \\ ab = 0 & \text{(II)} \\ ac = 0 & \text{(III)} \\ bc = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Substituindo (IV) em (I):

$$a^2 + 0 = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{(V)}$$

Substituindo (V) em (II) e (III):

$$0 \cdot b = 0 \text{ e } 0 \cdot c = 0$$

ERRADO!

Essas equações são satisfeitas para quaisquer valores de b e c.
Logo, todas as matrizes X são da forma:

$X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, para quaisquer números reais b e c

Comentário

Há um erro nessa resolução, pois para $X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, temos:

$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ e, portanto, $X^2 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Refaça essa resolução, corrigindo-a.

Capítulo

7

Sistemas lineares e determinantes

Em qualquer área do conhecimento, a palavra sistema é usada para designar uma estrutura formada por partes que se inter-relacionam. Em Matemática, um sistema de equações é uma estrutura formada por equações que se inter-relacionam por possuírem as mesmas incógnitas.

Neste capítulo, vamos estudar os sistemas de equações do $1^{\underline{o}}$ grau e seus determinantes.

7.1 Sistemas lineares

Os sistemas formados por equações do $1^{\underline{o}}$ grau são chamados de sistemas lineares.

7.2 Resolução de um sistema linear

Adotaremos a técnica do escalonamento para a resolução de um sistema linear que, comprovadamente, é a mais funcional entre todas as técnicas conhecidas.

7.3 Os sistemas lineares e o conceito de determinante

O determinante é um número que resulta de algumas operações efetuadas com os coeficientes de um sistema linear cujo número de equações é igual ao número de incógnitas. Estudaremos neste item os determinantes de ordens 2 e 3 e suas aplicações no estudo dos sistemas lineares.

7.4 Ampliando o conceito de determinante

Neste item, vamos estudar determinantes de qualquer ordem.

Para pensar

Em um campeonato de futebol, a vitória vale 3 pontos, o empate vale 1 ponto e a derrota não conta ponto.

1. Se a equipe A obteve 2 vitórias, 3 empates e 5 derrotas, qual será seu total de pontos?
2. A equipe B obteve 14 pontos nos 12 jogos que disputou. Se essa equipe foi derrotada apenas em 2 jogos, quantas vitórias e quantos empates obteve nesses 12 jogos?

Seção 7.1

Sistemas lineares

Objetivos

- **Reconhecer** um sistema linear e um sistema linear homogêneo.
- **Classificar** um sistema linear.
- **Interpretar** geometricamente um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

Termos e conceitos

- equação linear
- solução de uma equação linear
- equação linear homogênea
- solução trivial
- sistema linear
- sistema linear homogêneo
- solução de um sistema linear
- conjunto solução

Os sistemas de equações no dia a dia

Um conjunto de equações que apresentam as mesmas incógnitas é chamado de **sistema de equações**. Os sistemas de equações podem ser aplicados na resolução de problemas que apresentam um ou mais termos desconhecidos. Como exemplo, acompanhe a situação a seguir.

A qualidade de um café depende de seu *blend*, que é uma mistura de variedades de grãos de uma ou mais regiões produtoras. De acordo com os tipos de grão misturados e da proporção aplicada, pode-se variar o sabor e o aroma do café, ajustando-os à exigência dos consumidores.

Segundo a Associação Brasileira da Indústria de Café (Abic), o Brasil é o maior produtor mundial de café.

Uma indústria produz uma marca de café misturando as variedades tupi e catuaí amarelo. O café tupi, depois de processado, custa R$ 2,40 o quilograma, e o catuaí amarelo, R$ 2,80. Se o custo de 1 kg da mistura das duas variedades, após o processamento, é R$ 2,64, quanto há de cada variedade em 1 kg da mistura?

Para resolver esse problema, vamos indicar por x e y, respectivamente, as quantidades de café tupi e de café catuaí amarelo que compõem 1 kg da mistura. Assim, formamos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2{,}40x + 2{,}80y = 2{,}64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x & \text{(I)} \\ 2{,}40x + 2{,}80y = 2{,}64 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$2{,}40x + 2{,}80(1 - x) = 2{,}64 \Rightarrow 2{,}40x + 2{,}80 - 2{,}80x = 2{,}64$$
$$\therefore -0{,}40x = -0{,}16$$
$$\therefore x = 0{,}4$$

Substituindo x por 0,4 em (I), obtemos $y = 0{,}6$.

Concluímos que 1 kg dessa mistura contém 0,4 kg de café tupi e 0,6 kg de café catuaí amarelo.

Equação linear

No problema anterior, os valores desconhecidos foram obtidos a partir do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2{,}40x + 2{,}80y = 2{,}64 \end{cases}$$

As equações que compõem esse sistema são do 1º grau, por isso, são chamadas de **equações lineares**. Por exemplo, a equação $2{,}40x + 2{,}80y = 2{,}64$ é linear nas incógnitas x e y, sendo 2,40 e 2,80 os coeficientes das incógnitas, e 2,64 o termo independente da equação.

De maneira geral, toda equação do 1º grau é linear e toda equação com coeficientes nulos das incógnitas também é linear. Assim, definimos:

Chama-se **equação linear** nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ toda equação que pode ser apresentada na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são constantes reais chamadas de **coeficientes** das incógnitas e b é uma constante real chamada de **termo independente** da equação.

Exemplos

a) A equação $5x + 6y = 7$ é linear tal que:
- x e y são as incógnitas;
- 5 e 6 são os coeficientes das incógnitas x e y, respectivamente;
- 7 é o termo independente.

b) A equação $0x + 0y + 0z = 0$ é linear tal que:
- x, y e z são as incógnitas;
- 0, 0 e 0 são os coeficientes das incógnitas x, y e z;
- 0 é o termo independente.

c) A equação $0x + 0y + 0t + 0z = 3$ é linear tal que:
- x, y, t e z são as incógnitas;
- 0, 0, 0 e 0 são os coeficientes das incógnitas x, y, t e z;
- 3 é o termo independente.

Contraexemplos (equações não lineares)

a) $5x^2 + 3y = 1$ não é equação linear, pois é do 2º grau em relação a x;

b) $\frac{1}{x} + y = 2$ não é equação linear, pois o expoente de x é -1, isto é: $x^{-1} + y = 2$.

Solução de uma equação linear

Observe que, atribuindo os valores 3 e -2, respectivamente, às variáveis x e y da equação $5x + 4y = 7$, obtemos a sentença verdadeira:

$$5 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = 7$$

Por isso, dizemos que o par ordenado $(3, -2)$ é uma solução dessa equação.

Assim, definimos:

Chama-se **solução** da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ toda ênupla (sequência de n elementos) de números $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ tal que a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Se não existir ênupla nessas condições, dizemos que a equação é **impossível**.

Exemplos

a) Uma solução da equação linear $4x + 2y = 14$ é o par ordenado $(1, 5)$, pois a sentença $4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 14$ é verdadeira.

b) Uma solução da equação linear $2x - 3y + z = 7$ é o terno ordenado $(2, 0, 3)$, pois a sentença $2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 3 = 7$ é verdadeira.

Notas:

1. A menos que se especifique o contrário, apresentaremos cada solução de uma equação linear obedecendo à ordem alfabética das variáveis, ou seja: (x, y), (x, y, z), (a, b, c) etc.
2. Nem sempre existe solução para uma equação linear; por exemplo, a equação $0x + 0y = 3$ não tem solução. Assim, essa equação é impossível.

Equação linear homogênea

Toda equação linear cujo termo independente é zero é chamada de **equação linear homogênea**.

Exemplos

a) $5x + 4y = 0$

b) $3x + 7y + z = 0$

Propriedade

Toda equação linear homogênea $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$ admite como solução a ênupla (0, 0, 0, ..., 0), chamada de **solução trivial** da equação homogênea.

A solução trivial de uma equação linear homogênea também pode ser chamada de solução nula ou solução imprópria.

Exemplos

a) A solução trivial da equação $2x + 9y = 0$ é o par ordenado (0, 0).

b) A solução trivial da equação $4x - 3y + z = 0$ é o terno ordenado (0, 0, 0).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Quantas soluções tem a equação linear $4x + 3y = 12$?

Resolução

Vamos atribuir alguns valores a uma das variáveis, por exemplo:

- para $x = 1$, temos: $4 \cdot 1 + 3y = 12 \Rightarrow y = \frac{8}{3}$
  Logo, o par $\left(1, \frac{8}{3}\right)$ é solução da equação.
- para $x = 6$, temos: $4 \cdot 6 + 3y = 12 \Rightarrow y = -4$
  Logo, o par $(6, -4)$ é solução da equação.

Observamos que, para cada valor atribuído à variável x, obtemos um valor de y tal que o par (x, y) é solução da equação. Assim, concluímos que a equação tem infinitas soluções.

2 Uma papelaria vende apenas três tipos de caneta esferográfica, A, B e C, aos preços unitários de R$ 1,00, R$ 2,00 e R$ 3,00, respectivamente. Uma pessoa pretende gastar R$ 15,00 nessa papelaria, comprando apenas canetas, com pelo menos uma de cada tipo. Quantas são as possibilidades de compra?

Resolução

Indicando por a, b e c as quantidades de canetas adquiridas dos tipos A, B e C, respectivamente, e observando os valores de cada uma delas, temos $a + 2b + 3c = 15$, portanto:

$$a = 15 - 2b - 3c$$

Como a, b e c são números naturais não nulos, deduzimos que:

- para $b = 1$, o maior valor possível de c é 4, pois para c maior que 4 teríamos como valor de a um número negativo, o que não convém;
- para $b = 2$, o maior valor possível de c é 3;
- para $b = 3$, o maior valor possível de c é 2;
- para $b = 4$, o maior valor possível de c é 2;
- para $b = 5$, o único valor possível de c é 1.

Note que o valor 5 é o máximo possível para b, pois, lembrando que a deve ser natural não nulo, se tivéssemos $b > 5$, teríamos $c \leq 0$, o que não convém. Logo, as possibilidades de compra são:

b	c	a
1	1	10
1	2	7
1	3	4
1	4	1
2	1	8
2	2	5
2	3	2
3	1	6
3	2	3
4	1	4
4	2	1
5	1	2

Concluímos, então, que há 12 possibilidades de compra.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Considerando a equação $3x - 2y = 20$:
- **a)** Qual é o valor de y para $x = 3$?
- **b)** Qual é o valor de y para $x = -7$?
- **c)** Sempre existirá um valor de y para qualquer valor atribuído a x?
- **d)** Quantos pares ordenados são soluções da equação $3x - 2y = 20$?

2 Considerando a equação linear $2x + 3y - z = 7$, faça o que se pede.
- **a)** Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:
  - **I.** O terno ordenado $(6, -2, -1)$ é solução dessa equação.
  - **II.** O terno ordenado $(1, 1, 2)$ é solução dessa equação.
- **b)** Determine os valores de p e q de modo que os ternos ordenados $(2, 1, p)$ e $(-1, q, 3)$ sejam soluções dessa equação.
- **c)** Obtenha duas outras soluções dessa equação, diferentes das apresentadas nos itens anteriores.

3 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) as afirmações:
- **a)** O terno ordenado $(-3, 1, 4)$ é solução da equação $x + 4y + 2z = 9$.
- **b)** O terno ordenado $(0, 3, -2)$ é solução da equação $2x + y - z = 1$.
- **c)** A quadra ordenada $(0, 0, 0, 0)$ é solução da equação $x + 4y + 3t - z = 0$.
- **d)** A equação $x + 2y = 5$ tem infinitas soluções.
- **e)** A equação $x + 2y = 5$ tem mais de uma solução com x e y inteiros.
- **f)** A equação $x + 2y = \sqrt{2}$ tem alguma solução com x e y inteiros.

4 Obtenha três soluções distintas da equação $x + 2y + z = 5$ tal que $x = 4$.

5 (Vunesp) Uma pessoa quer trocar duas cédulas de 100 reais por cédulas de 5, 10 e 50 reais, recebendo cédulas de todos esses valores e o maior número possível de cédulas de 50 reais. Nessas condições, qual é o número mínimo de cédulas que ela poderá receber?
- **a)** 8
- **b)** 9
- **c)** 10
- **d)** 11
- **e)** 12

6 Um empresário adquiriu máquinas do tipo A, que têm entre si a mesma velocidade de produção, e máquinas do tipo B, que têm entre si a mesma velocidade de produção. Se quatro máquinas A e três B produzem, em um mesmo intervalo de tempo, tantos parafusos quanto três máquinas A e cinco B, então podemos afirmar que:
- **a)** a produção da máquina A é o triplo da produção de B, no mesmo intervalo de tempo.
- **b)** a produção da máquina A é metade da produção de B, no mesmo intervalo de tempo.
- **c)** a produção da máquina A é o dobro da produção de B, no mesmo intervalo de tempo.
- **d)** a produção da máquina A é igual à produção de B, no mesmo intervalo de tempo.
- **e)** a produção da máquina A é $\frac{3}{2}$ da produção de B, no mesmo intervalo de tempo.

7 A terça parte da massa de um caminhão vazio somada com metade da massa da carga que ele carrega é igual ao dobro da massa dessa carga. Assim, a massa da carga equivale a:
- **a)** $\frac{2}{9}$ da massa do caminhão vazio.
- **b)** $\frac{3}{7}$ da massa do caminhão vazio.
- **c)** $\frac{2}{5}$ da massa do caminhão vazio.
- **d)** $\frac{7}{10}$ da massa do caminhão vazio.
- **e)** $\frac{7}{8}$ da massa do caminhão vazio.

8 De quantas maneiras diferentes é possível trocar R\$ 20,00 por notas de R\$ 1,00, R\$ 2,00 e R\$ 5,00, com pelo menos uma nota de cada um desses valores?
- **a)** 5
- **b)** 6
- **c)** 7
- **d)** 12
- **e)** 13

Resolva os exercícios complementares 1, 2 e 84 a 89.

Sistema linear

Todo sistema de equações formado exclusivamente por equações lineares é chamado de **sistema linear**.

Exemplo

O sistema $\begin{cases} 3x + y + 2z = 3 \\ x + 5y + 3z = 29 \\ 2y + 4z = 12 \end{cases}$ é um sistema linear nas incógnitas x, y e z.

A última equação desse sistema deve ser entendida como: $0x + 2y + 4z = 12$

Sistema linear homogêneo

Sistema linear homogêneo é todo sistema linear formado exclusivamente por equações lineares com termo independente igual a zero.

Exemplos

a) $\begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

Solução de um sistema linear

Chama-se **solução** de um sistema linear qualquer solução comum a todas as equações do sistema. O conjunto S formado por todas as soluções de um sistema linear é chamado de **conjunto solução** do sistema.

Um sistema pode não ter solução. Nesse caso, o conjunto solução é vazio.

Exemplos

a) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 3 \\ x + 5y + 3z = 29 \\ 2y + 4z = 12 \end{cases}$

Uma solução do sistema linear acima é o terno ordenado $(-1, 6, 0)$, pois esse terno é solução comum a todas as equações do sistema, isto é, todas as sentenças abaixo são verdadeiras:

$$\begin{cases} 3 \cdot (-1) + 6 + 2 \cdot 0 = 3 \\ -1 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 29 \\ 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 0 = 12 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

O sistema acima não tem solução, pois não existem dois números reais cuja soma seja simultaneamente 5 e 4. Logo, $S = \varnothing$.

c) $\begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases}$

No sistema linear homogêneo acima, se atribuirmos valor 0 (zero) a cada variável, vamos obter as sentenças verdadeiras:

$$\begin{cases} 5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 \\ 3 \cdot 0 - 0 + 4 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Concluímos, então, que o terno $(0, 0, 0)$ é uma solução desse sistema. Esse terno é chamado de **solução trivial** do sistema linear homogêneo.

Notas:

1. Observe que todo sistema linear homogêneo admite como solução a ênupla $(0, 0, 0, ..., 0)$, chamada de **solução trivial** do sistema.
2. Como todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial, concluímos que todo sistema linear homogêneo é possível, ou seja, tem solução.
3. A solução trivial de um sistema linear homogêneo também é chamada de **solução nula** ou **solução imprópria** do sistema.
4. Se um sistema linear homogêneo admite outra solução além da trivial, ela é chamada de **solução própria**.

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que tem: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

Sistema possível e determinado (SPD) é todo sistema linear que admite uma única solução.

Exemplo

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ \phantom{x + {}} y = 2 \end{cases}$$

Esse sistema linear admite uma única solução, que é o par ordenado (3, 2). Por isso, é classificado como SPD (sistema possível e determinado).

Sistema possível e indeterminado (SPI) é todo sistema linear que admite mais de uma solução.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

Esse sistema linear admite mais de uma solução: (2, 1), (4, −3), (0, 5) etc. Por isso é classificado como SPI (sistema possível e indeterminado).

Demonstra-se que se um sistema linear admite mais de uma solução, então ele admite infinitas soluções. Assim, esse sistema possui infinitas soluções.

Sistema impossível (SI) é todo sistema linear que não admite solução alguma.

Exemplo

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Esse sistema é impossível (SI), pois não existem dois números x e y cuja soma seja igual a 8 e também igual a 5.

Resumindo, temos:

- Sistema linear
  - Possível
    - Determinado (uma única solução)
    - Indeterminado (mais de uma solução)
  - Impossível (nenhuma solução)

Classificação de um sistema linear homogêneo

Todo sistema linear homogêneo é possível, pois admite pelo menos a solução trivial (solução nula). Assim, para um sistema linear homogêneo, o quadro acima se resume a:

- Sistema linear homogêneo
  - Possível e determinado (possui apenas a solução trivial)
  - Possível e indeterminado (possui soluções além da trivial)

Exemplos

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5y = 0 \end{cases}$

Esse sistema linear homogêneo é possível e determinado, pois sua única solução é (0, 0), chamada de solução trivial (ou solução nula ou solução imprópria).

b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

Esse sistema linear homogêneo é possível e indeterminado, pois além da solução trivial (0, 0), ele admite outras soluções: (2, 1), (10, 5), $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ etc., chamadas de soluções próprias.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9 Qual das alternativas apresenta uma solução do sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$?

a) (8, 1, 0)
b) (10, −1, 0)
c) (1, 2, 3)
d) (9, 0, 0)
e) (1, 1, 1)

10 Qual dos ternos não é solução do sistema a seguir?

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

a) (−3, 2, 0)
b) (−7, 3, 1)
c) (−11, 4, 2)
d) (1, 1, −1)
e) (3, −1, 0)

11 Classifique cada um dos sistemas seguintes como SPD (sistema possível e determinado), SPI (sistema possível e indeterminado) ou SI (sistema impossível):

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases}$

12 Considere o sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 6x - 2y = 3k - 2 \end{cases}$$

a) Determine o valor de k para que esse sistema seja homogêneo.
b) Para o valor encontrado no item **a**, qual é a classificação desse sistema?

13 Mostre que o sistema abaixo não tem solução na forma $(1, p, 4p)$, com $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 13 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

14 Substitua o parâmetro k por um número real tal que o sistema linear corresponda à classificação indicada.

a) SPD (sistema possível e determinado)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ ky = 3 \end{cases}$$

b) SPI (sistema possível e indeterminado)

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ ky = 0 \end{cases}$$

c) SI (sistema impossível)

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ ky = 7 \end{cases}$$

15 Sabendo que o terno (1, 4, −5) é uma solução do sistema linear nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + ay + bz = 0 \\ cx + y + dz = 0 \\ ex + fy + z = 0 \end{cases}$$

assinale a alternativa que apresenta uma afirmação verdadeira.

a) Os coeficientes a, b, c, d, e, f podem ser todos iguais a 0.
b) Existem valores reais dos coeficientes a, b, c, d, e, f para os quais o sistema é possível e determinado.
c) Existem valores reais dos coeficientes a, b, c, d, e, f para os quais o sistema é impossível.
d) O sistema é possível e indeterminado.

Resolva os exercícios complementares 3 a 9.

Resolução de um sistema linear

Objetivos

- **Resolver** um sistema linear escalonado.
- **Escalonar** um sistema linear.
- **Classificar** um sistema linear.

Termo e conceito

- sistema linear escalonado

Resolver um sistema linear significa obter o conjunto S, chamado de **conjunto solução do sistema**, cujos elementos são todas as soluções do sistema. Entre os métodos existentes para a resolução de um sistema linear, estudaremos o escalonamento. Antes, porém, vamos definir sistema linear escalonado e aprender como resolvê-lo.

Sistema linear escalonado

Um sistema linear é **escalonado** (ou está **na forma escalonada**) se, e somente se:

- todas as equações apresentam as incógnitas em uma mesma ordem;
- em cada equação existe pelo menos um coeficiente, de alguma incógnita, não nulo;
- existe uma ordem para as equações tal que, de uma equação para outra, aumenta o número de coeficientes nulos que antecedem o primeiro coeficiente não nulo.

Exemplos

Os três sistemas lineares seguintes são escalonados:

a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 0x + 5y + 4z = 8 \\ 0x + 0y + 3z = 6 \end{cases}$, que pode ser representado simplesmente por

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 5y + 4z = 8 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x + 4y - 2t + z = 5 \\ 0x + 3y + t - 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0t + 2z = 4 \end{cases}$, ou simplesmente $\begin{cases} x + 4y - 2t + z = 5 \\ 3y + t - 3z = 1 \\ 2z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ 0x - 5y = 1 \end{cases}$, ou simplesmente $\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ -5y = 1 \end{cases}$

Contraexemplos

Os seguintes sistemas não são escalonados:

a) $\begin{cases} 3x + y + 5z = 2 \\ 0x + 2y - 2z = 1 \\ 0x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$

Esse sistema não está na forma escalonada porque o número de coeficientes nulos que antecedem o primeiro coeficiente não nulo de cada equação não aumenta de uma equação para outra (da 2ª para a 3ª equação).

b) $\begin{cases} 7x - 3y - z = 5 \\ 0x + 3y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 3 \end{cases}$

Esse sistema não é escalonado porque são nulos todos os coeficientes das incógnitas em uma das equações (na 3ª).

Resolução de um sistema linear escalonado

Existem apenas dois tipos de sistema linear escalonado:

- 1º tipo: com o número de equações igual ao número de incógnitas;
- 2º tipo: com o número de equações menor que o número de incógnitas.

Vamos apresentar o modo de resolução de cada um desses tipos.

Resolução de um sistema linear escalonado do 1º tipo

Observe o sistema:

$$\begin{cases} 4x + y + 3z = 5 & \text{(I)} \\ \quad 5y - 2z = 4 & \text{(II)} \\ \qquad 3z = 9 & \text{(III)} \end{cases}$$

Trata-se de um sistema linear escalonado do 1º tipo, pois tem o número de equações igual ao número de incógnitas. Para solucionar esse sistema, resolvemos as equações de baixo para cima:

- Determinamos o valor de z na equação (III):

  $3z = 9 \Rightarrow z = 3$
- Substituímos z por 3 na equação (II):

  $5y - 2 \cdot 3 = 4 \Rightarrow y = 2$
- Substituímos y e z por 2 e 3, respectivamente, na equação (I):

  $4x + 2 + 3 \cdot 3 = 5 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Logo, o conjunto solução do sistema é: $S = \left\{\left(-\frac{3}{2}, 2, 3\right)\right\}$

Propriedade

> Todo sistema linear escalonado do 1º tipo é possível e determinado (SPD).

Resolução de um sistema linear escalonado do 2º tipo

Observe o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ \quad y - 4z = 2 \end{cases}$$

Trata-se de um sistema linear escalonado do 2º tipo, pois tem o número de equações menor que o número de incógnitas.

Todo sistema linear escalonado desse tipo admite pelo menos uma variável que pode assumir qualquer valor real, sendo, por isso, chamada de **variável livre** ou **variável arbitrária** do sistema.

Uma convenção, não obrigatória, é escolher como variável livre a última variável de qualquer equação do sistema, neste caso, a variável z. Para entender o significado do termo "livre" nesse contexto, vamos atribuir alguns valores reais à variável livre z:

- Se fizermos $z = 1$, teremos:

$$\begin{cases} x - 3y + 2 \cdot 1 = 1 \\ \quad y - 4 \cdot 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -1 & \text{(I)} \\ \quad y = 6 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$x - 3 \cdot 6 = -1 \Rightarrow x = 17$$

Assim, para $z = 1$, obtemos a solução (17, 6, 1).

- Se fizermos $z = 0$:

$$\begin{cases} x - 3y + 2 \cdot 0 = 1 \\ y - 4 \cdot 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 & \text{(I)} \\ y = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$x - 3 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x = 7$$

Assim, para $z = 0$, obtemos a solução $(7, 2, 0)$.

Observamos que, para cada valor atribuído à variável livre, encontramos uma solução para o sistema; logo, podemos obter infinitas soluções, ou seja, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Para resolver o sistema, expressamos suas infinitas soluções em função da variável livre. Nesse caso, exibimos os valores de x e y em função de z:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y - 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & \text{(I)} \\ y = 2 + 4z & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$x - 3(2 + 4z) + 2z = 1 \Rightarrow x - 6 - 12z + 2z = 1$$
$$\therefore x = 7 + 10z$$

Assim, o conjunto solução do sistema é:

$$S = \{(7 + 10z, 2 + 4z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$$

Propriedade

Todo sistema linear escalonado do 2º tipo é possível e indeterminado (SPI).

Notas:

1. Chama-se **grau de indeterminação** de um sistema escalonado do 2º tipo o número de variáveis livres do sistema. Esse número é a diferença entre o número de variáveis e o número de equações, nessa ordem. Por exemplo, o sistema anterior tem uma única variável livre:

$$\underbrace{3}_{\text{nº de variáveis}} - \underbrace{2}_{\text{nº de equações}} = \underbrace{1}_{\text{nº de variáveis livres}}$$

Ou seja, o grau de indeterminação desse sistema é 1.

2. A escolha da variável livre é puramente convencional. No sistema anterior, por exemplo, poderíamos ter escolhido y como variável livre e, nesse caso, o conjunto solução S seria:

$$S = \left\{\left(\frac{4 + 5y}{2}, y, \frac{y - 2}{4}\right), \text{ com } y \in \mathbb{R}\right\}$$

Poderíamos ainda escolher x como variável livre e, nesse caso:

$$S = \left\{\left(x, \frac{2x - 4}{5}, \frac{x - 7}{10}\right), \text{ com } x \in \mathbb{R}\right\}$$

É claro que, independentemente da variável (x, y ou z) escolhida como livre, os conjuntos solução do sistema anterior são iguais, isto é:

$$\left\{\left(x, \frac{2x - 4}{5}, \frac{x - 7}{10}\right), \text{ com } x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\frac{4 + 5y}{2}, y, \frac{y - 2}{4}\right), \text{ com } y \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \{(7 + 10z, 2 + 4z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16 Classifique e dê o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 \\ 4y + 5z = 19 \\ 2z = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 4z = 1 \\ 3z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 5y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + 3y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

17 Todos os 152 participantes de um congresso são professores de Matemática, Física ou Química. Sabendo-se que cada um deles leciona apenas uma dessas matérias e que o número de professores de Física é o dobro do número de professores de Química, qual é o menor número possível de professores de Matemática que participam desse congresso?

18 Dê o conjunto solução do sistema linear escalonado:

$$\begin{cases} x + 2y - t + 3z = 2 \\ y + t - 3z = 1 \end{cases}$$

(*Atenção*: O conjunto solução desse sistema deve ficar em função de duas variáveis livres. Conforme convencionamos, as quadras ordenadas devem ser apresentadas segundo a ordem alfabética das variáveis: t, x, y, z.)

Resolva os exercícios complementares 10 e 11.

Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares, A e A', são **equivalentes** se, e somente se, têm o mesmo conjunto solução. Indicamos que A e A' são equivalentes por $\boldsymbol{A \sim A'}$.

Exemplos

Os sistemas $A: \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ e $A': \begin{cases} x + y = 7 \\ y = 3 \end{cases}$ são equivalentes, pois ambos têm como conjunto solução $S = \{(4, 3)\}$.

Propriedades

Sendo A, A' e A'' sistemas lineares, verificam-se as seguintes propriedades:

- Reflexiva: $A \sim A$
- Simétrica: Se $A \sim A'$, então $A' \sim A$
- Transitiva: Se $A \sim A'$ e $A' \sim A''$, então $A \sim A''$

Escalonamento de um sistema linear

A resolução de um sistema linear escalonado é extremamente simples, conforme vimos. Isso nos motiva a estudar um método que transforma um sistema linear possível e não escalonado em um sistema equivalente na forma escalonada. Por exemplo, observe o sistema:

$$A: \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$$

Para escaloná-lo, precisamos zerar um dos coeficientes da última equação. Vamos, então, multiplicar a 1ª equação por (-2), obtendo o sistema equivalente:

$$A': \begin{cases} -2x - 6y = -10 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$$

Substituindo, no sistema A', a 2ª equação pela soma dela com a 1ª, temos o sistema:

$$A'': \begin{cases} -2x - 6y = -10 \\ y = 2 \end{cases}$$

Note que $A'' \sim A$ e que A'' está na forma escalonada.

A técnica que usaremos para transformar um sistema linear possível em um equivalente na forma escalonada é fundamentada nos teoremas seguintes.

Teoremas

- Permutando entre si duas ou mais equações de um sistema linear A, obtemos um novo sistema linear A', equivalente a A.
- Multiplicando (ou dividindo) ambos os membros de uma equação de um sistema linear A por uma constante k, com $k \neq 0$, obtemos um novo sistema A', equivalente a A.
- Substituindo uma equação de um sistema linear A pela soma, membro a membro, dessa equação com outra desse sistema, obtemos um novo sistema A', equivalente a A.

Usando esses três teoremas, podemos escalonar qualquer sistema linear possível.

Exemplo

Vamos resolver o seguinte sistema aplicando a técnica do escalonamento:

$$A: \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 & \text{(I)} \\ 2x + y + z = 4 & \text{(II)} \\ 3x + 3y + z = 14 & \text{(III)} \end{cases}$$

Inicialmente, conseguimos os zeros necessários nos coeficientes de x; para isso:

- substituímos a equação (II) pela soma dela com a equação (I) multiplicada por -2;
- substituímos a equação (III) pela soma dela com a equação (I) multiplicada por -3:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 14 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x - 3y - 8z = -7 \end{cases}$$

Os produtos da equação (I) por -2 e por -3 podem ser calculados mentalmente. Não é necessário escrevê-los.

No sistema anterior, substituímos a última equação pela soma dela com a segunda multiplicada por -1:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x - 3y - 8z = -7 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x - 0y - 3z = 3 \end{cases}$$

Chegamos, assim, a um sistema escalonado do primeiro tipo equivalente ao sistema A, em que $z = -1$, $y = 5$ e $x = 0$. Concluímos, então, que A é SPD e que seu conjunto solução é: $S = \{(0, 5, -1)\}$

Notas:

1. Se durante o escalonamento do sistema do exemplo anterior ocorresse uma equação da forma $0x + 0y + 0z = b$, com $b \neq 0$, então o sistema seria **impossível**, pois tal equação **não** é satisfeita para nenhum terno (x, y, z).
2. Se durante o escalonamento do sistema anterior ocorresse uma equação da forma $0x + 0y + 0z = 0$, eliminaríamos essa equação e o novo sistema obtido também seria equivalente ao sistema original.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 Escalonar, classificar e dar o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ 5x + 7y + 8z = 1 \end{cases}$$

Resolução

- Substituímos a segunda equação pela soma dela multiplicada por 3 com a primeira equação multiplicada por -2.
- Substituímos a terceira equação pela soma dela multiplicada por 3 com a primeira equação multiplicada por -5.

Façamos tais produtos mentalmente, evitando assim muitas passagens, isto é:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 & \times\ -2 \quad -5 \\ 2x + 3y + 3z = 0 & \times\ 3 \quad + \\ 5x + 7y + 8z = 1 & \times\ 3 \quad + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + \ \ y - \ \ z = -2 & \times\ -1 \\ 0x + \ \ y - \ \ z = -2 & + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + \ \ y - \ \ z = -2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Eliminando a última equação, chegamos ao sistema escalonado equivalente ao sistema original:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ \qquad\ \ y - \ \ z = -2 \end{cases}$$

Como esse sistema escalonado é do segundo tipo (número de equações menor que o número de incógnitas), sua classificação é SPI (sistema possível e indeterminado).

Resolvendo em função da variável livre z, temos:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ \qquad\ \ y - \ \ z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 & \text{(I)} \\ \qquad\quad y = z - 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$3x + 4(z - 2) + 5z = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 4z - 8 + 5z = 1$

$\therefore x = \dfrac{9 - 9z}{3} = 3 - 3z$

Logo, o conjunto solução é:

$S = \{(3 - 3z, z - 2, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$

4 Escalonar, classificar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} \ \ x + 2y = 1 \\ 3x + 7y = 5 \\ 2x + \ \ y = 3 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} \ \ x + 2y = 1 & \times\ -3 \quad -2 \\ 3x + 7y = 5 & + \\ 2x + \ \ y = 3 & + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \ \ x + 2y = 1 \\ 0x + \ \ y = 2 & \times\ 3 \\ 0x - 3y = 1 & + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \ \ x + 2y = 1 \\ 0x + \ \ y = 2 \\ 0x + 0y = 7 \end{cases}$$

Note que não conseguimos um sistema escalonado, pois os coeficientes da última equação são todos nulos e o termo independente é não nulo; porém, a tentativa do escalonamento nos mostrou que o sistema é **impossível**, pois a última equação não é satisfeita para nenhum par (x, y).
Portanto, a classificação do sistema é SI e $S = \varnothing$.

5 O Ministério dos Transportes investiu 50 milhões de dólares na construção de três estradas, A, B e C. O custo da estrada B foi o dobro do custo de C, e A custou 2 milhões de dólares a mais que o custo das outras duas estradas juntas. Calcular o valor gasto com cada uma das estradas.

Resolução

Indicando por a, b e c os custos, em milhões de dólares, das estradas A, B e C, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 50 \\ b = 2c \\ a = b + c + 2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \ \ a + b + \ \ c = 50 & \times\ -1 \\ 0a + b - 2c = 0 \\ \ \ a - b - \ \ c = 2 & + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \ \ a + \ \ b + \ \ c = 50 \\ 0a + \ \ b - 2c = 0 & \times\ 2 \\ 0a - 2b - 2c = -48 & + \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \ \ a + \ \ b + \ \ c = 50 & \text{(I)} \\ 0a + \ \ b - 2c = 0 & \text{(II)} \\ 0a - 0b - 6c = -48 & \text{(III)} \end{cases}$$

- De (III), temos $c = 8$.
- Substituímos $c = 8$ em (II), obtendo $b = 16$.
- Substituímos $c = 8$ e $b = 16$ em (I), obtendo $a = 26$.

Concluímos, então, que as estradas A, B e C custaram, respectivamente, 26, 16 e 8 milhões de dólares.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

19 Para que valor real de k os sistemas A e A', a seguir, são equivalentes?

$$A: \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad A': \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = k \end{cases}$$

20 Escalone, classifique e dê o conjunto solução dos sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 5z = 7 \\ 3x + 7y - 6z = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 8y - 2z = 7 \\ 4x + 10y - 3z = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 5x + 6y + 14z = 15 \\ 3x + 4y + 8z = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 3y - 2z = 2 \\ 8x + 7y + 10z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 5y = 1 \\ 5x + 9y = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ -x - 15y + 5z = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

21 (Unirio) Um estudo concluiu que, com o objetivo de compensar a poluição produzida por carros e ônibus, seria necessário plantar uma árvore para cada 1.000 km percorridos por um carro e cinco árvores para cada 1.000 km percorridos por um ônibus. Um ecologista fez uma viagem de 4.000 quilômetros, viajando uma parte num carro e o restante em um ônibus. Se ele plantou 16 árvores com o objetivo de compensar a poluição produzida por esses dois meios de transporte nesta viagem, podemos afirmar que ele percorreu a mais:

a) 1.000 km no ônibus de que no carro.
b) 1.500 km no carro de que no ônibus.
c) 2.000 km no carro de que no ônibus.
d) 1.500 km no ônibus de que no carro.
e) 2.000 km no ônibus de que no carro.

22 Para uma partida de futebol, foram colocados à venda três tipos de ingresso:

- para o setor verde, o preço era R$ 12,00;
- para o setor azul, o preço era R$ 18,00;
- para o setor branco, o preço era R$ 25,00.

Sabendo que a renda total da partida foi R$ 620.000,00 para 38.000 torcedores pagantes e que o número de ingressos vendidos para o setor verde foi o dobro do número de ingressos vendidos para o setor azul, podemos concluir que:

a) 12.000 torcedores pagaram ingresso para o setor azul.
b) 20.000 torcedores pagaram ingresso para o setor verde.
c) 6.800 torcedores pagaram ingresso para o setor branco.
d) menos de 50% do total de torcedores pagaram ingresso para o setor verde.
e) menos de 20% do total de torcedores pagaram ingresso para o setor branco.

23 Catarina, Felipe e Neusa foram a um supermercado e compraram arroz, feijão e açúcar das mesmas marcas. Catarina gastou R$ 9,20 na compra de 2 kg de arroz, 3 kg de feijão e 1 kg de açúcar; e Felipe gastou R$ 15,20 na compra de 4 kg de arroz, 2 kg de feijão e 6 kg de açúcar. Neusa, que comprou 1 kg de arroz, 1 kg de feijão e 1 kg de açúcar, gastou:

a) R$ 5,20
b) R$ 3,80
c) R$ 4,20
d) R$ 5,60
e) R$ 4,90

24 A densidade de uma amostra de matéria é a razão entre sua massa e o volume por ela ocupado, nessa ordem, isto é:

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

Durante uma experiência fez-se variar a massa e o volume de uma substância de modo que sua densidade permanecesse constante.
Cada linha da tabela abaixo mostra a massa e o volume dessa substância em determinados estágios da experiência.

Massa (g)	Volume (cm^3)
x	18
y	6
z	2

a) Equacione esse problema por meio de um sistema linear homogêneo.
b) Obtenha todos os ternos ordenados (x, y, z) de números reais positivos que satisfazem o sistema do item **a**.

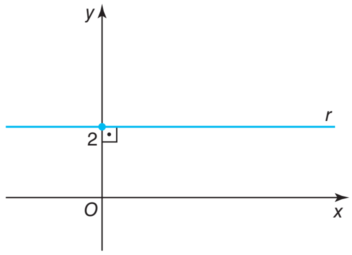
Resolva os exercícios complementares 12 a 21 e 90 a 112.

Interpretação geométrica de um sistema linear com duas incógnitas

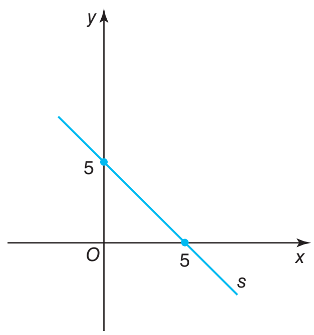
É possível interpretar geometricamente diversos conceitos estudados em Álgebra. Em geral, essa interpretação facilita o entendimento de definições e propriedades por meio do uso de figuras.

Faremos a seguir uma interpretação gráfica dos sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas, mas antes é necessária uma breve revisão de alguns aspectos da função constante e da função afim.

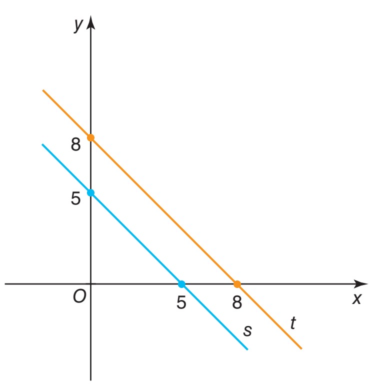
- A função constante, que é do tipo $y = k$, sendo k uma constante real, tem como gráfico uma reta paralela ao eixo das abscissas. Por exemplo, o gráfico da função constante $y = 2$ é a reta r representada a seguir:



- A função afim, que é do tipo $y = ax + b$, em que a e b são constantes reais, com $a \neq 0$, tem como gráfico uma reta oblíqua aos eixos coordenados. Por exemplo, a função afim $y = -x + 5$ tem como gráfico a reta s representada a seguir:

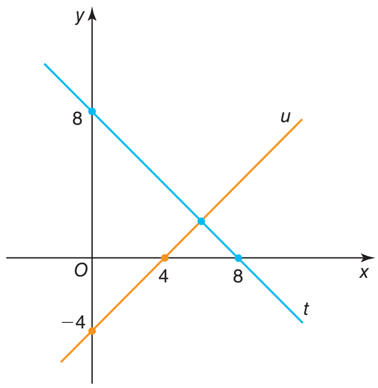


Se duas funções afins apresentam o mesmo coeficiente de x e termos independentes diferentes, então as retas representadas por elas são paralelas distintas. Por exemplo, as funções afins $y = -x + 5$ e $y = -x + 8$ têm como respectivos gráficos as retas s e t representadas a seguir:



Se duas funções afins tiverem o mesmo coeficiente de x e o mesmo termo independente, então elas são representadas por retas paralelas coincidentes.

Se duas funções afins tiverem diferentes coeficientes de x, então elas são representadas por retas concorrentes. Por exemplo, as funções afins $y = -x + 8$ e $y = x - 4$ têm como respectivos gráficos as retas t e u representadas a seguir:



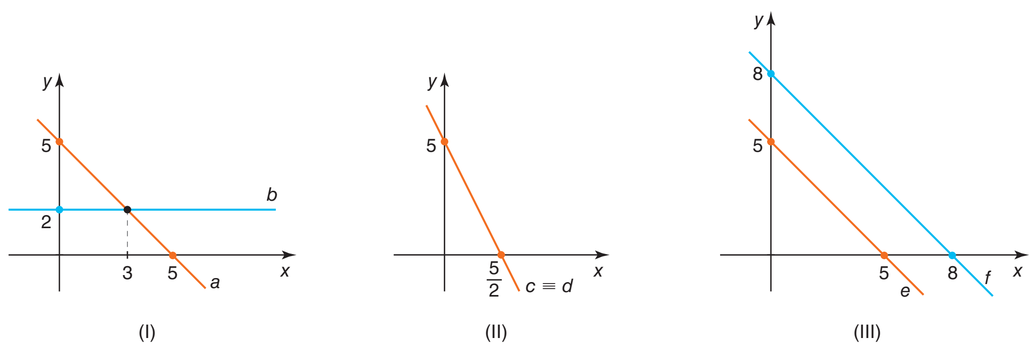
Agora, vamos interpretar graficamente um sistema linear. Como exemplo, considere os sistemas:

(I) $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ (III) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 8 \end{cases}$

Isolando a variável y em cada uma das equações desses sistemas, obtemos:

(I) $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$ (III) $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -x + 8 \end{cases}$

No primeiro sistema, temos uma função afim e uma função constante; nos demais sistemas temos funções afins. Portanto, em cada sistema, as equações representam retas no plano cartesiano:



Note que:

- As retas a e b, que representam as equações do sistema (I), são concorrentes, ou seja, têm um único ponto comum, que é (3, 2). Esse ponto é a única solução do sistema (I).

Um sistema com duas equações e duas incógnitas é possível e determinado se, e somente se, as retas representadas por suas equações são concorrentes.

- As retas c e d, que representam as equações do sistema (II), são coincidentes, ou seja, têm infinitos pontos comuns: todo ponto de c pertence a d e todo ponto de d pertence a c. Esses infinitos pontos são as soluções do sistema (II).

Um sistema com duas equações e duas incógnitas é possível e indeterminado se, e somente se, as retas representadas por suas equações são coincidentes.

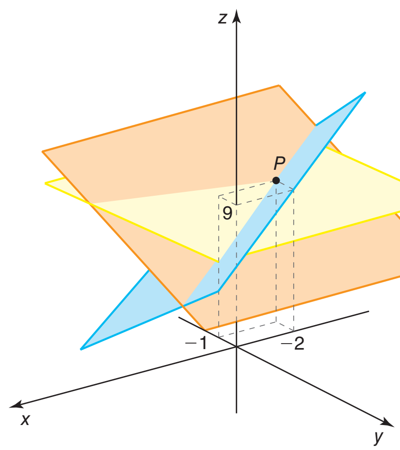
- As retas e e f, que representam as equações do sistema (III), são paralelas distintas, ou seja, não têm ponto comum e são coplanares. Logo, o sistema (III) não tem solução.

Um sistema com duas equações e duas incógnitas é impossível se, e somente se, as retas representadas por suas equações são paralelas distintas.

Como duas retas do plano cartesiano têm um único ponto comum, ou têm infinitos pontos comuns ou não têm ponto comum, podemos concluir que um sistema linear com duas equações e duas incógnitas tem uma única solução, ou infinitas soluções ou não tem solução. Prova-se que essa conclusão pode ser generalizada para um sistema linear qualquer com n equações e m incógnitas.

Nota:

Um sistema cartesiano ortogonal tridimensional é formado por três eixos reais Ox, Oy e Oz, perpendiculares entre si na origem O. Demonstra-se que a representação gráfica de uma equação linear em três variáveis x, y e z é um plano em relação a esse sistema. Assim, o conjunto solução de um sistema linear com três incógnitas é interpretado, geometricamente, como a intersecção de planos, que pode resultar em um ponto, ou em uma reta, ou em um plano ou no conjunto vazio. Por exemplo, a solução do sistema linear $\begin{cases} x - y + z = 8 \\ y + z = 8 \\ z = 9 \end{cases}$ é o ponto $P(-2, -1, 9)$ de intersecção dos planos representados no espaço cartesiano ao lado.



Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Interpretação geométrica de um sistema linear*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

25 Usando as propriedades da função afim que revisamos, mostre que:

a) as equações do sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$ têm como gráficos duas retas concorrentes do plano cartesiano.

b) as equações do sistema linear $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 6x + 10y = 2 \end{cases}$ têm como gráficos duas retas paralelas coincidentes do plano cartesiano.

c) as equações do sistema linear $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 3x + 12y = 1 \end{cases}$ têm como gráficos duas retas paralelas distintas do plano cartesiano.

26 Considere o sistema de equações do 1º grau:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

a) Represente em um mesmo plano cartesiano as retas representadas por suas equações.

b) Indique no gráfico construído no item **a** as coordenadas do ponto comum às retas.

27 A partir da posição relativa das retas representadas pelas equações do sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ ax + 6y = b \end{cases}$, nas variáveis x e y, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, classifique cada uma das afirmações a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) Para $a = 4$ e $b = 8$, o sistema é possível e determinado.

b) Para $a = 5$, o sistema é possível e determinado.

c) Para $a = 4$ e $b = 10$, o sistema é possível e indeterminado.

d) Para $a = 4$ e $b = 12$, o sistema é impossível.

e) Para $a = 0$ e $b = 0$, o sistema é possível e determinado.

f) Para $a = 2$ e $b = 5$, o sistema é impossível.

Resolva os exercícios complementares 22 e 23.

Os sistemas lineares e o conceito de determinante

Objetivos

- **Calcular** determinantes de ordens 2 e 3.
- **Classificar** um sistema linear usando o conceito de determinante e a técnica de escalonamento.
- **Discutir** um sistema linear.

Termos e conceitos

- determinante de ordem 2
- determinante de ordem 3

A origem dos determinantes

O estudo dos sistemas lineares levou alguns matemáticos do século XVII a desenvolver a **teoria dos determinantes**.

Essa teoria surgiu, quase simultaneamente, no Japão e na Europa, embora o matemático japonês Seki a tenha publicado primeiro, em 1683, na obra *Kake fukudai no ho*, em que apresenta um método geral para o cálculo de determinantes.

Na Europa, no mesmo ano de 1683, o matemático alemão Leibniz escreveu ao matemático francês L'Hospital sobre a classificação de um sistema linear em que aplicava um novo tipo de cálculo, que hoje chamamos de **determinante**.

Takakazu Seki Kowa (1642-1708)

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Guillaume François Antoine, marquês de L'Hospital (1661-1704)

O determinante é um número obtido por meio de multiplicações e adições dos coeficientes de um sistema linear, conforme veremos a seguir.

Determinante de ordem 2

Vamos considerar o seguinte sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Aplicando os teoremas usados no escalonamento, obtemos um sistema equivalente da seguinte maneira:

$$\begin{cases} ax + by = p \xrightarrow{\times} (-c) \\ cx + dy = q \xrightarrow{\times} (a) \end{cases} + \sim \begin{cases} ax + by = p \\ (ad - cb)y = aq - cp \end{cases}$$

Um único valor de y satisfará essa última equação se, e somente se, o coeficiente de y na última equação for diferente de zero, ou seja, se $ad - cb \neq 0$. Consequentemente, haverá um único par ordenado como solução do sistema, logo o sistema será possível e determinado. Assim, concluímos:

$$ad - cb \neq 0 \Leftrightarrow \text{SPD}$$

A expressão **($ad - cb$)** é chamada de **determinante** da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, formada pelos coeficientes do sistema original, em que a 1ª coluna é composta pelos coeficientes de x e a 2ª, pelos de y.

Indicamos esse determinante D por:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Por estar associado a uma matriz de ordem 2, dizemos que esse determinante tem **ordem 2**.

Note que um determinante de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem, da matriz dos coeficientes do sistema:

diagonal secundária

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

diagonal principal

Exemplos

a) Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema $\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$, temos:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14$$

Como $D \neq 0$, concluímos que o sistema é possível e determinado (SPD).

b) Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x + 9y = 2 \end{cases}$, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 0$$

Como $D = 0$, o sistema **não** é possível e determinado. Restam, portanto, duas alternativas: o sistema é impossível ou é possível e indeterminado. Para saber qual das duas alternativas é correta, basta escalonar o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \quad \times(-3) \\ 3x + 9y = 2 \quad + \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = -1 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível.

Nota:

Matriz e determinante são entes distintos: matriz é uma tabela e determinante é um número.

Determinante de ordem 3

Vamos considerar o seguinte sistema linear nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases}$$

Aplicando os teoremas usados no escalonamento, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ 0x + (ae - bd)y + (af - dc)z = aq - pd \\ 0x + 0y + (aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb)z = aer + bqg + pdh - gep - hqa - rdb \end{cases}$$

Esse sistema será possível e determinado se, e somente se, o coeficiente de z na última equação for diferente de zero, isto é:

$$aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb \neq 0 \iff \text{SPD}$$

Essa expressão é chamada de **determinante** da matriz dos coeficientes do sistema, em que a 1ª, a 2ª e a 3ª colunas são formadas pelos coeficientes de x, y e z do sistema original, respectivamente. Indicamos esse determinante D por:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Para facilitar o cálculo desse determinante, o matemático francês Pierre Frederic Sarrus (1798-1861) criou a regra prática apresentada a seguir, conhecida como **regra de Sarrus**.

- Repetimos, à direita do determinante, as duas primeiras colunas e desenhamos as seguintes setas:

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

- Multiplicamos os três números alinhados em cada seta, conservando o sinal de cada produto obtido na direção da diagonal principal e invertendo o sinal de cada produto obtido na direção da diagonal secundária.

$$\begin{array}{c} -gec \quad -hfa \quad -idb \\ \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \\ aei \quad bfg \quad cdh \end{array}$$

- Finalmente, adicionamos os seis resultados calculados:

$$D = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Exemplo

Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + 5z = 2 \\ 3x + y - 2z = 6 \end{cases}$, temos:

$$\begin{array}{c} 9 \quad -10 \quad 2 \\ \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{matrix} \\ 4 \quad 15 \quad 3 \end{array}$$

$$D = 4 + 15 + 3 + 9 - 10 + 2 = 23$$

Como $D \neq 0$, concluímos que o sistema é possível e determinado (SPD).

Generalização

Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes de um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas, temos:

$$D \neq 0 \iff \text{SPD}$$

$$D = 0 \iff \text{SPI ou SI}$$

Notas:

1. Vimos que, se $D = 0$, ficamos entre duas alternativas, SPI ou SI. Para identificar qual das alternativas é a correta, basta escalonar o sistema.
2. Todo sistema linear homogêneo é possível, pois admite pelo menos a solução trivial. Assim, para esse tipo de sistema o quadro anterior se resume a:

> Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes de um sistema linear **homogêneo** com número de equações igual ao número de incógnitas, temos:
>
> $D \neq 0 \iff$ SPD (apenas a solução trivial)
>
> $D = 0 \iff$ SPI (solução trivial e soluções próprias)

3. Um sistema linear com número de equações diferente do número de incógnitas não pode ser classificado pelo determinante da matriz dos coeficientes, pois essa matriz não é quadrada e, portanto, não existe o determinante. Nesse caso, a classificação pode ser feita pelo escalonamento do sistema.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6 Para que valores reais de m o sistema nas incógnitas x, y e z abaixo é possível e determinado?

$$A: \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - 2y = 3 \\ x + my - 4z = -1 \end{cases}$$

Resolução

Observando que o coeficiente de z na 2ª equação é zero, podemos representar esse sistema sob a forma:

$$A: \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - 2y + 0z = 3 \\ x + my - 4z = -1 \end{cases}$$

Esse sistema será possível e determinado se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, isto é:

$$A \text{ é SPD} \iff \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & m & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculando o determinante D da matriz e impondo $D \neq 0$, temos:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & -8 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & m & -4 & 1 & m \\ & & 24 & 0 & -4m \end{array}$$

$24 - 4m - 8 + 8 \neq 0$

$\therefore m \neq 6$

Logo, A é SPD para todo número real m, com $m \neq 6$.

7 Para que valores reais de p o sistema homogêneo nas variáveis x e y, abaixo, admite apenas a solução trivial?

$$\begin{cases} px + y = 0 \\ x + py = 0 \end{cases}$$

Resolução

Um sistema linear homogêneo admite apenas a solução trivial quando for possível e determinado. Para que isso ocorra, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser diferente de zero. Assim, no sistema anterior devemos ter:

$$\begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow p^2 - 1 \neq 0$$

$\therefore p^2 \neq 1 \Rightarrow p \neq 1$ e $p \neq -1$

Logo, o sistema admite apenas a solução trivial para qualquer número real p, com $p \neq 1$ e $p \neq -1$.

8 Determinar k, sendo k um número real, de modo que o sistema nas incógnitas x, y e z abaixo admita soluções diferentes da trivial.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \\ -2x + 5y + kz = 0 \end{cases}$$

Resolução

Como o sistema é homogêneo, ele terá soluções além da trivial se, e somente se, for SPI. Para que isso ocorra, basta impor que o determinante D da matriz dos coeficientes seja nulo, isto é:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & -6 & 20 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & k & -2 & 5 \\ & & 6k & 4 & 0 \end{array}$$

$D = 0 \iff 6k + 4 - 6 + 20 = 0$

$\therefore k = -3$

Assim, o sistema terá outras soluções, além da trivial, se, e somente se, $k = -3$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

28 Calcule o determinante da matriz dos coeficientes dos sistemas lineares a seguir e classifique-os como sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

a) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + 6y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 5y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ x - 7y + 3z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ -7y + 2z = 0 \end{cases}$

29 (Uespi) O sistema nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 2x + my = 5 \\ mx + 8y = 3 \end{cases}$$

é possível e determinado se, e somente se:

a) $m \neq 3$
b) $m \neq 4$
c) $m \neq 4$ e $m \neq -4$
d) $m = 4$
e) $m = 4$ ou $m = -4$

30 Para que valores do parâmetro real k o sistema nas incógnitas x e y $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ kx - 3y = 1 \end{cases}$ é possível e determinado (SPD)?

31 Para que valor(es) do parâmetro real k o sistema homogêneo nas variáveis x, y e z a seguir admite apenas a solução trivial?

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ kx - 2z = 0 \end{cases}$$

32 Determine o(s) valor(es) do parâmetro real a de modo que o sistema nas incógnitas x, y e z abaixo admita soluções diferentes da trivial.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ x + 5y + az = 0 \end{cases}$$

33 (FGV) Sendo k uma constante real, o sistema linear $\begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 4 \\ x - z = -3 \end{cases}$, nas incógnitas x e y, não admite solução se, e somente se:

a) $k = 1$
b) $k = -1$
c) $k = 2$
d) $k = -2$
e) $k = 0$

34 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações abaixo:

a) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 9 & 3x \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 8$

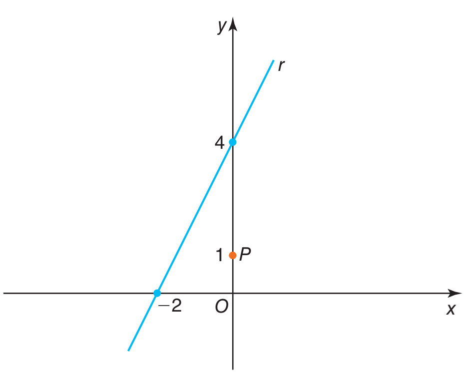
35 Aplicando o conceito de determinante em cada um dos itens abaixo, classifique como concorrentes, paralelas distintas ou coincidentes as retas r e s do plano cartesiano representadas pelas equações:

a) (r) $y = 3x + 2$ e (s) $y = 2x - 5$
b) (r) $y = x + 3$ e (s) $y = x + 1$
c) (r) $4x - 2y - 6 = 0$ e (s) $y = 2x - 3$

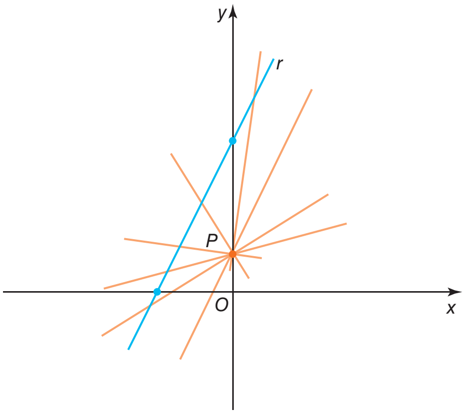
Resolva os exercícios complementares 24 a 34.

Discussão de um sistema linear

Considere a reta r de equação $y = 2x + 4$ e o ponto $P(0, 1)$, representados no plano cartesiano abaixo.



Note que entre as infinitas retas que passam por P apenas uma é paralela a r:



Qualquer reta s, não vertical, que passa por P tem equação da forma $y = kx + 1$, em que k é um número real.

A discussão sobre as possíveis posições das retas r e s em função do parâmetro k pode ser feita por meio do estudo do sistema linear formado pelas equações das retas:

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = kx + 1 \end{cases} \text{ que é equivalente a } \begin{cases} 2x - y = -4 \\ kx - y = -1 \end{cases}$$

Conforme estudamos, esse sistema terá uma única solução (SPD) se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ k & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ ou seja, } k \neq 2$$

Logo, as retas serão concorrentes se, e somente se, k for um número real diferente de 2.

Para $k = 2$, o determinante anterior é nulo e, nesse caso, temos duas alternativas: o sistema é impossível ou é possível e indeterminado. Para descobrir qual das duas é correta, substituímos k por 2 e escalonamos o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1),\ +} \sim \begin{cases} 2x - y = -4 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases} \text{ (SI)}$$

Como obtivemos um sistema impossível (SI), concluímos que as retas r e s são paralelas distintas para $k = 2$.

Resumindo:

- para $k = 2$, o sistema é impossível (SI); portanto, as retas r e s são paralelas distintas;
- para $k \neq 2$, o sistema tem uma única solução (SPD); portanto, as retas r e s são concorrentes.

O que fizemos nesse exemplo foi classificar o sistema linear segundo os valores do parâmetro k. A esse procedimento damos o nome de "**discussão do sistema linear em função do parâmetro *k***".

Nota:

Em uma equação nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, chama-se **parâmetro** qualquer outra variável distinta de $x_1, x_2, x_3, ...$ e x_n.

Muitas situações exigem a discussão de um sistema linear, por isso vamos fazer um estudo mais detalhado. Para facilitar, dividimos esse estudo em dois casos discutidos a seguir.

Discussão de um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas

A discussão de um sistema linear cujo número de equações é igual ao número de incógnitas pode ser feita pelo determinante da matriz dos coeficientes do sistema, auxiliada pelo escalonamento, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9 Discutir, em função do parâmetro real m, o sistema nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + my = 8 \end{cases}$$

Resolução

Seja D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, isto é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix} = 1 \cdot m - 2 \cdot 3 = m - 6$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de m para que o sistema seja possível e determinado:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m - 6 \neq 0$$

Logo: $m \neq 6 \Rightarrow$ SPD

Para $m = 6$, temos $D = 0$ e, nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. Substituindo m por 6 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 & \times(-2) \\ 2x + 6y = 8 & + \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Logo: $m = 6 \Rightarrow$ SPI

Resumindo:

- Para $m \neq 6$, o sistema é possível e determinado (SPD).
- Para $m = 6$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

10 Discutir o sistema nas incógnitas x e y em função do parâmetro real p:

$$\begin{cases} 5x + py = 1 \\ px + 5y = 1 \end{cases}$$

Resolução

Seja D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, isto é:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & p \\ p & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 - p \cdot p = 25 - p^2$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de p para que o sistema seja possível e determinado:

$$\begin{vmatrix} 5 & p \\ p & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 25 - p^2 \neq 0$$

$\therefore p \neq 5$ e $p \neq -5$

Logo: $p \neq 5$ e $p \neq -5 \Rightarrow$ SPD

Para $p = 5$ ou $p = -5$, temos $D = 0$ e, nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado.

- Substituindo p por 5 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} 5x + 5y = 1 & \times(-1) \\ 5x + 5y = 1 & + \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + 5y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Logo: $p = 5 \Rightarrow$ SPI

- Substituindo p por -5 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} 5x - 5y = 1 & \times 1 \\ -5x + 5y = 1 & + \end{cases} \sim \begin{cases} 5x - 5y = 1 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$$

Logo: $p = -5 \Rightarrow$ SI

Resumindo:

- Para $p \neq 5$ e $p \neq -5$, o sistema é possível e determinado (SPD).
- Para $p = 5$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).
- Para $p = -5$, o sistema é impossível (SI).

11 Discutir o sistema nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real k:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 3y + kz = 1 \end{cases}$$

Resolução

Seja D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, isto é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & k \end{vmatrix}$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de k para que o sistema seja possível e determinado:

$$\begin{array}{ccccc} & & -1 & 6 & -4k \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & k & 1 & -3 \\ & & -k & 4 & 6 \end{array}$$

$D \neq 0 \Leftrightarrow -k + 4 + 6 - 1 + 6 - 4k \neq 0$

$\therefore k \neq 3$

Logo: $k \neq 3 \Rightarrow$ SPD

Para $k = 3$, temos $D = 0$ e, nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado.

Substituindo k por 3 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{cases} \quad -2 \quad -1 \quad \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0x - 5y + 4z = 1 \\ 0x - 5y + 4z = 0 \end{cases} \quad -1 \quad \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0x - 5y + 4z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = -1 \end{cases} \quad \text{(SI)}$$

Logo: $k = 3 \Rightarrow$ SI

Resumindo:

- Para $k \neq 3$, o sistema é possível e determinado (SPD).
- Para $k = 3$, o sistema é impossível (SI).

12 Discutir o sistema linear homogêneo nas incógnitas x e y, a seguir, em função do parâmetro real k.

$$\begin{cases} 2x + ky - 3z = 0 \\ kx - y + 4z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

Resolução

Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & k & -3 \\ k & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 12k - 11$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de k para que o sistema seja possível e determinado:

$$-k^2 + 12k - 11 \neq 0 \Rightarrow k \neq 1 \text{ e } k \neq 11$$

Para $k = 1$ ou $k = 11$, temos $D = 0$, com o que podemos concluir que o sistema é possível e indeterminado, pois um sistema homogêneo não pode ser impossível.

Resumindo:

- Para $k \neq 1$ e $k \neq 11$, o sistema é SPD.
- Para $k = 1$ ou $k = 11$, o sistema é SPI.

13 Discutir o sistema seguinte, nas incógnitas x e y, em função dos parâmetros reais a e b.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ ax + 4y = b \end{cases}$$

Resolução

Seja: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix}$

Impondo $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4 - 2a \neq 0$$

$\therefore a \neq 2$

Logo: $a \neq 2 \Rightarrow$ SPD

Para obter a classificação do sistema para $a = 2$, substituímos $a = 2$ no sistema, escalonando-o:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = b \end{cases} \quad -2 \quad \sim \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0x + 0y = b - 6 \end{cases}$$

Observamos que:

- se $b - 6 \neq 0$, o sistema é impossível (SI);
- se $b - 6 = 0$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Logo, temos: $a = 2$ e $b \neq 6 \Rightarrow$ SI
$a = 2$ e $b = 6 \Rightarrow$ SPI

Resumindo:

- Para $a \neq 2 \Rightarrow$ SPD
- Para $a = 2$ e $b \neq 6 \Rightarrow$ SI
- Para $a = 2$ e $b = 6 \Rightarrow$ SPI

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36 Discuta cada um dos sistemas seguintes, nas incógnitas x e y, em função do parâmetro real k.

a) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ kx + 6y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ kx + y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} kx + 5y = 0 \\ 5x + ky = 0 \end{cases}$

37 Discuta cada um dos sistemas seguintes, nas incógnitas x, y e z, em função do parâmetro real m.

a) $\begin{cases} mx - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 2y + 5z = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + mz = 1 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ mx - 2y + z = 1 \end{cases}$

38 Discuta em função do parâmetro real p o sistema nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + py + pz = 0 \\ 5x + 8y - 2z = 0 \end{cases}$$

39 Faça a discussão dos sistemas seguintes, nas incógnitas x e y, segundo os valores reais dos parâmetros m e n.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ mx + 9y = n \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = n \end{cases}$

40 No início do mês passado, fui a uma papelaria e gastei R$ 9,00 na compra de uma borracha, um lápis e uma caneta, tendo a borracha custado mais caro que o lápis. No final do mesmo mês, voltei à papelaria e gastei R$ 30,00 na compra de seis borrachas e três canetas. Os preços continuavam os mesmos de quando fiz a compra anterior.

a) Indicando por x, y e z, respectivamente, os preços da borracha, do lápis e da caneta, e supondo que a borracha tenha custado k reais a mais que o lápis, equacione esse problema por meio de um sistema linear.

b) Representando em ordem alfabética as variáveis do sistema do item **a**, calcule o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema.

c) Quanto a borracha custou a mais que o lápis?

Resolva os exercícios complementares 35 a 45 e 113 a 115.

Discussão de um sistema linear com número de equações diferente do número de incógnitas

Aplicaremos o método do escalonamento na discussão de sistemas lineares cujo número de equações é diferente do número de incógnitas. Nesse tipo de sistema, não é possível calcular o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, pois a matriz não é quadrada e, portanto, não tem determinante. Os exercícios resolvidos a seguir exemplificam essa discussão.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 Discutir o sistema nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real n:

$$\begin{cases} x + 4y - z = 1 \\ 3x + 12y + nz = 2 \end{cases}$$

Resolução

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 4y - z = 1 \\ 3x + 12y + nz = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 4y - z = 1 \\ 0x + 0y + (n + 3)z = -1 \end{cases}$$

Observamos que:

- para $n + 3 = 0$, o sistema é impossível (SI);
- para $n + 3 \neq 0$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Resumindo:

- Para $n = -3$, o sistema é impossível (SI);
- Para $n \neq -3$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

15 Discutir o sistema nas incógnitas x e y em função do parâmetro real a:

$$\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ 4x + 11y = a \end{cases}$$

Resolução

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ 4x + 11y = a \end{cases} \sim \begin{cases} x + 5y = 1 \\ 0x - 9y = 0 \\ 0x - 9y = a - 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 5y = 1 \\ 0x - 9y = 0 \\ 0x + 0y = a - 4 \end{cases}$$

Observamos que:

- para $a - 4 = 0$, o sistema é possível e determinado (SPD);
- para $a - 4 \neq 0$, o sistema é impossível (SI).

Resumindo:

- Para $a = 4$, o sistema é possível e determinado (SPD);
- Para $a \neq 4$, o sistema é impossível (SI).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

41 Nos sistemas a seguir, as incógnitas são x, y e z. Discuta suas classificações em função dos valores assumidos pelo parâmetro real m.

a) $\begin{cases} x + 3y + mz = 1 \\ 2x + 6y + 4z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y + mz = 2m \end{cases}$

42 Discuta os sistemas a seguir, nas incógnitas x e y, em função do parâmetro real a.

a) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = a \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 6x - y = 4 \\ 5x + ay = -1 \end{cases}$

43 No sistema linear a seguir, x, y e z são as incógnitas e p e q são parâmetros reais. Discuta esse sistema em função de p e q.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 3x + py - 6z = q \end{cases}$$

Resolva os exercícios complementares 46 a 51 e 116.

Ampliando o conceito de determinante

Objetivos

- **Calcular** o determinante de uma matriz quadrada de qualquer ordem.
- **Simplificar** o cálculo de determinantes usando suas propriedades.

Termos e conceitos

- cofator
- determinante de ordem n

Vimos que os cálculos de determinantes de ordens 2 e 3 surgem na resolução de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas e de três equações e três incógnitas, respectivamente. Revisando, esses determinantes são calculados assim:

- **Determinante de ordem 2**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

- **Determinante de ordem 3**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Genericamente, na resolução de um sistema linear de n equações e n incógnitas, verifica-se um cálculo padrão que se mantém para qualquer valor de n. O número resultante desse cálculo é chamado de **determinante**.

A partir daqui, vamos estudar um método geral para o cálculo do determinante de qualquer matriz quadrada de ordem n.

Determinante de ordem *n*

Definiremos por recorrência o determinante de uma matriz quadrada de ordem n; isto é, a definição do determinante de ordem n, com $n > 1$, depende do determinante de ordem $(n - 1)$. Logo, precisamos definir, inicialmente, o determinante de menor ordem possível, que é o de ordem 1.

Determinante de ordem 1

Dada a matriz de ordem 1, $A = [a_{11}]$, define-se que $\det A = a_{11}$.

Lemos o símbolo **det *A*** como "determinante da matriz A".

Exemplos

a) Sendo $A = [5]$, temos: $\det A = 5$

b) Sendo $B = [-4]$, temos: $\det B = -4$

Cofator

Para o cálculo de um determinante de ordem n, com $n > 1$, vamos fazer uso de um número chamado de **cofator**, definido a seguir.

Seja a matriz quadrada A, representada abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Considere a submatriz obtida com a eliminação da linha e da coluna que contêm o elemento a_{ij}, isto é, a linha i e a coluna j. Indicamos por D_{ij} o determinante dessa submatriz.

Chama-se **cofator** do elemento a_{ij} o número que indicaremos por A_{ij} (lemos "cofator do elemento a_{ij}"), definido por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplos

a) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

Para calcular o cofator do elemento a_{11} eliminamos a linha e a coluna que o contêm, obtendo a submatriz [5]; assim, o cofator do elemento a_{11} é:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det [5] = (-1)^2 \cdot 5 = 5$$

Para calcular o cofator do elemento a_{12} eliminamos a linha e a coluna que o contêm, obtendo a submatriz [6]; assim, o cofator do elemento a_{12} é:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det [6] = (-1)^3 \cdot 6 = -6$$

Para calcular o cofator do elemento a_{21} eliminamos a linha e a coluna que o contêm, obtendo a submatriz [−4]; assim, o cofator do elemento a_{21} é:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det [-4] = (-1)^3 \cdot (-4) = 4$$

Para calcular o cofator do elemento a_{22} eliminamos a linha e a coluna que o contêm, obtendo a submatriz [2]; assim, o cofator do elemento a_{22} é:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det [2] = (-1)^4 \cdot 2 = 2$$

b) Seja a matriz $B = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

Para calcular o cofator do elemento b_{11} eliminamos a linha e a coluna que o contêm, obtendo a submatriz $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$. Assim, o cofator B_{11} é:

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (2 \cdot 6 - (-1) \cdot 5) = 17$$

De maneira análoga, calculamos o cofator B_{12}:

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-4 \cdot 6 - 7 \cdot 5) = 59$$

E de modo semelhante, podemos obter os cofatores dos demais elementos da matriz.

Definição do determinante de ordem *n*

O **determinante** de uma matriz quadrada de ordem n, com $n \geqslant 2$, é a soma dos produtos dos elementos da primeira linha pelos respectivos cofatores.

Com essa definição, podemos calcular o determinante de uma matriz quadrada qualquer.

Exemplos

a) Observe a definição aplicada ao cálculo de um determinante de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12}$$

Como $A_{11} = (-1)^2 \cdot \det [d] = d$ e $A_{12} = (-1)^3 \cdot \det [c] = -c$, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Observe que o resultado coincide com o cálculo feito na seção 7.3.

b) Observe a definição aplicada ao cálculo de um determinante de ordem 3:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12} + c \cdot A_{13}$$

em que:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (ei - hf) = ei - hf$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} = -1 \cdot (di - gf) = gf - di$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = 1 \cdot (dh - ge) = dh - ge$$

portanto:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot (ei - hf) + b \cdot (gf - di) + c \cdot (dh - ge) = aei - ahf + bgf - bdi + cdh - cge$$

Note que o resultado coincide com a regra de Sarrus.

c) Aplicando a definição ao cálculo do determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, temos:

$\det A = 2 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} = 2 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{12}$

Para o cálculo dos cofatores A_{11} e A_{12} podemos aplicar a regra de Sarrus, obtendo:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 + 1 - 60) = -56$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 + 8 - 1 - 36) = 32$$

Logo: $\det A = 2 \cdot (-56) + 3 \cdot 32 = -16$

Teorema de Laplace

O matemático francês Pierre Simon (marquês de Laplace) descobriu que o desenvolvimento do determinante de uma matriz quadrada, por meio de cofatores, pode ser feito com os elementos de qualquer linha ou qualquer coluna, isto é, não é necessário que se use a primeira linha conforme a definição. Laplace provou o seguinte teorema:

> O **determinante** de uma matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores.

A palavra "fila" é usada para indicar uma linha ou uma coluna.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 Calcular o determinante da matriz A abaixo, por meio do teorema de Laplace, usando a regra de Sarrus para o cálculo de cofatores.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Resolução

Para calcular o determinante pelo teorema de Laplace, podemos escolher uma fila qualquer. Por comodidade, escolheremos a fila com a maior quantidade de zeros, que neste caso é a terceira coluna. Tal escolha é conveniente porque o produto do elemento zero pelo seu cofator é igual a zero, portanto não é preciso calcular esse cofator. Assim:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 3 \cdot A_{43}$$

Observe que precisamos calcular apenas os cofatores A_{13} e A_{43}:

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2 + 8 + 9 + 6 - 6 + 4) = 23$$

$$A_{43} = (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (8 - 9 + 6 + 6) = -11$$

Logo:
$\det A = 4 \cdot 23 + 3 \cdot (-11) = 59$

17 Para a sonorização de um automóvel, quatro tipos de acessórios, A, B, C e D, podem ser instalados. Cada linha da tabela a seguir mostra uma opção de sonorização, com as quantidades de cada tipo de acessório que pode ser instalado e o custo total desses equipamentos.

	Quantidade de acessórios				Custo total (R$)
	A	B	C	D	
1ª opção →	1	1	0	0	100
2ª opção →	1	2	1	1	300
3ª opção →	2	3	0	p	320
4ª opção →	1	2	0	p	180

Conhecendo a quantidade p, é possível determinar o preço unitário de cada um dos acessórios?

Resolução

Sendo a, b, c e d os preços unitários dos acessórios A, B, C e D, respectivamente, temos o sistema nas incógnitas a, b, c e d:

$$\begin{cases} a + b = 100 \\ a + 2b + c + d = 300 \\ 2a + 3b + pd = 320 \\ a + 2b + pd = 180 \end{cases}$$

O determinante D da matriz dos coeficientes do sistema é: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & p \\ 1 & 2 & 0 & p \end{vmatrix}$

Aplicando o teorema de Laplace na 3ª coluna, obtemos:

$$D = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & p \\ 1 & 2 & p \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (3p + p - 2p - 2p) = 1 \cdot (-1) \cdot 0 = 0$$

Como $D = 0$ para qualquer valor de p, concluímos que o sistema é impossível ou possível e indeterminado. Logo, mesmo que se conheça o valor de p, os preços unitários a, b, c e d dos acessórios não podem ser determinados.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

44 Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

45 Calcule o determinante da matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i + j - 4, \text{ se } i \leqslant j \\ i + j - 6, \text{ se } i > j \end{cases}$

46 Classifique como SPD, SPI ou SI o sistema linear de incógnitas r, s, t e u:

$$\begin{cases} 2r + s - t + u = 0 \\ r - 2s + t = 0 \\ s + 2t = 0 \\ s - 5t + 2u = 0 \end{cases}$$

47 Em uma experiência, o professor de Física mostrou que a pressão interna do ar em uma bola é inversamente proporcional à medida do raio dessa bola. Para isso, foram usadas quatro bolas de raios diferentes, contendo a mesma massa de ar em seu interior. Medindo a pressão interna em cada uma dessas bolas, obteve-se a seguinte tabela:

Pressão interna (em atm)	Raio da bola (em cm)
a	6
b	8
c	9
d	12

a) Equacione esse problema por meio de um sistema linear homogêneo de incógnitas a, b, c e d da forma:

$$\begin{cases} 6a + (?)b + 0c + 0d = 0 \\ 6a + 0b + (?)c + 0d = 0 \\ 6a + 0b + 0c + (?)d = 0 \\ 0a + 0b + 9c + (?)d = 0 \end{cases}$$

substituindo as interrogações por números reais.

b) Classifique o sistema obtido no item **a** como SPD, SPI ou SI.

Resolva os exercícios complementares 52 a 57 e 117.

Propriedades dos determinantes

Com a finalidade de simplificar os cálculos de determinantes, apresentaremos a seguir algumas propriedades.

P1. Matrizes transpostas

O determinante de uma matriz quadrada A qualquer é igual ao determinante de sua transposta, ou seja:

$$\det A = \det A^t$$

Vamos justificar essa propriedade para uma matriz A de ordem 2.

Calculando os determinantes das matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, temos:

$$\det A = ad - cb \text{ e } \det A^t = ad - cb$$

Portanto, $\det A = \det A^t$.

Essa propriedade permite concluir que toda propriedade dos determinantes que for verdadeira para linha também será verdadeira para coluna.

Exemplo

Pela propriedade P1, os determinantes das matrizes transpostas $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&0\\2&3&5\end{pmatrix}$ e $A^t = \begin{pmatrix}1&3&2\\1&4&3\\1&0&5\end{pmatrix}$ são iguais. De fato, calculando os determinantes, obtemos:

$$\begin{array}{c}-8 \quad 0 \quad -15\\ \det A = \begin{vmatrix}1&1&1\\3&4&0\\2&3&5\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\3&4\\2&3\end{matrix} = 20 + 0 + 9 - 8 - 0 - 15 = 6\\ 20 \quad 0 \quad 9\end{array}$$

$$\begin{array}{c}-8 \quad 0 \quad -15\\ \det A^t = \begin{vmatrix}1&3&2\\1&4&3\\1&0&5\end{vmatrix}\begin{matrix}1&3\\1&4\\1&0\end{matrix} = 20 + 9 + 0 - 8 - 0 - 15 = 6\\ 20 \quad 9 \quad 0\end{array}$$

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Princípio da indução matemática.*
Texto: *Demonstração da propriedade P1 dos determinantes.*

P2. Fila nula

Se os elementos de uma fila de uma matriz quadrada A forem todos nulos, então $\det A = 0$.

A justificativa dessa propriedade pode ser feita pelo teorema de Laplace. Vejamos um caso particular, que pode ser facilmente generalizado:

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\0&0&0\\d&e&f\end{vmatrix} = 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} = 0$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix}4&6&0&7\\5&3&0&-8\\-1&2&0&4\\2&-4&0&1\end{vmatrix} = 0$$

P3. Permutação de filas paralelas

Permutando entre si duas filas paralelas de uma matriz quadrada A, obtemos uma nova matriz B tal que $\det B = -\det A$.

Observe o caso particular em que se permutam as linhas da matriz $A = \begin{pmatrix}m&n\\p&q\end{pmatrix}$, obtendo-se a matriz $B = \begin{pmatrix}p&q\\m&n\end{pmatrix}$. Calculando os determinantes:

$$\det A = mq - pn \text{ e } \det B = pn - mq$$

De fato, $\det B = -\det A$.

Exemplo

Pela propriedade P3, temos $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 6 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 7 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. De fato:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 6 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 28 + 162 + 18 - 105 - 0 = 103$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 7 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -18 + 0 + 105 - 0 - 162 - 28 = -103$$

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração da propriedade P3 dos determinantes*.

P4. Produto de um número por um determinante

Multiplicando uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada A por um número real k, obtemos uma nova matriz B tal que det $B = k$ det A.

Vamos justificar essa propriedade para o caso particular de uma matriz de ordem 3 cuja primeira linha foi multiplicada por k. Isto é, vamos provar que:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{ka \quad kb \quad kc} \\ d \quad\; e \quad\; f \\ g \quad\; h \quad\; i \end{vmatrix}}_{D_1} = k\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{D_2}$$

Desenvolvendo o determinante D_1 pelo teorema de Laplace na 1ª linha (fila do fator comum), temos:

$D_1 = kaA_{11} + kbA_{12} + kcA_{13} = k(aA_{11} + bA_{12} + cA_{13})$

Note que a expressão $aA_{11} + bA_{12} + cA_{13}$ é o desenvolvimento do determinante D_2 pelo teorema de Laplace, na 1ª linha. Logo, $D_1 = kD_2$

Essa justificativa pode ser generalizada para uma matriz quadrada de ordem n.

Exemplos

a) $\begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 8 \quad 4} \\ 1 \quad 3 \quad 5 \\ 7 \quad 1 \quad 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 10 & 9 & 1 \\ 15 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

Notas:

Veja nos exemplos abaixo a diferença entre a multiplicação de um número por uma matriz e a multiplicação de um número por um determinante.

1. Multiplicação de um número real k por uma matriz:

$$k \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{pmatrix}$$

2. Multiplicação de um número real k por um determinante:

$$k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

(Poderíamos ter multiplicado qualquer fila por k.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

18 Sendo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$, calcular:

a) $\begin{vmatrix} a & 4b & c \\ d & 4e & f \\ g & 4h & i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 6a & 2b & 2c \\ 3d & e & f \\ 3g & h & i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2a & d & 4g \\ 2b & e & 4f \\ 2c & f & 4i \end{vmatrix}$

Resolução

a) $\begin{vmatrix} a & 4b & c \\ d & 4e & f \\ g & 4h & i \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 = 24$

b) $\begin{vmatrix} 6a & 2b & 2c \\ 3d & e & f \\ 3g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$

c) $\begin{vmatrix} 2a & d & 4g \\ 2b & e & 4h \\ 2c & f & 4i \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$

determinantes de matrizes transpostas (P1)

19 Sendo A uma matriz quadrada de ordem 3 com det A = 5, calcular det (2A).

Resolução

Sendo $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, temos $2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$

Logo: $\det(2A) = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \det A = 8 \cdot 5 = 40$

(*Nota*: A partir da ideia apresentada neste exercício, podemos provar que: se A é uma matriz quadrada de ordem n e k é um número real, então $\det(kA) = k^n \cdot \det A$.)

P5. Filas paralelas iguais

> Se uma matriz quadrada A tem duas filas paralelas iguais, então det $A = 0$.

Vamos justificar essa propriedade para uma matriz de ordem 3.

Seja a matriz A de ordem 3 com duas filas paralelas iguais, por exemplo, a segunda e a terceira linhas:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ m & n & p \end{pmatrix}$$

Permutando entre si a segunda e a terceira linhas, obtemos a matriz:

$$B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ m & n & p \end{pmatrix}$$

Pela propriedade P3, a permutação de duas filas paralelas provoca a troca do sinal do determinante e, portanto:

$$\det B = -\det A \text{ (I)}$$

Porém, permutamos duas filas paralelas iguais, o que significa que a matriz A não foi alterada e, portanto:

$$\det B = \det A \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$\det A = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0$$

$$\therefore \det A = 0$$

Essa justificativa pode ser facilmente generalizada para qualquer ordem n da matriz A.

Exemplos

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$

P6. Filas paralelas múltiplas

> Se, em uma matriz quadrada A, uma fila (linha ou coluna) é múltipla de outra fila paralela, então det $A = 0$.

Essa propriedade é uma consequência imediata da propriedade P5. Faremos a justificativa para o caso particular de uma matriz quadrada de ordem 3; essa justificativa, porém, pode ser generalizada para uma ordem n qualquer.

Consideremos uma matriz A de ordem 3, em que uma fila seja múltipla de outra fila paralela, por exemplo, a segunda linha seja múltipla da primeira:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{ka \quad kb \quad kc} \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{\text{duas filas paralelas iguais (P5)}} = k \cdot 0 = 0$$

Exemplos

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (Note que a segunda linha é múltipla da primeira linha.)

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 15 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 0$ (Note que a terceira coluna é múltipla da primeira coluna.)

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (Note que a terceira linha é múltipla da segunda linha.)

P7. Determinante de uma matriz triangular

Para o entendimento dessa propriedade é necessário o seguinte conceito.

Uma **matriz triangular** é uma matriz quadrada de ordem n, com $n \geqslant 2$, que tem todos os elementos abaixo ou acima da diagonal principal iguais a zero.

Por exemplo, são triangulares as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Agora, vamos enunciar a propriedade P7:

> O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Vamos justificar essa propriedade para uma matriz de ordem 3.

Dada a matriz triangular $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, o det A pode ser calculado pelo teorema de Laplace aplicado à primeira coluna:

$$\det A = a \cdot A_{11} = a \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} = adf$$

ou seja, o determinante de A é o produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 4 = -24$$

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração da propriedade P7 dos determinantes.*

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

48 Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4$, calcule o valor numérico dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} m & n & p \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3m & 3n & 3p \\ 5x & 5y & 5z \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3a & 6b & 3c \\ m & 2n & p \\ x & 2y & z \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & 6m & -x \\ b & 6n & -y \\ c & 6p & -z \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} c & 5b & a \\ 2p & 10n & 2m \\ z & 5y & x \end{vmatrix}$

49 Obtenha o valor de cada um dos determinantes aplicando apenas as propriedades estudadas:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & \pi & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 5 & 9 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 1 & 0 & 0 \\ 47 & 75 & 2 & 0 \\ 64 & 78 & 93 & 3 \end{vmatrix}$

50 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & x^2 - 1 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & x + 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & x - 4 \end{vmatrix} = 0$$

51 Sabendo que existe uma única matriz $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & k - 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & k - 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & k + 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix},$$ obtenha os possíveis valores reais de k.

52 Calcule o valor numérico do determinante

$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$, sabendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

53 Sendo A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det A = 4$, calcule $\det (5A)$.

Resolva os exercícios complementares 58 a 68.

P8. Soma de determinantes

Sejam A, B e C matrizes quadradas de mesma ordem tais que:

- cada elemento de uma fila r de A seja igual à soma de seus correspondentes em B e C;
- excetuando-se os elementos da fila r de A, todos os demais elementos correspondentes nas três matrizes sejam iguais.

Nessas condições, temos:

$$\det A = \det B + \det C$$

A justificativa que daremos para o caso particular de determinantes de ordem 3 pode ser generalizada para qualquer ordem. Vamos provar que:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & \boxed{x + y} & d \\ b & \boxed{z + w} & e \\ c & \boxed{m + n} & f \end{vmatrix}}_{D_1} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & \boxed{x} & d \\ b & \boxed{z} & e \\ c & \boxed{m} & f \end{vmatrix}}_{D_2} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & \boxed{y} & d \\ b & \boxed{w} & e \\ c & \boxed{n} & f \end{vmatrix}}_{D_3}$$

Desenvolvendo o determinante D_1 por meio do teorema de Laplace pela segunda coluna, temos:

$$D_1 = (x + y)A_{12} + (z + w)A_{22} + (m + n)A_{32}$$

$$\therefore D_1 = \underbrace{xA_{12} + zA_{22} + mA_{32}}_{D_2} + \underbrace{yA_{12} + wA_{22} + nA_{32}}_{D_3} = D_2 + D_3$$

Nota:

Lembrando que toda propriedade verdadeira para coluna de um determinante também é verdadeira para linha, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{x + y \quad z + w \quad m + n} \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{x \quad z \quad m} \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{y \quad w \quad n} \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Exemplos

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3+5 & 6 \\ 1 & 9+4 & 1 \\ 2 & 7+8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 9 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2+6 & 7+5 & 3+4 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

P9. Combinação linear

Para o entendimento da propriedade a seguir é necessário o conceito de **combinação linear**:

A combinação linear de duas ou mais filas paralelas de uma matriz é a soma de quaisquer múltiplas dessas filas.

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Multiplicando por 5 cada elemento da linha $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 15 & 10 & 20 \end{pmatrix} \qquad \text{(I)}$$

Multiplicando por 2 cada elemento da linha $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{(II)}$$

Adicionando os elementos correspondentes em (I) e (II), obtemos a sequência:

$$\begin{pmatrix} 17 & 20 & 8 \end{pmatrix}$$

que é chamada de combinação linear de $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Agora, vamos enunciar a propriedade P9:

Se uma fila de uma matriz quadrada A é combinação linear de outras duas ou mais filas paralelas, então $\det A = 0$.

Façamos a demonstração para o caso particular de uma matriz de ordem 3 em que a terceira coluna é uma combinação linear das duas primeiras. Essa demonstração pode ser facilmente generalizada.

Dada a matriz:

$$\begin{pmatrix} a & b & ka + qb \\ c & d & kc + qd \\ e & f & ke + qf \end{pmatrix}$$

temos, pela propriedade P8 da soma dos determinantes:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & ka + qb \\ c & d & kc + qd \\ e & f & ke + qf \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & ka \\ c & d & kc \\ e & f & ke \end{vmatrix}}_{\text{filas múltiplas (P6)}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & qb \\ c & d & qd \\ e & f & qf \end{vmatrix}}_{\text{filas múltiplas (P6)}}$$

Observando que os dois determinantes à direita da igualdade têm filas paralelas múltiplas, temos, pela propriedade P6, que cada um deles é igual a zero e, portanto, $\det A = 0$.

P10. Teorema de Jacobi

Esta é uma das mais importantes propriedades dos determinantes, pois facilita significativamente seus cálculos.

Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), matemático alemão com importantes trabalhos na teoria dos determinantes.

> Se a uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada A for adicionada uma múltipla de outra fila paralela, obtemos uma matriz B tal que $\det A = \det B$.

Consideremos o caso particular de uma matriz de ordem 3, isto é:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Vamos construir uma matriz B adicionando a uma fila de A uma múltipla de uma fila paralela. Adicionando à segunda coluna uma múltipla da primeira coluna, por exemplo, temos a matriz:

$$B = \begin{pmatrix} a & b + ka & c \\ d & e + kd & f \\ g & h + kg & i \end{pmatrix}$$

Aplicando a propriedade P8 no cálculo do det B, temos:

$$\det B = \begin{vmatrix} a & b + ka & c \\ d & e + kd & f \\ g & h + kg & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & ka & c \\ d & kd & f \\ g & kg & i \end{vmatrix}}_{\substack{0 \\ \text{(filas paralelas} \\ \text{múltiplas – P6)}}} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \det A$$

Exemplo

Vamos calcular o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 9 \\ 5 & 15 & 7 & 20 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. Para isso, podemos introduzir zeros em uma das filas, facilitando assim o cálculo pelo teorema de Laplace. Por exemplo:

- adicionamos à 2ª linha a 1ª linha multiplicada por -3;
- adicionamos à 3ª linha a 1ª linha multiplicada por -5;
- adicionamos à 4ª linha a 1ª linha multiplicada por 2.

$$\begin{matrix} 2 & -5 & -3 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 9 \\ 5 & 15 & 7 & 20 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 13 \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Jacobi, o determinante obtido é igual ao determinante inicial.

Note que, após a transformação, apenas um elemento da primeira coluna é diferente de zero. Assim, ao aplicar o teorema de Laplace nessa coluna, o cálculo desse determinante D exigirá apenas um cofator. Observe:

$$D = 1 \cdot A_{11} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 13 \end{vmatrix} = 26 - 60 + 30 = -4$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

20 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & x+2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & x & 9 \\ 4 & 8 & 4 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

Resolução

Aplicando o teorema de Jacobi, temos:

$$\begin{matrix} -4 & -5 & -3 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & x+2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & x & 9 \\ 4 & 8 & 4 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & x-4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & x-5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-9 \end{vmatrix} = 0$$

Como, por P7, o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal, temos:

$(x - 4)(x - 5)(x - 9) = 0 \Rightarrow x - 4 = 0$ ou $x - 5 = 0$ ou $x - 9 = 0$

$\therefore x = 4$ ou $x = 5$ ou $x = 9$

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{4, 5, 9\}$.

P11. Teorema de Cauchy

Em toda matriz quadrada de ordem n, com $n \geqslant 2$, a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra fila paralela é igual a zero.

A demonstração a seguir, feita para um caso particular, pode ser facilmente generalizada.

Sendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, vamos calcular a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra fila paralela. Vamos multiplicar, por exemplo, os elementos da primeira coluna pelos respectivos cofatores dos elementos da terceira coluna e somar os produtos assim obtidos, isto é:

$$a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33}$$

Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês cuja vasta obra é reconhecida como uma das mais rigorosas produções matemáticas.

Observando que essa expressão é o determinante da matriz $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$, obtida a partir de A, substituindo-se a 3ª coluna pela primeira coluna, conclui-se que $a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} = 0$, pois B tem duas colunas iguais.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, vamos calcular os cofatores dos elementos da 3ª coluna:

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 - 6) = -1$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 - 0) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 - 0) = 3$$

De fato, a soma dos produtos dos elementos da primeira coluna pelos cofatores dos elementos correspondentes da terceira coluna de A é zero, observe:

$$1 \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 0$$

P12. Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então:

$$\det (AB) = \det A \cdot \det B$$

Justificaremos esse teorema apenas para matrizes quadradas de ordem 2.

Sendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, temos $AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$.

Calculando o determinante de AB, temos:

$$\det (AB) = \begin{vmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{vmatrix} =$$

$$= (ae + bg)(cf + dh) - (ce + dg)(af + bh) =$$

$$= \cancel{aecf} + aedh + bgcf + \cancel{bgdh} - \cancel{ceaf} - cebh - dgaf - \cancel{dgbh} =$$

$$= aedh + bgcf - cebh - dgaf = ad(eh - gf) - cb(eh - gf) =$$

$$= \underbrace{(ad - cb)}_{\det A}\underbrace{(eh - gf)}_{\det B} = \det A \cdot \det B$$

Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856), matemático francês que contribuiu significativamente para a fundamentação da teoria das matrizes. Em 1812, conceituou a multiplicação de matrizes.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, temos $\det A = -5$, $\det B = 7$ e, pelo teorema de Binet, $\det (AB) = -5 \cdot 7 = -35$.

De fato: $AB = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ e $\det (AB) = 42 - 77 = -35$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

21 Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem tal que $\det A = 6$ e $\det(AB) = 15$, calcular $\det B$.

Resolução

Aplicando o teorema de Binet, temos:

$\det(AB) = \det A \cdot \det B \Rightarrow 15 = 6 \cdot \det B$

$\therefore \det B = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

22 Sendo A uma matriz quadrada tal que $\det A = 5$, calcular $\det(A^2)$.

Resolução

Como $\det(A^2) = \det(A \cdot A)$, podemos aplicar o teorema de Binet:

$\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = 5 \cdot 5 = 25$

23 Sendo A e B matrizes quadradas de ordem n tal que $\det A = 7$ e $AB = I_n$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n, calcular $\det B$.

Resolução

$AB = I_n \Rightarrow \det(AB) = \det(I_n)$

Como $\det(I_n) = 1$, temos pelo teorema de Binet:

$\det(AB) = \det(I_n) \Rightarrow \det A \cdot \det B = 1$

$\therefore 7 \cdot \det B = 1$

$\therefore \det B = \frac{1}{7}$

24 Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, provar que, se existe a inversa de A, então $\det A \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Resolução

Se existe a inversa de A, temos $A \cdot A^{-1} = I_n$ e, portanto, $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n)$, em que I_n é a matriz identidade.

Como $\det(I_n) = 1$, temos pelo teorema de Binet:

$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) \Rightarrow \det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$

Logo: $\det A \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

54 A equação abaixo tem infinitas soluções (x, y, z). Entre essas soluções, qual pode ser obtida pela propriedade P8 da soma de determinantes?

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 10 \\ 3 & 7 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ 3 & 7 & z \end{vmatrix}$$

55 Sabendo que $\begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 2 \\ c & f & 5 \end{vmatrix} = 5$ e $\begin{vmatrix} a & d & 3 \\ b & e & 4 \\ c & f & 6 \end{vmatrix} = 2$, calcule o valor numérico do determinante:

$$\begin{vmatrix} a & d & 4 \\ b & e & 6 \\ c & f & 11 \end{vmatrix}$$

56 Obtenha o valor do determinante abaixo usando apenas as propriedades estudadas:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & a & 2x + p \\ 1 & y & b & 2y + p \\ 1 & z & c & 2z + p \\ 1 & w & d & 2w + p \end{vmatrix}$$

57 Na matriz abaixo, a segunda linha é uma combinação linear da primeira e da terceira linhas:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 26 & 34 & 15 & 20 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Descreva essa combinação linear.

b) Qual é o valor do determinante dessa matriz?

58 Aplicando o teorema de Jacobi para facilitar os cálculos, obtenha os valores dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 12 & 6 \\ 3 & 8 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 14 & 9 & 16 \\ 6 & 20 & 11 & 22 \\ 2 & 6 & 5 & 10 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 23 & 12 \end{vmatrix}$

(*Sugestão*: No item **c** mantenha inalterada a segunda linha, conseguindo zeros nas posições a_{11}, a_{31} e a_{41}.)

59 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 64$

60 Sendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ e A_{ij} o cofator de cada elemento a_{ij}, qual das alternativas abaixo apresenta uma expressão cujo resultado é zero para quaisquer valores a_{ij}?

a) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

b) $a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33}$

c) $a_{11} + a_{21} + a_{31}$

d) $A_{13} + A_{23} + A_{33}$

e) $A_{11} + A_{22} + A_{33}$

61 Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem tal que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $\det(AB) = 30$, calcule $\det B$.

62 Sendo A uma matriz quadrada tal que $\det(A^3) = 6$, calcule $\det A$.

63 Sendo A uma matriz quadrada, determine os possíveis valores de seu determinante, sabendo que $\det(A^2) + \det A = 0$.

Resolva os exercícios complementares 69 a 77 e 118.

Um método para a obtenção da inversa de uma matriz

No capítulo anterior, vimos como obter a inversa de uma matriz através da seguinte propriedade:

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem n e $AB = I_n$, então A e B são inversas entre si.

Agora, vamos estudar um método mais ágil para a obtenção de tal inversa. Para isso, necessitamos do conceito de matriz adjunta.

Matriz adjunta

Dada a matriz quadrada de ordem n, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, consideremos a matriz $cof\, A = (A_{ij})_{n \times n}$, em que cada A_{ij} é o cofator do elemento a_{ij}. A transposta da matriz $cof\, A$ é chamada de **matriz adjunta de *A***, que indicamos por $\overline{A}$, isto é:

$$\overline{A} = (cof\, A)^t$$

Em resumo, a matriz adjunta de A é a transposta da matriz dos cofatores de A.

Teorema

Sendo A uma matriz quadrada qualquer de ordem n, temos:

$$A \cdot \overline{A} = (\det A) \cdot I_n$$

Faremos a justificativa desse teorema para matrizes de ordem 3, porém essa demonstração pode ser facilmente generalizada.

Sendo A e $\overline{A}$ as matrizes $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ e $\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, temos:

$$A \cdot \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix}$$

Nessa matriz produto, observe que:

- pela propriedade P11, cada elemento que não pertence à diagonal principal é igual a zero, pois é a soma dos produtos dos elementos de uma linha de A pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra linha de A;
- cada elemento da diagonal principal é igual ao det A.

Assim, concluímos:

$$A \cdot \overline{A} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot \overline{A} = (\det A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ou seja:}$$

$$A \cdot \overline{A} = (\det A) \cdot I_3$$

Cálculo da inversa de uma matriz

Do teorema anterior podemos deduzir que:

Se A é uma matriz quadrada com det $A \neq 0$, então $A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}\right) = I_n$ e, portanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$$

Além disso, provamos no exercício resolvido 24 que, se existe a inversa da matriz A, então det $A \neq 0$. Logo, concluímos que:

Existe a inversa de uma matriz quadrada A se, e somente se, det $A \neq 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

25 Verificar se a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ é invertível.

Resolução

A matriz A é invertível se, e somente se, det A ≠ 0. Calculando det A, temos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 8$$

Como det A ≠ 0, concluímos que a matriz A admite inversa, ou seja, ela é invertível.

26 Obter x, com $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & x \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ admita inversa.

Resolução

A matriz A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & x \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 3 - 10x + 4 + 12 + 2x + 5 \neq 0$$

$\therefore x \neq 3$

Logo, a matriz A admite inversa se, e somente se, $x \neq 3$.

27 Determinar, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolução

Calculando det A, temos: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 8 - 8 + 1 = -1$

Como $\det A \neq 0$, concluímos que existe A^{-1}. Para determinar a inversa de A, vamos aplicar a consequência do teorema anterior, isto é:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$$

Em primeiro lugar, calculamos os cofatores dos elementos de A para formar a matriz *cof* A:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 - 4) = -5$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 - 8) = 9$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 + 2) = 1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 - 0) = -1$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 - 0) = 2$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 - 2) = 0$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 0) = 4$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (8 - 0) = -8$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 + 1) = -1$$

Logo, *cof* $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$ e, portanto, a matriz adjunta de A, que é a transposta da matriz dos cofatores, é: $\overline{A} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 9 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Concluindo, obtemos a inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 9 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ -9 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Como a quantidade de cálculos é muito grande, a possibilidade de errar nas contas também é grande; por isso, convém multiplicar a matriz obtida pela matriz A. O produto deve ser a matriz identidade. Observe:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ -9 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

64 Verifique se as matrizes abaixo são invertíveis. Em caso afirmativo, determine a inversa através do produto da matriz adjunta pelo inverso do determinante.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

65 (IME-RJ) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $A^{-1} \cdot X = B$.

66 (UFBA) Sabendo-se que o determinante da inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{pmatrix}$ é $-\frac{1}{4}$, calcule o valor de x.

(*Sugestão*: Ver exercício resolvido 24.)

Resolva os exercícios complementares 78 a 83.

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Método do escalonamento para a obtenção da inversa de uma matriz.*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Considerando a equação linear $3x + 2y - z = 8$, determine o número real p de modo que o terno ordenado $(2, p, 3)$ seja solução dessa equação.

2 (Efei-MG) Qual é o número natural de dois algarismos que fica aumentado de 178 unidades quando acrescentamos o algarismo 7 à direita de sua representação, transformando-o em um número natural de três algarismos? (Considere esses números representados na base dez.)

3 Indique qual dos ternos ordenados abaixo não é solução do sistema: $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{cases}$

a) (0, 2, 1)
b) (3, −2, 3)
c) (6, −6, 5)
d) (−3, 6, −1)
e) (1, 2, 3)

4 Mostre que existe um único terno ordenado da forma $(p, 2p - 1, 1)$, com $p \in \mathbb{R}$, que é solução do seguinte sistema: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + 5y - 2z = 17 \end{cases}$

Qual é esse terno?

5 Mostre que todo terno ordenado da forma $(3 - p, p, p - 2)$, com $p \in \mathbb{R}$, é solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x + 3y + z = 10 \end{cases}$$

Obtenha dois desses ternos ordenados.

6 Para que valores reais do parâmetro p o sistema nas variáveis x e y $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ py = 2 \end{cases}$ é possível e determinado?

7 Para que valores reais do parâmetro m o sistema nas variáveis x e y $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ my = 2 \end{cases}$ é impossível?

8 Para que valores reais do parâmetro q o sistema nas variáveis x e y $\begin{cases} x + y = 1 \\ qy = 0 \end{cases}$ é possível e indeterminado?

9 O par ordenado (−6, 4) é uma solução do seguinte sistema linear homogêneo, nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ ax + 6y = 0 \end{cases}$$

a) Determine o valor da constante a.
b) Qual é a solução trivial desse sistema?
c) Dê outras duas soluções desse sistema, diferentes da trivial e de (−6, 4).

10 Classifique os sistemas lineares escalonados e determine o conjunto solução de cada um.

a) $\begin{cases} x + 3y - 2t + z = 5 \\ y + t - 2z = 4 \\ 2t - 5z = 4 \\ 3z = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + 2b - c = 5 \\ c = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} p + 2q + r - s = 3 \\ q - 2r + s = 1 \\ r - 3s = 0 \end{cases}$

11 (UEL-PR) Um sistema de equações lineares, com incógnitas x, y e z, foi representado na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

É verdade que:

a) $x = 1$
b) $y = 2$
c) $x = 3$ e $y = 4$
d) $y = 1$ e $z = 1$
e) $z = 0$

12 Sendo A e A′ sistemas lineares equivalentes, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações a seguir.

a) O conjunto solução do sistema A é o mesmo conjunto solução do sistema A′.
b) Se o sistema A é possível e indeterminado, então A′ também é possível e indeterminado.
c) Se a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ é solução do sistema A e a sequência $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ é solução do sistema A′, então essas soluções são iguais.
d) Se um desses sistemas for impossível, o outro pode ser possível.
e) Nenhum deles pode ser impossível.

13 (UFPB) Sabendo que os sistemas lineares de incógnitas x e y abaixo são equivalentes, determine os valores de a e b.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} ax - 3y = 2 \\ x - by = 5 \end{cases}$$

14 Escalone e classifique os sistemas a seguir e dê o conjunto solução de cada um.

a) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 10 \\ x + 3y + 2z = 7 \\ 3x + y - 14z = 5 \end{cases}$

(*Sugestão*: Permute as duas primeiras equações.)

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - 2y - 6z = 1 \\ 3x + 4y + 8z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 7y + 8z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + 2t + z = 4 \\ 2x + 4y + 5t - z = 4 \\ 3x + 3y + 7t + 2z = 10 \\ 6x + 6y - t + z = 14 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \\ 5x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$

15 Classifique como SPD ou SPI cada um dos sistemas lineares homogêneos abaixo.

a) $\begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ 4x - 10y + 2z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

16 (Ufam) Em relação ao sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 5x + 4y - 2z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \end{cases}$$

Pode-se afirmar que:

a) o sistema é impossível.
b) o sistema é indeterminado, com uma incógnita arbitrária.
c) o sistema é determinado.
d) o sistema é indeterminado, com duas incógnitas arbitrárias.
e) (0, 0, 0) é a única solução do sistema.

17 Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} - z = -\dfrac{7}{4} \\ x + \dfrac{y - z}{2} = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

18 (UFRGS) Dado o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + y - z = -4 \\ x + 3y - 2z = -4 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}$$

os valores de x, y e z que constituem sua solução:

a) formam uma progressão geométrica.
b) formam uma progressão aritmética.
c) são iguais entre si.
d) não existem.
e) têm uma soma nula.

19 (PUC-RS) Determine as soluções do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

20 (FGV) Os números reais x, y e z são tais que $x + y + z = 6$ e $3x + 4y + 2z = 17$.

a) Encontre uma solução do sistema formado por essas duas equações.
b) Determine todas as soluções do sistema.
c) Calcule o valor de $9x + 11y + 7z$.

21 (Ufam) Dado o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

os valores de x, y e z que constituem sua solução:

a) são iguais entre si.
b) formam uma progressão geométrica.
c) não existem.
d) formam uma progressão aritmética.
e) têm seu produto nulo.

22 Considere as equações do sistema linear

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, nas variáveis x e y, com $\{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $e \neq 0$ e $f \neq 0$. Aplicando as propriedades das funções afins, mostre que:

a) se $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$, então as retas representadas pelas equações do sistema são concorrentes.

b) se $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, então as retas representadas pelas equações do sistema são paralelas coincidentes.

c) se $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, então as retas representadas pelas equações do sistema são paralelas distintas.

23 Aplicando as propriedades demonstradas no exercício anterior, classifique cada um dos sistemas lineares a seguir como SPD (sistema possível e determinado), SPI (sistema possível e indeterminado), ou SI (sistema impossível).

a) $\begin{cases} 12x + 8y = 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 3x + 15y = 4 \end{cases}$

24 Calcule o determinante da matriz dos coeficientes dos sistemas lineares a seguir e classifique-os como: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -9x + 3y = -15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$

25 Calculando o determinante da matriz dos coeficientes dos sistemas lineares homogêneos abaixo, classifique-os como SPD ou SPI.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 10x + 15y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

26 (UFSC) Analise o sistema linear $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = -4 \end{cases}$

Considerando a análise feita, a alternativa correta é:

a) O sistema admite apenas duas soluções.
b) O sistema admite apenas uma solução.
c) O sistema admite infinitas soluções.
d) O sistema não admite solução.

27 (Uespi) O sistema nas incógnitas x e y $\begin{cases} 2x + my = 5 \\ mx + 8y = 3 \end{cases}$ é possível e determinado se, e somente se:

a) $m \neq 3$
b) $m \neq 4$
c) $m \neq 4$ e $m \neq -4$
d) $m = 4$
e) $m \neq 4$ ou $m \neq -4$

28 Determine os valores reais de m para que o sistema linear a seguir, nas incógnitas x, y e z, admita uma única solução.

$$\begin{cases} 2x + y + mz = 1 \\ x - 3y - 5z = -2 \\ 5x - y + z = 0 \end{cases}$$

29 Obtenha o(s) valor(es) do parâmetro real k de modo que o sistema nas variáveis x e y abaixo admita soluções próprias.

$$\begin{cases} kx + 2y = 0 \\ 18x + ky = 0 \end{cases}$$

30 Obtenha os valores reais de k de modo que o sistema abaixo, nas variáveis x, y e z, admita soluções diferentes de (0, 0, 0).

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 3x - ky + 2z = 0 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$$

31 Para que valor(es) do parâmetro real m o sistema a seguir, nas incógnitas x, y e z, admite soluções não nulas?

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -5y + mz = 0 \end{cases}$$

32 (FGV) A condição necessária e suficiente para que a representação gráfica no plano cartesiano das equações do sistema linear $\begin{cases} (m + 1)x - y = 2 \\ 3x + 3y = 2n \end{cases}$ nas incógnitas x e y seja um par de retas paralelas coincidentes é:

a) $m \neq -2$ e $n \neq -3$
b) $m \neq -2$ e $n = -3$
c) $m = -2$
d) $m = -2$ e $n \neq -3$
e) $m = -2$ e $n = -3$

33 Determine os valores reais de α de modo que o sistema nas variáveis x, y e z abaixo admita mais de uma solução.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ (\text{sen}\, \alpha)y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

34 (UEMS) A equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, admite mais de uma solução se, e somente se:

a) $\lambda = 0$
b) $\lambda = \pm 3$
c) $\lambda = \pm 4$
d) $\lambda = \pm 5$
e) $\lambda = \pm 6$

35 Discuta, em função do parâmetro real a, o sistema $\begin{cases} 2x + ay = 1 \\ ax + 8y = 2 \end{cases}$, nas incógnitas x e y.

36 Discuta o seguinte sistema nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real k:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - z = 3 \\ x + 6y + kz = 3 \end{cases}$$

37 Discuta, em função do parâmetro real p, os sistemas nas incógnitas x, y e z:

a) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + py - 2z = 0 \\ px - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ px + 2y - z = 0 \\ 8x + py - 5z = 0 \end{cases}$

38 No sistema a seguir, as incógnitas são x, y e z. Discuta sua classificação em função do parâmetro real m.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 4x + my + 2z = 0 \\ 6x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

39 Discuta o sistema linear nas incógnitas x, y e z abaixo em função do parâmetro real p:

$$\begin{cases} 2x + y + pz = 0 \\ x + 5y + 2z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

40 (UFPI) Sabendo-se que o seguinte sistema de equações nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ 5x + 10y - 5z = k \end{cases}$$

admite infinitas soluções, o valor de k é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 7

41 (UFPI) Considere o sistema de equações nas variáveis x e y: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + ay = b \end{cases}$

Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações abaixo.

a) O sistema possui solução única se $a \neq 2$.
b) O sistema possui infinitas soluções se $a = 2$ e $b \neq 10$.
c) O sistema não possui solução se $a = 2$ e $b = 10$.
d) O sistema possui solução única se $a = 2$ e $b > 0$.

42 (UFMA) Para que valores de a e b o sistema linear nas incógnitas x, y e z $\begin{cases} x + 2y + 2z = -3 \\ 3x + y + 6z = -9 \\ ax + 4y + 4z = b \end{cases}$ é impossível?

a) $a \neq -2$ e $b \neq 3$
b) $a = 2$ e $b = -6$
c) $a \neq -6$ e $b = -2$
d) $a \neq -2$ e $b \neq -6$
e) $a = 2$ e $b \neq -6$

43 (Cefet-PR) Com relação ao sistema linear nas variáveis x, y e z

$$\begin{cases} \alpha x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ -x - 7y + 5z = \beta \end{cases}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que:

a) apresenta uma única solução para quaisquer valores de α e β.
b) não tem solução se $\alpha = 3$ e $\beta \neq 7$.
c) é possível e determinado se $\alpha \neq 3$.
d) possui infinitas soluções se $\alpha = 2$ e $\beta = 7$.
e) é possível e indeterminado para $\alpha = 3$ e qualquer β.

44 Para que valores reais de p e q os gráficos das equações $y = px + 2$ e $y = 3x + q$, de variáveis x e y, são retas paralelas distintas no plano cartesiano?

45 (UFMA) Dado o sistema linear nas incógnitas x, y e z $\begin{cases} x + my - z = 1 \\ 2x - y + z = n \\ 3x + y - 2z = 2n \end{cases}$, a alternativa que indica os valores de m e n para que o sistema tenha infinitas soluções é:

a) $m \neq \frac{4}{7}$ e $n \neq \frac{7}{5}$
b) $m \neq \frac{4}{7}$ e $n = \frac{7}{5}$
c) $m = \frac{4}{7}$ e $n \neq \frac{7}{5}$
d) $m = \frac{4}{7}$ e $n = \frac{7}{5}$
e) $m = \frac{7}{4}$ e $n = \frac{5}{7}$

46 Discuta o sistema linear a seguir, nas incógnitas x, y, t e z, em função do parâmetro real a.

$$\begin{cases} x + 2y - t + z = 5 \\ x + y + 2t - z = 1 \\ 3x + 4y + at - z = 1 \end{cases}$$

47 (Ibmec) Considere o sistema linear nas incógnitas x e y: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -3 \\ kx + ky = 20 \end{cases}$

Para que esse sistema seja possível, devemos ter:

a) $k = 4$
b) $k = 3$
c) $k = 2$
d) $k = 1$
e) $k = 0$

48 (UFPB) Considere o sistema, nas variáveis x e y, abaixo.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \\ x + k^3y = k \end{cases}$$

O conjunto formado por todos os valores reais de k que tornam esse sistema possível é:

a) $\{-1, 0, 1\}$
b) $\{0, 1\}$
c) $\{-1, 0\}$
d) $\{-1, 1\}$
e) $\{0\}$

49 (UEMG) Dado o sistema $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 5y = -3 \\ x - 3y = k \end{cases}$

Nas incógnitas x e y, esse sistema admite uma única solução se:

a) $k \neq 5$
b) $k = 5$
c) $k = 4$
d) $k = -4$

50 Discuta, em função do parâmetro real m, o sistema nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ -2x - 9y + mz = 0 \end{cases}$$

51 No plano cartesiano xOy, considere as retas de equações: $y = 2x + 3$, $y = 3x + 1$ e $y = x + k$. Determine o valor de k para que essas retas tenham um único ponto em comum.

52 Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} & -\cos\frac{\pi}{5} \\ \cos\frac{\pi}{5} & \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

53 (Ufam) O valor do determinante da matriz

$\begin{bmatrix} 0 & y & z & w \\ x & 0 & 0 & w \\ x & 0 & z & 0 \\ x & y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é:

a) $-3xyz$
b) $2xyzw$
c) $3xyz$
d) $3xyzw$
e) $-2xyw$

54 Calcule o determinante: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

55 Obtenha os valores reais do parâmetro m para que o sistema nas incógnitas x, y, t e z, a seguir, seja possível e determinado.

$$\begin{cases} 2x + 3y + mt + 2z = 6 \\ x + t - 2z = 1 \\ 3x + 2y = 5 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

56 Para que valor(es) de k o sistema homogêneo nas incógnitas a, b, c e d, abaixo, admite soluções diferentes da trivial?

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ 2a + c - 2d = 0 \\ b - c = 0 \\ a + kd = 0 \end{cases}$$

57 Discuta em função do parâmetro real p o sistema nas incógnitas x, y, t e z a seguir.

$$\begin{cases} x + 2y + 2t + z = 1 \\ 2x - y - t - z = 2 \\ x - 3y + t - 2z = 1 \\ 5x + pz = 5 \end{cases}$$

58 Calcule o determinante da matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ tal que $a_{ij} = j(i - 1)$.

59 Calcule o determinante da matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ tal que $a_{ij} = i(j + 1)$.

60 Calcule o valor numérico do determinante

$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$, sabendo que:

$$\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}$$

61 Considerando as matrizes: $A = (a_{ij})_{n \times n}$, com $a_{ij} = 2i + j$, e $B = (b_{ij})_{n \times n}$, com $b_{ij} = 2j + i$, mostre que $\det A = \det B$.

62 Sendo A uma matriz quadrada de ordem 4 tal que $\det A = 5$, calcule $\det (2A)$.

63 Obtenha o número real k, dado que A é uma matriz quadrada de ordem 4 tal que $\det A = 5$ e $\det (kA) = 245$.

64 Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, com $\det A \neq 0$ e $\det (2A) = 32\det A$, obtenha o valor de n.

65 Calcule $\det B$, sendo B uma matriz quadrada de ordem 4 tal que $\det (-B) = 3$.

66 Calcule $\det C$, sendo C uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det (-C) = 6$.

67 Sabendo que A é uma matriz quadrada de ordem n, com $\det A \neq 0$ e $\det (-A) = \det A$, podemos concluir que:

a) n é um número par.
b) n é um número ímpar.
c) n pode ser par ou ímpar, desde que $\det A$ seja positivo.
d) n pode ser par ou ímpar, desde que $\det A$ seja negativo.
e) n é ímpar se $\det A$ for positivo.

68 (FGV) As matrizes $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ e $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$ são tais que $2a_{ij} = 3b_{ij}$. Se o determinante da matriz A é $\frac{3}{4}$, então o determinante da matriz B é igual a:

a) 0
b) $\frac{4}{27}$
c) $\frac{9}{8}$
d) 2
e) $\frac{243}{64}$

69 Uma das filas da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ é combinação linear de outras duas filas paralelas.

a) Identifique qual é essa fila e descreva a combinação linear que ela representa.
b) Qual é o valor do determinante dessa matriz?

70 Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 10 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

(*Sugestão*: Para simplificar os cálculos, aplique o teorema de Jacobi conseguindo $a_{11} = 1$ e, depois, aplique novamente esse teorema para introduzir zeros na primeira coluna.)

71 Calcule o determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

72 (ITA-SP) O determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+4 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & b+9 & 12 \\ 5 & 12 & 16 & c+20 \end{pmatrix} \text{ é igual a:}$$

a) $2a + b - c$
b) $2a + b + c$
c) $ab - 2c$
d) $ac - 2b$
e) abc

73 Sejam as matrizes: $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $\det A = 5$ e $B = (A_{ij})_{3 \times 3}$ tal que cada A_{ij} é o cofator do elemento correspondente a_{ij} da matriz A. Calcule $A \cdot B^t$.

74 Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem tal que $AB = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, calcule det B.

75 Se A é uma matriz quadrada tal que $A^2 = A$, então podemos concluir que:
a) $\det A = 0$.
b) $\det A = 1$.
c) det A pode ter dois valores diferentes.
d) A é uma matriz nula.
e) det A é negativo.

76 (UFMA) Seja A uma matriz quadrada de ordem 4 tal que $\det A \neq 0$ e $A^2 - 3A = 0$, onde 0 é a matriz nula de ordem 4. Então:
a) $\det A = 3$
b) $\det A = 9$
c) $\det A = 81$
d) $\det A = -27$
e) $\det A = -9$

77 Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det A \neq 0$. Calcule det A, sabendo que $A^3 - 2A = 0$, em que 0 é a matriz nula de ordem 3.

78 Assinale a alternativa que apresenta uma matriz invertível.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

79 Determine os valores reais de x para que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & x & 7 \end{pmatrix}$ seja invertível.

80 (FGV) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 5 \\ x^2 & 4 & 25 \end{bmatrix}$ admite inversa se, e somente se:
a) $x \neq 5$
b) $x \neq 2$
c) $x \neq 2$ e $x \neq 5$
d) $x \neq 4$ e $x \neq 25$
e) $x \neq 4$

81 Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & 2 & x \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ é invertível para qualquer valor real de x.

82 Mostre que, qualquer que seja o número real x, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x+2 & 2 \\ 1 & x+5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ não admite inversa.

83 Em cada um dos itens a seguir, verifique se a matriz é invertível. Em caso afirmativo, determine a inversa através do produto da matriz adjunta pelo inverso do determinante.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Exercícios contextualizados

84 Um refrigerante é vendido em garrafas de 3 dL, 5 dL e 10 dL. Um consumidor comprou 48 dL desse refrigerante, adquirindo pelo menos uma garrafa de cada tipo.
a) Indicando, respectivamente, por x, y e z o número de garrafas de 3 dL, 5 dL e 10 dL, forme uma equação que represente essa compra de refrigerante.
b) Dê quatro soluções possíveis para a equação do item **a**.

85 Em um campeonato de futebol, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e cada derrota vale 0 ponto. Sabendo que a equipe A não sofreu nenhuma derrota e tem 12 pontos, quantas partidas pode ter disputado essa equipe?

86 Num jogo de pega-varetas, a vareta verde vale 5 pontos; a azul, 10 pontos; a amarela, 15 pontos; a vermelha, 20 pontos e a preta vale 50 pontos. Existem 5 varetas verdes, 5 azuis, 10 amarelas, 10 vermelhas e 1 preta.

Priscila conseguiu fazer 40 pontos numa jogada, retirando apenas varetas de cor verde, azul e amarela.
a) Indicando, respectivamente, por x, y e z o número de varetas verdes, azuis e amarelas retiradas por Priscila nessa jogada, qual é a equação que expressa o total de pontos obtidos por ela nessa jogada em função do número de varetas verdes, azuis e amarelas retiradas?
b) Quantas varetas de cada cor Priscila pode ter retirado nessa jogada?

87 (UFV-MG) Na compra de lâmpadas de 60 watts e de 100 watts para sua residência, Pedro pagou a quantia de R$ 9,50. Sabendo que o preço da lâmpada de 60 watts é R$ 0,65, e o da lâmpada de 100 watts é R$ 1,50, é correto afirmar que o número de lâmpadas compradas por Pedro foi:

a) 15
b) 11
c) 13
d) 14
e) 12

88 (Uenf-RJ) Para preencher sua necessidade diária de 300 g de carboidratos, um adulto ingere um tipo de alimentação mista que consiste de batata e soja.
Admita que 100 g de batata e 100 g de soja contenham, respectivamente, 19 g e 35 g de carboidratos, e que x e y representem as quantidades diárias, em grama, que esse adulto irá consumir, respectivamente, de batata e soja.
Considerando a necessidade diária de carboidratos desse adulto:

a) calcule a quantidade de soja, em grama, que ele deverá ingerir num determinado dia em que tenha consumido 400 g de batata;
b) estabeleça uma equação que relacione as variáveis x e y.

89 (UFPB) Cordeiro e Conceição foram juntas ao supermercado. Conceição comprou 1 kg de arroz do tipo 1 e 2 kg de açúcar granulado, gastando R$ 3,10. Cordeiro comprou 8 kg de arroz do tipo 1; 16 kg de açúcar granulado e 8 pacotes de biscoito a R$ 0,54 cada pacote. Quanto Cordeiro gastou a mais que Conceição?

90 (UEL) Analise a tabela a seguir.

	Um copo de leite	Uma colher (de sopa) de aveia	Necessidade diária padrão
Proteína	6,4 g	0,8 g	88 g
Carboidrato	10,0 g	2,0 g	400 g

Com base nos dados, um mingau composto somente desses ingredientes e feito para suprir 10% das necessidades diárias de proteína e 4% das necessidades diárias de carboidratos deverá conter quantos copos de leite e quantas colheres (de sopa) de aveia, respectivamente?

a) 1 e 2
b) 1 e 3
c) $1\frac{1}{2}$ e 4
d) 2 e 2
e) $2\frac{1}{2}$ e 3

91 (UFG-GO) Uma videolocadora classifica seus 1.000 DVDs em lançamentos e catálogo (não lançamentos). Em um final de semana, foram locados 260 DVDs, correspondendo a quatro quintos do total de lançamentos e um quinto do total de catálogo. Portanto, o número de DVDs de catálogo locados foi:

a) 80
b) 100
c) 130
d) 160
e) 180

92 (Enem) O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da **média aritmética** entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros (TA), em que $TC = \frac{NV}{NF}$, $TA = \frac{NA}{NV}$, NV é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, NF é o número de famílias estimadas como público-alvo do CadÚnico e NA é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

Portaria nº 148 de 27 de abril de 2006 (adaptado).

Suponha que o ICadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando o NF, o ICadÚnico cairá para 0,5. Se NA + NV = 3.600, então NF é igual a:

a) 10.000
b) 7.500
c) 5.000
d) 4.500
e) 3.000

93 (UFPE) Os poluentes A, B e C foram detectados numa amostra de ar de uma grande cidade. Observou-se que o total dos três poluentes na amostra correspondia a 15 mm^3 por litro. Na amostra, a quantidade de A era o dobro da de B, e a de C era 75% da de B. Quantos milímetros cúbicos de C continha cada litro da amostra?

94 (Fuvest-SP) Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas tem, respectivamente, 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custa, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3.300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas.

95 (Uerj) Um negociante de carros dispõe de certa quantia, em real, para comprar dois modelos de carro, A e B.
Analisando as várias possibilidades de compra, concluiu, em relação a essa quantia, que:

- faltariam R$ 10.000,00 para comprar cinco unidades do modelo A e duas do modelo B.
- sobrariam R$ 29.000,00 se comprasse três unidades de cada modelo.
- gastaria exatamente a quantia disponível se comprasse oito unidades do modelo B.

Estabeleça a quantia de que o negociante dispõe.

96 (Uerj) Um comerciante deseja totalizar a quantia de R$ 500,00 utilizando cédulas de um, cinco e dez reais, num total de 92 cédulas, de modo que as quantidades de cédulas de um e de dez reais sejam iguais.
Nesse caso, a quantidade de cédulas de cinco reais de que o comerciante precisará será igual a:

a) 12
b) 28
c) 40
d) 92

97 (UFPB) Fernando foi a um caixa eletrônico e fez um saque em cédulas de três tipos diferentes: R$ 20,00, R$ 10,00 e R$ 5,00. Sabe-se que ele retirou 14 cédulas e que a quantia retirada foi a mesma para cada tipo de cédula. A quantia sacada por Fernando foi:

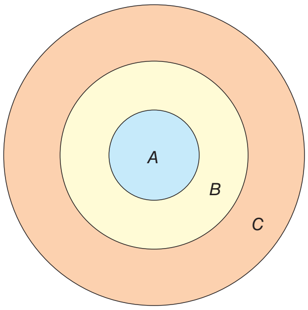
a) R$ 120,00
b) R$ 150,00
c) R$ 180,00
d) R$ 210,00
e) R$ 240,00

98 (ESPM-SP) A administração dos 1.040 km de uma estrada de rodagem foi concedida a três empresas distintas. A primeira ficou com 60% do trecho concedido às outras duas juntas, e a segunda ficou com 30% do trecho concedido às outras duas juntas. O comprimento do trecho concedido à terceira empresa é:

a) 440 km
b) 380 km
c) 410 km
d) 520 km
e) 450 km

99 (Fuvest-SP) Se Amélia der R$ 3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$ 6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Quanto possui cada uma das meninas, Amélia, Lúcia e Maria?

100 (UFJF-MG) O alvo de um "Tiro ao Alvo" é composto por três regiões, A, B e C, conforme a figura abaixo.



Nesse jogo, cada tiro acertado na região B vale metade dos pontos de um tiro acertado na região A e cada tiro acertado na região C vale um quinto dos pontos de um tiro acertado na região B. Carlos jogou e acertou 5 tiros na região A, 2 tiros na região B e 2 tiros na região C, perfazendo um total de 62 pontos. Pedro jogou e acertou 8 tiros na região A, 3 tiros na região B e 2 tiros na região C. Quantos pontos Pedro fez?

101 (Ufam) Uma loja de departamentos, para vender um televisor, um aparelho de DVD e um aparelho de som, propôs a seguinte oferta: o televisor e o DVD custam juntos R$ 1.100,00; o DVD e o aparelho de som custam juntos R$ 1.400,00; o televisor e o aparelho de som custam juntos R$ 1.600,00. Então quanto pagará, em real, um cliente que comprar os três produtos anunciados?

a) R$ 2.000,00
b) R$ 1.800,00
c) R$ 2.050,00
d) R$ 1.900,00
e) R$ 2.100,00

102 (UFT-TO) O estado do Tocantins tem vocação para a pecuária, contando hoje com um rebanho significativo de bovinos, ovinos e caprinos.
Considere que, em uma fazenda, o custo mensal para a manutenção de um rebanho de bovinos, ovinos e caprinos seja igual a R$ 126.000,00. Após análise da planilha de gastos da fazenda, verificou-se que o custo mensal de manutenção do rebanho bovino é 10% maior que a soma dos custos mensais de manutenção dos outros dois rebanhos, e que o custo mensal de manutenção do rebanho de ovinos é igual a um terço do custo mensal de manutenção do rebanho bovino.
Com base nessas informações, classifique como certa (C) ou errada (E) cada uma das afirmações a seguir, relativas à fazenda citada.

a) O custo mensal de manutenção do rebanho ovino é superior a R$ 21.000,00.
b) O custo mensal de manutenção do rebanho caprino é inferior a R$ 37.000,00.
c) Supondo que o custo de manutenção mensal com cada animal do rebanho bovino seja igual a R$ 110,00, é correto concluir que esse rebanho tem mais de 590 animais.
d) Considerando $(1{,}01)^4 = 1{,}04$, aplicando-se o custo mensal de manutenção dos rebanhos em um fundo de investimentos que oferece uma taxa de juros compostos de 1% ao mês, é correto afirmar que, ao final de um ano, recebe-se, a título de juros, o suficiente para cobrir 80% do custo mensal de manutenção do rebanho de ovinos.

103 (Cefet-SP) A tabela indica a quantidade de cálcio e de ferro por litro nos sucos A, B e C, além do preço de cada suco.

	Cálcio	Ferro	Preço (por litro)
Suco A	20 mg	30 mg	R$ 5,00
Suco B	30 mg	20 mg	R$ 4,00
Suco C	30 mg	50 mg	R$ 2,00

A única combinação dos três sucos que custa R$ 27,00 e tem, no total, 180 mg de cálcio e 230 mg de ferro corresponde a um volume total de suco, em litro, igual a:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

104 (OBM) Numa famosa joalheria estão armazenadas várias pedras preciosas dos seguintes tipos: esmeralda, safira e rubi. Todas as pedras do mesmo tipo têm o mesmo valor. Além disso, 24 esmeraldas valem tanto quanto 12 rubis e também valem tanto quanto 8 safiras.
Com R$ 350.000,00 um príncipe comprou um conjunto com 4 esmeraldas, 6 rubis e 4 safiras. Quanto custa cada tipo de pedra?

105 Um investidor tem dinheiro aplicado em três fundos, A, B e C, num total de 50 mil reais.
No fundo B ele possui 2 mil reais a mais que em C.
Pode-se concluir que:

a) o valor aplicado em A é 47 mil reais.
b) o valor aplicado em A é maior que 47 mil reais.
c) o valor aplicado em C é menor que 24 mil reais.
d) o valor aplicado em B pode ser 26 mil reais.
e) a maior das três aplicações é a do fundo A.

106 (Fuvest-SP) Uma fazenda estende-se por dois municípios, A e B.
A parte da fazenda que está em A ocupa 8% da área desse município.
A parte da fazenda que está em B ocupa 1% da área desse município.
Sabendo que a área do município B é dez vezes a área do município A, a razão entre a área da parte da fazenda que está em A e a área total da fazenda é igual a:

a) $\frac{2}{9}$
b) $\frac{3}{9}$
c) $\frac{4}{9}$
d) $\frac{5}{9}$
e) $\frac{7}{9}$

107 (UFPE) Júnior gastou R$ 100,00 para comprar lápis, cadernos e canetas que custam R$ 0,50, R$ 10,00 e R$ 3,00 a unidade, respectivamente.
Se foi comprado pelo menos um objeto de cada tipo e um total de 100 objetos, quantos foram os lápis comprados?

108 (UFF-RJ) Niccolo "Tartaglia" (1499-1557), matemático italiano, desenvolveu diversos resultados em Álgebra elementar provenientes, em geral, de problemas da área comercial.
Considere o seguinte exemplo de um problema da área de câmbio resolvido por "Tartaglia":
"Se 100 liras de Módena equivalem a 115 liras de Veneza, 180 liras de Veneza valem 150 liras de Corfu, e 240 liras de Corfu montam a [valem] 360 liras de Negroponte, por quantas liras de Módena se cambiam [trocam] 666 liras de Negroponte?"
Assinale a opção que apresenta a parte inteira do valor encontrado por "Tartaglia" em resposta a esse problema.

a) 115
b) 156
c) 354
d) 444
e) 463

109 (UFG) Para se produzir 40 toneladas de concreto gasta-se o total de R$ 2.040,00 com areia, brita e cimento. Sabe-se que 15% da massa final do concreto é constituída de água e que o custo, por tonelada, de areia é R$ 60,00, de brita é R$ 30,00 e de cimento é R$ 150,00. Qual é a razão entre as quantidades, em tonelada, de cimento e brita utilizadas na produção desse concreto?

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{2}{5}$

110 (Unicamp) Pedro precisa comprar x borrachas, y lápis e z canetas. Após fazer um levantamento em duas papelarias, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R$ 23,00 pelo conjunto de borrachas, lápis e canetas, enquanto a papelaria B cobra R$ 25,00 pelo mesmo material. Em seu levantamento, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R$ 1,00 pela borracha, R$ 2,00 pelo lápis e R$ 3,00 pela caneta e que a papelaria B cobra R$ 1,00 pela borracha, R$ 1,00 pelo lápis e R$ 4,00 pela caneta.

a) Forneça o número de lápis e de borrachas que Pedro precisa comprar em função do número de canetas que ele pretende adquirir.
b) Levando em conta que $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ e $z \geqslant 1$, e que essas três variáveis são inteiras, determine todas as possíveis quantidades de lápis, borrachas e canetas que Pedro deseja comprar.

111 (Unifesp) Em uma lanchonete, o custo de 3 sanduíches, 7 refrigerantes e uma torta de maçã é R$ 22,50. Com 4 sanduíches, 10 refrigerantes e uma torta de maçã, o custo vai para R$ 30,50. O custo de um sanduíche, um refrigerante e uma torta de maçã, em real, é:

a) 7,00
b) 6,50
c) 6,00
d) 5,50
e) 5,00

112 Em uma prova classificatória para as olimpíadas, cada atleta recebeu uma nota representada por um número inteiro de 0 a 20. Nessa prova classificaram-se somente os atletas com 18, 19 ou 20 pontos. Calcule o número de atletas classificados sabendo que a soma de suas notas é 116 e que apenas 4 atletas receberam nota maior que 18.

113 Para a produção de x garrafas plásticas, um fabricante teve um custo fixo de R$ 5.000,00 mais um custo de R$ 0,05 por garrafa produzida. Assim, o custo total C de produção, em real, é dado por $C(x) = 5.000 + 0{,}05x$.
Se toda a produção for vendida, ao custo de k reais por garrafa, o lucro, em real, será dado pela função $L(x) = kx - C(x)$, ou seja:
$L(x) = kx - 5.000 - 0{,}05x \Rightarrow L(x) = (k - 0{,}05)x - 5.000$
Representando as funções C e L em um mesmo plano cartesiano xOy, o gráfico de C é formado por pontos da reta de equação $y = 5.000 + 0{,}05x$, e o de L é formado por pontos da reta de equação $y = (k - 0{,}05)x - 5.000$.

a) Para que valor de k as retas que contêm os gráficos de C e L são paralelas distintas?
b) Para o valor de k obtido no item **a**, quantas garrafas devem ser vendidas para que o fabricante ganhe algum dinheiro com essa venda?

114 Uma torneira com vazão constante encheu um tanque de capacidade c. Nos primeiros k minutos, foram despejados x litros de água e nos $2k - 6$ minutos restantes foram despejados y litros, com $\{k, x, y\} \subset \mathbb{R}^*_+$.

a) Equacione esse problema por meio de um sistema linear nas incógnitas x e y.
b) Para que valor(es) de k, com $k \in \mathbb{R}^*_+$, o sistema formado no item **a** tem solução única?

115 Um automóvel percorreu um trecho de uma estrada com velocidade constante. Dividindo a distância percorrida pelo automóvel nesse trecho em três partes, x, y e z, em km, o tempo, em minuto, transcorrido nesses trechos foi 4, $3k$ e $2k$, respectivamente.

a) Considerando as incógnitas x, y e z, equacione esse problema por meio de um sistema linear homogêneo.
b) Discuta o sistema formado no item **a** em função do parâmetro real k, com $k \in \mathbb{R}^*_+$.

116 Por terem comprado café e açúcar no mesmo dia e no mesmo supermercado, João, Carlos e Vera pagaram o mesmo preço por quilograma de café e o mesmo preço por quilograma de açúcar. João gastou R$ 8,00 em 1 kg de café e 2 kg de açúcar; Carlos gastou R$ 15,00 em 2 kg de café e n kg de açúcar, e Vera gastou R$ 22,00 em 3 kg de café e $(n + 1)$ kg de açúcar. Nessas condições, conclui-se que:

a) $n = 1$
b) $n = 2$
c) $n = 3$
d) $n = 4$
e) $n = 5$

117 Para uma determinada contribuição mensal, em real, um plano de previdência privada prevê para o segurado que se aposenta um rendimento mensal diretamente proporcional ao tempo de contribuição, conforme a tabela:

Rendimento mensal (R$)	Tempo de contribuição (anos)
a	8
b	10
c	15
d	k

sendo k uma constante real positiva.

a) Equacione esse problema através de um sistema linear homogêneo de incógnitas a, b, c, d e parâmetro k, da forma:

$$\begin{cases} 10a + (?)b + 0c + 0d = 0 \\ 0a + 15b + (?)c + 0d = 0 \\ 0a + 0b + (?)c - 15d = 0 \\ ka + 0b + 0c + (?)d = 0 \end{cases}$$

em que as interrogações devem ser substituídas por números reais.

b) Classifique o sistema obtido no item **a** como SPD, SPI ou SI.

118 Uma loja vende certa marca de ração para cães em pacotes de quatro tamanhos: pequeno, médio, grande e extragrande. A tabela a seguir mostra as quantidades desses pacotes vendidas pela loja nos quatro primeiros dias de fevereiro:

	Pequeno	Médio	Grande	Extra-grande
Dia 1	12	7	2	4
Dia 2	15	8	1	3
Dia 3	10	6	2	k
Dia 4	13	7	1	k

Supondo que sejam conhecidos o valor de k e as receitas, em real, obtidas com as vendas dessa ração em cada um dos dias considerados e que não houve alteração de preços nesses dias, é possível conhecer o preço de cada tipo de pacote de ração, a partir desses dados? Por quê?

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Em um ponto A de uma pista circular com 1.000 m de raio, o piloto de um carro de corrida zerou o velocímetro e, a seguir, girou 30 voltas no sentido anti-horário da pista. Ao passar pela primeira vez por um ponto P, o velocímetro registrava 2.000 m. Qual das expressões a seguir representa todas as medidas x, em metro, registradas no velocímetro ao passar pelo ponto P?

a) $x = 2.000(1 + k \cdot \pi)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \leq 30$

b) $x = 2.000(1 + k \cdot \pi)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \leq 29$

c) $x = 1.000(1 + 2k \cdot \pi)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \leq 30$

d) $x = 1.000(1 + 2k \cdot \pi)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \leq 29$

e) $x = 2.000k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \leq 30$

2 Em determinado ano, as taxas mensais de inflação em dois estados brasileiros, representados por "estado 1" e "estado 2", foram 2% e 3%, respectivamente. No início desse ano, um produto que custava R$ 1,00 nos dois estados teve o preço reajustado ao final de cada mês, de acordo com a taxa de inflação do respectivo estado.

a) Considerando apenas o primeiro trimestre desse ano, obtenha os valores a_{21}, a_{22}, a_{31} e a_{32} da matriz abaixo, na qual cada elemento a_{ij} representa o preço desse produto ao final do mês i no estado j (não é preciso fazer os cálculos).

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}02 & 1{,}03 \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

b) Os elementos da matriz do item **a** podem ser representados por uma lei na forma:

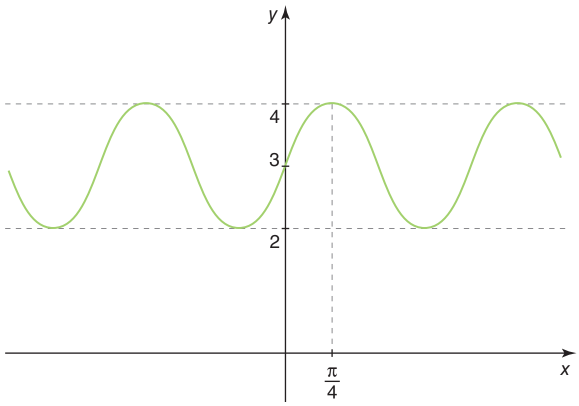
$$a_{ij} = \begin{cases} x, \text{ se } j = 1 \\ y, \text{ se } j = 2 \end{cases}$$

Determine essa lei.

3 Determine todos os valores reais x tais que:

$$\begin{bmatrix} \text{sen } x & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \text{sen } x \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 O gráfico abaixo representa a função $y = a + \text{sen } bx$. Determine os valores de a e b.



Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Três jogadores A, B e C de uma equipe finalista de um campeonato de futebol disputam a artilharia da competição. Antes do último jogo, os três jogadores juntos haviam marcado 25 gols, sendo que A tinha um gol a mais que C. Terminado o último jogo, a equipe desses jogadores venceu por 1 a 0, havendo empate na artilharia do campeonato. Pode-se afirmar que:

a) O jogador A foi um dos artilheiros.
b) O jogador B foi um dos artilheiros.
c) O jogador C foi um dos artilheiros.
d) Certamente o jogador A não foi um dos artilheiros.
e) Não é possível determinar nenhum dos artilheiros.

Resolução

Sejam:
a: número de gols marcados pelo jogador A
b: número de gols marcados pelo jogador B
c: número de gols marcados pelo jogador C
Sem o último jogo, temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 25 & \text{(I)} \\ a = c + 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$c + 1 + b + c = 25 \Rightarrow 2c = 24 - b$

$\therefore c = \dfrac{24 - b}{2}$ (III)

Substituindo (III) em (II), temos

$a = \dfrac{24 - b}{2} + 1$

$\therefore a = \dfrac{26 - b}{2}$

ERRADO!

Assim, o conjunto solução do sistema é $S = \left\{\left(\dfrac{26-b}{2}, b, \dfrac{24-b}{2}\right), \text{com } b \in \mathbb{R}\right\}$

Como o sistema tem infinitas soluções, não é possível determinar nenhum dos artilheiros.

Alternativa e.

Comentário

O aluno cometeu um erro no conjunto solução ao admitir que *b* pode assumir qualquer valor real, pois *b* representa um número de gols, portanto, *b* deve ser um número natural. Observando o conjunto S, podemos restringir ainda mais os valores de *b*: $b \in \mathbb{N}$, $b \leq 24$ e *b* é par.

Considerando essas restrições, é possível encontrar a solução do sistema.

Refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo

8

Análise combinatória e binômio de Newton

Você sabe contar? Antes de responder, pense nas seguintes perguntas: Quantos alunos há em sua classe? Quantos números de telefone com oito dígitos podem ser formados? Quantos glóbulos vermelhos existem em cada mililitro do seu sangue?
Note que o grau de dificuldade aumenta de pergunta para pergunta, até que o processo de contagem de unidades uma a uma se torne impraticável.
Neste capítulo, estudaremos alguns métodos de contagem.

8.1 O que é Análise combinatória

Às vezes, é necessário estabelecer métodos de contagem que consigam resultados mais rápidos do que a contagem um a um. Esse é o principal objetivo da Análise combinatória.

8.2 Fatorial

Um método de contagem pode envolver a multiplicação de muitos números naturais consecutivos. O fatorial é uma forma abreviada de indicar essas multiplicações.

8.3 Classificação dos agrupamentos

A formação de um agrupamento pode ou não considerar a ordem dos elementos agrupados. Por isso, a Análise combinatória classifica os agrupamentos em dois tipos fundamentais: os arranjos e as combinações.

8.4 O binômio de Newton

Aplicando conceitos da Análise combinatória, Isaac Newton demonstrou uma fórmula para o desenvolvimento de potências de um binômio.

As piores senhas do mundo *****

Para acessar tudo o que se tem de importante na internet, seja o e-mail, o perfil no site de relacionamento ou a conta do banco, é preciso ter uma senha secreta. Mas algumas senhas não são tão secretas assim.

As 20 senhas mais fáceis

No fim de 2009, um *hacker* aproveitou um defeito em um site comercial e colocou na internet as senhas de 32 milhões de clientes da empresa, mostrando que as mesmas combinações apareciam milhares de vezes.

Note que nenhuma dessas senhas usa caracteres especiais, como &?*%

Esta senha lidera a lista das mais fracas e só nesse site era usada por mais de 290 mil pessoas.

Isso é típico de quem tem preguiça, ter como senha a palavra "senha".

São as primeiras teclas do teclado. Usar caracteres de teclas vizinhas é uma estratégia que não engana ninguém.

A sétima combinação mais usada é o nome do site que teve sua segurança quebrada. Ideia tão fraca quanto a de quem usa seu próprio nome como senha – ou o nome da mãe, do cachorro etc.

Esta lista de senhas também é um gráfico

A altura de cada senha é proporcional ao número de clientes que a usava.

Como criar uma senha forte

Use muitas letras

Usando todas as letras do teclado, uma senha com quinze caracteres é 5.429.503.678.976 vezes mais difícil de quebrar que uma senha com seis caracteres.

Combine maiúsculas, minúsculas, números e símbolos

Quanto maior a variedade de caracteres da senha, mais difícil será quebrá-la.

Há 10.000.000.000 de senhas diferentes formadas por dez caracteres numéricos.

Com apenas letras minúsculas, existem 141.167.095.653.376 possibilidades de senhas com dez caracteres.

Com todo o teclado, incluindo maiúsculas, minúsculas e caracteres especiais, pode-se ter 53.861.511.409.489.970.176 senhas diferentes com dez caracteres.

Use frases secretas

Escolha uma frase, um trecho de música ou poesia da qual você possa se lembrar.

Mais vale um pássaro na mão que dois voando
\+ Vl 1 p$$r n M q 2 Vnd

Crie sua senha com um critério que você não esqueça, como dispensar as vogais, trocar determinadas palavras e letras por números e caracteres especiais etc.

+Vl1p$$rnMq2Vnd

Com quinze caracteres de todas as variedades, essa seria uma excelente senha, se ainda fosse secreta.

Para pensar

1. Você considera suas senhas seguras?
2. De acordo com o infográfico, qual é a segunda senha mais utilizada?
3. Quantas senhas de três caracteres podemos formar com os caracteres %, $ e @, sem repetição?

Seção 8.1

O que é Análise combinatória

Objetivos

- **Aplicar** o princípio fundamental da contagem.
- **Construir** a matriz das possibilidades.
- **Aplicar** o princípio aditivo de contagem.

Termos e conceitos

- Análise combinatória
- princípio fundamental da contagem

Em qualquer ramo de atuação, a contagem faz parte do cotidiano das pessoas. Por isso dedicamos este capítulo ao estudo da contagem. Para entender a necessidade desse estudo, tente responder às seguintes perguntas:

- Quantas placas diferentes de automóveis, formadas por três letras e quatro algarismos, podem existir?
- De quantas maneiras diferentes você pode escolher seis entre 60 números para jogar na Mega-Sena?
- Quantos números de telefone de oito dígitos podem existir?
- Em uma classe de 40 alunos, quantas são as possíveis escolhas para dois representantes de sala?

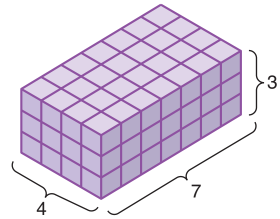
Como você pode perceber, contar não é sempre um processo tão simples como pode parecer à primeira vista. Contar unidades uma a uma, que é o processo elementar, não é viável em muitas situações. Por isso, é necessário estabelecer métodos de contagem que atinjam resultados mais rapidamente. Conhecer tais métodos é o objetivo principal da **Análise combinatória**.

O princípio fundamental da contagem

A Análise combinatória é alicerçada no **princípio fundamental da contagem**. Esse princípio, também conhecido como **princípio multiplicativo da contagem**, é aplicado em situações como:

- se, em um teatro, os lugares são distribuídos em 15 fileiras com 20 poltronas em cada fileira, então o número total de poltronas é dado pelo produto $15 \cdot 20$;

- se um paralelepípedo é formado por cubinhos de mesmo tamanho, colocados face a face, tal que o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo equivalem a 7, 4 e 3 arestas dos cubinhos, respectivamente, concluímos que o total de cubinhos que compõem o paralelepípedo é dado pelo produto $7 \cdot 4 \cdot 3$;
- se existem cerca de 10^{11} estrelas em uma galáxia e aproximadamente 10^{11} galáxias, então o número estimado de estrelas no cosmo é dado pelo produto $10^{11} \cdot 10^{11}$.



As multiplicações que efetuamos para obter o número de poltronas, o número de cubinhos e o número de estrelas resultam do que chamaremos, de agora em diante, de **princípio fundamental da contagem**. Antes de enunciar formalmente esse princípio, vamos resolver o problema a seguir, que apresenta o raciocínio indispensável para o entendimento dessa ideia.

Um problema de contagem

Para identificar e organizar os participantes de um congresso, serão feitos dois tipos de crachá: tipo (I), destinado aos palestrantes; e tipo (II), destinado à plateia. Cada crachá do tipo (I) terá impresso um dos algarismos de 1 a 5 seguido de uma das letras A, B ou C, por exemplo $\boxed{1\ B}$; e cada crachá do tipo (II) terá um dos algarismos de 1 a 5 seguido de uma das letras A, B ou C e ainda de uma das letras gregas α, β ou λ, por exemplo, $\boxed{2\ C\ \alpha}$.

Quantos crachás de cada tipo podem ser criados?

Inicialmente, vamos calcular o número de crachás do tipo (I) que podem ser confeccionados. Para isso, construímos uma matriz com todos os pares ordenados em que o primeiro elemento é um dos algarismos possíveis (1, 2, 3, 4 ou 5) e o segundo elemento é uma das letras possíveis (A, B ou C):

$$\begin{array}{c c} & \overbrace{\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array}}^{\text{letras}} \\ \text{algarismos} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right. & \begin{bmatrix} (1, A) & (1, B) & (1, C) \\ (2, A) & (2, B) & (2, C) \\ (3, A) & (3, B) & (3, C) \\ (4, A) & (4, B) & (4, C) \\ (5, A) & (5, B) & (5, C) \end{bmatrix} \end{array}$$

Essa matriz, chamada de **matriz das possibilidades**, tem 5 linhas por 3 colunas. Logo, seu número de elementos é dado pelo produto:

$$\underbrace{5}_{\substack{\text{número de} \\ \text{escolhas} \\ \text{possíveis de} \\ \text{algarismos}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{número de} \\ \text{escolhas} \\ \text{possíveis} \\ \text{de letras}}} = 15$$

Portanto, o número de crachás do tipo (I) que podem ser confeccionados é 15.

Essa primeira parte da resolução ajuda a entender o **princípio fundamental da contagem**, enunciado a seguir.

Se um experimento E pode apresentar n resultados distintos e um experimento F pode apresentar k resultados distintos, então o número de resultados distintos que pode apresentar o experimento composto de E e F, nessa ordem, é dado pelo produto $n \cdot k$.

Nota:

Se x_1 e x_2 são possíveis resultados dos experimentos E e F, respectivamente, então o par ordenado (x_1, x_2) é um possível resultado do experimento composto de E e F, nessa ordem.

Para calcular o número de crachás do tipo (II), vamos construir a matriz formada por todos os ternos ordenados em que o primeiro elemento é um dos algarismos possíveis (de 1 a 5), o segundo é uma das letras A, B ou C, e o terceiro é uma das letras gregas α, β ou λ:

$$\begin{array}{r l}
 & \overbrace{\begin{array}{ccc} \alpha \qquad & \qquad \beta \qquad & \qquad \lambda \end{array}}^{\text{letras gregas}} \\
\text{pares}\left\{\begin{array}{c} (1, A) \\ (1, B) \\ (1, C) \\ (2, A) \\ (2, B) \\ (2, C) \\ (3, A) \\ (3, B) \\ (3, C) \\ (4, A) \\ (4, B) \\ (4, C) \\ (5, A) \\ (5, B) \\ (5, C) \end{array}\right. &
\begin{bmatrix}
(1, A, \alpha) & (1, A, \beta) & (1, A, \lambda) \\
(1, B, \alpha) & (1, B, \beta) & (1, B, \lambda) \\
(1, C, \alpha) & (1, C, \beta) & (1, C, \lambda) \\
(2, A, \alpha) & (2, A, \beta) & (2, A, \lambda) \\
(2, B, \alpha) & (2, B, \beta) & (2, B, \lambda) \\
(2, C, \alpha) & (2, C, \beta) & (2, C, \lambda) \\
(3, A, \alpha) & (3, A, \beta) & (3, A, \lambda) \\
(3, B, \alpha) & (3, B, \beta) & (3, B, \lambda) \\
(3, C, \alpha) & (3, C, \beta) & (3, C, \lambda) \\
(4, A, \alpha) & (4, A, \beta) & (4, A, \lambda) \\
(4, B, \alpha) & (4, B, \beta) & (4, B, \lambda) \\
(4, C, \alpha) & (4, C, \beta) & (4, C, \lambda) \\
(5, A, \alpha) & (5, A, \beta) & (5, A, \lambda) \\
(5, B, \alpha) & (5, B, \beta) & (5, B, \lambda) \\
(5, C, \alpha) & (5, C, \beta) & (5, C, \lambda)
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Essa matriz apresenta 15 linhas por 3 colunas. Logo, seu número de elementos é dado pelo produto:

$$\underbrace{15}_{\substack{\text{número de} \\ \text{escolhas} \\ \text{possíveis} \\ \text{de pares}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{número de} \\ \text{escolhas} \\ \text{possíveis de} \\ \text{letras gregas}}} = 45$$

Ou ainda:

$$\underbrace{5}_{\substack{\text{número de} \\ \text{escolhas} \\ \text{possíveis de} \\ \text{algarismos}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{número de} \\ \text{escolhas} \\ \text{possíveis de} \\ \text{letras latinas}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{número de} \\ \text{escolhas} \\ \text{possíveis de} \\ \text{letras gregas}}} = 45$$

Concluímos, então, que podem ser confeccionados 45 crachás do tipo (II).

A segunda parte da resolução ajuda a compreender que o princípio fundamental da contagem vale para mais de dois experimentos. A seguir, enunciamos a generalização desse princípio.

Se os experimentos $E_1, E_2, E_3, ..., E_k$ podem apresentar $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ resultados distintos, respectivamente, então o número de resultados distintos que o experimento composto de $E_1, E_2, E_3, ...$ e E_k pode apresentar, nessa ordem, é dado pelo produto: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ ... \cdot n_k$

Nota:

Se $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ são possíveis resultados dos experimentos $E_1, E_2, E_3, \dots E_n$, respectivamente, então a sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ é um possível resultado do experimento composto de $E_1, E_2, E_3, \dots E_n$, nessa ordem.

Aplicando a linguagem dos conjuntos, esse princípio também pode ser enunciado da seguinte forma:

> Sendo $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ conjuntos não vazios, o número de escolhas diferentes de um elemento de A_1, um de A_2, um de A_3, ... e um de A_k, nessa ordem, é dado pelo produto: $n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot \dots \cdot n(A_k)$

Nota:

O símbolo **n(*A*)** representa o número de elementos do conjunto *A*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Uma loja de roupas femininas vende 4 modelos diferentes de calças *jeans*. Cada calça pode ter uma das cores: preto, marrom ou azul.

Quantas opções de escolha terá uma consumidora interessada em comprar uma calça *jeans* nessa loja?

Resolução

Consideremos o esquema em que cada casa representa uma escolha da consumidora:

modelo	cor

Para a primeira casa existem quatro possibilidades de escolha, e para a segunda, três possibilidades:

modelo	cor
4	3

Pelo princípio fundamental da contagem, o número de escolhas é dado pelo produto $4 \cdot 3$, ou seja, a consumidora tem 12 opções de escolha.

2 Quantos números naturais de três algarismos podem ser representados com os algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9?

Resolução

No esquema a seguir, as casas, da esquerda para a direita, representam as centenas, as dezenas e as unidades, respectivamente.

centenas	dezenas	unidades

Como não há restrição no enunciado, pode haver repetição de algarismos, ou seja, podemos considerar números como 477 e 999. Logo, para preencher cada uma das casas existem seis possibilidades de escolha, pois podemos preenchê-la com um dos algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9.

centenas	dezenas	unidades
6	6	6

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o total de números que podem ser representados é dado pelo produto $6 \cdot 6 \cdot 6$. Ou seja, nas condições enunciadas, é possível representar 216 números.

3 Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser representados com os algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9?

Resolução

No esquema abaixo, cada casa pode ser preenchida com um dos algarismos 2, 3, 4, 7, 8 ou 9, sem repeti-los.

centenas	dezenas	unidades

- O número de possibilidades de preenchimento da primeira casa é 6.
- O número de possibilidades de preenchimento da segunda casa é 5, pois um algarismo já foi usado na primeira casa e não pode ser repetido.
- O número de possibilidades de preenchimento da terceira casa é 4, pois os dois algarismos usados nas casas anteriores não podem ser repetidos.

centenas	dezenas	unidades
6	5	4

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o total de números que podem ser representados é dado pelo produto $6 \cdot 5 \cdot 4$. Ou seja, nas condições enunciadas, é possível representar 120 números.

4 Quantos números naturais de 4 algarismos distintos podem ser representados com os algarismos 0, 2, 3, 7, 8 e 9?

Resolução

Devemos preencher cada uma das casas do esquema sem repetir algarismos e observando que o zero não pode ocupar a primeira casa da esquerda (milhares), pois, se isso ocorresse, o número não teria 4 algarismos.

milhares	centenas	dezenas	unidades

Assim:

- O número de possibilidades de preenchimento da primeira casa é 5, pois excluímos o zero.
- Depois de colocado um algarismo não nulo na primeira casa, restam 4 algarismos não nulos e o zero como possibilidades para a segunda casa; logo, temos 5 possibilidades para a segunda casa.
- Depois de colocados os algarismos nas duas primeiras casas, restam 4 algarismos como possibilidades para a terceira casa.
- Depois de colocados os algarismos nas três primeiras casas, restam 3 algarismos como possibilidades para a última casa.

milhares	centenas	dezenas	unidades
5	5	4	3

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o total de números que podem ser representados é dado pelo produto $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Ou seja, nas condições enunciadas, é possível representar 300 números.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Um experimento consiste em lançar um dado e uma moeda sobre uma mesa. Um resultado desse experimento é, por exemplo, o par (5, coroa), isto é, face 5 no dado e face coroa na moeda.

a) Escreva todos os possíveis resultados, organizando-os em uma matriz de possibilidades.

b) Determine, pelo princípio fundamental da contagem, quantos são os possíveis resultados desse experimento.

2 Em um ginásio de esportes, os lugares destinados aos espectadores são separados em 4 setores, com a mesma quantidade de cadeiras em cada um: setores azul, laranja, amarelo e verde. Em um setor, cada cadeira é identificada por uma das 26 letras do alfabeto, seguida de um dos números naturais de 1 a 45. O bilhete de ingresso ao estádio apresenta uma sequência com uma cor, uma letra e um número. Assim, por exemplo (azul, G, 38), indica: setor azul, fila G, cadeira 38. Quantas cadeiras são destinadas aos espectadores se o total de cadeiras é igual ao total de possibilidades de identificação?

3 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine:

a) quantos números naturais de quatro algarismos podem ser representados.

b) quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser representados.

4 Dez atletas disputam uma corrida. De quantas maneiras diferentes pode ocorrer a classificação dos três primeiros colocados se não pode haver empate?

5 Com os algarismos 0, 4, 5, 7 e 9, determine:

a) Quantos números naturais de quatro algarismos podem ser representados.

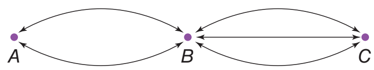
b) Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser representados.

6 Com os algarismos 1, 3, 4, 5, 7 e 9, determine:

a) Quantos números naturais pares de três algarismos podem ser formados.

b) Quantos números naturais pares de três algarismos distintos podem ser formados.

7 Duas linhas de ônibus ligam as cidades A e B, e três linhas ligam as cidades B e C, conforme mostra o esquema:



a) De quantos modos diferentes um usuário pode escolher uma sequência dessas linhas indo de A para C e passando por B?

(*Sugestão*: Esse experimento é composto de dois outros: ir de A para B e de B para C. Represente por um quadrinho cada um desses experimentos.)

b) De quantas maneiras diferentes um usuário pode escolher uma sequência dessas linhas fazendo o trajeto de ida e volta de A para C e passando por B na ida e na volta de modo que não use a mesma linha que usou na ida?

8 Qualquer símbolo utilizado na escrita de uma linguagem é chamado de caractere; por exemplo: letras, algarismos, sinais de pontuação, sinais de acentuação, sinais especiais etc. Em computação, cada caractere é representado por uma sequência de 8 *bits*, e cada *bit* pode assumir dois estados, representados por 0 ou 1; por exemplo, a sequência 01000111 representa a letra G. Assim, o número máximo de caracteres que podem ser representados por todas as sequências de 8 *bits* é:

a) 16 **b)** 32 **c)** 64 **d)** 128 **e)** 256

9 Um *hacker* sabe que a senha de acesso a um arquivo secreto é um número natural de cinco algarismos distintos e não nulos. Com o objetivo de acessar esse arquivo, o *hacker* programou o computador para testar, como senha, todos os números naturais nessas condições. O computador vai testar esses números um a um, demorando 5 segundos em cada tentativa. O tempo máximo para que o arquivo seja aberto é:

a) 12 h 30 min
b) 11 h 15 min 36 s
c) 21 h
d) 12 h 26 min
e) 7 h

10 No Brasil, as placas de automóvel são formadas por uma sequência de três letras seguida de uma sequência de quatro algarismos, por exemplo:

a) Quantas placas diferentes podem ser formadas com as letras A, B, C e D e com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?
b) Quantas placas podem ser formadas com as letras A, B, C e D e com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 sem repetir letra nem algarismo?
c) Quantas placas diferentes podem ser formadas com pelo menos um algarismo não nulo empregando-se as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos do sistema decimal?

Resolva os exercícios complementares 34 a 52.

Princípio aditivo da contagem

Alguns resultados da teoria dos conjuntos têm importantes aplicações na Análise combinatória. Um deles é o cálculo do número de elementos da união de dois conjuntos finitos, que usaremos para resolver o problema proposto a seguir.

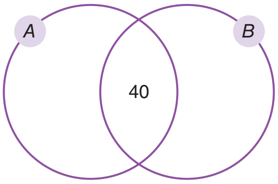
Uma pesquisa feita com um grupo de internautas sobre os *sites* de vendas A e B revelou que, dos entrevistados:

- Todos conhecem pelo menos um dos dois *sites*.
- 40 conhecem os dois *sites*.
- 82 conhecem o *site* A.
- 64 conhecem o *site* B.

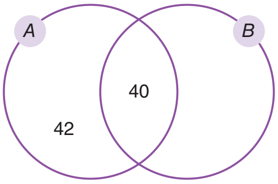
Quantas pessoas foram entrevistadas?

Usando diagramas, indicaremos por A e B os conjuntos das pessoas que conhecem os *sites* A e B, respectivamente.

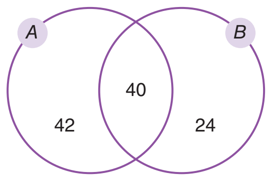
- Como 40 pessoas conhecem os dois *sites*, para nos orientar, vamos escrever o número 40 na intersecção dos conjuntos A e B:



- Sabemos que 82 pessoas conhecem o *site* A, das quais 40 já estão indicadas na intersecção dos conjuntos A e B. Logo, faltam 42 pessoas para completar o conjunto A:



- Como 64 pessoas conhecem o *site* B e 40 delas já estão indicadas na intersecção de A e B, concluímos que faltam 24 pessoas para completar o conjunto B:



Finalmente, como todos os entrevistados conhecem pelo menos um dos *sites*, concluímos que o número de pessoas entrevistadas é $42 + 40 + 24 = 106$.

Note que o número total de entrevistados **não é** a soma do número de pessoas que conhecem o *site* A (82) com o número de pessoas que conhecem o *site* B (64), pois nessa soma, as pessoas que conhecem os dois *sites* estarão sendo contadas duas vezes.

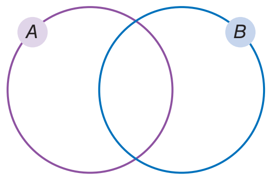
Por isso, o total de pessoas entrevistadas poderia ser calculado adicionando-se o número de elementos de A ao número de elementos de B e subtraindo-se dessa soma o número de elementos da intersecção de A e B, ou seja, $82 + 64 - 40 = 106$.

Esse exemplo ajuda a entender o seguinte teorema:

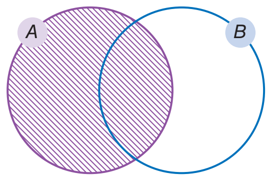
Sendo A e B conjuntos finitos, o número de elementos da união de A e B é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Também podemos interpretar esse teorema com auxílio de um diagrama:

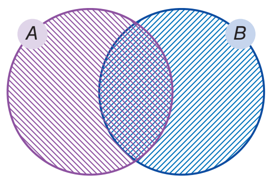


Para determinar a quantidade de elementos de $A \cup B$, primeiro contamos os elementos de A:



A região hachurada representa os elementos do conjunto A.

A seguir, contamos os elementos de B:



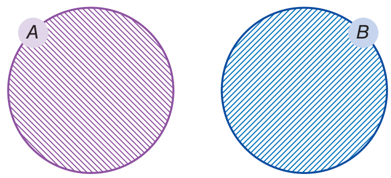
A região hachurada com azul representa os elementos do conjunto B.

Observe que a intersecção de A e B foi contada **duas vezes**: uma vez quando contamos os elementos de A, e outra vez quando contamos os elementos de B. Para corrigir esse "erro", devemos subtrair da contagem o número de elementos de $A \cap B$, isto é:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Nota:

Se A e B são conjuntos **disjuntos**, isto é, $A \cap B = \varnothing$, temos



Então: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 Mensalmente, um colégio oferece aos alunos duas palestras sobre orientação profissional. No mês passado, a primeira foi sobre Informática, e a segunda, sobre Economia. Todos os alunos de uma classe assistiram a pelo menos uma das palestras, sendo que 18 assistiram à primeira, 23 assistiram à segunda e 8 assistiram às duas palestras. Quantos alunos há nessa classe?

Resolução

Sendo:

- A o conjunto dos alunos que assistiram à primeira palestra, então $n(A) = 18$;
- B o conjunto dos alunos que assistiram à segunda palestra, então $n(B) = 23$;
- $A \cap B$ o conjunto dos alunos que assistiram às duas palestras, então $n(A \cap B) = 8$.

O conjunto $A \cup B$ é definido por:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$$

Assim, $A \cup B$ é o conjunto dos alunos que assistiram à primeira **ou** à segunda palestra, isto é, todos os alunos da classe. Pelo teorema anterior, esse total é dado por:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\therefore n(A \cup B) = 18 + 23 - 8 = 33$

Logo, a classe é formada por 33 alunos.

6 Quantos números naturais de três ou quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução

Sendo A o conjunto dos números naturais de três algarismos distintos formados pelos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, calculamos $n(A)$:

$$n(A) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Sendo B o conjunto dos números naturais de quatro algarismos distintos formados pelos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, calculamos $n(B)$:

$$n(B) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Para concluir, devemos calcular o número de elementos que pertencem a A **ou** a B, ou seja, $n(A \cup B)$. Como A e B são disjuntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 120 + 360 = 480$$

Logo, podem ser formados 480 números nas condições enunciadas.

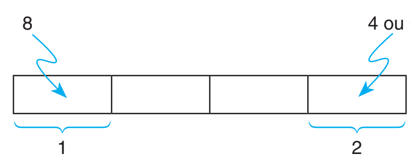
7 Quantos números naturais pares maiores que 7.000 e com 4 algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução

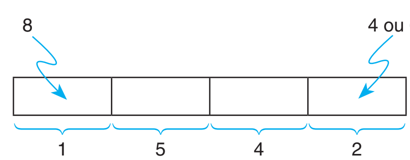
Para o número ser maior que 7.000, a casa dos milhares deve ser preenchida por 7, 8 ou 9. Para o número ser par, a casa das unidades deve ser preenchida por um dos algarismos 4, 6 ou 8. Como não pode haver repetição de algarismos e o algarismo 8 pode ocupar a casa dos milhares ou a casa das unidades, vamos separar a resolução em dois casos:

- 1º caso: números que começam por 8

  Fixamos o algarismo 8 na primeira casa (logo, só há uma possibilidade de preenchimento para essa casa). Para o número ser par, a última casa só pode ser preenchida com 4 ou 6:

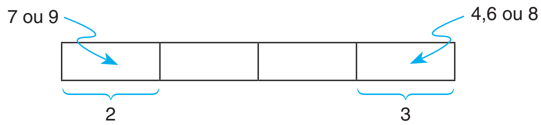


  Concluído o cálculo do número de possibilidades de preenchimento das casas para as quais há restrição, calculamos o número de possibilidades das demais casas, considerando que não deve haver repetição:

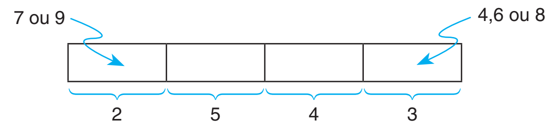


  Assim, a quantidade de números desse caso é dada por: $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$.

- 2º caso: números que começam por 7 ou 9
  Qualquer que seja o algarismo, 7 ou 9, que ocupe a primeira casa, o número de possibilidades para a última será 3:



A seguir, consideramos o número de possibilidades das demais casas:



Assim, a quantidade de números desse caso é dada por:

$$2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$$

Como os conjuntos de números estudados no 1º e no 2º caso são disjuntos, concluímos que o total de números nas condições enunciadas é 40 + 120, ou seja, 160.

(*Nota*: Observe que, para resolver esse tipo de questão, primeiro calculamos o número de possibilidades de preenchimento das casas para as quais há restrição.)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11 Dois conjuntos, A e B, são tais que $n(A) = 25$, $n(B) = 29$ e $n(A \cap B) = 10$. Determine o número de elementos de $A \cup B$.

12 Um instituto de medicina do sono realizou um estudo com uma amostra de 80 moradores de grandes centros urbanos. A pesquisa revelou que 56 deles dormiam menos de quatro horas por noite e que 28 dormiam mais de duas horas por noite. Quantas pessoas da amostra dormiam mais de duas e menos de quatro horas por noite?

13 Calcule a quantidade de números naturais compreendidos entre 300 e 3.000 que podemos representar utilizando somente os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 8, de modo que não haja algarismos repetidos. (*Sugestão*: separe a resolução em dois casos.)

14 Quantos números naturais maiores que 4.500 e de quatro algarismos distintos podemos representar com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

15 Quantos números naturais pares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 4, 5, 7 e 9?

16 (UGF-RJ) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos múltiplos positivos de 5 compostos de três algarismos distintos podemos formar?
a) 32 **b)** 36 **c)** 40 **d)** 60 **e)** 72

17 Um fabricante de televisores identificou cada aparelho de determinado lote com uma sequência de algarismos e letras escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B, C e D. Cada sequência foi formada por 4 algarismos distintos seguidos de 2 letras distintas, por exemplo 1462AB; ou 5 algarismos distintos seguidos de 2 letras distintas, por exemplo, 42613BC. Que número máximo de aparelhos pode ter esse lote?

18 No Brasil, as placas dos veículos são formadas por sequências de 3 letras seguidas de 4 algarismos. Dispondo das letras A, B, C, D, E, F e U e dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine o número de placas que podem ser confeccionadas de modo que as 3 letras sejam vogais ou que as 3 sejam consoantes.

19 Em uma exposição, foi montada uma fileira de 8 aquários, entre os quais serão distribuídos 4 exemplares de peixes de espécies diferentes e 4 exemplares de cavalos-marinhos de espécies diferentes, tal que cada aquário fique com um único animal. De quantas maneiras diferentes podem ser distribuídos os animais se dois aquários consecutivos quaisquer não podem conter cavalos-marinhos?

Resolva os exercícios complementares 53 a 62.

Fatorial

Objetivos

- **Calcular** o fatorial de um número natural.
- **Aplicar** as propriedades dos fatoriais.

Termo e conceito

- fatorial de *n*

A multiplicação de números naturais consecutivos é muito frequente na Análise combinatória, e algumas dessas multiplicações envolvem muitos fatores. Por exemplo, a quantidade de números naturais de 7 algarismos distintos que podem ser formados com os 7 algarismos 1, 3, 4, 5, 6, 8 e 9 é dada por:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Para simplificar as operações com expressões desse tipo, adotaremos o símbolo ***n!*** (lemos: "*n* fatorial"), que indica o produto dos números naturais consecutivos n, $n - 1$, $n - 2$, ..., 1, com $n \geqslant 2$. No nosso exemplo, temos:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Essa notação ajuda muito em problemas que envolvem cálculos trabalhosos, porque permite apresentar resoluções extensas de maneira abreviada. Definimos:

> Seja n um número natural tal que $n \geqslant 2$. Define-se o **fatorial de *n***, que é representado por ***n!***, como o produto dos números naturais consecutivos n, $n - 1$, $n - 2$, ..., 1. Isto é:
>
> $$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 1$$

Exemplos

a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Propriedade fundamental dos fatoriais

Na igualdade $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, observamos que o produto $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ pode ser substituído por 5! e, portanto:

$$6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} \Rightarrow 6! = 6 \cdot 5!$$

Podemos generalizar esse resultado para qualquer número natural n, com $n \geqslant 3$, da seguinte maneira:

$$\boxed{n! = n \cdot (n - 1)!}$$

Essa propriedade é conhecida como **propriedade fundamental dos fatoriais**.

Exemplos

a) $9! = 9 \cdot 8!$

b) $10! = 10 \cdot 9!$

c) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$

d) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$

Extensão da definição de fatorial

É necessário definir fatorial de zero (0!) e fatorial de um (1!), pois zero e 1 também fazem parte de contagens. Para garantir a coerência entre as definições desses "novos" fatoriais e a definição de fatorial de um número natural maior que 1, vamos admitir que possa ser ampliada a validade da propriedade fundamental dos fatoriais, que, por enquanto, foi restrita para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 3$:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

- Para definir 1! de modo que a propriedade continue válida, devemos admitir para $n = 2$:

$$2! = 2 \cdot (2 - 1)! \Rightarrow 2! = 2 \cdot 1!$$

Como $2! = 2 \cdot 1$, concluímos:

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1 = 1!$$

Assim, a propriedade fundamental dos fatoriais poderá ser aplicada para $n = 2$, se definirmos:

$$\boxed{1! = 1}$$

- Analogamente, para definir 0! de modo que a propriedade fundamental continue válida, devemos admitir para $n = 1$:

$$1! = 1 \cdot (1 - 1)! \Rightarrow 1! = 1 \cdot 0!$$

Como já definimos $1! = 1$, temos:

$$1 = 1 \cdot 0! \Rightarrow 1 = 0!$$

Concluímos que a propriedade fundamental dos fatoriais pode ser aplicada para $n = 1$ sob a definição:

$$\boxed{0! = 1}$$

Com essas duas "novas" definições, $1! = 1$ e $0! = 1$, admitimos que a propriedade fundamental dos fatoriais pode ser aplicada para qualquer número natural não nulo n.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Simplificar as frações:

a) $\dfrac{10!}{9!}$ b) $\dfrac{8!}{10!}$ c) $\dfrac{10! \cdot 4!}{8! \cdot 6!}$ d) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ e) $\dfrac{(n-3)!}{(n-1)!}$

Resolução

a) $\dfrac{10!}{9!} = \dfrac{10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 10$

b) $\dfrac{8!}{10!} = \dfrac{\cancel{8!}}{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}} = \dfrac{1}{10 \cdot 9} = \dfrac{1}{90}$

c) $\dfrac{10! \cdot 4!}{8! \cdot 6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!} \cdot \cancel{4!}}{\cancel{8!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}} = \dfrac{90}{30} = 3$

d) Vamos decompor em fatores decrescentes o maior entre os fatoriais apresentados na fração. Como $n! > (n-2)!$, para qualquer número natural n, com $n \geqslant 2$, decompomos $n!$:

$$\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n^2 - n$$

e) Vamos decompor em fatores decrescentes o maior entre os fatoriais $(n-1)!$ e $(n-3)!$. Observando que $(n-1)! > (n-3)!$, para qualquer número natural n, com $n \geqslant 3$, decompomos $(n-1)!$:

$$\dfrac{(n-3)!}{(n-1)!} = \dfrac{\cancel{(n-3)!}}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \cancel{(n-3)!}} =$$

$$= \dfrac{1}{n^2 - 3n + 2}$$

9 Resolver a equação $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20$.

Resolução

Para simplificar a fração, vamos decompor em fatores decrescentes o maior entre os fatoriais:

$$\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20 \Rightarrow \dfrac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 20$$

$\therefore n^2 + n - 20 = 0$

Resolvendo essa equação encontramos $n = 4$ ou $n = -5$.

Verificação

Lembramos que só se define fatorial para número natural. Assim, devemos verificar se, para esses valores de n, existem os fatoriais apresentados na equação.

Para $n = 4$, temos:

$$\dfrac{(4+1)!}{(4-1)!} = 20 \Rightarrow \dfrac{5!}{3!} = 20$$

Como ambos os fatoriais existem (5! e 3!), concluímos que 4 é a raiz da equação.

Para $n = -5$, temos:

$$\dfrac{(-5+1)!}{(-5-1)!} = 20 \Rightarrow \dfrac{(-4)!}{(-6)!} = 20 \text{ (absurdo!)}$$

Como não existem os fatoriais $(-4)!$ e $(-6)!$, temos que -5 não é raiz da equação.

Logo: $S = \{4\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

20 Calcule:

a) $6!$
b) $7!$
c) $4! - 3!$
d) $1! + 2!$
e) $0! \cdot 3!$
f) $\dfrac{4!}{3! + 2!}$

21 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações.

a) $2! + 3! = 5!$
b) $2! \cdot 3! = 6!$
c) $3! + 3! = 2 \cdot 3!$
d) Se existe $(n - 5)!$, então $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 5$.
e) Se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$, então existe $(n - 4)!$
f) Se existem $(n - 5)!$ e $(n - 8)!$, então $(n - 5)! < (n - 8)!$
g) Se existem $(n - 9)!$ e $(n - 12)!$, então $(n - 9)! > (n - 12)!$
h) $n! = n(n - 1)(n - 2)!$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$
i) $n! = n(n - 1)(n - 2)!$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}$

22 Simplifique as frações:

a) $\dfrac{8!}{7!}$
b) $\dfrac{7!}{10!}$
c) $\dfrac{6! \cdot 9!}{3! \cdot 11!}$
d) $\dfrac{n!}{(n - 1)!}$
e) $\dfrac{(n - 2)!}{n!}$
f) $\dfrac{(n - 1)!}{(n + 1)!}$
g) $\dfrac{(n + 3)!}{(n + 1)!}$
h) $\dfrac{(n - 4)!}{(n - 2)!}$

23 O número x, abaixo, representa o produto de todos os números naturais de 7 até 20:

$$x = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot ... \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20$$

Assinale a alternativa que apresenta a expressão cujo resultado é igual ao número x.

a) $20!$
b) $\dfrac{20!}{6!}$
c) $20! + 6!$
d) $\dfrac{20!}{5!}$
e) $20! - 6!$

24 (FMABC-SP) Simplificando a fração $\dfrac{101! + 102!}{100!}$, obtém-se:

a) 101.103
b) 102!
c) 100.000
d) 101!
e) 10.403

25 (UFPA) Simplificando a expressão $\dfrac{n! + (n + 1)!}{2! \cdot (n - 1)!}$, obtém-se:

a) $n^2 + n$
b) $\dfrac{n^2}{2} + n$
c) $\dfrac{n^2 + n}{2}$
d) $\dfrac{n + 1}{n - 1}$
e) $\dfrac{n}{n - 1}$

26 Resolva as equações:

a) $\dfrac{(n + 7)!}{(n + 6)!} = 15$
b) $\dfrac{(n - 6)!}{(n - 5)!} = \dfrac{1}{32}$
c) $\dfrac{(n - 2)!}{(n - 4)!} = 6$
d) $\dfrac{(n + 1)! + n!}{(n + 2)!} = \dfrac{1}{9}$

27 (PUC-RS) Se $\dfrac{(n - 1)!}{(n + 1)! - n!} = \dfrac{1}{81}$, então n é igual a:

a) 13
b) 11
c) 9
d) 8
e) 6

28 Se $n! = 40.320$, então n é igual a:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

29 Determine o número n tal que $n! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

30 (UFF-RJ) Um garçom anotou os pedidos de três fregueses. Cada freguês pediu um prato principal, um acompanhamento e uma bebida. Posteriormente, o garçom não sabia identificar o autor de cada pedido. Lembrava-se, porém, de que não havia nenhuma coincidência entre os pedidos: os pratos principais eram diferentes entre si, o mesmo ocorrendo com os acompanhamentos e as bebidas.

O número de maneiras diferentes que o garçom poderia distribuir os pedidos entre os três fregueses é:

a) $(3!)^3$
b) $(3^3)!$
c) $3!$
d) $3^{3!}$
e) $(3!)^{3!}$

Resolva os exercícios complementares 1 a 8.

Classificação dos agrupamentos

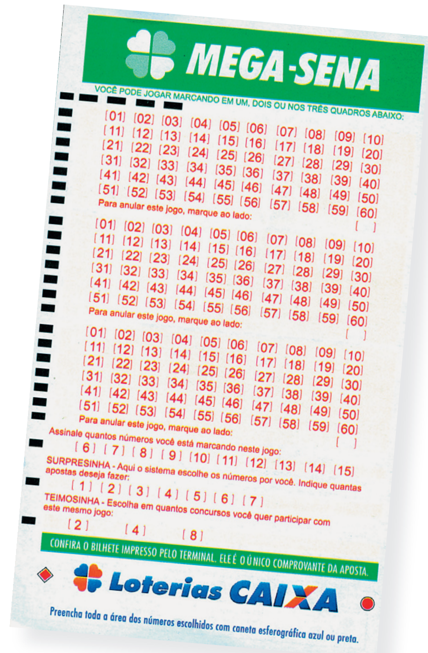
Objetivos

- **Reconhecer** um arranjo simples.
- **Calcular** o número de arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p*.
- **Reconhecer** uma permutação simples.
- **Calcular** o número de permutações simples.
- **Calcular** o número de permutações com elementos repetidos.
- **Reconhecer** uma combinação simples.
- **Calcular** o número de combinações de *n* elementos tomados *p* a *p*.

Termos e conceitos

- **arranjo**
- **permutação**
- **combinação**

Em nosso cotidiano, formamos agrupamentos em várias situações, por exemplo, ao apostar em seis números da Mega-Sena, formamos agrupamentos de números; ao escolher colegas para um trabalho escolar em grupo, formamos agrupamentos de pessoas; ao discutir sobre os possíveis quatro primeiros colocados no campeonato Brasileiro de Futebol, formamos agrupamentos de clubes de futebol etc.



A **Análise combinatória** identifica dois tipos de agrupamentos: os arranjos e as combinações, apresentadas a seguir.

- **Arranjos** são agrupamentos em que **se considera a ordem** dos elementos, isto é, qualquer mudança na ordem dos elementos **altera** o agrupamento. Por exemplo, ao formar números naturais de três algarismos distintos escolhidos entre os algarismos 2, 4, 6, 7 e 8, estaremos **arranjando** esses cinco algarismos três a três. Esses números são chamados de arranjos de algarismos porque, mudando a ordem dos algarismos em um desses números, obtemos outro número:

$$\underbrace{246 \neq 426}_{\text{números diferentes}}$$

- **Combinações** são agrupamentos em que **não se considera a ordem** dos elementos, isto é, mudanças na ordem dos elementos **não alteram** o agrupamento. Por exemplo, um pintor ao produzir novas cores misturando duas das cores primárias, vermelho, azul e amarelo, estará combinando essas três cores tomadas duas a duas. Esses agrupamentos são chamados de **combinações** porque a ordem com que são misturadas as duas cores primárias não altera a cor da mistura:

$$\underbrace{\underbrace{\text{vermelho e azul}} \quad \underbrace{\text{azul e vermelho}}}_{\text{misturas iguais}}$$

Qualquer um desses dois tipos de agrupamento, arranjo ou combinação, é chamado de **agrupamento simples**, quando não são permitidas repetições de elementos, ou de **agrupamento completo**, quando são permitidas repetições de elementos. Os exemplos acima são agrupamentos simples.

EXERCÍCIO PROPOSTO

31 Classifique os agrupamentos sugeridos a seguir como arranjo ou combinação:

a) Escolher seis dos sessenta números para uma aposta na Mega-Sena.

b) As possíveis classificações dos quatro primeiros colocados no Campeonato Brasileiro de Futebol.

c) Eleger uma comissão de dois alunos para representantes de sala, em que ambos terão o mesmo cargo.

d) Formar um número de telefone com oito números distintos.

e) Eleger uma comissão de dois alunos em que um será o porta-voz da classe e o outro será o secretário.

f) Escolher três vértices de um cubo para formar triângulos.

Arranjos simples

Com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$ vamos formar todas as sequências possíveis de três elementos distintos:

(a, b, c)	(a, b, d)	(a, c, d)	(b, c, d)
(a, c, b)	(a, d, b)	(a, d, c)	(b, d, c)
(b, a, c)	(b, a, d)	(c, a, d)	(c, b, d)
(b, c, a)	(b, d, a)	(c, d, a)	(c, d, b)
(c, a, b)	(d, a, b)	(d, a, c)	(d, c, b)
(c, b, a)	(d, b, a)	(d, c, a)	(d, b, c)

Essas sequências são chamadas de **arranjos simples** dos quatro elementos do conjunto I tomados três a três. Isto é, um arranjo simples de três elementos de I é qualquer **sequência** formada por três elementos **distintos** de I. Observe que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam pela **ordem** dos elementos ou pela **natureza** dos elementos que o compõem:

- $(a, b, c) \neq (b, c, a)$, pois diferem pela ordem dos elementos;
- $(a, b, c) \neq (a, b, d)$, pois diferem pela natureza dos elementos (elementos diferentes).

Contando as sequências acima, constatamos que o número de arranjos simples dos quatro elementos de I tomados três a três é 24. Indicamos esse fato por $A_{4,\,3} = 24$. Esse número pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem:

1º elemento	2º elemento	3º elemento
4	3	2

número de possibilidades

Logo: $A_{4,\,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Lemos $A_{4,\,3}$ como "número de arranjos simples de quatro elementos tomados três a três".

Definimos:

Dados os n elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, chama-se **arranjo simples** de p elementos de I toda sequência formada por p elementos **distintos** de I com $p \in \mathbb{N}^*$ e $p \leq n$.

Cálculo do número de arranjos simples

Sendo $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e p um número natural não nulo tal que $p \leq n$, o número de arranjos simples dos n elementos de I tomados p a p (isto é, $A_{n,\,p}$) pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem:

$$\underbrace{\boxed{\begin{matrix}1^{\underline{o}}\\ \text{elemento}\end{matrix}}}_{n}\ \underbrace{\boxed{\begin{matrix}2^{\underline{o}}\\ \text{elemento}\end{matrix}}}_{n\,-\,1}\ \underbrace{\boxed{\begin{matrix}3^{\underline{o}}\\ \text{elemento}\end{matrix}}}_{n\,-\,2}\ \underbrace{\boxed{\begin{matrix}4^{\underline{o}}\\ \text{elemento}\end{matrix}}}_{n\,-\,3}\ \ldots\ \underbrace{\boxed{\begin{matrix}p^{\underline{o}}\\ \text{elemento}\end{matrix}}}_{n\,-\,(p\,-\,1)}$$

Assim:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot ... \cdot [n - (p - 1)]$$

ou ainda:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot ... \cdot (n - p + 1)$$

Aplicando o conceito de fatorial, podemos apresentar essa fórmula de maneira mais simples. Para entender a transformação que será feita, vejamos antes um caso particular.

Na igualdade $A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5$, multiplicando e, ao mesmo tempo, dividindo o $2^{\underline{o}}$ membro por 4!, obtemos:

$$A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \frac{7!}{4!}$$

Note, portanto, que o número $A_{7,\,3}$ pode ser expresso com fatoriais por $\dfrac{7!}{(7 - 3)!}$.

Generalizando:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot ... \cdot (n - p + 1)$$

Multiplicando e, ao mesmo tempo, dividindo o $2^{\underline{o}}$ membro dessa igualdade por $(n - p)!$, temos:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot ... \cdot (n - p + 1) \cdot \frac{(n - p)!}{(n - p)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{n,\,p} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot ... \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)!}{(n - p)!}$$

Portanto, podemos escrever:

$$\boxed{A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n - p)!}}$$

Daqui em diante, podemos aplicar essa fórmula para o cálculo de $A_{n,\,p}$. Na maioria das situações, porém, é preferível aplicar o princípio fundamental da contagem, em vez da fórmula.

Nota:

Estende-se a fórmula $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n - p)!}$ para $n = 0$ ou $p = 0$. Por exemplo:

a) $A_{7,\,0} = \dfrac{7!}{(7 - 0)!} = \dfrac{7!}{7!} = 1$

b) $A_{0,\,0} = \dfrac{0!}{(0 - 0)!} = \dfrac{0!}{0!} = 1$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10 Aplicando o princípio fundamental da contagem, calcular $A_{6,4}$.

Resolução

A expressão $A_{6,4}$ indica o número de sequências diferentes, de quatro elementos distintos, que podem ser formadas com seis elementos distintos. Calculando o número possível de distribuições dos seis elementos distintos em quatro casas, sem repetição, temos:

1º elemento	2º elemento	3º elemento	4º elemento
6	5	4	3

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, concluímos:
$A_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

11 Cinco jogadores de futebol, A, B, C, D e E, concorrem a um dos títulos de 1º, 2º ou 3º melhor jogador do Campeonato Brasileiro. De quantas maneiras diferentes esses títulos podem ser distribuídos?

Resolução

Observando que as possibilidades de escolha dos três melhores jogadores são os arranjos simples dos elementos A, B, C, D e E tomados três a três, basta calcular $A_{5,3}$:

1º lugar	2º lugar	3º lugar
5	4	3

Assim:
$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
Logo, os títulos podem ser distribuídos de 60 maneiras diferentes.

Note que também poderíamos aplicar a fórmula $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

12 Aplicando a fórmula $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, calcular:

a) $A_{6,4}$ b) $A_{9,3}$ c) $A_{5,5}$

Resolução

a) $A_{6,4} = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 360$

b) $A_{9,3} = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9!}{6!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 504$

c) $A_{5,5} = \dfrac{5!}{(5-5)!} = \dfrac{5!}{0!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 120$

13 Dois prêmios diferentes serão sorteados entre n pessoas, com $n \geqslant 2$. Sabendo que há exatamente $3n + 5$ maneiras distintas de os prêmios serem distribuídos, determine o número de pessoas que participam do sorteio.

Resolução

Neste caso, cada agrupamento de duas pessoas representa um arranjo, pois os prêmios distribuídos são diferentes. Assim o valor de n é determinado pela equação:
$A_{n,2} = 3n + 5$,
Sob a condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$
Logo:

$$A_{n,2} = 3n + 5 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 3n + 5$$

$$\therefore \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 3n + 5 \Rightarrow n^2 - n = 3n + 5$$

$\therefore n^2 - 4n - 5 = 0$
Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = -1$ ou $n = 5$.
Apenas $n = 5$ satisfaz a condição de existência; logo, cinco pessoas participam do sorteio.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

32 Considerando o conjunto $I = \{a, b, c, d, e\}$, responda:
a) Quantos são os arranjos simples dos elementos de I tomados dois a dois? E três a três?
b) Forme todos os arranjos simples dos elementos de I tomados dois a dois.
c) Forme todos os arranjos simples dos elementos de I tomados três a três, sendo o segundo elemento a letra b.

33 Aplicando o princípio fundamental da contagem, calcule:

a) $A_{6,3}$ b) $A_{10,2}$ c) $A_{7,7}$

34 Aplicando a fórmula $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, calcule:

a) $A_{10,3}$ b) $A_{6,2}$ c) $A_{8,4}$

35 Quando havia exatamente vinte quartos vagos em um hotel, chegaram dez hóspedes. O número de maneiras diferentes que esses hóspedes podem ser distribuídos nos quartos de modo que cada quarto seja ocupado por um único hóspede é:

a) $A_{10,\,10}$
b) $A_{20,\,20}$
c) $A_{20,\,2}$
d) $A_{20,\,10}$
e) $A_{10,\,2}$

36 Em uma prova final de natação, da qual participarão n atletas, com $n \geqslant 3$, serão distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze para os 1º, 2º e 3º colocados, respectivamente. O número possível de maneiras diferentes de se distribuírem as medalhas, sabendo que a prova não admite empate, é:

a) $A_{n,\,3}$
b) $A_{n,\,n}$
c) $A_{3,\,3}$
d) $A_{3,\,n}$
e) $A_{n,\,1}$

Cesar Cielo, campeão olímpico em Pequim.

37 Resolva as equações:

a) $A_{n,\,2} = 20$

b) $A_{n,\,2} = A_{n\,-\,2,\,2} + 14$

38 Duas pessoas sobem em um ônibus onde há n lugares vagos, com $n \geqslant 2$. Sabendo que essas pessoas podem ocupar dois lugares de $n + 8$ maneiras diferentes, calcule o número n de lugares vagos.

Resolva os exercícios complementares 9 a 11 e 63 a 68.

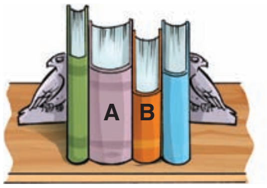
Permutações

Permutações simples

A palavra "permutar" significa "trocar reciprocamente".

Exemplos

a) Permutar a posição de dois livros, A e B, em uma prateleira significa colocar o livro A no lugar de B e o livro B no lugar de A.



b) Antes do surgimento da moeda como mediadora nas transações comerciais, praticava-se o escambo, que consistia na **permutação** de mercadorias. O lavrador ou o pescador que produzissem mais do que necessitavam para a sobrevivência **permutavam** seus produtos.

Na Análise combinatória, as **permutações** dos elementos de uma sequência nada mais são do que **um tipo particular de arranjo**, como mostra a situação a seguir.

Ao formar os números naturais de três algarismos distintos com os algarismos 2, 7 e 9, estamos formando os arranjos simples desses três algarismos tomados três a três. Observe:

279 729 927
297 792 972

Dois quaisquer desses arranjos se diferenciam **apenas** pela ordem dos elementos que os compõem e não pela natureza dos elementos, já que todos esses arranjos possuem os mesmos elementos: 2, 7 e 9. Por isso dizemos que cada um desses arranjos é uma **permutação simples** dos algarismos 2, 7 e 9.

Definimos:

Dados os n elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, chama-se **permutação simples** dos n elementos de I todo **arranjo simples** desses n elementos tomados n a n.

Exemplos

a) Três candidatos, A, B e C, disputaram uma eleição e não houve empate. Considerando como resultado a sequência 1º, 2º e 3º colocado, os possíveis resultados desse pleito são todas as permutações das letras A, B e C:

ABC BAC CAB

ACB BCA CBA

Indicando por P_3 esse número de permutações, temos $P_3 = 6$.

Lemos P_3 como "número de permutações simples de 3 elementos".

b) Em um torneio quadrangular de futebol, com os times T_1, T_2, T_3 e T_4, não houve empate no número de pontos da classificação final. As possíveis classificações dos times ao final do torneio são todas as permutações de T_1, T_2, T_3 e T_4. Para calcular o número total dessas permutações, podemos aplicar o princípio fundamental da contagem:

1º colocado	2º colocado	3º colocado	4º colocado
4	3	2	1

número de possibilidades

Indicando por P_4 o número de todas as permutações possíveis, temos:

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

Esse número de permutações é o número de arranjos simples dos quatro elementos tomados quatro a quatro. Veja:

$$P_4 = A_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$$

Cálculo do número de permutações simples

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos. O número de permutações simples dos n elementos de I (que indicaremos por P_n) é igual ao número de arranjos simples desses n elementos tomados n a n, isto é:

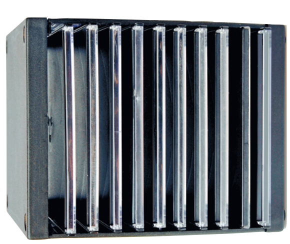
$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1}$$

Portanto:

$$\boxed{P_n = n!}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 Dez CDs diferentes, sendo seis de música clássica e quatro de música popular, devem ser colocados lado a lado em um porta-CDs.

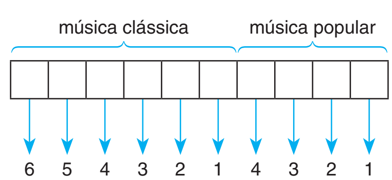


Em quantas sequências diferentes esses discos podem ser dispostos de modo que os de música clássica fiquem juntos e os de música popular também fiquem juntos?

Resolução

Como os CDs de mesmo estilo devem ficar juntos, temos duas opções:

(I) CDs de música clássica à esquerda dos de música popular:

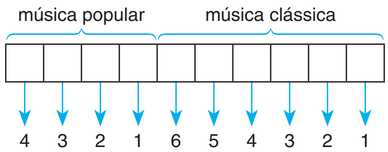


Pelo princípio multiplicativo:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4!$

ou

(II) CDs de música clássica à direita dos de música popular:



Pelo princípio multiplicativo:
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_4 \cdot P_6 = 4! \cdot 6!$

Temos, então, como total de possibilidades:
$6! \cdot 4! + 4! \cdot 6! = 17.280 + 17.280 = 34.560$

Isto é, os CDs podem ser dispostos em 34.560 sequências diferentes.

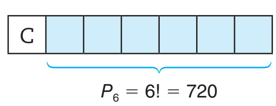
15 Com a palavra CADERNO:

a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos anagramas começam por C?
c) quantos anagramas começam por C e terminam por O?
d) quantos anagramas começam por vogal?
e) quantos anagramas terminam por consoante?
f) quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?
g) quantos anagramas apresentam as letras C, A e D juntas e nessa ordem?
h) quantos anagramas apresentam as letras C, A e D juntas?

Resolução

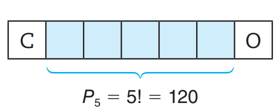
a) Um anagrama da palavra CADERNO é a própria palavra ou qualquer outro agrupamento que se obtém trocando-se a ordem de suas letras. Assim, o número de anagramas da palavra CADERNO é igual ao número de permutações simples de sete letras distintas, isto é:
$P_7 = 7! = 5.040$

b) Fixando-se a letra C na primeira posição, sobram seis letras para ser distribuídas nas seis posições posteriores.



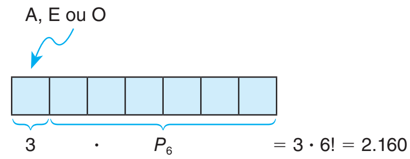
Logo, há 720 anagramas que começam por C.

c) Fixando-se as letras C e O na primeira e na sétima posição, respectivamente, sobram cinco letras para ser distribuídas nas cinco posições intermediárias:



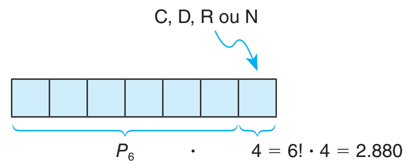
Portanto, há 120 anagramas que começam por C e terminam por O.

d) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição: A, E ou O. Para cada vogal fixada na primeira posição, sobram seis letras para ser distribuídas nas posições posteriores:



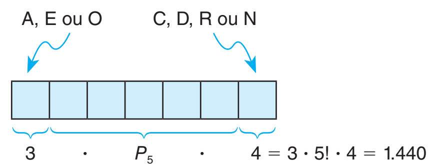
Assim, há 2.160 anagramas que começam por vogal.

e) Há quatro possibilidades para o preenchimento da última posição: C, D, R ou N. Para cada consoante fixada na sétima posição, sobram seis letras para ser distribuídas nas seis posições anteriores:



Assim, há 2.880 anagramas que terminam por consoante.

f) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição e quatro possibilidades para o preenchimento da última. Fixadas uma vogal e uma consoante na primeira e na sétima posição, respectivamente, sobram cinco letras para ser distribuídas nas posições intermediárias:



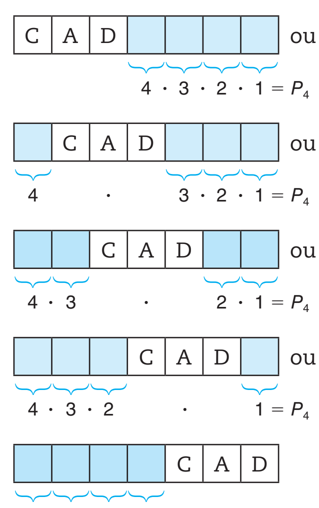
Há, portanto, 1.440 anagramas que começam por vogal e terminam por consoante.

g) Vamos resolver este item de dois modos diferentes.

Primeiro modo

As letras C, A e D podem ocupar, respectivamente, as seguintes posições: primeira, segunda e terceira; segunda, terceira e quarta; terceira, quarta e quinta; quarta, quinta e sexta; quinta, sexta e sétima.

Analisemos cada caso:



Assim, temos:
$P_4 + P_4 + P_4 + P_4 + P_4 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 4! = 5! = 120$
Ou seja, 120 anagramas apresentam as letras C, A e D juntas e nessa ordem.

Segundo modo
Observando o primeiro modo, percebemos que o bloco CAD atuou como um único elemento nas permutações. Assim, podemos resolver esse problema calculando o número de permutações dos cinco elementos, CAD, E, R, N e O, isto é, considerando o bloco CAD um único elemento.

Temos, assim: $P_5 = 5! = 120$

h) Nesse caso, um bloco composto das letras C, A e D pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes:
CAD, CDA, DCA, DAC, ADC e ACD.
Para cada um desses seis blocos podemos formar $P_5 = 5! = 120$ anagramas, conforme vimos no item **g**. Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 120 = 720$ anagramas. Ou seja, o número de anagramas que apresentam as letras C, A e D juntas é:
$P_3 \cdot P_5 = 6 \cdot 120 = 720$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

39 Considere as consoantes B, C, D, F e G.
a) Quantas permutações simples podemos formar com essas letras?
b) Escreva as permutações simples dessas 5 letras tal que o primeiro elemento seja B e o último seja C.

40 Sete pessoas entram em um banco. Em quantas sequências diferentes elas podem formar uma fila no caixa?

41 Em um programa de auditório, cada uma entre 5 pessoas deve escolher apenas uma entre 5 urnas. Quantas associações diferentes das 5 pessoas às 5 urnas podem ser feitas?

42 Para o desfile de abertura dos jogos olímpicos, 4 nadadores, 3 tenistas e 2 iatistas entrarão no estádio em fila indiana. Em quantas sequências diferentes essa fila pode ser formada se atletas de uma mesma modalidade devem se apresentar juntos?

43 Ao criar um *software*, o programador resolveu atribuir-lhe, como chave de instalação, uma sequência de 12 caracteres distintos. Sabendo que os caracteres utilizados serão 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, C, D, F, G e H, tal que não apareçam juntos dois algarismos nem duas letras, o número possível de chaves de instalação é:
a) 12!
b) $(12!)^2$
c) $2 \cdot 12!$
d) $(6!)^2$
e) $2 \cdot (6!)^2$

44 Ao concluir suas lições do dia, um estudante deve guardar na estante 8 livros: Matemática, Física, Química, História, Geografia, Biologia, Português e Inglês, um ao lado do outro.
a) Em quantas sequências diferentes esses livros podem ser dispostos na prateleira da estante?
b) Em quantas sequências diferentes esses livros podem ser dispostos na prateleira da estante de modo que nos extremos fiquem os livros de História e Geografia?
c) Em quantas sequências diferentes esses livros podem ser dispostos na prateleira da estante de modo que os livros de Matemática, Física e Química fiquem juntos e nessa ordem?
d) Em quantas sequências diferentes esses livros podem ser dispostos na prateleira da estante de modo que os livros de Matemática, Física e Química fiquem juntos em qualquer ordem?
e) Em quantas sequências diferentes esses livros podem ser dispostos na prateleira da estante de modo que não fiquem juntos os 3 livros de exatas (Matemática, Física e Química)?

45 Com a palavra FUTEBOL:
a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos anagramas começam por E?
c) quantos anagramas começam por E e terminam por T?
d) quantos anagramas começam por vogal?
e) quantos anagramas terminam por consoante?
f) quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?
g) quantos anagramas apresentam as 3 vogais juntas e em ordem alfabética?
h) quantos anagramas apresentam as 3 vogais juntas em qualquer ordem?
i) quantos anagramas não apresentam as 3 vogais juntas?

46 Quantos anagramas da palavra AGUDO apresentam as consoantes em ordem alfabética, não necessariamente juntas?

Resolva os exercícios complementares 12, 13 e 69 a 78.

Permutações com elementos repetidos

Em vários cálculos combinatórios, temos de calcular o número de permutações de *n* elementos, nem todos distintos. Para entender esse tipo de cálculo, convém analisar as questões dos exemplos a seguir.

Exemplos

a) Quantos anagramas podemos formar com a palavra BALA?

Se as quatro letras que compõem essa palavra fossem distintas entre si, teríamos 4! anagramas. Mas a palavra não se altera quando permutamos as letras iguais; por isso, concluímos que o número de anagramas dessa palavra é menor que 4!.

Um raciocínio possível para o cálculo desse número de anagramas é considerar as letras iguais como elementos diferentes. Para nos orientar, colorimos as letras iguais com cores diferentes, obtendo:

BALA

Assim, podemos formar 4! = 24 permutações com esses elementos "distintos". São elas:

BALA	**BAAL**	**LABA**	**AABL**	**AALB**	**ALBA**
BALA	**BAAL**	**LABA**	**AABL**	**AALB**	**ALBA**
BLAA	**LBAA**	**LAAB**	**ABAL**	**ABLA**	**ALAB**
BLAA	**LBAA**	**LAAB**	**ABAL**	**ABLA**	**ALAB**

Porém, se as cores nessas 24 permutações forem eliminadas, poderemos formar doze grupos com dois anagramas iguais em cada um, observe:

BALA BALA	BAAL BAAL	LABA LABA	AABL AABL	AALB AALB	ALBA ALBA
BLAA BLAA	LBAA LBAA	LAAB LAAB	ABAL ABAL	ABLA ABLA	ALAB ALAB

Como cada grupo representa um único anagrama, o número de grupos formados é o número de anagramas da palavra BALA. Concluindo, o número de anagramas da palavra BALA é obtido dividindo-se o número de permutações das letras, consideradas como elementos distintos, pelo fatorial do número de letras iguais. Ou seja:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

b) Quantos anagramas podemos formar com a palavra BAIANA?

Raciocinando como na questão anterior, o número de anagramas da palavra BAIANA é obtido dividindo-se o número de permutações das letras, consideradas como elementos distintos, pelo fatorial do número de letras iguais, isto é:

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

c) Quantos anagramas podemos formar com a palavra BATATA?

Nesse caso, temos duas letras diferentes que se repetem: A e T. Assim como na primeira questão, vamos considerar as letras iguais como se fossem elementos distintos, usando cores diferentes:

BATATA

Assim, podemos formar 6! = 720 permutações com esses elementos distintos. Ao escrever as 720 permutações podemos agrupá-las de modo que, ao eliminar as cores, todas as permutações em cada agrupamento representem o mesmo anagrama. Por exemplo, um dos agrupamentos com todas as permutações que representam o anagrama BATATA é:

$$\left.\begin{array}{c}\text{BATATA}\\ \text{BATATA}\\ \text{BATATA}\\ \text{BATATA}\\ \text{BATATA}\\ \text{BATATA}\\ \text{BATATA}\\ \text{BATATA}\\ \text{BATATA}\\ \text{BATATA}\\ \text{BATATA}\\ \text{BATATA}\end{array}\right\}\text{BATATA}$$

Essas permutações foram obtidas permutando-se, entre si, as letras iguais da palavra BATATA. Como na palavra há três letras "A" e duas letras "T", podemos permutar as letras iguais entre si de $3! \cdot 2!$ maneiras, isto é, de doze maneiras. De modo análogo, concluímos que cada agrupamento contém doze permutações que representam um mesmo anagrama.

Assim, as 720 permutações podem ser agrupadas em grupos de doze permutações.

Então, o número de grupos formados é o número de anagramas da palavra BATATA:

$$\frac{720}{12} = 60$$

Concluindo, o número de anagramas da palavra BATATA é obtido dividindo-se o número de permutações das letras, consideradas como elementos distintos, pelo produto dos fatoriais dos números de letras iguais, isto é:

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{720}{12} = 60$$

Cálculo do número de permutações com elementos repetidos

Consideremos n elementos, entre os quais o elemento a_1 compareça n_1 vezes, o elemento a_2 compareça n_2 vezes, ..., o elemento a_k compareça n_k vezes:

$$\overbrace{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{\substack{n_1 \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_1}}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{\substack{n_2 \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_2}}, \ldots, \underbrace{a_k, a_k, \ldots, a_k}_{\substack{n_k \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_k}}}^{n \text{ elementos}}$$

sendo a_1, a_2, ... e a_k distintos entre si e $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots n_k = n$.

O número de permutações desses n elementos, que indicaremos por $P_n^{(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)}$, é dado por:

$$\boxed{P_n^{(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 Com a palavra PANTANAL:

a) quantos anagramas podemos formar?

b) quantos anagramas começam pela letra A?

Resolução

a) A palavra apresenta um total de 8 letras, com 3 letras “A”, 2 letras “N”, 1 letra “P”, 1 letra “T” e 1 letra “L”. Assim, o número de anagramas é:

$$P_8^{(3,\,2,\,1,\,1,\,1)} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$$

Para simplificar a notação, indicamos esse número por:

$$P_8^{(3,\,2)} = \frac{8!}{3! \cdot 2!}$$

Isto é, não indicamos nos parênteses as letras que aparecem uma única vez na palavra.
Então, o número de anagramas da palavra PANTANAL é:

$$P_8^{(3,\,2)} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 3.360$$

b) Fixando uma letra A na primeira posição, sobram as letras P, N, T, A, N, A e L, que devem ser distribuídas nas sete posições posteriores:

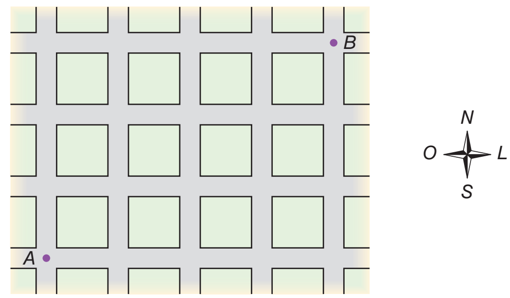
$$\boxed{A}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_7^{(2,\,2)}}$$

$$P_7^{(2,\,2)} = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1.260$$

Logo, há 1.260 anagramas que começam por “A”.

(*Nota*: Uma dúvida muito comum nesse item é: “Como a letra A aparece três vezes na palavra, devemos multiplicar o resultado 1.260 por três?”. A resposta é **não**, porque, se substituirmos o “A” da primeira posição por outro “A” da palavra, obteremos os mesmos anagramas.)

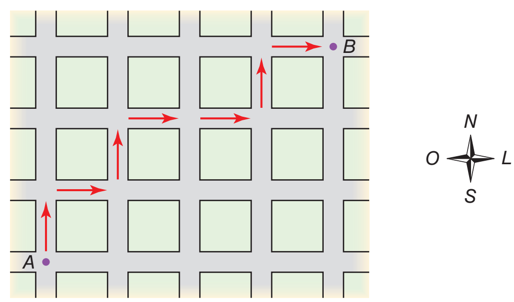
17 A figura abaixo representa um conjunto de quarteirões de uma cidade, sendo a parte cinza a representação das ruas.



Um motorista localizado no ponto *A* pretende chegar ao ponto *B* deslocando-se sempre para o norte ou para o leste. Quantos caminhos diferentes ele pode percorrer de *A* até *B* se o tráfego é permitido para qualquer caminho escolhido?

Resolução

Para que o motorista se desloque de *A* até *B* nas condições enunciadas, ele deve percorrer três quadras para o norte e quatro para o leste. Um caminho possível é:



Indicando por *N* o deslocamento de cada quadra para o norte e por *L* o deslocamento de cada quadra para o leste, o número de caminhos diferentes que podem ser percorridos é igual ao número de permutações das sete letras: *N*, *N*, *N*, *L*, *L*, *L*, *L*, isto é:

$$P_7^{(3,\,4)} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

47 Calcule o número de anagramas de cada uma das palavras:

a) MINEIRO

b) GRAVATA

c) NATALINA

d) AMASSADA

48 Com a palavra CORRER:

a) quantos anagramas podemos formar?

b) quantos anagramas começam por R?

c) quantos anagramas começam por consoante?

d) quantos anagramas terminam por vogal?

e) quantos anagramas começam por consoante e terminam por vogal?

f) quantos anagramas apresentam as vogais juntas e em ordem alfabética?

g) quantos anagramas apresentam as vogais juntas em qualquer ordem?

49 Efetuando uma multiplicação dos fatores 3 e 5, com uma calculadora, lê-se no visor o número 1.125. Para que isso aconteça, as teclas $\boxed{3}$ e $\boxed{5}$ são digitadas algumas vezes, intercaladas pela digitação da tecla $\boxed{\times}$ e, finalmente, digita-se a tecla $\boxed{=}$.
O número de sequências diferentes de teclas que podem ser digitadas é:
a) 8 **b)** 12 **c)** 15 **d)** 10 **e)** 18

50 Um experimento consiste em lançar cinco vezes uma moeda e considerar como resultado a sequência formada pelas faces voltadas para cima no 1º, 2º, 3º, 4º e 5º lançamentos.

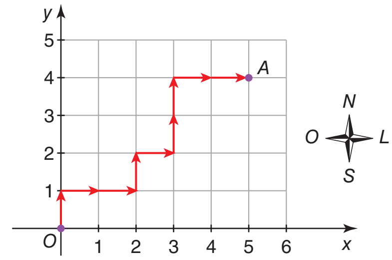
a) Indicando por C e K as faces cara e coroa, respectivamente, uma sequência com três caras e duas coroas que pode ser obtida é: CCKCK. Quantas sequências diferentes com três caras e duas coroas podem ser obtidas?

b) Quantas sequências diferentes com pelo menos três caras podem ser obtidas?

c) Quantas sequências diferentes com pelo menos uma cara podem ser obtidas?

51 Um sistema cartesiano foi associado a uma região plana de modo que o eixo Ox está orientado de oeste para leste, o eixo Oy está orientado de sul para norte, e a unidade adotada nos eixos é o quilômetro.

a) Pedro deve caminhar do ponto $O(0, 0)$ até $A(5, 4)$, deslocando-se 1 quilômetro de cada vez para o norte ou para o leste.
Um caminho possível nessas condições é:



Quantos caminhos diferentes Pedro pode percorrer de O até A?

b) Luís deve caminhar de $O(0, 0)$ até $B(6, 5)$, passando por $C(4, 3)$, deslocando-se 1 quilômetro de cada vez para o norte ou para o leste.
Quantos caminhos diferentes Luís pode percorrer?

52 Uma urna contém duas bolas brancas e algumas bolas pretas.
Retirando-se todas as bolas da urna, uma de cada vez e sem reposição, o número de sequências possíveis de cores, na ordem de retirada, é 21.
Determine o número de bolas pretas que essa urna contém.

Resolva os exercícios complementares 14 e 79 a 85.

Combinações simples

Para entender o processo de formação das combinações, observe a situação a seguir.

Entre 4 candidatos, a, b, c e d, devem ser escolhidos 3 para ocupar 3 vagas de programador no departamento de informática de uma empresa. Como os candidatos são igualmente capazes, a escolha será feita por sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

Como os cargos dos profissionais escolhidos são idênticos, a ordem dos candidatos sorteados não é considerada; por exemplo, a escolha abc é igual à escolha cba:

$$\underbrace{\text{abc} \qquad \text{cba}}_{\text{mesmos candidatos}}$$

Assim, o número de escolhas diferentes que podem ser feitas é o número de subconjuntos de 3 elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, que são:

$$\{a, b, c\} \qquad \{a, c, d\}$$
$$\{a, b, d\} \qquad \{b, c, d\}$$

Esses subconjuntos são chamados de "combinações simples dos 4 elementos de I tomados 3 a 3". Ou seja, uma combinação simples de 3 elementos de I é qualquer subconjunto de I formado por 3 elementos.

Observe que duas combinações simples quaisquer se diferenciam apenas pela natureza dos elementos, e não pela ordem desses elementos. Por exemplo:

- $\{a, b, c\} \neq \{a, b, d\}$, pois diferem pela natureza dos elementos.
- $\{b, c, d\} = \{c, b, d\}$, pois a ordem dos elementos não altera a combinação.

Definimos:

Dados os n elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, chama-se **combinação simples** de p elementos de I todo subconjunto de I formado por p elementos com $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leq n$.

Exemplo

Considerando o retângulo ao lado, vamos representar na forma $\overleftrightarrow{XY}$ as retas determinadas por todos os pares de vértices A, B, C e D.

Essas representações são: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

Observando que a ordem dos vértices não altera a representação da reta, por exemplo, $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$, essas representações são **combinações** dos quatro vértices tomados dois a dois. Essas combinações são **simples**, pois não há repetição de elemento em uma mesma combinação.

Cálculo do número de combinações simples

Indicaremos por $C_{n,\,p}$ o número de combinações simples de n elementos distintos tomados p a p. Para efetuar esse cálculo, vamos relacionar o número de combinações simples com o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p. Para isso, consideramos as duas situações a seguir.

Situação 1

Entre quatro candidatos, a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas distintas: programador, analista de sistemas e supervisor do departamento de informática de uma empresa. Como os candidatos são igualmente capazes, a escolha será feita por sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

Considerando que o primeiro sorteio seja para a vaga de programador, o segundo para analista de sistemas e o terceiro para supervisor, temos as possibilidades:

Sorteios		
1º	2º	3º
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Sorteios		
1º	2º	3º
a	b	d
a	d	b
b	a	d
b	d	a
d	a	b
d	b	a

Sorteios		
1º	2º	3º
a	c	d
a	d	c
c	a	d
c	d	a
d	a	c
d	c	a

Sorteios		
1º	2º	3º
b	c	d
b	d	c
c	b	d
c	d	b
d	b	c
d	c	b

Portanto, temos 24 possibilidades de escolha. Essas 24 possibilidades são todos os arranjos simples dos quatro elementos de $I = \{a, b, c, d\}$ tomados três a três, que representamos por $A_{4,\,3}$.

Situação 2

Entre quatro candidatos, a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas de programador no departamento de informática de uma empresa. Como os candidatos são igualmente capazes, a escolha será feita por sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

Como os cargos dos profissionais escolhidos são idênticos, não devemos considerar a ordem dos candidatos sorteados. Assim, as únicas escolhas possíveis são:

$$\{a, b, c\}$$
$$\{a, b, d\}$$
$$\{a, c, d\}$$
$$\{b, c, d\}$$

Portanto, temos quatro possibilidades de escolha. Essas quatro possibilidades são todas as combinações simples dos quatro elementos de $I = \{a, b, c, d\}$ tomados três a três, que representamos por $C_{4,\,3}$.

Comparando as situações

Note que os elementos que compõem cada escolha possível da situação 2 formam seis escolhas possíveis na situação 1. Por exemplo, com {a, b, c}, obtido na situação 2, podemos formar as seis escolhas possíveis da primeira tabela da situação 1.

Assim, podemos relacionar o número de arranjos simples dos quatro elementos de $I = \{a, b, c, d\}$ tomados três a três com o número de combinações de quatro elementos tomados três a três:

{a, b, c} combinação: abc, acb, bac, bca, cab, cba — 3! arranjos

{a, b, d} combinação: abd, adb, bad, bda, dab, dba — 3! arranjos

{a, c, d} combinação: acd, adc, cad, cda, dac, dca — 3! arranjos

{b, c, d} combinação: bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb — 3! arranjos

Concluímos que cada uma das quatro combinações de três elementos de I gera 3! arranjos desses elementos. Logo, multiplicando 3! por $C_{4,\,3}$, obtemos $A_{4,\,3}$, isto é:

$$3! \cdot C_{4,\,3} = A_{4,\,3}$$

Generalizando o raciocínio para os números naturais n e p, com $n \geqslant p$, obtemos a fórmula para o cálculo de $C_{n,\,p}$, conforme segue:

$$p! \cdot C_{n,\,p} = A_{n,\,p} \Rightarrow C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

Portanto:

$$\boxed{C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

18 Calcular:

a) $C_{7,\,5}$ **b)** $C_{4,\,4}$ **c)** $C_{4,\,0}$ **d)** $C_{0,\,0}$

Resolução

Aplicando a fórmula $C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, temos:

a) $C_{7,\,5} = \dfrac{7!}{5!(7-5)!} = \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2 \cdot 1} = 21$

b) $C_{4,\,4} = \dfrac{4!}{4!(4-4)!} = \dfrac{4!}{4! \cdot 0!} = \dfrac{\cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 1} = 1$

c) $C_{4,\,0} = \dfrac{4!}{0!(4-0)!} = \dfrac{4!}{0! \cdot 4!} = \dfrac{\cancel{4!}}{1 \cdot \cancel{4!}} = 1$

d) $C_{0,\,0} = \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = \dfrac{0!}{0! \cdot 0!} = \dfrac{1}{1 \cdot 1} = 1$

Critério diferenciador entre arranjo e combinação

Ao deparar com um problema que envolva agrupamentos de qualquer tipo de elemento, devemos antes de tudo verificar se os agrupamentos em questão são arranjos ou combinações. Para isso, formamos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema, com pelo menos dois elementos distintos, e mudamos a ordem de elementos distintos do agrupamento formado.

- Se, com essa mudança, obtivermos um agrupamento **diferente** do original, então esses agrupamentos são **arranjos**.
- Se, com essa mudança, obtivermos um agrupamento **igual** ao original, então esses agrupamentos são **combinações**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

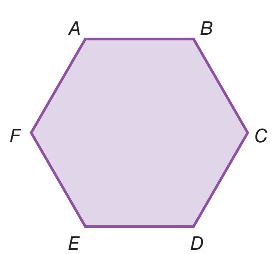
19 Entre 8 policiais serão escolhidos 5 para garantir a segurança pessoal de um senador da República durante um evento. Quantos grupos de segurança diferentes podem ser formados se os escolhidos terão funções idênticas?

Resolução

Como as funções são idênticas, a ordem dos elementos componentes não altera o grupo de segurança; logo, cada um dos grupos possíveis é uma **combinação** de pessoas. Assim, o número possível de grupos que podem ser formados é $C_{8,5}$, isto é:

$$C_{8,5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

20 Seja *ABCDEF* o hexágono convexo representado abaixo.



a) Quantos segmentos de reta é possível formar tomando como extremos 2 pontos distintos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F\}$?

b) Quantas diagonais possui o hexágono *ABCDEF*?

c) Quantos triângulos é possível formar tomando como vértices 3 pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F\}$?

Resolução

a) A ordem dos 2 pontos escolhidos não altera o segmento formado; por exemplo, $\overline{AB} = \overline{BA}$. Logo, o número de segmentos que podem ser formados é $C_{6,2}$, isto é:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 15$$

b) Uma diagonal do hexágono é qualquer segmento com extremos em 2 vértices não consecutivos do polígono. Assim, o número *d* de diagonais pode ser calculado subtraindo-se o número de lados do resultado obtido no item anterior:

$$C_{6,2} - 6 = 15 - 6 = 9$$

c) Um triângulo fica determinado por 3 pontos (vértices) não colineares. Como não existem 3 pontos colineares entre os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*, qualquer agrupamento de 3 pontos distintos determina um triângulo.

(*Nota*: **Pontos não colineares** são pontos que não pertencem a uma mesma reta.)

A ordem dos 3 pontos escolhidos não altera o triângulo formado; por exemplo:

$$\triangle ABC = \triangle CAB$$

Logo, o número de triângulos com vértices em 3 pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F\}$ é $C_{6,3}$, isto é:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

21 Dispondo de 5 modelos homens e 6 mulheres, pretende-se escolher um grupo de 3 homens e 4 mulheres para um desfile de modas. De quantos modos diferentes o grupo pode ser formado?

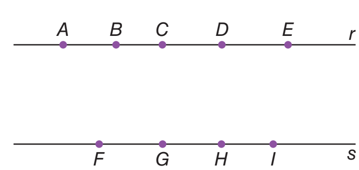
Resolução

Devem ser escolhidos 3 homens entre 5 e 4 mulheres entre 6. Pelo princípio fundamental da contagem, o número de grupos diferentes que podem ser formados é dado pelo produto $C_{5,3} \cdot C_{6,4}$, isto é:

$$C_{5,3} \cdot C_{6,4} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 15 = 150$$

22 Cinco pontos distintos, *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, pertencem a uma reta *r*, e 4 pontos distintos, *F*, *G*, *H* e *I*, pertencem a uma reta *s*, sendo *r* e *s* paralelas distintas, conforme mostra a figura:



a) Quantas retas distintas ficam determinadas por esses 9 pontos?

b) Quantos triângulos distintos ficam determinados por esses 9 pontos?

Resolução

a) Vamos resolver esse item de dois modos diferentes.

1º modo

Uma reta fica determinada por 2 pontos distintos; logo, qualquer combinação desses 9 pontos tomados 2 a 2 determina uma reta. Mas, entre essas combinações, há retas coincidentes, por exemplo $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Assim, o cálculo do número de retas distintas pode ser feito subtraindo-se de todas as combinações dos 9 pontos 2 a 2 as combinações dos pontos colineares 2 a 2 e adicionando-se 2, que são as próprias retas *r* e *s*, isto é:

$$C_{9,\,2} - \underbrace{C_{5,\,2}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos de } r}} - \underbrace{C_{4,\,2}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos de } s}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{retas}\\ r \text{ e } s}} =$$

$$= 36 - 10 - 6 + 2 = 22$$

2º modo

Além das retas *r* e *s*, uma reta fica determinada por um dos 5 pontos destacados em *r* e um dos 4 pontos destacados em *s*. Assim, o número de retas, nas condições enunciadas, é dado por:

$$\underbrace{2}_{\substack{\text{retas}\\ r \text{ e } s}} + \underbrace{C_{5,\,1}}_{\substack{\text{escolhas}\\ \text{de um}\\ \text{ponto em } r}} \cdot \underbrace{C_{4,\,1}}_{\substack{\text{escolhas}\\ \text{de um}\\ \text{ponto em } s}} = 2 + 5 \cdot 4 = 22$$

b) Um triângulo fica determinado por 3 pontos não colineares. Assim, algumas das combinações dos 9 pontos tomados 3 a 3 determinam triângulos, e outras não. Por exemplo, a combinação *ABF* determina um triângulo, enquanto a combinação *ABC* não determina um triângulo. Podemos resolver esse item de dois modos diferentes.

1º modo

O número de triângulos é a diferença entre o número de combinações dos 9 pontos 3 a 3 e o total de combinações dos pontos colineares 3 a 3 (pontos que não determinam triângulos). Isto é:

$$C_{9,\,3} - \underbrace{C_{5,\,3}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{dos pontos em } r}} - \underbrace{C_{4,\,3}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{dos pontos em } s}} =$$

$$= 84 - 10 - 4 = 70$$

2º modo

Um triângulo fica determinado se escolhemos 2 pontos em uma das retas e um ponto na outra. Assim, temos duas opções de escolha:

- 2 pontos em *r* e 1 ponto em *s*:
  $C_{5,\,2} \cdot C_{4,\,1} = 10 \cdot 4 = 40$

ou

- 1 ponto em *r* e 2 pontos em *s*:
  $C_{5,\,1} \cdot C_{4,\,2} = 5 \cdot 6 = 30$

Logo, o número de triângulos é 40 + 30 = 70.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

53 Descreva todas as combinações simples dos elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d, e\}$ tomados 2 a 2.

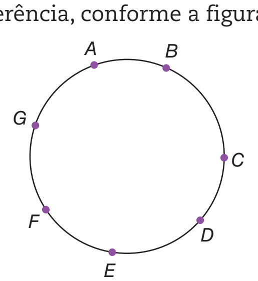
54 Calcule:

a) $C_{8,\,5}$

b) $C_{7,\,3}$

c) $C_{7,\,4}$

55 Considere 7 pontos distintos, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* e *G*, de uma circunferência, conforme a figura:



a) Quantas retas ficam determinadas por esses pontos?

b) Quantos triângulos ficam determinados por esses pontos?

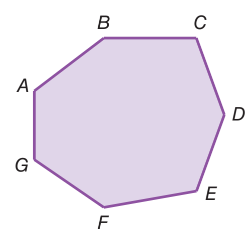
c) Quantos quadriláteros convexos ficam determinados por esses pontos?

d) Quantos pentágonos convexos ficam determinados por esses pontos?

e) De todos os pentágonos convexos determinados por esses pontos, quantos têm como vértice o ponto *A*?

f) De todos os pentágonos convexos determinados por esses 7 pontos, quantos têm como lado o segmento $\overline{AB}$?

56 Considere o polígono convexo *ABCDEFG* representado ao lado.

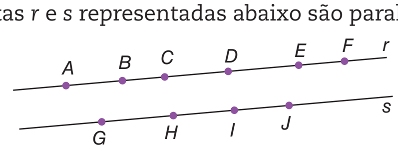


a) Quantos segmentos de reta têm extremos em 2 pontos distintos do conjunto {*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*}?

b) Quantos dos segmentos de reta obtidos no item anterior são diagonais do polígono *ABCDEFG*?

57 Quantas diagonais possui um polígono convexo de 10 vértices?

58 As retas *r* e *s* representadas abaixo são paralelas.



a) Quantas retas ficam determinadas pelos 10 pontos distintos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I* e *J*?

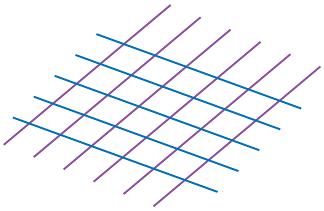
b) Quantos triângulos ficam determinados por esses 10 pontos distintos?

c) De todos os triângulos determinados por esses 10 pontos distintos, quantos têm como vértice o ponto *H*?

d) De todos os triângulos determinados por esses 10 pontos distintos, quantos têm um lado contido na reta *r*?

e) Quantos quadriláteros convexos ficam determinados por esses 10 pontos distintos?

59 Em um plano, 5 retas paralelas e distintas concorrem com 6 retas paralelas e distintas, formando a seguinte rede:



Quantos paralelogramos ficam determinados por essas retas?

60 De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos 4 números inteiros, distintos e não nulos, de -20 a 10, de modo que seu produto seja positivo?

61 Uma comissão de 4 membros deve ser escolhida entre 7 pessoas. De quantos modos diferentes essa comissão pode ser formada se seus componentes terão funções idênticas?

62 (UEPB) Num encarte de jornal, um supermercado oferece 10 produtos em promoção. Se um indivíduo resolve comprar apenas 3 quaisquer desses produtos, quantas são as suas opções?

a) 120
b) 80
c) 50
d) 40
e) 30

63 Cada uma das 10 equipes que disputam um campeonato de futebol enfrenta cada uma das demais uma única vez. Quantos jogos compõem esse campeonato?

64 (Uepa) No Concurso da Quina da Caixa Econômica Federal, pode-se fazer aposta de 5, 6 ou 7 números, escolhidos entre oitenta números disponíveis. Ganha o prêmio máximo quem acertar os cinco números sorteados em cada concurso. Preenchendo um cartão com 7 números, o apostador concorrerá ao prêmio máximo com:

a) 28 quinas
b) 35 quinas
c) 42 quinas
d) 21 quinas
e) 56 quinas

65 Ao se encontrarem em uma reunião sobre o Mercosul, os *n* presidentes participantes cumprimentaram-se entre si com um aperto de mão. Sabendo que houve 28 apertos de mão, determine o número de presidentes que participaram dessa reunião.

66 Uma salada de frutas deve conter quantidades iguais de 4 tipos de frutas escolhidas entre uva, maçã, laranja, mamão, morango e melão. Quantas saladas diferentes podem ser preparadas se maçã e laranja forem ingredientes obrigatórios?

67 Um grupo de 6 cientistas deve partir para uma longa temporada de pesquisas no polo Sul. O grupo será escolhido entre 10 cientistas, sendo dois deles marido e mulher. Quantas formações diferentes pode ter o grupo se marido e mulher só podem participar da expedição viajando juntos?

68 Para a escalação das 4 comissárias de bordo de um voo, há 9 comissárias disponíveis das quais duas são irmãs. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a escalação se a companhia aérea não permite parentes na mesma tripulação?

69 José e Anita fazem parte de um grupo de 10 pessoas, das quais 7 serão escolhidas para formar um júri em que todos os jurados terão funções idênticas. Do total de júris que podem ser formados:

a) quantos incluem José e Anita?
b) quantos não incluem José nem Anita?
c) quantos incluem Anita e não incluem José?

70 Uma comissão de 4 alunos será escolhida por votação entre 7 candidatos, sendo um deles de nome Cláudio. Todos os membros da comissão eleita terão funções idênticas.

a) Quantas comissões diferentes podem ser eleitas?
b) Quantas comissões diferentes podem ser eleitas de modo que Cláudio seja um dos eleitos?
c) Quantas comissões diferentes podem ser eleitas de modo que Cláudio não seja eleito?

71 Uma equipe formada por 2 arquitetos e por 3 engenheiros será escolhida entre 5 arquitetos e 6 engenheiros. De quantas maneiras diferentes essa equipe pode ser formada?

72 De um grupo com 4 pediatras, 5 reumatologistas e 6 ortopedistas, deve ser escolhida uma equipe com 3 especialistas de cada área. O número de equipes diferentes que podem ser escolhidas é:

a) 360
b) 720
c) 640
d) 800
e) 680

73 Um baralho é composto de 52 cartas divididas em 4 naipes distintos: ouros(♦), copas (♥), espadas (♠) e paus (♣).
Para cada naipe, há 13 cartas: 9 cartas numeradas de 2 a 10, valete (J), dama (Q), rei (K) e ás (A). No pôquer, cada jogador recebe 5 cartas, com as quais forma combinações. Uma dessas combinações é o *full hand*, que é constituído de um par (2 números iguais ou 2 letras iguais) e uma trinca (3 números iguais ou 3 letras iguais), por exemplo:

par

trinca

a) De quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de ases e uma trinca de 3?
b) De quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de ases?
c) De quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand*?

Resolva os exercícios complementares 15, 16 e 86 a 106.

O binômio de Newton

Objetivos

- **Aplicar** a fórmula de Newton no desenvolvimento de $(x + a)^n$, com $n \in \mathbb{N}$.
- **Calcular** o valor de expressões que envolvam números binomiais.

Termos e conceitos

- binômio de Newton
- números binomiais

O matemático, físico e astrônomo inglês Isaac Newton transitou por várias áreas do conhecimento. Para isso, utilizou a Matemática. Sempre que um problema surgia em suas pesquisas, Newton tentava criar ferramentas matemáticas para resolvê-lo.

Um dos trabalhos de Newton, que vamos estudar neste capítulo, foi o desenvolvimento de potências da forma $(x + a)^n$. Para entender o raciocínio utilizado nesse desenvolvimento, é conveniente resolver o problema a seguir.

Isaac Newton (1642-1727).

Um problema fundamental de escolhas

Cinco casais participam de um programa de televisão. O animador do programa sorteia uma pessoa de cada casal.

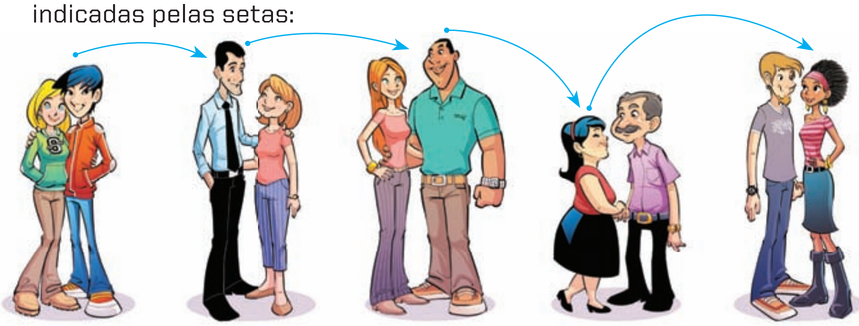
a) Quantas formações diferentes com 3 homens e 2 mulheres pode ter o grupo das 5 pessoas sorteadas?

b) Quantas formações diferentes com 4 homens e 1 mulher pode ter o grupo das 5 pessoas sorteadas?

c) Quantas formações diferentes com 5 homens pode ter o grupo das 5 pessoas sorteadas?

O raciocínio aplicado na resolução dos três itens é o mesmo. Observe:

a) Uma formação possível desse grupo é determinada pelas escolhas indicadas pelas setas:



Note que, escolhidos três homens, as mulheres estarão automaticamente escolhidas, pois serão aquelas dos casais restantes. Portanto, o número de possibilidades para a formação do grupo é igual ao número de escolhas de três homens, ou seja, $C_{5,\,3} = 10$.

Podemos raciocinar também do seguinte modo: escolhidas duas mulheres, os homens estarão automaticamente escolhidos, pois serão aqueles dos casais restantes. Portanto, o número de possibilidades para a formação do grupo é igual ao número de escolhas de duas mulheres, ou seja, $C_{5,\,2} = 10$.

b) Escolhidos quatro homens, a mulher estará automaticamente escolhida, pois será aquela do casal restante. Portanto, o número de possibilidades para a formação do grupo é igual ao número de escolhas de quatro homens, ou seja, $C_{5,\,4} = 5$.

Outra forma de raciocínio é: escolhida uma mulher, os homens estarão automaticamente escolhidos, pois serão aqueles dos casais restantes. Portanto, o número de possibilidades para a formação do grupo é igual ao número de escolhas de uma mulher, ou seja, $C_{5,\,1} = 5$.

c) Há uma única combinação dos cinco homens tomados cinco a cinco, isto é, $C_{5,\,5} = 1$.

Logo, há uma única formação possível com cinco homens.

Outra forma de raciocínio é: há uma única combinação possível das cinco mulheres tomadas zero a zero, isto é, $C_{5,\,0} = 1$. Logo, há uma única formação possível com nenhuma mulher.

O raciocínio aplicado neste problema fundamental da análise combinatória pode ser extrapolado para o desenvolvimento de potências da forma $(x + a)^n$, com $\{x, a\} \subset \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, conforme mostra o teorema a seguir.

Teorema de Newton para o desenvolvimento da potência $(x + a)^n$

Certos problemas de Matemática exigem o desenvolvimento de potências da forma $(x + a)^n$, com $\{x, a\} \subset \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Algumas dessas potências são:

$$(x + a)^0 = 1$$
$$(x + a)^1 = x + a$$
$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$
$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

Note que, quanto maior for o expoente, mais trabalhosos serão os cálculos. No entanto, aplicando o raciocínio usado no problema anterior, podemos deduzir uma expressão, relativamente simples, para desenvolver essas potências.

Como exemplo, consideremos a potência $(x + a)^5$. Para desenvolvê-la devemos efetuar as multiplicações:

$$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)$$

Aplicando a propriedade distributiva, vamos multiplicar, de todas as maneiras possíveis, cinco fatores, x ou a, escolhendo cada um deles em uma das expressões entre parênteses, $(x + a)$, da multiplicação acima. Uma das possibilidades é:

$$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a) \qquad \boldsymbol{x^3a^2}$$

Por meio dessa possibilidade, obtivemos o termo x^3a^2. Existem, porém, outras possibilidades de multiplicações que resultam no termo x^3a^2; por exemplo:

$$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a) \qquad \boldsymbol{x^3a^2}$$

Quantos termos iguais a x^3a^2 serão obtidos depois de efetuadas todas as multiplicações possíveis?

Para responder a essa pergunta, recorremos ao problema anterior, pensando em cada expressão $(x + a)$ como se fosse um casal daquele problema. Devemos calcular o número de modos diferentes de escolher x em três dos "casais" $(x + a)$ e a nos dois "casais" restantes. Note que, escolhido x em três "casais", a escolha de a fica automaticamente determinada nos "casais" restantes. Assim, basta calcular o número de maneiras diferentes de escolher x em três dos cinco "casais". Esse número é $C_{5,\,3}$. Portanto, depois de efetuadas todas as multiplicações possíveis, o termo x^3a^2 aparecerá $C_{5,\,3}$ vezes.

Raciocinando de maneira análoga:

- o termo x^5 aparecerá $C_{5,\,5}$ vezes;
- o termo x^4a aparecerá $C_{5,\,4}$ vezes;
- o termo x^2a^3 aparecerá $C_{5,\,2}$ vezes;
- o termo xa^4 aparecerá $C_{5,\,1}$ vezes;
- o termo a^5 aparecerá $C_{5,\,0}$ vezes.

Concluindo, podemos escrever:

$$(x + a)^5 = C_{5,\,5}x^5 + C_{5,\,4}x^4a + C_{5,\,3}x^3a^2 + C_{5,\,2}x^2a^3 + C_{5,\,1}xa^4 + C_{5,\,0}a^5$$

Como $C_{5,5} = 1$, $C_{5,4} = 5$, $C_{5,3} = 10$, $C_{5,2} = 10$, $C_{5,1} = 5$ e $C_{5,0} = 1$, temos:

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Repetindo o raciocínio anterior para a potência genérica $(x + a)^n$, com $\{x, a\} \subset \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, e representando $C_{n,p}$ pelo símbolo $\binom{n}{p}$, Newton demonstrou o seguinte teorema:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

Como $(x + a)^n = (a + x)^n$, o teorema de Newton também pode ser apresentado na forma:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^na^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \ldots + \binom{n}{n}x^0a^n$$

Demonstração

Observemos, inicialmente, que a proposição é verdadeira para $n = 0$ e para $n = 1$:

- $(x + a)^0 = 1 \Leftrightarrow (x + a)^0 = C_{0,0} \cdot x^0y^0$, ou seja, $(x + a)^0 = \binom{0}{0}x^0y^0$
- $(x + a)^1 = x + a \Leftrightarrow (x + a)^1 = a + x$, portanto:

$$(x + a)^1 = C_{1,0} \cdot x^0a^1 + C_{1,1} \cdot x^1a^0 \Leftrightarrow (x + a)^1 = \binom{1}{0}x^0a^1 + \binom{1}{1}x^1a^0$$

Provemos agora a validade da proposição para qualquer número natural n, com $n \geqslant 2$. Sob essa condição, a potência $(x + a)^n$ pode ser representada por:

$$\underbrace{(x + a)(x + a)(x + a) \cdot \ldots \cdot (x + a)}_{n \text{ fatores}}$$

Aplicando a propriedade distributiva, vamos multiplicar, de todas as maneiras possíveis, p fatores iguais a x e $n - p$ fatores iguais a a, com $p \leqslant n$, escolhendo cada um deles em uma das expressões $(x + a)$. O número de possibilidades de multiplicar p fatores iguais a x e $n - p$ fatores iguais a a é $C_{n,p}$. Assim, concluímos:

$(x + a)^n = C_{n,0}x^0a^n + C_{n,1}x^1a^{n-1} + C_{n,2}x^2a^{n-2} + \ldots + C_{n,p}x^pa^{n-p} + \ldots + C_{n,n}x^na^0$

ou seja:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

Notas:

1. Os coeficientes $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{n}$ são chamados de **números binomiais** ou **coeficientes binomiais**.
2. No símbolo $\binom{n}{p}$, que lemos como "número binomial n sobre p", n é chamado de numerador e p é chamado de denominador do binomial.

Exemplo

Vamos desenvolver a potência $(x + a)^4$. Pelo teorema de Newton, temos:

$$(x + a)^4 = \binom{4}{0}x^0a^4 + \binom{4}{1}x^1a^3 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}x^3a^1 + \binom{4}{4}x^4a^0$$

Calculando os coeficientes binomiais, concluímos:

$$(x + a)^4 = a^4 + 4xa^3 + 6x^2a^2 + 4x^3a + x^4$$

Neste capítulo, sempre que usarmos o símbolo $\binom{n}{p}$ estaremos nos referindo ao número binomial n sobre p. Esse esclarecimento é necessário para que esse símbolo não seja interpretado como uma matriz.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

23 Desenvolver a potência $(2x - a)^5$.

Resolução

Para desenvolver essa potência, podemos considerá-la sob a forma $[2x + (-a)]^5$. Assim, temos:

$$[2x + (-a)]^5 = \binom{5}{0}(2x)^0(-a)^5 + \binom{5}{1}(2x)^1(-a)^4 +$$
$$+ \binom{5}{2}(2x)^2(-a)^3 + \binom{5}{3}(2x)^3(-a)^2 + \binom{5}{4}(2x)^4(-a)^1 +$$
$$+ \binom{5}{5}(2x)^5(-a)^0$$

Logo:

$[2x + (-a)]^5 = 1 \cdot 1 \cdot (-a)^5 + 5 \cdot 2x \cdot (-a)^4 +$
$+ 10 \cdot 4x^2 \cdot (-a)^3 + 10 \cdot 8x^3 \cdot (-a)^2 +$
$+ 5 \cdot 16x^4 \cdot (-a)^1 + 1 \cdot 32x^5 \, (-a)^0$

Portanto:

$(2x - a)^5 = -a^5 + 10xa^4 - 40x^2a^3 +$
$+ 80x^3a^2 - 80x^4a + 32x^5$

24 Resolver o sistema a seguir, em que x e y representam números reais.

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + y^3 = -1 \end{cases}$$

Resolução

Pelo binômio de Newton, a segunda equação desse sistema é equivalente a $(x + y)^3 = -1$. Logo, temos:

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ (x + y)^3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 7 & \text{(I)} \\ x + y = -1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraímos membro a membro as equações (I) e (II):

$$2y = 8 \Rightarrow y = 4$$

Substituímos y por 4 em (II):

$$x + 4 = -1 \Rightarrow x = -5$$

Logo: $S = \{(-5, 4)\}$

25 Calcular o valor da expressão:

$$E = \binom{5}{0} \cdot 2^0 \cdot 3^5 + \binom{5}{1} \cdot 2^1 \cdot 3^4 + \binom{5}{2} \cdot 2^2 \cdot 3^3 +$$
$$+ \binom{5}{3} \cdot 2^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{4} \cdot 2^4 \cdot 3^1 + \binom{5}{5} \cdot 2^5 \cdot 3^0$$

Resolução

Vamos comparar essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} +$$
$$+ \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

Concluímos que: $E = (2 + 3)^5 = 5^5 = 3.125$

26 Calcular o valor da expressão: $\sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} \cdot 2^p$

(*Nota*: A letra grega Σ (sigma) é utilizada nas ciências exatas para indicar um **somatório.**)

Resolução

Neste exercício, a expressão $\sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} \cdot 2^p$ deve ser lida como "somatório das expressões da forma $\binom{6}{p} \cdot 2^p$, com p, natural, variando de 0 a 6". Assim, temos:

$$\sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} \cdot 2^p = \binom{6}{0} \cdot 2^0 + \binom{6}{1} \cdot 2^1 + \binom{6}{2} \cdot 2^2 +$$
$$+ \binom{6}{3} \cdot 2^3 + \binom{6}{4} \cdot 2^4 + \binom{6}{5} \cdot 2^5 + \binom{6}{6} \cdot 2^6$$

Multiplicando cada parcela $\binom{6}{p} \cdot 2^p$ dessa adição por 1^{6-p}, com $0 \leqslant p \leqslant 6$, a soma não se altera, isto é:

$$\sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} \cdot 2^p = \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} \cdot 2^p \cdot 1^{6-p} = \binom{6}{0} \cdot 2^0 \cdot 1^{6-0} +$$
$$+ \binom{6}{1} \cdot 2^1 \cdot 1^{6-1} + \binom{6}{2} \cdot 2^2 \cdot 1^{6-2} + \binom{6}{3} \cdot 2^3 \cdot 1^{6-3} +$$
$$+ \binom{6}{4} \cdot 2^4 \cdot 1^{6-4} + \binom{6}{5} \cdot 2^5 \cdot 1^{6-5} + \binom{6}{6} \cdot 2^6 \cdot 1^{6-6}$$

Comparando essa última expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton, concluímos que:

$$\sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} \cdot 2^p = \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} \cdot 2^p \cdot 1^{6-p} = (2 + 1)^6 = 3^6 = 729$$

27 Para o controle da irrigação do solo, um agricultor assinala no calendário a quadrícula correspondente a cada dia de chuva. Ao final do dia 10 de determinado mês, quantos conjuntos diferentes de dias desse mês podem ser assinalados no calendário?

Resolução

Nesses dez dias pode não ter chovido ou ter chovido de 1 a 10 dias. Assim, o número n de conjuntos diferentes que podem ser assinalados no período considerado é dado por:

$$n = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{10}$$

Multiplicando cada parcela $\binom{10}{p}$ dessa adição por $1^p \cdot 1^{10-p}$, com $0 \leqslant p \leqslant 10$, a soma não se altera, portanto:

$$n = \binom{10}{0} \cdot 1^{10} \cdot 1^0 + \binom{10}{1} \cdot 1^9 \cdot 1^1 +$$

$$+ \binom{10}{2} \cdot 1^8 \cdot 1^2 + \ldots + \binom{10}{10} \cdot 1^0 \cdot 1^{10}$$

Comparando essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton, concluímos que:

$n = (1 + 1)^{10} = 2^{10} = 1.024$

Logo, podem ser assinalados no calendário 1.024 conjuntos diferentes de dias.

28 Calcular a soma dos coeficientes do polinômio obtido do desenvolvimento da potência $(3x - 2y)^{50}$.

Resolução

A soma dos coeficientes de um polinômio qualquer, em uma ou mais variáveis, é igual ao valor numérico desse polinômio quando cada variável é substituída pelo número 1.

Assim, para calcular a soma dos coeficientes de $(3x - 2y)^{50}$, basta atribuir o valor 1 a cada variável x e y, obtendo: $(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1)^{50} = 1^{50} = 1$

Logo, a soma pedida é igual a 1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

74 Aplique o teorema de Newton para desenvolver as potências:

a) $(x + a)^6$ **b)** $(2x - 3)^3$ **c)** $(2x + y^2)^4$

75 Desenvolvendo, pela formula de Newton, a potência $(1 + 0{,}005)^{15}$ e eliminando os termos que apresentam potências de 0,005 com expoente maior que 1, obtém-se uma expressão cujo resultado é uma aproximação do número $(1{,}005)^{15}$. Aplicando esse método, temos:

a) $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}075$
b) $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}012$
c) $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}009$
d) $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}008$
e) $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}023$

76 Calcule o valor de cada uma das expressões:

a) $E = \binom{3}{0} \cdot 2^0 \cdot 4^3 + \binom{3}{1} \cdot 2^1 \cdot 4^2 + \binom{3}{2} \cdot 2^2 \cdot 4^1 + \binom{3}{3} \cdot 2^3 \cdot 4^0$

b) $F = \binom{5}{0} \cdot 2^0 \cdot (-3)^5 + \binom{5}{1} \cdot 2^1 \cdot (-3)^4 + \binom{5}{2} \cdot 2^2 \cdot (-3)^3 + \binom{5}{3} \cdot 2^3 \cdot (-3)^2 + \binom{5}{4} \cdot 2^4 \cdot (-3)^1 + \binom{5}{5} \cdot 2^5 \cdot (-3)^0$

c) $G = \binom{5}{0} \cdot 3^0 + \binom{5}{1} \cdot 3^1 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 + \binom{5}{3} \cdot 3^3 + \binom{5}{4} \cdot 3^4 + \binom{5}{5} \cdot 3^5$

d) $H = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$

77 A expressão $\sum_{p=0}^{10} \binom{10}{p} 5^p \cdot 2^{10-p}$ é igual a:

a) 5^{10} **b)** 2^{10} **c)** 5^{11} **d)** 7^{10} **e)** 3^{11}

78 Assinale a alternativa que apresenta o resultado da expressão $\sum_{p=0}^{45} \binom{45}{p} 7^p \cdot (-8)^{45-p}$.

a) 15^{45} **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** -1

79 O somatório $\sum_{p=0}^{20} \binom{20}{p} 3^p$ representa o número:

a) 16^{10} **b)** 4^{10} **c)** 3^{20} **d)** 2^{20} **e)** 1

80 A expressão $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$, com $n \in \mathbb{N}$, é igual a:

a) 1 **b)** 2 **c)** 0 **d)** 2^n **e)** $2n$

81 Sendo x e y números reais, resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5 = -32 \end{cases}$$

82 Calcule a soma dos coeficientes do polinômio que se obtém do desenvolvimento de $(5x - 4)^{35}$.

Resolva os exercícios complementares 17 a 26.

Termo geral do binômio de Newton

Vimos que para quaisquer números reais x e a e qualquer número natural n, temos:

$(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p a^{n-p}$, isto é:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^0 a^n + \binom{n}{1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{p} x^p a^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n} x^n a^0$$

Como todas as parcelas desse desenvolvimento têm a forma $\binom{n}{p} x^p a^{n-p}$, com $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$, vamos chamar de **termo geral do binômio de Newton**, segundo a ordem crescente dos expoentes de x, a expressão:

$$\boxed{T = \binom{n}{p} x^p a^{n-p}}$$

Observando que $(x + a)^n = (a + x)^n$, concluímos que o termo geral do binômio de Newton, segundo a ordem decrescente dos expoentes de x, é dado por:

$$\boxed{T = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p}$$

Note que, estabelecida uma ordem, crescente ou decrescente, para os expoentes de x, cada parcela de coeficiente binomial $\binom{n}{p}$ ocupa a posição $(p + 1)$ no desenvolvimento de $(x + a)^n$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

29 Determinar o coeficiente de x^{20} no desenvolvimento de $(x^4 + 3)^6$.

Resolução

Um termo geral do desenvolvimento dessa potência é:

$T = \binom{6}{p} (x^4)^p \cdot 3^{6-p}$

$\therefore T = \binom{6}{p} x^{4p} \cdot 3^{6-p}$

Queremos obter o coeficiente de x^{20}; por isso, igualamos a 20 o expoente de x do termo geral, isto é:

$4p = 20 \Rightarrow p = 5$

Substituindo por 5 a variável p do termo geral, temos:

$T = \binom{6}{5} x^{4 \cdot 5} \cdot 3^{6-5}$

$\therefore T = \binom{6}{5} x^{20} \cdot 3^1$

Calculando o coeficiente binomial, temos:

$\binom{6}{5} = \dfrac{6!}{5!(6-5)!} = \dfrac{6!}{5! \cdot 1!} = \dfrac{6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 1} = 6$

Logo:

$T = 6 \cdot x^{20} \cdot 3 = 18x^{20}$

Assim, concluímos que o coeficiente de x^{20} é 18.

(*Nota*: Representamos o termo geral $T = \binom{6}{p} (x^4)^p 3^{6-p}$ segundo expoentes crescentes de x. Poderíamos tê-lo representado segundo expoentes decrescentes de x, isto é, $T = \binom{6}{p} (x^4)^{6-p} 3^p$, e obtido o mesmo resultado. Faça você mesmo os cálculos.)

30 Desenvolvendo a potência $(x^5 - 2)^9$, segundo expoentes crescentes de x, determinar o quinto termo.

Resolução

Considerando a potência sob a forma $[x^5 + (-2)]^9$, representamos o termo geral, segundo os expoentes crescentes de x, da seguinte forma:

$T = \binom{9}{p} (x^5)^p (-2)^{9-p} \Rightarrow T = \binom{9}{p} x^{5p} (-2)^{9-p}$

Queremos determinar o quinto termo do desenvolvimento. Para isso, observamos que:

$p = 0$ corresponde ao primeiro termo;
$p = 1$ corresponde ao segundo termo;
$p = 2$ corresponde ao terceiro termo;
$p = 3$ corresponde ao quarto termo;
$p = 4$ corresponde ao quinto termo.

Portanto, substituindo por 4 a variável p do termo geral obtemos:

$$T = \binom{9}{4} x^{5 \cdot 4} (-2)^{9-4} \Rightarrow T = \binom{9}{4} x^{20}(-2)^5$$

Calculando o coeficiente binomial:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 126$$

Logo: $T = 126 \cdot x^{20} \cdot (-32) = -4.032x^{20}$

Assim, concluímos que o quinto termo é $-4.032x^{20}$.

31 Determinar o termo independente de x no desenvolvimento da potência $\left(x^5 + \frac{2}{x^2}\right)^7$.

Resolução

Para facilitar os cálculos, convém considerar a potência sob a forma $(x^5 + 2x^{-2})^7$, cujo termo geral é:

$$T = \binom{7}{p}(x^5)^p \cdot (2x^{-2})^{7-p} \Rightarrow T = \binom{7}{p} x^{5p} \cdot 2^{7-p} \cdot x^{-14+2p}$$

Ou ainda: $T = \binom{7}{p} \cdot 2^{7-p} \cdot x^{7p-14}$

Queremos o termo independente de x, isto é, o coeficiente de x^0; por isso, igualamos a zero o expoente de x no termo geral:

$7p - 14 = 0 \Rightarrow p = 2$

Substituindo por 2 a variável p do termo geral, temos:

$$T = \binom{7}{2} \cdot 2^{7-2} \cdot x^{7 \cdot 2 - 14} \Rightarrow T = \binom{7}{2} \cdot 2^5 \cdot x^0, \text{ em que:}$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 21$$

Portanto, o termo independente de x é dado por:

$T = 21 \cdot 32 \cdot x^0$, ou seja, $T = 672$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

83 Considerando o desenvolvimento da potência $(2x^3 + x)^8$ segundo expoentes crescentes de x, determine o terceiro termo.

84 Considerando o desenvolvimento da potência $(x^2 - 2x)^7$ segundo expoentes decrescentes de x, determine o quarto termo.

85 (PUC-SP) No desenvolvimento de $(x + 1)^{10}$ segundo as potências decrescentes de x, o seu 7º termo é:

a) $210x^4$
b) $120x^7$
c) $120x^4$
d) $210x^3$
e) $120x^4$

86 Determine o coeficiente de a^8 no desenvolvimento de $(2a + 1)^{10}$.

87 Qual é o coeficiente de k^{18} no desenvolvimento de $(k^3 - 2k)^8$?

88 PUC-RS) O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ é:

a) 15 b) 60 c) 160 d) 192 e) 240

89 (Vunesp) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ é igual a:

a) 30 b) 15 c) 4 d) 0 e) 1

90 No desenvolvimento da potência $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^8$, determine o termo independente de x.

Resolva os exercícios complementares 27 a 33.

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *O triângulo de Pascal.*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Simplifique as frações:

a) $\frac{12!}{13!}$

b) $\frac{9!}{7!}$

c) $\frac{8!}{5!}$

d) $\frac{8! \cdot 10!}{6! \cdot 9!}$

e) $\frac{5! \cdot 9!}{3! \cdot 12!}$

f) $\frac{(n+2)!}{n!}$

g) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!}$

2 (PUC-RS) A expressão $(n - 1)! \cdot [(n + 1)! - n!]$ equivale a:

a) $n!$
b) $(n - 1)!$
c) $(n + 1)!$
d) $(n!)^2$
e) $[(n - 1)!]^2$

3 Resolva as equações:

a) $\frac{(n+5)!}{(n+4)!} = 12$

b) $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$

c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!} = 20$

d) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{42}$

e) $\frac{n!}{n+1} - n! = \frac{4(n+1)!}{9}$

f) $n! + (n + 1)! = n!(n + 2)$

4 (UFC-CE) A soma e o produto das raízes da equação $(x + 1)! = x! + 6x$ são, respectivamente:

a) 3 e 6
b) 3 e 3
c) 6 e 1
d) 3 e 0
e) nenhuma das alternativas anteriores é correta.

5 (UEL-PR) Se o número natural n é tal que

$$\frac{n! + 2(n - 1)!}{(n - 2)!} = 18,$$ então n é um número:

a) menor que 3
b) divisível por 5
c) divisível por 2
d) maior que 10
e) múltiplo de 7

6 O número P, a seguir, representa o produto de todos os números naturais pares de 2 a 100:

$$P = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ... \cdot 100$$

Observando que esse número também pode ser representado na forma

$$P = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot ... \cdot (2 \cdot 50),$$

podemos afirmar que:

a) $P = 2 \cdot 50!$
b) $P = 2^{50} \cdot 50!$
c) $P = 2^{100} \cdot 50!$
d) $P = 2^{100} \cdot 100!$
e) $P = 2^{50} \cdot 100!$

7 O resultado da expressão $50! + 11$ é um número primo ou composto? Justifique sua resposta.

8 O algarismo das unidades do número que resulta da expressão $23! - 243$ é:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 0 e) 7

9 Resolva as equações:

a) $A_{n,\,2} = 3n + 12$
b) $A_{n,\,3} = 3A_{n,\,2}$
c) $A_{n+1,\,2} = A_{n,\,2}$
d) $A_{n+3,\,3} = 2A_{n+3,\,2} + 3A_{n+2,\,2}$

10 Que valores de n satisfazem a igualdade:
$A_{n,\,3} = n \cdot A_{n,\,2} - 2n(n - 1)$?

11 Quantas funções injetoras podem ser definidas de $A = \{-2, 0, 2, 4\}$ em $B = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$?

a) $A_{6,\,4}$ b) $A_{4,\,4}$ c) $A_{6,\,6}$ d) $A_{6,\,2}$ e) $A_{4,\,2}$

12 Resolva a equação $P_n = 5.040n$.

13 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$, quantas funções bijetoras podem ser definidas de A em B?

14 Quantos números naturais de cinco algarismos existem contendo três dígitos 7 e dois dígitos 9?

15 Calcule o valor das expressões:

a) $C_{8,\,2} + C_{6,\,0} + C_{0,\,0}$ b) $C_{5,\,4} + A_{6,\,2} + P_3$

16 Resolva a equação: $x^3 + A_{x,\,2} - 6 \cdot C_{x,\,3} = 27$

17 A expressão $\displaystyle\sum_{p=0}^{80} \binom{80}{p} 5^p \cdot (-5)^{80-p}$ é igual a:

a) 5^{80} b) -5^{80} c) 1 d) -1 e) 0

18 Determine o número natural n tal que:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p \cdot 3^{n-p} = 625^{n-3}$$

19 (UFC-CE) Se $\displaystyle\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 3^p = 256$, em que $\binom{m}{p}$ é um número binomial, então o valor de m é:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

20 Obtenh o número natural n tal que:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 1.024$$

21 A expressão $\displaystyle\sum_{p=2}^{20} \binom{20}{p}$ é igual a:

a) 2^{20}
b) $2^{20} - 1$
c) $2^{20} - 21$
d) $2^{20} - 3$
e) $2^{20} - 4$

22 Na soma S, abaixo, as parcelas são todos os números binomiais $\binom{30}{p}$, com $0 \leqslant p \leqslant 30$, tal que, se p é par, a parcela é precedida pelo sinal "+"; e se p é ímpar, a parcela é precedida pelo sinal "−".

$$S = \binom{30}{0} - \binom{30}{1} + \binom{30}{2} - \binom{30}{3} + ... + \binom{30}{30}$$

Nessas condições, S é igual a:

a) 0
b) 1
c) -1
d) 10^{30}
e) $(-10)^{29}$

23 Determine os números reais x e y tais que:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x^5 - \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 - \binom{5}{3}x^2y^3 + \\ + \binom{5}{4}x^1y^4 - y^5 = -32 \end{cases}$$

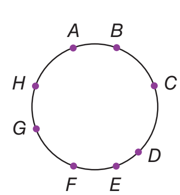
24 (FGV) Sabendo que:

- x e y são números reais positivos
- $x - y = 1$ e
- $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 16$

Podemos concluir que:

a) $x = \frac{7}{6}$
b) $x = \frac{6}{5}$
c) $x = \frac{5}{4}$
d) $x = \frac{4}{3}$
e) $x = \frac{3}{2}$

25 Quantos polígonos convexos ficam determinados pelos oito pontos distintos A, B, C, D, E, F, G e H representados sobre a circunferência abaixo?



26 Aplicando os conceitos estudados sobre o binômio de Newton, demonstre que um conjunto de n elementos tem 2^n subconjuntos.

27 (Uece) O coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(2 + x)^5$ é igual a:

a) 160 b) 80 c) 40 d) 10 e) 5

28 Obtenha o coeficiente de x^{64} no desenvolvimento de: $(x^4 + 2)^{10} \cdot (x^4 - 2)^{10}$.

29 (Mackenzie-SP) O coeficiente do termo em x^{-3} no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6$ é:

a) 1
b) 6
c) 10
d) 15
e) inexistente

[*Sugestão*: Represente a potência na forma $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}\right)^6$.]

30 (FGV) No desenvolvimento de $\left(x + \frac{k}{x}\right)^{10}$, para que o coeficiente do termo em x^4 seja 15, a constante k deve ser igual a:

a) $\frac{1}{2}$ **b)** 2 **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** 3 **e)** 4

31 Determine o termo independente de x no desenvolvimento da potência $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$.

32 Qual é o termo independente de x no desenvolvimento da potência $\left(2x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^7$?

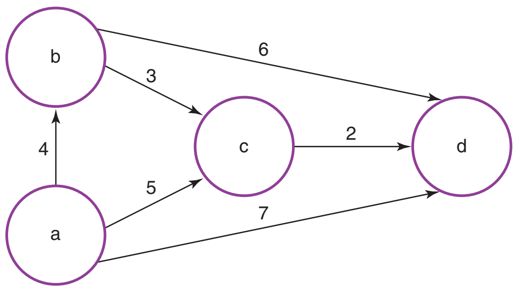
33 (Uerj) Na potência $\left(x + \frac{1}{x^5}\right)^n$, n é um número natural menor que 100. Determine o maior valor de n de modo que o desenvolvimento dessa potência tenha um termo independente de x.

Exercícios contextualizados

34 (UFJF-MG) Temos 7 cores distintas e queremos pintar um painel com 4 listras de cores distintas. O número de maneiras com que isso pode ser feito é:

a) 35 **b)** 840 **c)** 2.401 **d)** 16.384

35 (Ufal) Desde o fim da última era glacial até hoje, a humanidade desenvolveu a agricultura, a indústria, construiu cidades e, por fim, com o advento da internet, experimentou um avanço comercial sem precedentes. Quase todos os produtos vendidos no planeta atravessam alguma fronteira antes de chegar ao consumidor. No esquema adiante, suponha que os países, a, b, c e d estejam inseridos na logística do transporte de mercadorias com o menor custo e no menor tempo.



Os números indicados representam o número de rotas distintas de transporte aéreo disponíveis, nos sentidos indicados. Por exemplo, de a até b são 4 rotas; de c até d são 2 rotas, e assim por diante. Nessas condições, o número total de rotas distintas, de a até d é igual a:

a) 66 **b)** 65 **c)** 64 **d)** 63 **e)** 62

36 (Enem) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Antiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

T&C Amazônia, ano 1, n. 3, dez. 2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos — uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

a) 1.320 **b)** 2.090 **c)** 5.845 **d)** 6.600 **e)** 7.245

37 Com os algarismos 1, 3, 4, 6 e 8, determine quantos números naturais podem ser formados, de modo que:

a) eles sejam ímpares de 4 algarismos.
b) eles sejam ímpares de 4 algarismos distintos.

38 (UFC) Considere o conjunto de dígitos $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Dentre todos os números naturais com quatro dígitos que se pode formar utilizando somente elementos de C, calcule quantos são múltiplos de 4.
b) Dentre todos os números naturais com três dígitos distintos que se pode formar utilizando somente elementos de C, calcule quantos são múltiplos de 3.

39 No caixa eletrônico, a senha de acesso a uma conta bancária é uma sequência de algarismos seguidos de 3 letras. Na fila do caixa eletrônico, um vigarista decorou a sequência de algarismos que uma senhora à sua frente digitou; porém, após a digitação dos algarismos, apareceram no monitor os retângulos apresentados na figura a seguir, sendo que a senhora pressionou, de cima para baixo, as teclas à direita dos três primeiros retângulos, o que significa que as 3 letras que completam a senha estão no primeiro, no segundo e no terceiro retângulo, nessa ordem.

O número de senhas diferentes que o vigarista pôde obter com suas observações é:

a) 15 **b)** 125 **c)** 625 **d)** 480 **e)** 320

40 Seis filmes diversos serão apresentados em 6 dias consecutivos durante um festival de cinema, sendo apresentado um único filme por dia. Em quantas sequências diferentes poderá ser feita a programação de apresentações desses filmes?

41 (UFRGS) Para colocar preço em seus produtos, uma empresa desenvolveu um sistema simplificado de código de barras formado por cinco colunas separadas por quatro espaços. Podem ser usadas colunas de três larguras possíveis e espaços de duas larguras possíveis, como no exemplo abaixo.

O número total de preços que podem ser representados por esse código é:

a) 1.440
b) 2.880
c) 3.125
d) 3.888
e) 4.320

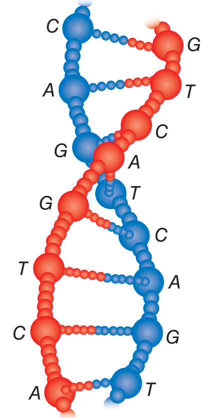
42 Todos os clientes de um banco dispõem de uma senha de acesso à conta bancária por meio do caixa eletrônico. Cada senha é uma sequência formada por 3 algarismos, escolhidos entre os 10 algarismos de 0 a 9, seguidos de 2 letras, escolhidas entre 26 letras do alfabeto. Se dois clientes não podem ter a mesma senha, pode-se afirmar que o maior número possível de clientes que esse banco pode ter é:

a) 700.000
b) 464.000
c) 676.000
d) 580.000
e) 386.000

43 (Uespi) A um debate entre candidatos a governador de certo estado compareceram 7 candidatos, sendo 4 homens e 3 mulheres. A organização do evento resolveu que os candidatos ficariam lado a lado, numa disposição não circular, e que os homens não ficariam juntos um do outro, e sim em posição alternada com as mulheres.
Para isso, em cada um dos 7 locais a serem ocupados pelos candidatos, foi colocado o nome do respectivo ocupante. Nessas condições, é correto afirmar que o número de maneiras diferentes de esses candidatos serem arrumados em seus respectivos locais no debate é:

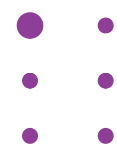
a) 121
b) 124
c) 136
d) 144
e) 169

44 O DNA é uma molécula em forma de dupla hélice que lembra uma escada torcida. Os "degraus" ligam bases nitrogenadas representadas por A (adenina), T (timina), C (citosina) e G (guanina). Esses "degraus", chamados de pontes de hidrogênio, ligam as bases apenas dos seguintes modos: A-T, T-A, C-G e G-C.
Um cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com 8 desses pares, de modo que dois pares consecutivos não sejam iguais. Por exemplo:



Quantos fragmentos diferentes podem ser obtidos? (*Nota*: Dois fragmentos de DNA são idênticos se forem constituídos por sequências iguais dos pares A-T, T-A, C-G e G-C.)

45 (Enem) A escrita braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.
Por exemplo, a letra A é representada por



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema braile é:

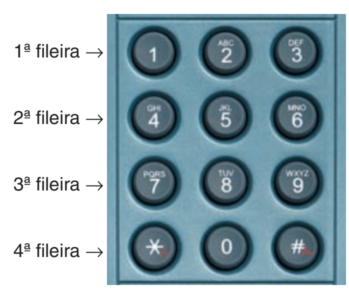
a) 12 b) 31 c) 36 d) 63 e) 720

46 (FGV) Usando-se apenas os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, podemos representar x números naturais de quatro algarismos de modo que pelo menos dois algarismos sejam iguais. O valor de x é:

a) 505 b) 427 c) 120 d) 625 e) 384

47 Em uma prova de atletismo disputada por 9 corredores, os 3 primeiros colocados serão classificados para a próxima fase da competição, não sendo admitido empate. Sabendo que apenas 4 brasileiros participam dessa prova e considerando apenas os 3 primeiros colocados, quantos resultados possíveis classificam pelo menos um brasileiro para a próxima fase?

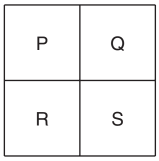
48 (Ufes) Num aparelho telefônico, as dez teclas numeradas estão dispostas em fileiras horizontais, conforme indica a figura:



Seja N a quantidade de números de telefone com 8 dígitos, que começam pelo dígito 3 e terminam pelo dígito zero, e, além disso, o 2º e o 3º dígitos são da primeira fileira do teclado, o 4º e o 5º dígitos são da segunda fileira, e o 6º e o 7º são da terceira fileira.
O valor de N é:

a) 27 **b)** 216 **c)** 512 **d)** 729 **e)** 1.331

49 (Vunesp) Dispomos de 4 cores distintas e temos de colorir o mapa esquematizado na figura, com os países P, Q, R e S, de modo que países cuja fronteira comum é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor.



De quantas maneiras é possível colorir o mapa, se:

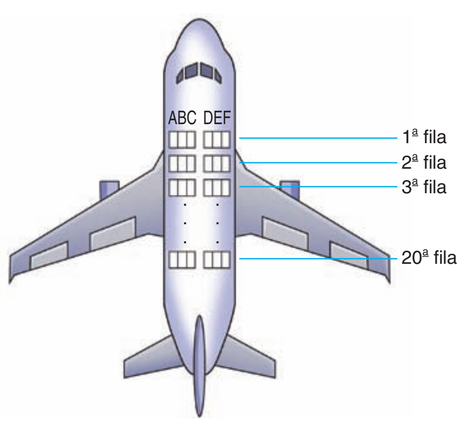
a) os países P e S forem coloridos com cores distintas?

b) os países P e S forem coloridos com a mesma cor?

50 (Uerj) Numa cidade, os números telefônicos não podem começar por zero e têm 8 algarismos, dos quais os quatro primeiros constituem o prefixo.
Considere que os quatro últimos dígitos de todas as farmácias são 0000 e que o prefixo da farmácia Vivavida é formado pelos dígitos 2, 4, 5 e 6, não repetidos e não necessariamente nessa ordem.
O número máximo de tentativas a serem feitas para identificar o número telefônico completo dessa farmácia equivale a:

a) 6 **b)** 24 **c)** 64 **d)** 168

51 (Ufes) Um avião possui 120 poltronas de passageiros distribuídas em 20 filas. Cada fila tem 3 poltronas do lado esquerdo (denotadas por A, B, C) e 3 do lado direito (denotadas por D, E, F), separadas pelo corredor do avião, conforme a figura abaixo.



Considere que duas poltronas são vizinhas quando estão numa mesma fila e não há poltrona nem corredor entre elas (logo, as de letras C e D não são consideradas vizinhas).

a) De quantas maneiras distintas dois passageiros podem sentar-se nesse avião numa mesma fila?

b) De quantas maneiras distintas um casal pode sentar-se em poltronas vizinhas?

c) De quantas maneiras distintas dois casais podem sentar-se nesse avião de modo que cada casal fique em poltronas vizinhas?

(*Nota*: A inversão de posição entre os membros de um casal em poltronas vizinhas caracteriza maneiras distintas.)

52 (FGV) Deseja-se criar uma senha para os usuários de um sistema com uma sequência de 3 letras, escolhidas entre as cinco A, B, C, D e E, seguida de uma sequência de 4 algarismos, escolhidos entre 0, 2, 4, 6 e 8. Se entre as letras puder haver repetição, mas se os algarismos forem todos distintos, o número total de senhas possível é:

a) 78.125 **c)** 15.000 **e)** 50
b) 7.200 **d)** 6.420

53 Trinta pacientes hipertensos submeteram-se a um teste de esforço. Ao final do teste, o médico assinalou ao lado do nome de cada um, em uma lista, a letra *S* ou a letra *D* ou a sequência *SD*, conforme o paciente tenha apresentado variação acentuada na pressão sistólica ou diastólica ou nas duas, respectivamente. Sabendo que todos os pacientes tiveram uma dessas classificações e que foram assinaladas 18 letras *S* e 20 letras *D*, quantos pacientes tiveram a classificação *SD*?

54 (UFC-CE) A quantidade de números inteiros, positivos e ímpares, formados por 3 algarismos distintos, escolhidos entre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, é igual a:

a) 320 **b)** 332 **c)** 348 **d)** 360 **e)** 384

55 Em cada corrida de automóveis de um campeonato só recebem pontuação os três primeiros colocados, não podendo haver empate e sendo as pontuações diferentes entre si. Se 15 carros participam de uma corrida desse campeonato, com um único carro da equipe A:

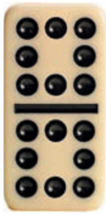
a) de quantas maneiras diferentes pode ocorrer a distribuição da pontuação?

b) de quantas maneiras diferentes pode ocorrer a distribuição da pontuação se o carro da equipe A for o 1º colocado?

c) de quantas maneiras diferentes pode ocorrer a distribuição da pontuação se o carro da equipe A for o 2º colocado?

d) de quantas maneiras diferentes pode ocorrer a distribuição da pontuação se o carro da equipe A for o 1º ou o 2º colocado?

56 (OBM) O dominó mais conhecido tem como "maior peça" o duplo 6. Nesse dominó são empregadas 28 peças diferentes. Quantas peças tem o dominó cuja "maior peça" é o duplo 8?



a) 34 **d)** 55
b) 36 **e)** 45
c) 42

57 Cada pedra de um jogo de dominó possui duas casas numeradas, como mostram os exemplos a seguir:

Lembrando que cada casa pode apresentar de 0 a 6 pontos, em quantas pedras uma das duas casas apresenta 1, 2, 3 ou 4 pontos?

58 (Vunesp) Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número um (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras, com 5 letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

a) 120 b) 62 c) 60 d) 20 e) 10

59 (Vunesp) O número de maneiras que 3 pessoas podem sentar-se em uma fileira de 6 cadeiras vazias de modo que, entre duas pessoas próximas (seguidas), sempre tenha exatamente uma cadeira vazia, é:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

60 (ITA-SP) Determine quantos números naturais de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: o número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

a) 204 b) 206 c) 208 d) 210 e) 212

61 (Ufal) Considere o conjunto A, formado pelos algarismos de 0 a 9, e analise as afirmações que seguem. [*Nota*: "Analisar as afirmações" significa classificá-las como verdadeira (V) ou falsa (F).]

a) Com os elementos de A, é possível escrever 32.542 números de 5 algarismos distintos entre si.
b) De todos os números de 4 algarismos distintos entre si que podem ser escritos com os elementos de A, 3.120 são pares.
c) De todos os números de 3 algarismos distintos entre si que podem ser escritos com os elementos de A, 176 são menores que 350.
d) Com os algarismos de valor ímpar de A, é possível escrever exatamente 60 números de 3 algarismos distintos entre si.
e) De todos os números de 3 algarismos distintos entre si que podem ser escritos com os elementos de A, 150 são divisíveis por 5.

62 (UFC-CE) A quantidade de números inteiros positivos de 8 algarismos, formados somente pelos algarismos 1, 2 e 3, nos quais cada um desses algarismos aparece pelo menos uma vez, é:

a) $3^8 + 3 \cdot 2^8$
b) $3^8 - 3 \cdot 2^8$
c) $3^8 - 3 \cdot 2^8 - 3$
d) $3^8 + 3 \cdot 2^8 + 3$
e) $3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3$

63 Em cada uma de n cidades foi instalada uma delegacia da mulher. Cada delegacia será chefiada por uma única delegada. Havendo p candidatas disponíveis para ocupar esses postos, com $p \geqslant n$, o número de maneiras distintas de serem ocupados os postos é:

a) $A_{n,\,n}$
b) $A_{p,\,p}$
c) $A_{p,\,n}$
d) $A_{n,\,p}$
e) $A_{n,\,1}$

64 O total de números naturais do nosso sistema de numeração que apresentam 6 algarismos distintos, com os 3 primeiros algarismos à esquerda ímpares e os demais algarismos pares, é:

a) $2 \cdot A_{5,\,3}$
b) $A_{5,\,3}$
c) $(A_{5,\,3})^2$
d) $A_{10,\,6}$
e) $A_{10,\,3}$

65 Com todas as vogais a, e, i, o, u e as consoantes b, c, d, f, g, h, serão formadas sequências de 7 letras distintas tal que 3 sejam vogais e estejam juntas e as demais sejam consoantes e também estejam juntas. O número de sequências é dado por:

a) $2 \cdot A_{5,\,3} \cdot A_{6,\,4}$
b) $A_{5,\,3} \cdot A_{6,\,4}$
c) $A_{11,\,7}$
d) $A_{5,\,3} + A_{6,\,4}$
e) $A_{5,\,3} + 2 \cdot A_{6,\,4}$

66 Uma urna contém exatamente 100 etiquetas numeradas de 1 a 100, sendo que cada uma contém um único número. Retira-se uma sequência de 6 etiquetas dessa urna, uma de cada vez e sem reposição da que foi retirada. O número de sequências possíveis, na ordem de retirada, que contenha o número 5 na terceira ou na quarta etiqueta é:

a) $A_{100,\,5}$
b) $A_{99,\,5}$
c) $2 \cdot A_{99,\,5}$
d) $(A_{99,\,5})^2$
e) $2 \cdot A_{100,\,5}$

67 Com n algarismos não nulos e distintos entre si, podem ser formados k números naturais múltiplos de 5, com p algarismos distintos cada um. Sendo $k \neq 0$, pode-se afirmar que:

a) $k = A_{n-1,\,p-1}$
b) $k = A_{n,\,p-1}$
c) $k = A_{n-1,\,p}$
d) $k = A_{n,\,p}$
e) $k = A_{p-1,\,n-1}$

68 Com n cores diferentes, sendo $n \geqslant 8$, um pintor deve pintar o painel abaixo, formado por 8 quadrículas.

Sabendo que cada quadrícula deve ser pintada de uma única cor e que pelo menos duas quadrículas devem ter a mesma cor, o número de sequências possíveis de cores com que as quadrículas podem ser coloridas é:

a) $A_{n,\,7}$
b) $n \cdot A_{n,\,8}$
c) $n - A_{n,\,8}$
d) $n^8 - A_{n,\,8}$
e) $A_{n,\,8} - n$

69 Seis pessoas embarcam em um ônibus onde há exatamente 6 lugares vagos. De quantas maneiras diferentes essas pessoas podem se distribuir nesses lugares?

70 Vinte carros numerados de 1 a 20 participaram de uma corrida. Num dado momento, em que não havia empate em nenhuma das colocações, os cinco primeiros colocados eram os carros de número 3, 5, 18, 13 e 6, não necessariamente nessa ordem. Pode-se concluir que, nesse momento, o número possível de sequências de carros, do primeiro ao último, é:

a) 20!
b) 15!
c) 5!
d) 5! + 15!
e) 5! · 15!

71 (PUC-MG) Em um pequeno auditório, as cadeiras estão dispostas em fileiras de 10 cadeiras cada, formando semicírculos concêntricos. Deseja-se acomodar 4 pessoas na primeira fileira, de modo que 2 delas, que são irmãs, assentem lado a lado. O número de possibilidades de proceder a essa acomodação é:

a) 672
b) 720
c) 1.008
d) 1.440

72 (UFPA) Quantos são os anagramas da palavra BRASIL começados por B e terminados por L?
a) 24 b) 120 c) 720 d) 240 e) 1.440

73 Considerando todos os números naturais de 6 algarismos distintos formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6:
a) quantos números começam por 1?
b) quantos números terminam por 2?
c) quantos números começam por 1 e terminam por 2?
d) quantos números começam por algarismo ímpar?
e) quantos números terminam por algarismo par?
f) quantos números começam por algarismo ímpar e terminam por algarismo par?
g) quantos números apresentam os algarismos 2, 4 e 5 juntos e nessa ordem?
h) quantos números apresentam os algarismos 2, 4 e 5 juntos em qualquer ordem?
i) em quantos números o algarismo 1 vem antes do 2, não necessariamente juntos?

74 Considere n algarismos não nulos e distintos, sendo 3 um deles. Calcule, em função de n, o total de números naturais de n algarismos distintos que podem ser formados com esses n algarismos tal que:
a) o algarismo das unidades seja 3.
b) o algarismo das unidades seja diferente de 3.

75 Quatro homens e n mulheres devem ocupar $n + 4$ cadeiras, dispostas lado a lado. Calcule, em função de n:
a) o número de sequências diferentes com que essas pessoas podem ocupar essas cadeiras.
b) o número de sequências diferentes com que essas pessoas podem ocupar essas cadeiras de modo que os homens fiquem juntos e as mulheres também fiquem juntas.
c) o número de sequências diferentes com que essas pessoas podem ocupar essas cadeiras de modo que os homens fiquem juntos.

76 Com n letras distintas, entre as quais apenas 3 são vogais, podem ser formadas 2.160 sequências de n letras distintas em que a primeira é vogal. Determine n.

77 Considere todos os números naturais de 5 algarismos distintos formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.
a) Quantos são esses números?
b) Quantos desses números são menores que 34.215?
c) Escrevendo esses números em ordem crescente, qual é a ordem (número da posição) do número 34.215?

78 (Uespi) Ao colocarmos em ordem alfabética os anagramas da palavra MURILO, qual é a quinta letra do anagrama que ocupa a 400ª posição?
a) M c) R e) L
b) U d) I

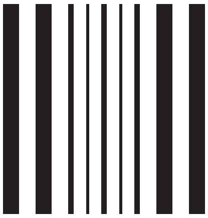
79 Calcule o número de anagramas das palavras:
a) AMARELADA
b) MAMBEMBE

80 Com a palavra ARMADURA:
a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos anagramas começam por R?
c) quantos anagramas começam por consoante?
d) quantos anagramas terminam por A?
e) quantos anagramas terminam por vogal?
f) quantos anagramas começam por consoante e terminam por vogal?
g) quantos anagramas apresentam as letras M e D juntas e nessa ordem?
h) quantos anagramas apresentam as letras M e D juntas em qualquer ordem?

81 (FGV) O número de anagramas da palavra ECONOMIA que não começam nem terminam com a letra O é:
a) 9.400 d) 10.200
b) 9.600 e) 10.800
c) 9.800

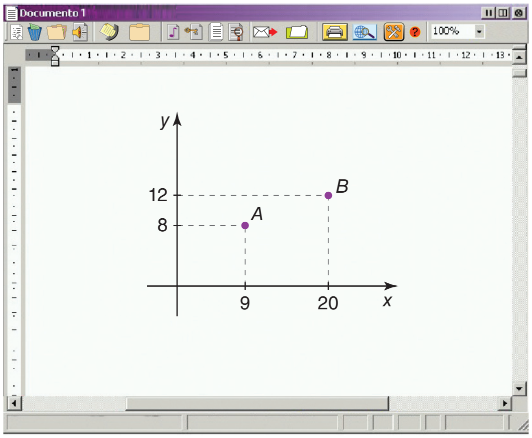
82 Um ***bit*** (*binary digit*) é cada um dos dois impulsos elétricos identificados pelo computador: um deles é representado pelo dígito 1 e o outro pelo dígito 0 (zero). Um ***byte*** (*binary term*) é um conjunto de 8 *bits* quaisquer.
Quantos *bytes* podem ser representados com 3 dígitos iguais a "1" e os demais iguais a "0"?

83 As embalagens dos vários produtos vendidos por uma empresa apresentam uma sequência formada por barras verticais: quatro com 1,5 mm de largura; três com 0,5 mm de largura e duas com 0,25 mm de largura, como na figura ao lado.



Cada sequência de barras indica o preço de um produto. Quantos preços diferentes podem ser indicados nesse sistema de códigos?

84 Cada vez que uma das teclas [↑] ou [→] é acionada no teclado de um computador, o cursor se desloca uma unidade u na tela, para cima ou para a direita, respectivamente. Associa-se um sistema cartesiano de eixos à tela, conforme a figura abaixo, com a unidade u em cada eixo. Se, em relação a esse sistema cartesiano, o cursor está no ponto $A(9, 8)$, quantas sequências diferentes de digitações das teclas [↑] ou [→] levam o cursor para o ponto $B(20, 12)$?



85 (FGV) Um fundo de investimento disponibiliza números inteiros de cotas aos interessados nessa aplicação financeira. No primeiro dia de negociação desse fundo, verifica-se que 5 investidores compraram cotas, e que foi vendido um total de 9 cotas. Em tais condições, o número de maneiras diferentes de alocação das 9 cotas entre os 5 investidores é igual a:

a) 56 b) 70 c) 86 d) 120 e) 126

86 (FGV) O número de segmentos de reta que têm ambas as extremidades localizadas nos vértices de um cubo dado é:

a) 12 b) 15 c) 18 d) 24 e) 28

87 (UFMG) O jogo de dominó possui 28 peças distintas. Quatro jogadores repartem entre si essas 28 peças, ficando cada um com 7 peças. De quantas maneiras distintas pode-se fazer tal distribuição?

a) $\dfrac{28!}{7! \cdot 4!}$ b) $\dfrac{28!}{4! \cdot 24!}$ c) $\dfrac{28!}{(7!)^4}$ d) $\dfrac{28!}{7! \cdot 21!}$

88 Em um campeonato de futebol, cada time joga uma única vez com cada um dos outros times. Sabendo-se que esse campeonato é composto de 55 jogos, qual é o número de times participantes?

89 (UEL-PR) Na formação de uma Comissão Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica um certo número de membros, de acordo com o tamanho de sua representação no Congresso Nacional. Faltam apenas dois partidos, A e B, para indicar seus membros. O partido A tem 40 deputados e deve indicar 3 membros, enquanto o partido B tem 15 deputados e deve indicar 1 membro. Assinale a alternativa que apresenta o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI.

a) 55
b) $(40 - 3) \cdot (15 - 1)$
c) $\dfrac{40!}{37! \cdot 3!} \cdot 15$
d) $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 15$
e) $40! \cdot 37! \cdot 15!$

90 No primeiro ano letivo de uma faculdade são oferecidas 10 matérias, das quais cada estudante deve escolher 6. De quantas maneiras um estudante pode fazer a escolha de um grupo de matérias se 2 delas são obrigatórias?

91 (UFMG) A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada.
Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?

a) 70 b) 35 c) 45 d) 55

92 (Fuvest-SP) Em uma classe de 9 alunos, todos se dão bem, com exceção de Andréa, que vive brigando com Manoel e Alberto. Nessa classe, será constituída uma comissão de 5 alunos, com a exigência de que cada membro se relacione bem com todos os outros. Quantas comissões podem ser formadas?

a) 71 b) 75 c) 80 d) 83 e) 87

93 Um grupo de exploradores será composto de 3 arqueólogos e 2 geógrafos escolhidos entre 6 arqueólogos e 6 geógrafos. Quantas formações diferentes pode ter o grupo?

94 Uma prova de Matemática será composta de 3 questões de Geometria, 2 de Trigonometria e 5 de Álgebra. A escolha das questões será feita entre 6 questões de Geometria, 4 de Trigonometria e 8 de Álgebra. Quantas provas diferentes podem ser formadas?

95 (UEG-GO) Uma equipe de pesquisa será formada com a seguinte composição: 1 físico e 3 químicos. Para formar a equipe, estão à disposição 4 físicos e 6 químicos. O número de diferentes equipes possíveis é:

a) 210
b) 80
c) 5.040
d) 480
e) 160

96 (UFSCar-SP) A câmara municipal de determinado município tem exatamente 20 vereadores, sendo que 12 deles apoiam o prefeito e os outros são contra. O número de maneiras diferentes de formar uma comissão contendo exatamente 4 vereadores situacionistas e 3 oposicionistas é:

a) 27.720
b) 13.860
c) 551
d) 495
e) 56

97 (UFV) Um farmacêutico dispõe de 4 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais e deseja combinar 3 desses nutrientes para obter um composto químico. O número de compostos que poderão ser preparados usando-se, no máximo, 2 tipos de sais minerais é:

a) 32 b) 28 c) 34 d) 26 e) 30

98 Entre os 10 políticos de uma cidade, 6 estão sob suspeita de corrupção. Por isso será formada uma comissão de 5 parlamentares para investigar os suspeitos. Quantas comissões diferentes podem ser formadas de modo que os suspeitos não sejam maioria?

99 Entre os 9 quadradinhos abaixo, apenas 3 devem ser pintados de vermelho e apenas 3 devem ser pintados de verde.

O número de figuras diferentes que pode resultar dessa pintura é:

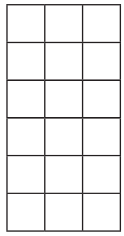
a) $(3!)^3$
b) 1.680
c) 948
d) 2.480
e) 1.400

100 (ITA-SP) Entre 4 moças e 5 rapazes, deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

101 Sete bolas, numeradas de 1 a 7, devem ser guardadas em duas caixas, A e B. De quantas maneiras diferentes as bolas podem ser distribuídas nas duas caixas tal que 5 bolas fiquem na caixa A?

102 Dez documentos diferentes devem ser guardados em 3 gavetas, A, B e C. De quantas maneiras diferentes os documentos podem ser distribuídos nas 3 gavetas tal que a gaveta A fique com 5 documentos, a B com 3 e a C, com 2?

103 O quadriculado ao lado é formado por 6 linhas e 3 colunas de quadradinhos. De quantas maneiras diferentes podemos pintar 6 desses quadradinhos de modo que fiquem exatamente 2 quadradinhos pintados em cada coluna e apenas 1 em cada linha?



104 Uma comissão de 4 pessoas, com pelo menos 1 mulher, será escolhida entre 5 homens e 5 mulheres. Quantas comissões diferentes podem ser formadas?

105 (Fuvest-SP) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa, e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

a) 12 **b)** 18 **c)** 36 **d)** 72 **e)** 108

106 (UFMG) Numa escola, há 10 professores de Matemática e 15 de Português. Pretende-se formar, com esses professores, uma comissão de 7 membros.

a) Quantas comissões distintas podem ser formadas?

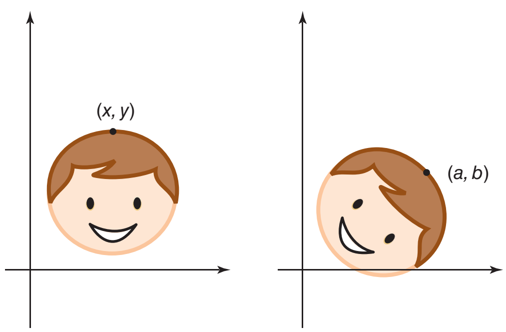
b) Quantas comissões distintas podem ser formadas com, pelo menos, 1 professor de Matemática?

c) Quantas comissões distintas podem ser formadas com, pelo menos, 2 professores de Matemática e, pelo menos, 3 professores de Português?

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 (UFV-MG) Em computação gráfica, quando um programa altera a forma de uma imagem, está transformando cada ponto de coordenadas (x, y), que forma a imagem, em um novo ponto de coordenadas (a, b). A figura abaixo ilustra a transformação da imagem 1 na imagem 2.



Um dos procedimentos que consiste em transformar o ponto (x, y) no ponto (a, b) é realizado, por meio de operações com matrizes, de acordo com as seguintes etapas:

Etapa 1: Fixe duas matrizes invertíveis M e E, de ordem 2, e considere M^{-1} a matriz inversa de M.

Etapa 2: Tome P e Q, matrizes cujas entradas são as coordenadas dos pontos (x, y) e (a, b), respectivamente, isto é, $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Etapa 3: Obtenha Q a partir de P por meio da expressão $Q = EM^{-1}P$.

Considerando essas etapas e as matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) a inversa de M.

b) o ponto (a, b) que é obtido do ponto $(2, 3)$ por meio da expressão $Q = EM^{-1}P$.

2 (Unifesp) Considere a função

$f(x) = 1 + \operatorname{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$, definida para todo x real.

a) Dê o período e o conjunto imagem da função f.

b) Obtenha todos os valores de x do intervalo $[0, 1]$ tais que $y = 1$.

3 (UFV-MG) Um pecuarista fica sabendo que seus animais devem ingerir diariamente 60 g do nutriente A e 40 g do nutriente B. Esse pecuarista dispõe de 3 tipos de ração, com as seguintes características por quilograma:

- A ração I contém 5 gramas do nutriente A e 8 gramas do nutriente B; custa R$ 4,00.
- A ração II contém 5 gramas do nutriente A e 4 gramas do nutriente B; custa R$ 3,00.
- A ração III contém 15 gramas do nutriente A e 8 gramas do nutriente B; custa R$ 8,00.

O pecuarista pretende misturar as rações I, II e III de maneira que seus animais possam ingerir a quantidade de nutrientes recomendada. Se, além disso, ele deseja gastar exatamente R$ 32,00, é correto afirmar que:

a) é impossível o pecuarista fazer a mistura de modo que gaste exatamente R$ 32,00 e que seus animais possam ingerir diariamente 60 g do nutriente A e 40 g do nutriente B.

b) é possível o pecuarista fazer a mistura combinando 2 kg da ração I, 4 kg da ração II e 2 kg da ração III.

c) a mistura deve ser feita combinando 1 kg da ração I, 4 kg da ração II e 2 kg da ração III.

d) existem várias formas de fazer a mistura de modo que os animais ingiram diariamente 60 g do nutriente A e 40 g do nutriente B e que o pecuarista gaste exatamente R$ 32,00.

e) a mistura deve ser feita combinando 4 kg da ração I, 4 kg da ração II e 2 kg da ração III.

4 Determine a constante real m para que as retas representadas pelas equações $y = x + 5$, $y = 3x + 2$ e $y = 4x + m$ tenham um único ponto comum.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Quantos anagramas da palavra DESAFIO começam por vogal ou terminam por consoante?

Resolução

1º) Anagramas que começam por vogal:

4	6	5	4	3	2	1

E, A, I, O

$4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.880$

2º) Anagramas que terminam por consoante:

6	5	4	3	2	1	3

D, S, F

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 2.160$

Logo, o total de anagramas da palavra DESAFIO é dado por:

$2.880 + 2.160 = 5.040$

ERRADO!

Comentário

Há um erro nessa resolução, pois há anagramas que começam por vogal e terminam por consoante; por exemplo, ADEFIOS. Assim, na soma 2.880 + 2.160, cada um desses anagramas foi computado duas vezes.

Refaça essa resolução, corrigindo-a.

Capítulo
9
Probabilidade

Segundo o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), o Brasil é o país com a maior incidência de raios no mundo. Um estudo realizado por esse instituto indica que, por ano, em média, 132 pessoas morrem atingidas por um raio. O estudo ainda informa que a probabilidade de ser atingido por um raio na zona rural é 10 vezes a de ser atingido na zona urbana, porque a maior incidência de raios ocorre em áreas descampadas.

Certamente, você já ouviu frases do tipo: é improvável que chova durante a corrida; é muito provável que a seleção brasileira de futebol seja campeã; a probabilidade de um apostador ganhar na Mega-Sena é muito pequena etc. Nessas frases, em que se procura avaliar a possibilidade de ocorrer determinado resultado, está presente um dos principais conceitos estatísticos: a probabilidade. Neste capítulo, estudaremos esse conceito e algumas de suas muitas aplicações.

9.1 O conceito de probabilidade

Probabilidade é um número que mede a possibilidade de ocorrência de um resultado.

9.2 Adição de probabilidades

O cálculo de probabilidades, por meio da definição, pode ser árido e demorado; por isso, estudaremos alguns recursos, como o teorema da adição de probabilidades, que simplificam e agilizam os cálculos.

9.3 Probabilidade condicional

A probabilidade de ocorrer um evento pode depender da ocorrência de outro. Nesse caso, dizemos que essa probabilidade está condicionada à ocorrência desse outro evento.

9.4 Multiplicação de probabilidades

O teorema da multiplicação de probabilidades simplifica o cálculo da probabilidade de ocorrência de eventos simultâneos ou consecutivos.

Para pensar

1. Se uma região tiver 5.000.000 de habitantes e, num determinado período, 100 dessas pessoas forem atingidas por um raio, que percentual de toda a população as pessoas atingidas representam?
2. Na questão anterior, o percentual encontrado representa a probabilidade de uma pessoa da região ser atingida por um raio, no período considerado. Represente essa probabilidade sob a forma de número decimal.

Seção 9.1

O conceito de probabilidade

Objetivos

- **Determinar** o espaço amostral de um experimento aleatório.
- **Determinar** o número de elementos de um espaço amostral e de um evento.
- **Calcular** probabilidades.
- **Reconhecer** eventos complementares.
- **Aplicar** as propriedades das probabilidades na resolução de problemas.

Termos e conceitos

- **experimento aleatório**
- **espaço amostral**
- **evento**
- **probabilidade**
- **evento complementar**
- **evento impossível**
- **evento certo**

Nosso dia a dia é permeado de incertezas: a do meteorologista ao prever o clima de determinado período; a dos pais ao especular sobre o sexo do futuro bebê; a do candidato ao ponderar as possibilidades de sua eleição etc.

A necessidade de ter algum controle sobre as incertezas motivou a elaboração da **teoria das probabilidades**, uma ferramenta capaz de medir a possibilidade de um experimento produzir determinado resultado.

Historicamente, essa teoria surgiu a partir de discussões sobre jogos. No ano de 1654, um jogador da sociedade parisiense, Chevalier de Mére, propôs ao matemático Blaise Pascal (1623-1662) algumas questões sobre possibilidades de vencer em jogos. Uma das questões foi:

"Um jogo de dados entre dois adversários chega ao fim quando um dos jogadores vence três partidas. Se esse jogo for interrompido antes do final, de que maneira cada um dos jogadores deverá ser indenizado?".

As reflexões sobre esse e outros problemas propostos por De Mére levaram Pascal a se corresponder com o matemático Pierre de Fermat (1601-1665), o que desencadeou discussões a respeito dos princípios de uma nova teoria, que mais tarde veio a ser chamada de teoria das probabilidades.

A situação a seguir tem o objetivo de apresentar uma ideia intuitiva sobre o conceito de probabilidade.

Para a rifa de um computador, foram vendidos mil bilhetes, numerados de 1 a 1.000, dos quais apenas um será premiado por sorteio. Carlos comprou 7 desses bilhetes e Helena comprou um.

É possível medir a possibilidade de cada uma dessas pessoas ganhar o computador. Como Carlos concorre com 7 dos mil números, indicamos por $\frac{7}{1.000}$ a medida da possibilidade de Carlos ganhar; analogamente, a medida da possibilidade de Helena ganhar é $\frac{1}{1.000}$. Essas frações são chamadas de **probabilidades** de Carlos e Helena ganharem, respectivamente.

Esse exemplo ajuda a entender que probabilidade é um número que mede a possibilidade de ocorrência de um resultado.

Neste capítulo, vamos estudar a probabilidade de ocorrer um determinado resultado em um experimento aleatório, definido a seguir.

Experimento aleatório

Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso é chamado de **experimento aleatório**.

Exemplos

São experimentos aleatórios:

a) o lançamento de uma ou mais moedas, no qual se considera, após o lançamento, apenas a face voltada para cima em cada moeda;

b) o lançamento de um ou mais dados, no qual se considera, após o lançamento, apenas a face voltada para cima em cada dado;

c) o sorteio de um bilhete de um total de mil bilhetes numerados de1 a 1.000;

d) o sorteio das cinco bolas, com um algarismo em cada uma, que formarão um número premiado da loteria federal.

Espaço amostral e evento de um experimento aleatório

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral** desse experimento. Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento** desse espaço.

Exemplos

a) No lançamento de uma moeda, temos como espaço amostral o conjunto $E = \{C, K\}$, em que C indica a face cara, e K, a face coroa. Indicando por $n(E)$ o número de elementos do espaço, temos $n(E) = 2$. O subconjunto $A = \{C\}$ é um evento de E. Note que $n(A) = 1$.

b) No lançamento de um dado, temos como espaço amostral o conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que cada elemento indica o número de pontos de uma face. Note que $n(E) = 6$.

O subconjunto $B = \{1, 4\}$ é um evento de E. Temos então $n(B) = 2$.

c) No lançamento de duas moedas, temos como espaço amostral o conjunto $E = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$ e, portanto, $n(E) = 4$. O subconjunto $G = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$ é um evento de E. Temos $n(G) = 3$.

Nota:

É de fundamental importância que você entenda por que temos de considerar diferentes os dois pares ordenados (C, K) e (K, C). Para facilitar o entendimento, imagine que uma moeda fosse vermelha e a outra azul. Uma possibilidade de obter uma cara e uma coroa é cair cara na moeda vermelha e coroa na azul, outra possibilidade é cair coroa na moeda vermelha e cara na azul. Por isso:

$$(\underset{\text{moeda vermelha}}{C}, \underset{\text{moeda azul}}{K}) \neq (\underset{\text{moeda vermelha}}{K}, \underset{\text{moeda azul}}{C})$$

d) No lançamento de dois dados, temos como espaço amostral o conjunto:

$$E = \left\{ \begin{matrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \cdots & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \cdots & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \cdots & (3, 6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & \cdots & (6, 6) \end{matrix} \right\}, \text{ em que } n(E) = 36$$

O subconjunto $H = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ é um evento de E. Temos $n(H) = 4$.

Nota:

O número de elementos desse espaço amostral pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem. Observe:

$$(\underbrace{1^{\underline{o}}\text{ dado}}_{6}, \underbrace{2^{\underline{o}}\text{ dado}}_{6}) \Rightarrow n(E) = 6 \cdot 6 = 36$$

número de possibilidades

e) No sorteio de um entre mil bilhetes, numerados de 1 a 1.000, o espaço amostral é o conjunto:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 1.000\}$, em que $n(E) = 1.000$

O subconjunto $T = \{324, 325, 326, 327, 328, 329, 330\}$ é um evento de E. Temos $n(T) = 7$.

Espaço amostral equiprovável

Um dado foi lançado 1.000 vezes. O número de vezes que ocorreu cada face é chamado de **frequência absoluta** dessa face; a razão da frequência absoluta para o número de vezes em que foi realizado o experimento é chamada de **frequência relativa** dessa face. A tabela ao lado descreve o que ocorreu nesses 1.000 lançamentos.

Observe que as frequências relativas são valores muito próximos um do outro. Se aumentássemos o número de lançamentos do dado para 2.000, 3.000, 10.000 etc., as frequências relativas se aproximariam cada vez mais, tendendo a ficar iguais. Por isso, dizemos que o espaço amostral em um lançamento desse dado é **equiprovável**.

Um espaço amostral é equiprovável se as frequências relativas de seus elementos tendem a um mesmo valor quando o número de experimentos aumenta indefinidamente.

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
1	165	$\frac{165}{1.000} = 0,165$
2	168	$\frac{168}{1.000} = 0,168$
3	165	$\frac{165}{1.000} = 0,165$
4	163	$\frac{163}{1.000} = 0,163$
5	169	$\frac{169}{1.000} = 0,169$
6	170	$\frac{170}{1.000} = 0,170$
	Frequência total = 1.000	

Definição de probabilidade

Sejam E um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, e A um evento de E. A probabilidade de ocorrer algum elemento de A é indicada por $P(A)$ e definida por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

em que $n(A)$ e $n(E)$ indicam, respectivamente, o número de elementos de A e de E.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de obter a face cara?

Resolução

Indicando por C e K as faces cara e coroa, respectivamente, o espaço amostral desse experimento é:
$E = \{C, K\}$, em que $n(E) = 2$
O evento que esperamos ocorrer é $A = \{C\}$, em que $n(A) = 1$.

Logo: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{1}{2}$

Ou ainda: $P(A) = 50\%$

(*Nota*: A probabilidade pode ser apresentada sob a forma fracionária, decimal ou percentual.)

2 No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de obter, na face voltada para cima, um número de pontos menor que 3?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que $n(E) = 6$
O evento que esperamos ocorrer é: $B = \{1, 2\}$, em que $n(B) = 2$

Logo: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Nesse caso, é preferível representar a probabilidade na forma fracionária, evitando a incômoda representação da dízima periódica.

3 No lançamento de duas moedas, qual é a probabilidade de obter, nas faces voltadas para cima, pelo menos uma cara?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:
$E = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$, em que $n(E) = 4$
O evento que esperamos ocorrer é:
$G = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$, em que $n(G) = 3$

Logo: $P(G) = \dfrac{n(G)}{n(E)} = \dfrac{3}{4} = 75\%$

4 No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de obter, nas faces voltadas para cima, a soma dos pontos igual a 5?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:

$$E = \left\{\begin{matrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \cdots & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \cdots & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \cdots & (3, 6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & \cdots & (6, 6) \end{matrix}\right\},$$

em que $n(E) = 36$
O evento que esperamos ocorrer é:
$H = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$, em que $n(H) = 4$

Logo: $P(H) = \dfrac{n(H)}{n(E)} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

5 Para a rifa de um computador, foram vendidos mil bilhetes, numerados de 1 a 1.000, dos quais apenas um será premiado por sorteio. Carlos comprou os bilhetes de números 324, 325, 326, 327, 328, 329 e 330. Qual é a probabilidade de um dos bilhetes de Carlos ser sorteado?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:
$E = \{1, 2, 3, 4, ..., 1.000\}$, em que $n(E) = 1.000$
O evento que esperamos ocorrer é:
$T = \{324, 325, 326, 327, 328, 329, 330\}$, em que $n(T) = 7$

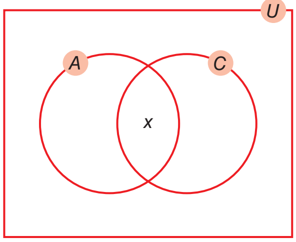
Logo: $P(T) = \dfrac{n(T)}{n(E)} = \dfrac{7}{1.000} = 0{,}007 = 0{,}7\%$

6 Com o objetivo de avaliar a deficiência de vitaminas na alimentação das crianças de determinada região, foram examinadas 800 crianças, constatando-se que entre elas: 385 apresentavam deficiência de vitamina A, 428 apresentavam deficiência de vitamina C e 47 não apresentavam deficiência dessas vitaminas. Selecionando, ao acaso, uma dessas crianças, qual é a probabilidade de ela ter deficiência das duas vitaminas, A e C?

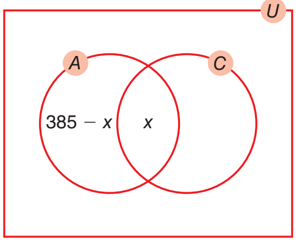
Resolução

Sejam:
- U o conjunto universo das crianças examinadas;
- A o conjunto das crianças com deficiência de vitamina A;
- C o conjunto das crianças com deficiência de vitamina C.

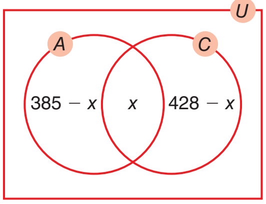
Precisamos determinar o número de elementos do conjunto $A \cap C$, isto é, o número de crianças que apresentam deficiência dos dois tipos de vitamina: A e C.Indicando por x o número de crianças nessas condições, vamos representar a incógnita x na região correspondente a $A \cap C$:



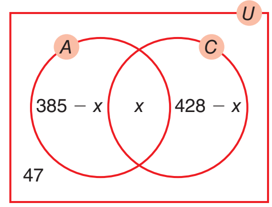
O conjunto A é o das crianças com deficiência de vitamina A. Esse conjunto possui 385 elementos, porém já foram consideradas x crianças do conjunto A. Portanto, faltam $(385 - x)$ crianças para completar esse conjunto:



O conjunto C é o das crianças com deficiência de vitamina C. Tal conjunto possui 428 elementos, porém já foram consideradas x crianças do conjunto C. Logo, faltam $(428 - x)$ crianças para completar esse conjunto.



Finalmente representamos no diagrama as 47 crianças que não apresentavam deficiência de nenhuma das vitaminas, A ou C, completando assim o conjunto universo U:



Lembrando que o conjunto U é formado pelas 800 crianças examinadas, temos:

$(385 - x) + x + (428 - x) + 47 = 800 \Rightarrow x = 60$

Ou seja, 60 crianças apresentavam deficiência de vitamina A e de vitamina C. Logo, a probabilidade P de a criança selecionada ter deficiência das duas vitaminas é dada por:

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(U)} = \frac{60}{800} = \frac{3}{40} = 7{,}5\%$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Um experimento aleatório tem espaço amostral equiprovável E, com 8 elementos. Se um evento A desse espaço amostral possui 5 elementos, então:

a) $P(A) = 12{,}8\%$
b) $P(A) = 48{,}2\%$
c) $P(A) = 54\%$
d) $P(A) = 42{,}8\%$
e) $P(A) = 62{,}5\%$

2 Uma urna contém 200 fichas numeradas de 1 a 200. Retirando uma ficha dessa urna, qual é a probabilidade de obter um número maior que 80?

3 Uma caixa contém 36 lâmpadas queimadas e 84 lâmpadas perfeitas.
Retirando dessa caixa uma lâmpada ao acaso, qual é a probabilidade de se obter:

a) uma lâmpada perfeita?
b) uma lâmpada queimada?

4 (PUC-RS) Considere todas as permutações de cinco letras da sigla PUCRS. Uma dessas permutações foi escolhida ao acaso. A probabilidade de a escolhida terminar com a letra C e começar com a letra P é:

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{1}{12}$ **d)** $\frac{1}{20}$ **e)** 6

5 Roleta é um jogo de azar em que o número premiado é indicado pela parada de uma pequena bola em uma das 37 casas numeradas de 0 (zero) a 36 no contorno de uma roda girante.

Com o lançamento da bola sobre a roleta girando, calcule a probabilidade de ser premiado:

a) o número 10.
b) um número menor que 10.
c) um número maior que 10.

6 Duas moedas são lançadas sobre uma mesa. Qual é a probabilidade de obter nas faces voltadas para cima:

a) uma cara e uma coroa?
b) duas caras?
c) pelo menos uma cara?

7 Três moedas são lançadas sobre uma mesa. Qual é a probabilidade de obter nas faces voltadas para cima:

a) três caras?
b) duas caras e uma coroa?
c) pelo menos uma cara?
d) no máximo duas coroas?

8 No lançamento de dois dados sobre um tabuleiro, qual é a probabilidade de obter nas faces voltadas para cima:

a) a soma dos pontos igual a 9?
b) a soma dos pontos igual a 10?
c) a soma dos pontos maior que 9?
d) a soma dos pontos igual a 13?
e) a soma dos pontos menor que 15?

9 Um dado é lançado duas vezes consecutivas sobre uma mesa. Qual é a probabilidade de que o produto dos números de pontos apresentados nas faces superiores seja múltiplo de 3?
(*Nota*: Observe que o espaço amostral do experimento "lançamento de dois dados" é igual ao espaço amostral do experimento "lançamento de um dado duas vezes".)

10 (FGV) Um carteiro leva três cartas para três destinatários diferentes. Cada destinatário tem sua caixa de correspondência, e o carteiro coloca, ao acaso, uma carta em cada uma das três caixas de correspondência.

a) Qual é a probabilidade de o carteiro não acertar nenhuma caixa de correspondência?

b) Qual é a probabilidade de o carteiro acertar exatamente uma caixa de correspondência?

11 Uma pesquisa constatou que, dos 500 alunos de uma escola, 290 já se vacinaram contra a febre amarela, 350 já se vacinaram contra a gripe H1N1 e 120 não tomaram nenhuma dessas vacinas. Escolhendo um desses alunos ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter tomado as duas vacinas?

BURGER/PHANIE/IMAGEPLUS

12 Em um país de 30 milhões de habitantes, 22 milhões têm menos de 25 anos de idade e 18 milhões têm mais de 22 anos. Escolhendo ao acaso um habitante desse país, qual é a probabilidade de ele ter mais de 22 anos e menos de 25 anos de idade?

13 Em uma classe de 2º ano do ensino médio, precisamente 64% dos alunos leem jornal, 48% leem revista e 10% não leem jornal nem revista. Escolhendo um desses alunos ao acaso, qual é a probabilidade de que ele seja leitor de jornal e de revista?

14 Na convenção de um partido político, devem ser escolhidos dois candidatos para formar a chapa que vai disputar as próximas eleições presidenciais. A escolha deve ser feita entre 3 homens e 2 mulheres, candidatos à presidência, e 2 homens e 4 mulheres, candidatos à vice-presidência. Admitindo que todos os candidatos tenham a mesma probabilidade de ser escolhidos, a probabilidade de que a chapa vencedora tenha um homem como candidato à presidência e uma mulher como candidata à vice-presidência é:

a) 40%
b) 36%
c) 46%
d) 28%
e) 25%

15 Cinco moedas são lançadas sobre uma mesa. Calcule a probabilidade de obter 3 caras e 2 coroas nas faces voltadas para cima.

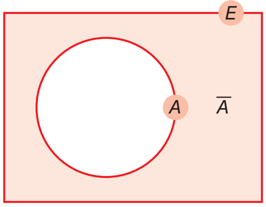
Resolva os exercícios complementares 5 a 31.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *O jogo das três portas*.

Eventos complementares

Seja E o espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de E. Chama-se **evento complementar de A**, que se indica por $\bar{A}$, o evento formado pelos elementos que pertencem a E e não pertencem a A.

Representando por meio de um diagrama o complementar de A, temos:



O círculo representa o evento *A*, e a região pintada representa o complementar de *A*.

Note que:

$$A \cup \bar{A} = E$$
$$A \cap \bar{A} = \varnothing$$

Determinação do complementar de *A* por uma propriedade comum a seus elementos

Se uma propriedade *p* determina os elementos de um evento *A*, então a negação da propriedade *p*, que se indica por **~*p*** (lemos "não *p*"), determina os elementos do complementar de *A*.

$$A = \{x \in E \mid x \text{ satisfaz a propriedade } p\}$$
$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ satisfaz a propriedade } \sim p\}$$

Exemplos

a) Escolhe-se aleatoriamente uma bola de um conjunto de bolas azuis, bolas vermelhas e bolas verdes. Sendo *E* o espaço amostral desse experimento, vamos considerar o evento:

$$A = \{x \in E \mid \underbrace{x \text{ é bola vermelha}}_{\text{propriedade } p}\}$$

Para obter o evento $\overline{A}$, basta negar a propriedade *p* que determina os elementos do evento *A*, isto é:

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \underbrace{x \text{ não é bola vermelha}}_{\text{propriedade } \sim p}\}$$

Portanto:

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ é bola azul ou verde}\}$$

b) Retira-se aleatoriamente uma ficha de uma urna que contém 100 fichas, numeradas de 1 a 100. Sendo *E* o espaço amostral desse experimento, vamos considerar o seguinte evento:

$$A = \{x \in E \mid \underbrace{x > 40}_{\text{propriedade } p}\}$$

O evento $\overline{A}$ é aquele cujos elementos satisfazem a propriedade $\sim p$, isto é:

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \underbrace{x \leqslant 40}_{\text{propriedade } \sim p}\}$$

Propriedades das probabilidades

Sendo *E* um espaço amostral finito e não vazio e sendo *A* um evento de *E*, temos:

P1. $P(\varnothing) = 0$

P2. $P(E) = 1$

P3. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

P4. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ e $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Demonstrações

P1. $P(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(E)} = \dfrac{0}{n(E)} = 0$

O evento $\varnothing$ é chamado de **evento impossível**, pois ele nunca ocorre.

P2. $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(E)} = 1$

O evento que coincide com o espaço amostral *E* é chamado de **evento certo**, pois ele sempre ocorre.

P3. Sendo *A* um evento de *E*, isto é, $A \subset E$, temos:

$$\varnothing \subset A \subset E \Rightarrow n(\varnothing) \leqslant n(A) \leqslant n(E)$$

Portanto:

$$0 \leqslant n(A) \leqslant n(E)$$

Dividindo cada membro dessa desigualdade por n(*E*), temos:

$$\frac{0}{n(E)} \leqslant \frac{n(A)}{n(E)} \leqslant \frac{n(E)}{n(E)} \Rightarrow 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

P4. Como $A \cup \bar{A} = E$ e $A \cap \bar{A} = \varnothing$, temos, pelo princípio aditivo da contagem:

$$n(A \cup \bar{A}) = n(A) + n(\bar{A}) - n(A \cap \bar{A}) \Rightarrow n(E) = n(A) + n(\bar{A})$$

Dividindo por n(E) ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$\frac{n(E)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\bar{A})}{n(E)} \Rightarrow 1 = P(A) + P(\bar{A})$$

Logo, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ e $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7 Dois dados são lançados sobre uma mesa. Calcular a probabilidade de que, nas faces voltadas para cima, a soma dos pontos seja:

a) maior que 12.
b) menor que 13.

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:

$$E = \left\{\begin{matrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \cdots & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \cdots & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \cdots & (3, 6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & \cdots & (6, 6) \end{matrix}\right\}$$

a) O evento considerado é $A = \{(x, y) \in E \mid x + y > 12\}$, que é um **evento impossível** ($A = \varnothing$), pois a soma dos números de pontos nas faces superiores dos dois dados nunca será maior que 12.
Portanto: $P(A) = 0$

b) O evento considerado é $B = \{(x, y) \in E \mid x + y < 13\}$, que é um **evento certo** ($B = E$), pois a soma dos números de pontos nas faces superiores dos dois dados é sempre menor que 13.
Portanto: $P(B) = 1$

8 Em uma reunião com n professores, um deles será escolhido, ao acaso, para coordenar os trabalhos ali desenvolvidos.

Se a probabilidade de o escolhido ser professor de Matemática é $\frac{n - 5}{9}$, calcular o número máximo de participantes que pode haver nessa reunião.

Resolução

Seja o espaço amostral:
$E = \{x \mid x$ é um professor participante da reunião$\}$
e o evento:
$A = \{y \in E \mid y$ é professor de Matemática$\}$.

É dado que: $P(A) = \frac{n - 5}{9}$

Sabemos, pela propriedade P3, que $0 \leq P(A) \leq 1$
Assim, temos:

$$0 \leq \frac{n - 5}{9} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq n - 5 \leq 9$$

Portanto: $5 \leq n \leq 14$
Logo, o número de participantes dessa reunião é, no máximo, 14.

9 Uma urna contém bolas coloridas. Retirando-se uma bola dessa urna, a probabilidade de se obter uma bola vermelha é 0,64. Qual é a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha?

Resolução

Indicando por A o evento formado pelas bolas vermelhas, o complementar de A é o evento $\bar{A}$ formado pelas bolas não vermelhas. Sabemos que:
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$
Logo:
$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$
Portanto, a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha é 0,36.

10 Uma urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis. Retirando-se ao acaso uma bola da urna, a probabilidade de sair uma bola azul é o quádruplo da probabilidade de sair uma bola branca. Qual é a probabilidade de sair uma bola branca?

Resolução

Sendo os eventos $A = \{x \mid x$ é bola azul da urna$\}$ e $B = \{y \mid y$ é bola branca da urna$\}$, temos: $P(A) = 4P(B)$
Como a urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis, concluímos que A e B são eventos complementares e, portanto, $P(A) + P(B) = 1$.
Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} P(A) = 4 \cdot P(B) & \text{(I)} \\ P(A) + P(B) = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:
$4P(B) + P(B) = 1 \Rightarrow 5P(B) = 1$

$\therefore P(B) = \frac{1}{5}$

Logo, a probabilidade de sair uma bola branca é $\frac{1}{5}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16 Um experimento aleatório tem espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio. Classifique cada uma das afirmações a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) Se um evento A desse espaço amostral é tal que $P(A) = 1$, então $A = E$.

b) Se um evento A desse espaço amostral é tal que $P(A) = 0$, então $A = \varnothing$.

c) Se um evento A desse espaço amostral é tal que $P(A) = \dfrac{n+3}{6}$, então n pode assumir o valor 4.

d) Se A e $\overline{A}$ são eventos complementares de E, com $P(A) = 0{,}8$, então $P(\overline{A}) = 0{,}1$.

17 Um experimento aleatório tem espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio. Se um evento A desse espaço amostral é tal que $P(A) = \dfrac{n-5}{8}$, então:

a) $5 \leqslant n \leqslant 13$
b) $5 < n < 13$
c) $n = 13$
d) $n = 5$
e) $n = 0$

18 Uma urna contém exatamente 6 etiquetas, numeradas de 1 a 6. Ao retirar uma etiqueta dessa urna, qual é a probabilidade de obter:

a) um número que seja múltiplo de 5 e de 3 ao mesmo tempo?

b) um número que seja divisor de 720?

19 Em um programa de auditório, o apresentador explica a um participante que três etiquetas, numeradas de 1 a 3, foram distribuídas em três envelopes, sendo que cada envelope contém uma única etiqueta e está lacrado. O participante deve colocar os envelopes sobre uma mesa, tentando formar, da esquerda para a direita, a sequência crescente: 1, 2 e 3.

a) Calcule a probabilidade de que os três envelopes sejam colocados nas posições corretas, isto é, o primeiro da esquerda com o número 1, o segundo com o número 2 e o terceiro com o número 3.

b) Calcule a probabilidade de que sejam colocados apenas dois envelopes nas posições corretas.

20 Sorteando uma das n pessoas de uma sala, a probabilidade de que essa pessoa seja mulher é $\dfrac{n-8}{20}$.
Qual é o maior número possível de pessoas que podem estar nessa sala?

21 Ao atirar num alvo, a probabilidade de uma pessoa acertá-lo é $\dfrac{3}{5}$. Qual é a probabilidade de ela errar?

22 A probabilidade de um piloto vencer uma corrida é o triplo da probabilidade de perder. Qual é a probabilidade de que esse piloto vença a corrida, se não pode haver empate?

23 Em uma eleição em que não pode haver empate, a probabilidade de um candidato vencer é $\dfrac{x+3}{4}$ e a de perder é $\dfrac{x}{6}$.
Essa informação permite concluir que a probabilidade de esse candidato vencer a eleição é:

a) 20% **b)** 50% **c)** 10% **d)** 15% **e)** 90%

24 De uma urna que contém 9 bolas, numeradas de 1 a 9, são sorteadas 3, uma de cada vez, repondo-se na urna cada bola retirada. Considera-se como resultado desse experimento a sequência dos três números obtidos nas bolas das 1ª, 2ª e 3ª retiradas, respectivamente. Por exemplo, o terno abaixo é um resultado possível desse experimento:

$$(\underbrace{\ 6\ }_{1^{\text{a}}\text{ bola}}, \underbrace{\ 5\ }_{2^{\text{a}}\text{ bola}}, \underbrace{\ 4\ }_{3^{\text{a}}\text{ bola}})$$

a) Calcule o número de elementos do espaço amostral E desse experimento.

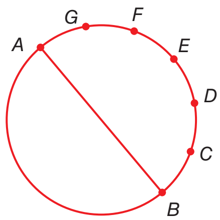
b) Dê um exemplo de um resultado desse experimento em que o produto dos três números seja ímpar.

c) Quantos ternos ordenados do espaço amostral E satisfazem a condição do item **b**?

d) Qual é a probabilidade de obter, nesse experimento, um terno ordenado em que o produto dos três números é ímpar?

e) Qual é a probabilidade de obter, nesse experimento, um terno ordenado em que o produto dos três números é par?

25 O segmento $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência abaixo. Sorteando um triângulo com vértices em três dos pontos, A, B, C, D, E, F e G, calcule a probabilidade de que esse triângulo não seja retângulo.



26 Dois lados de um octógono regular são selecionados aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que esses lados não sejam paralelos?

Resolva os exercícios complementares 32 a 44.

Adição de probabilidades

Objetivos

- **Identificar** o conectivo "ou" com a união de eventos.
- **Calcular** a probabilidade da união de eventos.
- **Aplicar** o teorema da adição de probabilidades.

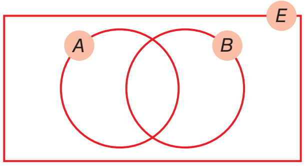
Termo e conceito

- **eventos mutuamente exclusivos**

Desde o início deste capítulo, observamos que alguns conceitos estudados na teoria dos conjuntos têm aplicações importantes na teoria das probabilidades. Neste tópico, veremos mais uma dessas aplicações, que facilita significativamente a resolução de certos problemas de probabilidade. Nesta introdução, vamos resolver o problema a seguir.

Entre os 800 candidatos que participam de um concurso, precisamente: 380 falam inglês, 260 falam francês e 140 falam inglês e francês. Escolhendo ao acaso um dos candidatos que participam desse concurso, qual é a probabilidade de ele falar inglês ou francês?

Para calcular a probabilidade pedida, vamos indicar por E o conjunto dos candidatos que prestam o concurso, por A o conjunto dos candidatos que falam inglês e por B o conjunto dos candidatos que falam francês.



Note que o conjunto dos candidatos que falam inglês **ou** francês é $A \cup B$ e que o conjunto dos candidatos que falam inglês **e** francês é $A \cap B$.

Da teoria dos conjuntos, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Portanto: $n(A \cup B) = 380 + 260 - 140 \Rightarrow n(A \cup B) = 500$

Assim, concluímos que a probabilidade de que o candidato escolhido fale inglês **ou** francês é:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{500}{800} = \frac{5}{8}$$

Teorema da adição de probabilidades

Resolvendo genericamente o problema anterior, obtemos um importante resultado da teoria das probabilidades. Acompanhe.

Sendo A e B dois eventos de um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

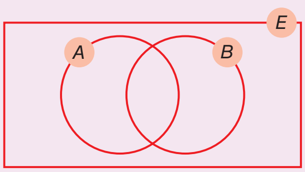
Dividindo por $n(E)$ essa identidade, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Podemos agora enunciar o resultado a seguir, conhecido como **teorema da adição de probabilidades**.

Sendo A e B eventos de um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, temos:

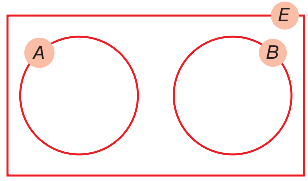
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Esse teorema é aplicado quando queremos calcular a probabilidade de ocorrer um evento A **ou** um evento B, pois o conectivo "ou" indica a união dos dois eventos.

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos, A e B, são mutuamente exclusivos se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$.



Nesse caso, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\varnothing)$, e portanto: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Assim:

> Se dois eventos, A e B, são mutuamente exclusivos, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11 Uma urna contém 50 fichas, numeradas de 1 a 50. Sorteando uma ficha dessa urna, qual é a probabilidade de obter um número menor que 20 ou um múltiplo de 5?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:

$E = \{1, 2, 3, 4, ..., 50\}$, sendo $n(E) = 50$

Vamos considerar dois eventos: um deles caracterizado pela propriedade anterior ao conectivo "ou", e o outro caracterizado pela propriedade posterior ao conectivo "ou" do enunciado, isto é:

- $A = \{x \in E \mid x < 20\} = \{1, 2, 3, 4, ..., 19\}$, com $n(E) = 19$
- $B = \{y \in E \mid y \text{ é múltiplo de } 5\} =$
  $= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$,
  com $n(B) = 10$

Queremos calcular a probabilidade de ocorrer algum elemento de $A \cup B$, ou seja, $P(A \cup B)$.

Para isso, necessitamos de $A \cap B$:

$A \cap B = \{5, 10, 15\}$, com $n(A \cap B) = 3$

Concluindo:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{19}{50} + \frac{10}{50} - \frac{3}{50}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{26}{50} = 52\%$$

Logo, a probabilidade de obter um número menor que 20 ou um múltiplo de 5 é 52%.

12 Uma pesquisa foi realizada em um aeroporto com 80 mulheres e 60 homens que iriam embarcar em um dos voos.

Constatou-se que 30 mulheres e 20 homens iriam viajar de avião pela primeira vez, e que os demais já haviam voado antes.

Escolhendo um desses passageiros ao acaso, qual é a probabilidade de obter uma mulher ou um passageiro que vai voar pela primeira vez?

Resolução

Quando há o cruzamento de várias informações, uma forma eficiente de organizá-las é por meio de uma tabela:

	Mulheres	Homens
Passageiros que vão viajar de avião pela primeira vez	30	20
Passageiros que já voaram antes	50	40

Sendo A o conjunto das mulheres e B o conjunto dos passageiros que vão viajar pela primeira vez, temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{80}{140} + \frac{50}{140} - \frac{30}{140}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{100}{140} = \frac{5}{7}$$

Logo, a probabilidade de obter uma mulher ou um passageiro que vai voar pela primeira vez é $\frac{5}{7}$.

13 No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos das faces voltadas para cima seja maior que 9 ou menor que 6?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:

$$E = \left\{ \begin{matrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \dots & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \dots & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \dots & (3, 6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & \dots & (6, 6) \end{matrix} \right\},$$

em que $n(E) = 36$

Sendo A o evento determinado pela condição anterior ao conectivo "ou" e B o evento determinado pela condição posterior a esse conectivo, temos:

$A = \{(x, y) \in E \mid x + y > 9\} =$

$= \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$,

com $n(A) = 6$

$B = \{(x, y) \in E \mid x + y < 6\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$, com $n(B) = 10$

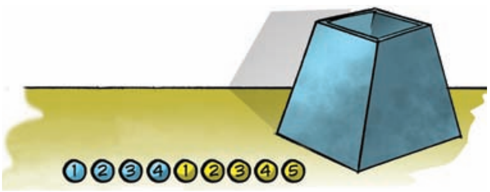
Observando que A e B são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, portanto:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27 Em uma urna serão colocadas 4 bolas azuis, numeradas de 1 a 4, e 5 bolas amarelas, numeradas de 1 a 5.
Sorteando uma bola dessa urna, qual é a probabilidade de ela ser azul ou ter número ímpar? (Resolva esse problema de dois modos diferentes: primeiro aplicando o teorema da adição de probabilidades; depois aplicando apenas a definição de probabilidade.)



28 Na lista de chamada de uma classe, os alunos são numerados de 1 a 30. Para uma chamada oral, o professor sorteou um desses números. Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja par ou múltiplo de 6?

29 Um colecionador possui em sua videoteca filmes europeus e norte-americanos. Os filmes europeus se distribuem em 10 policiais, 20 romances e 40 comédias; e os norte-americanos se distribuem em 50 policiais, 48 romances e 32 comédias. Uma pessoa escolheu, aleatoriamente, um desses filmes para assistir. Calcule a probabilidade de o escolhido ser um filme policial ou um filme europeu.

30 Uma loja vende apenas duas marcas de pneus, A e B. Da marca A, a loja tem em estoque 320 pneus de aro 13; 310 de aro 14; 300 de aro 15 e 270 de aro 16. Da marca B, tem 300 de aro 13; 300 de aro 14; 310 de aro 15 e 290 de aro 16. Sabendo ser igual a probabilidade de venda para todos os tipos de pneu, qual é a probabilidade de o próximo pneu a ser vendido ser da marca B ou ter aro 13?

a) $\frac{15}{37}$ b) $\frac{15}{31}$ c) $\frac{17}{28}$ d) $\frac{16}{35}$ e) $\frac{19}{30}$

31 Um cliente escolheu, ao acaso, um apartamento para visitar entre os apartamentos disponíveis para venda em uma imobiliária. A probabilidade de que o apartamento escolhido seja da zona sul é $\frac{1}{2}$, a probabilidade de que tenha mais de uma vaga de garagem é $\frac{2}{3}$, e a probabilidade de que seja da zona sul e tenha mais de uma vaga de garagem é $\frac{5}{12}$. Calcule a probabilidade de esse apartamento ser da zona sul ou ter mais de uma vaga de garagem.

32 Uma consumidora pegou, ao acaso, um tubo de creme dental na gôndola de um supermercado. A probabilidade de esse tubo conter 90 g de creme é $\frac{2}{5}$, e a probabilidade de conter creme com própolis é $\frac{1}{3}$. Sabendo que a probabilidade de esse tubo conter 90 g de creme ou conter creme com própolis é $\frac{3}{5}$, calcule a probabilidade de ele conter 90 g de creme com própolis.

Resolva os exercícios complementares 1 e 45 a 57.

Probabilidade condicional

Objetivos

- **Calcular** probabilidades condicionais.
- **Reconhecer** eventos independentes.

Termo e conceito

- **eventos independentes**

A situação a seguir ajuda a compreender o conceito de **probabilidade condicional** que, como o nome sugere, é a probabilidade de ocorrer um evento condicionado à ocorrência de outro evento.

Em um grupo de consórcio, cada um dos 10 consorciados recebeu uma ficha com um dos números inteiros de 1 a 10. Será contemplado aquele que possuir a ficha com o mesmo número da bolinha sorteada entre 10 bolinhas numeradas de 1 a 10.

No momento do sorteio, a representante do consórcio declarou, após sortear a bolinha, que o número sorteado era par.

Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja maior que 4?

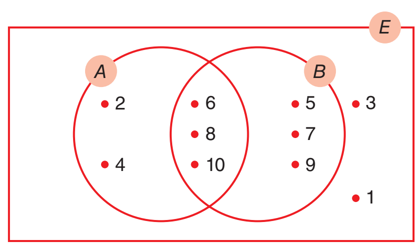
Para responder à questão, vamos observar que, antes do sorteio da bolinha, todos os consorciados tinham esperança de ser contemplados, pois o espaço amostral era:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Porém, quando a representante afirmou que o número sorteado era par, o espaço amostral ficou reduzido a:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Vamos esquematizar a situação no diagrama a seguir, em que B é o evento formado pelos números maiores que 4 do espaço amostral E.



A garantia de que o número sorteado é par **reduz** o espaço amostral ao evento A; logo, um elemento de B (um número maior que 4) só pode ocorrer na intersecção de A e B. Assim, a probabilidade P de ocorrer B, dado que já ocorreu A, é:

$$P = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{5}$$

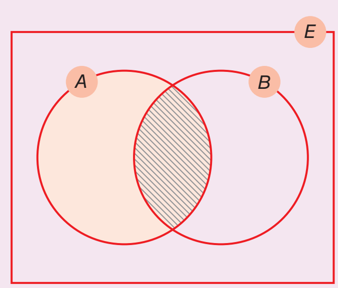
Generalizando o raciocínio aplicado nessa situação, obtemos o resultado abaixo.

Considere um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, A um evento não vazio de E e B um evento de E.

A probabilidade de ocorrer o evento B, dado que ocorreu o evento A, é calculada por:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Indicamos essa **probabilidade condicional** por $P(B/A)$, que lemos "probabilidade de B dado A".



Dividindo por n(E) o numerador e o denominador da fração anterior, obtemos:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \Leftrightarrow P(B/A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\frac{n(A)}{n(E)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Assim, temos duas igualdades equivalentes:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}} \qquad \boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Podemos usar qualquer uma dessas duas fórmulas para o cálculo de $P(B/A)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 No lançamento de um dado, sabe-se que ocorreu um número de pontos menor que 5 na face voltada para cima.
Qual é a probabilidade de que esse número de pontos seja maior que 2?

Resolução

Vamos resolver essa questão de três modos diferentes.

1º modo

No lançamento de um dado, o espaço amostral é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

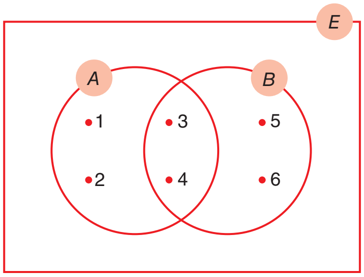
Sabemos, porém, que nesse caso ocorreu um número menor que 5 e, portanto, o espaço amostral se reduz a $A = \{1, 2, 3, 4\}$, em que $n(A) = 4$. Observando que, no espaço amostral reduzido A, existem dois números maiores que 2, que são 3 e 4, concluímos que a probabilidade P solicitada no enunciado é:

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2º modo

Vamos esquematizar a situação pelo diagrama a seguir, em que:

- E é o espaço amostral do experimento "lançamento do dado";
- A é o evento de E cujos elementos são os números menores que 5;
- B é o evento de E cujos elementos são maiores que 2.



Sabemos que ocorreu o evento A; logo, o espaço amostral fica reduzido a esse evento, ou seja, o evento B somente poderá ocorrer na intersecção de A e B.

Assim, temos:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3º modo

Aproveitando o esquema apresentado no 2º modo, temos:

- a probabilidade de ocorrer um número menor que 5 é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- a probabilidade de ocorrer um número maior que 2 e menor que 5 é:

$$P(B \cap A) = \frac{n(A \cap B)}{n(E)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Logo, a probabilidade de ocorrer o evento B dado que ocorreu o evento A é:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

15 Em uma sala estão reunidos 20 homens e 20 mulheres.
Entre os homens, 3 são administradores, 8 são engenheiros e os demais, economistas.
Entre as mulheres, 7 são administradoras, 8 economistas e as demais, engenheiras.
Um desses profissionais foi escolhido ao acaso para ler a pauta da reunião.
Sabendo que a pessoa escolhida foi uma mulher, qual é a probabilidade de que ela seja economista?

Resolução

Primeiro, registramos e organizamos todas as informações fornecidas pelo enunciado em uma tabela:

	Homens	Mulheres
Administradores	3	7
Engenheiros	8	5
Economistas	9	8

Depois, destacamos:

- $E = \{x \mid x$ participa da reunião$\}$
- $A = \{y \in E \mid y$ é mulher$\}$, $n(A) = 20$
- $B = \{z \in E \mid z$ é economista$\}$, $n(B) = 17$
- $A \cap B = \{w \in E \mid w$ é mulher e economista$\}$, $n(A \cap B) = 8$

Finalmente, concluímos:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Ou seja, a probabilidade de que a pessoa escolhida seja economista, sabendo-se que ela é mulher, é $\frac{2}{5}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

33 Dois eventos, A e B, de um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, são tais que $n(A \cap B) = 30$ e $n(A) = 120$. Calcule $P(B/A)$.

34 Dois eventos, A e B, de um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, são tais que $P(A \cap B) = \frac{5}{8}$ e $P(A) = \frac{3}{4}$. Calcule $P(B/A)$.

35 No lançamento de dois dados, sabe-se que foi obtida, nas faces voltadas para cima, a soma de pontos igual a 6.
Qual é a probabilidade de que essas faces apresentem o mesmo número de pontos?

36 Um número foi sorteado entre os múltiplos positivos de 5 menores que 52.
Sabendo que o número sorteado é ímpar, calcule a probabilidade de que ele seja:

a) o número 25.
b) maior que 17.
c) múltiplo de 3.

37 Duas equipes de voleibol foram formadas: a equipe azul, cujas camisas são numeradas de 1 a 6, e a equipe vermelha, cujas camisas também são numeradas de 1 a 6. Entre essas 12 camisas, sorteou-se uma, e observou-se que seu número é par.
Qual é a probabilidade de que a camisa sorteada pertença à equipe azul?

38 Em um teatro, as cadeiras são numeradas de 1 a 300. O primeiro espectador a comprar ingresso não fez nenhuma exigência quanto ao número da cadeira; então a bilheteira vendeu-lhe um ingresso com um número de cadeira escolhido ao acaso. Sabendo que esse número é menor que 100, calcule a probabilidade de que ele esteja entre 20 e 40.
(*Nota*: Na linguagem matemática, dizer que um número está entre 20 e 40 equivale a dizer que esse número é maior que 20 e menor que 40.)

39 O departamento responsável pelo controle de qualidade de uma indústria de televisores examinou 200 televisores que permaneceram ligados durante certo período de tempo, observando que: 98 aparelhos apresentaram problemas de som, 70 aparelhos apresentaram problemas de imagem, e 62 aparelhos não apresentaram nenhum tipo de problema. Um desses 200 aparelhos foi escolhido ao acaso, e constatou-se que ele apresentava problemas de imagem.
Qual é a probabilidade de que esse aparelho também apresente problemas de som?

40 Antes do lançamento de um novo produto no mercado, o fabricante encomendou uma pesquisa sobre a aceitação de dois produtos concorrentes, A e B, já existentes no mercado.
Quatrocentas pessoas responderam à pesquisa, das quais:

- 300 já consumiram o produto A;
- 275 já consumiram o produto B;
- 37 não consumiram A nem B.

Uma dessas pessoas foi escolhida aleatoriamente, e constatou-se que ela já consumiu o produto A. Qual é a probabilidade de que essa pessoa já tenha consumido também o produto B?

41 As senhas eletrônicas dos clientes de um banco são sequências formadas por 4 algarismos seguidos por 3 letras, escolhidos dentre as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos do sistema de numeração decimal. Qual é a probabilidade de um cliente desse banco digitar corretamente sua senha, sabendo que ele se lembra apenas da sequência dos três primeiros algarismos?

Resolva os exercícios complementares 2 e 58 a 66.

Eventos independentes

Em dois lançamentos consecutivos de uma moeda, consideramos como resultado o par de faces voltadas para cima.

Vamos calcular a probabilidade de ocorrer a face cara no segundo lançamento:

a) sabendo que ocorreu a face cara no primeiro lançamento;

b) sabendo que ocorreu a face coroa no primeiro lançamento.

Indicando as faces cara e coroa por C e K, respectivamente, consideraremos:

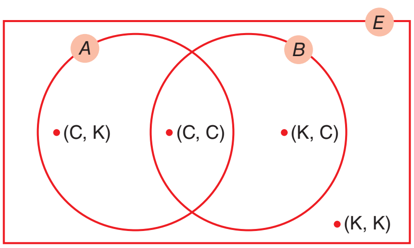
- o espaço amostral desse experimento como $E = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$, em que $n(E) = 4$;
- o evento cujos resultados apresentam cara no segundo lançamento $B = \{(C, C), (K, C)\}$, em que $n(B) = 2$.

Antes de iniciar a resolução dos dois itens, é importante observar que:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{(I)}$$

Vamos, então, à resolução dos dois itens:

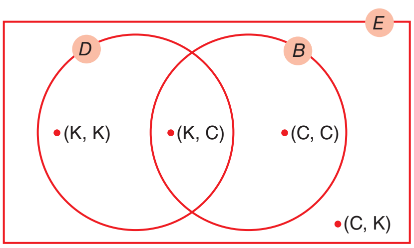
a) Considerando o evento $A = \{(C, C), (C, K)\}$ dos resultados que apresentam cara no primeiro lançamento, esquematizamos a situação com o diagrama abaixo.



Assim, temos:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{2} \quad \text{(II)}$$

b) Considerando o evento $D = \{(K, K), (K, C)\}$ dos resultados que apresentam coroa no primeiro lançamento, esquematizamos a situação com o diagrama abaixo.



Assim, temos:

$$P(B/D) = \frac{n(D \cap B)}{n(D)} = \frac{1}{2} \quad \text{(III)}$$

Comparando (I), (II) e (III), concluímos, nesse caso que:

- $P(B/A) = P(B)$;
- $P(B/D) = P(B)$.

Ou seja, a probabilidade de ocorrer cara no segundo lançamento **não depende** do evento ocorrido no primeiro lançamento.

Por isso dizemos que os eventos A e B são **independentes** e também são independentes os eventos B e D. De modo geral, definimos:

Sejam um espaço amostral E, finito e não vazio, e dois eventos A e B de E. Dizemos que A e B são eventos **independentes** se, e somente se:

$$P(B/A) = P(B) \text{ e } P(A/B) = P(A)$$

Notas:

1. Prova-se que: se $P(B/A) = P(B)$, então $P(A/B) = P(A)$. Assim, basta que se verifique uma dessas igualdades para afirmar que dois eventos A e B são independentes.
2. Dizemos que dois eventos são **dependentes** se a condição $P(B/A) = P(B)$ e $P(A/B) = P(A)$ não for obedecida.
3. Na situação anterior (dois lançamentos de uma moeda), os eventos independentes A e B (ou B e D) têm intersecção não vazia. Logo, dizer que dois eventos são independentes não significa dizer que eles sejam mutuamente exclusivos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 4 azuis. Retira-se uma bola dessa urna, registra-se sua cor e repõe-se a bola na urna. A seguir, misturam-se as bolas e retira-se uma segunda bola, registrando sua cor. Sendo $E = \{(x, y) \mid x \text{ é a primeira bola retirada, e } y \text{ é a segunda}\}$ o espaço amostral desse experimento, mostrar que os eventos A e B, abaixo, são independentes:

$$A = \{(x, y) \in E \mid x \text{ é bola vermelha}\}$$
$$B = \{(x, y) \in E \mid y \text{ é bola vermelha}\}$$

Resolução

Como temos 5 bolas vermelhas e 4 azuis, podemos calcular o número de elementos dos conjuntos E, A, B e $A \cap B$ pelo princípio fundamental da contagem:

- Número de elementos de E

número de possibilidades
$$(\underbrace{1^{\text{a}} \text{ bola}}_{9}, \underbrace{2^{\text{a}} \text{ bola}}_{9}) \Rightarrow n(E) = 9 \cdot 9 = 81$$

- Número de elementos de A

número de possibilidades
$$(\underbrace{1^{\text{a}} \text{ bola}}_{5}, \underbrace{2^{\text{a}} \text{ bola}}_{9}) \Rightarrow n(A) = 5 \cdot 9 = 45$$

- Número de elementos de B

número de possibilidades
$$(\underbrace{1^{\text{a}} \text{ bola}}_{9}, \underbrace{2^{\text{a}} \text{ bola}}_{5}) \Rightarrow n(B) = 9 \cdot 5 = 45$$

- Número de elementos de $A \cap B$ (1^{a} bola vermelha e 2^{a} bola vermelha)

número de possibilidades
$$(\underbrace{1^{\text{a}} \text{ bola}}_{5}, \underbrace{2^{\text{a}} \text{ bola}}_{5}) \Rightarrow n(A \cap B) = 5 \cdot 5 = 25$$

Assim, temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{45}{81} = \frac{5}{9}$$

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

Como $P(B/A) = P(B)$, concluímos que A e B são eventos independentes.

(*Nota*: Poderíamos ter mostrado que $P(A/B) = P(A)$, com o que também concluiríamos que A e B são eventos independentes.)

17 Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 4 azuis. Retira-se uma bola dessa urna, registra-se sua cor e não se repõe a bola na urna. A seguir, retira-se uma segunda bola, registrando sua cor. Sendo $E = \{(x, y) \mid x \text{ é a primeira bola retirada, e } y \text{ é a segunda}\}$ o espaço amostral desse experimento, mostrar que os eventos A e B, abaixo, são dependentes:

$$A = \{(x, y) \in E \mid x \text{ é bola vermelha}\}$$
$$B = \{(x, y) \in E \mid y \text{ é bola vermelha}\}$$

Resolução

Calculando $n(E)$, $n(A)$, $n(B)$ e $n(A \cap B)$, temos:

- Número de elementos de E

número de possibilidades
$$(\underbrace{1^{\text{a}} \text{ bola}}_{9}, \underbrace{2^{\text{a}} \text{ bola}}_{8}) \Rightarrow n(E) = 9 \cdot 8 = 72$$

O número de possibilidades para a segunda bola é 8, pois não houve reposição da primeira bola.

- Número de elementos de A

número de possibilidades
$$(\underbrace{1^{\text{a}} \text{ bola vermelha}}_{5}, \underbrace{2^{\text{a}} \text{ bola qualquer}}_{8})$$

Logo, $n(A) = 5 \cdot 8 = 40$

- Número de elementos de B

$$\underbrace{(1^{\text{a}}\text{ bola vermelha}}_{5},\ \underbrace{2^{\text{a}}\text{ bola vermelha})}_{4}$$

número de possibilidades

ou

$$\underbrace{(1^{\text{a}}\text{ bola azul}}_{4},\ \underbrace{2^{\text{a}}\text{ bola vermelha})}_{5}$$

número de possibilidades

Logo, $n(B) = 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 20 + 20 = 40$

- Número de elementos de $A \cap B$

$$\underbrace{(1^{\text{a}}\text{ bola vermelha}}_{5},\ \underbrace{2^{\text{a}}\text{ bola vermelha})}_{4}$$

número de possibilidades

Logo, $n(A \cap B) = 5 \cdot 4 = 20$

Assim temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

Como $P(B/A) \neq P(B)$, concluímos que A e B são eventos dependentes.

Generalizando as conclusões obtidas nos exercícios resolvidos 16 e 17, deduzimos que:

Sorteando dois ou mais objetos sucessivamente e considerando cada sorteio como um evento, esses eventos serão:

- **independentes** se houver reposição de cada objeto sorteado;
- **dependentes** se não houver reposição de cada objeto sorteado.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

42 Dois eventos independentes, A e B, são tais que $P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(B) = \frac{2}{3}$. Calcule:

a) $P(A/B)$

b) $P(B/A)$

c) $P(A \cap B)$

d) $P(A \cup B)$

43 Um dado é lançado duas vezes, considerando como resultado o par ordenado (x, y), em que x é o número de pontos obtidos na face voltada para cima no primeiro lançamento e y é o número de pontos obtidos na face voltada para cima no segundo lançamento:

a) Calcule o número de elementos do espaço amostral E desse experimento.

b) Determine o evento A formado pelos pares ordenados de E cujo primeiro elemento é 3. Calcule $P(A)$.

c) Determine o evento B formado pelos pares ordenados de E cujo segundo elemento é 2. Calcule $P(B)$.

d) Calcule a probabilidade de obter a face com 2 pontos no segundo lançamento do dado sabendo que no primeiro lançamento obteve-se a face com 3 pontos.

e) Os eventos A e B são independentes? Por quê?

44 Uma urna contém 4 bolas, numeradas de 1 a 4. Um experimento consiste em retirar, sucessivamente e sem reposição, 2 bolas dessa urna, considerando como resultado o par ordenado (x, y), em que x é o número da bola da primeira retirada e y é o número da bola da segunda retirada.

a) Calcule o número de elementos do espaço amostral E desse experimento.

b) Determine o evento A formado pelos pares ordenados de E cujo primeiro elemento é 3. Calcule $P(A)$.

c) Determine o evento B formado pelos pares ordenados de E cujo segundo elemento é 2. Calcule $P(B)$.

d) Calcule a probabilidade de obter o número 2 na segunda bola retirada sabendo que na primeira retirada obteve-se a bola com o número 3.

e) Os eventos A e B são independentes? Por quê?

45 (Fuvest-SP) Considere o experimento que consiste no lançamento de um dado perfeito (todas as seis faces têm probabilidades iguais). Com relação a esse experimento considere os seguintes eventos:

I. O resultado do lançamento é par.

II. O resultado do lançamento é estritamente maior que 4.

III. O resultado é múltiplo de 3.

a) I e II são eventos independentes?

b) II e III são eventos independentes?

Justifique suas respostas.

Resolva os exercícios complementares 3, 4 e 67 a 70.

Multiplicação de probabilidades

Objetivos

- **Identificar** o conectivo "e" com a intersecção de eventos.
- **Calcular** a probabilidade da intersecção de eventos.
- **Aplicar** o teorema da multiplicação de probabilidades.

No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de se obter a face 6 nos dois?

Podemos resolver esse problema pela definição de probabilidade, como é feito a seguir.

O espaço amostral E possui 36 elementos (pares ordenados), e o evento que satisfaz a condição do enunciado é $A = \{(6, 6)\}$ possuindo, portanto, um único elemento.

Assim, concluímos que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{36}$$

Neste item, apresentaremos uma propriedade, conhecida como **teorema da multiplicação de probabilidades**, que permite resolver esse problema de outro modo. Veremos que $P(A)$ pode ser calculada como o produto da probabilidade de ocorrer a face 6 em um dos dados pela probabilidade de ocorrer a face 6 no outro, isto é:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Esse teorema decorre da igualdade $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Observe:

> Seja E um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio. Se A e B são eventos de E, com $A \neq \varnothing$, temos:
>
> $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Essa identidade é conhecida como **teorema da multiplicação de probabilidades** e é aplicada em problemas que pedem a probabilidade de ocorrer um evento A **e** um evento B, pois o conectivo "e" indica a intersecção dos eventos.

Se A e B forem eventos independentes, temos $P(B/A) = P(B)$. Então:

> Dados dois eventos independentes, A e B, temos:
>
> $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

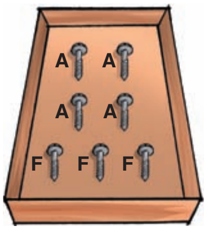
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

18 Uma caixa contém exatamente 7 parafusos: 4 de aço e 3 de ferro.

Retira-se ao acaso um parafuso da caixa, registra-se o metal de que é feito, e repõe-se o parafuso na caixa. A seguir retira-se, novamente ao acaso, outro parafuso da caixa, registrando o metal que o compõe. Calcular a probabilidade de:

a) sair o primeiro parafuso de aço e o segundo de ferro.

b) saírem 2 parafusos de metais diferentes.



Resolução

a) Queremos que o primeiro parafuso seja de aço (A) e o segundo de ferro (F). A probabilidade de o primeiro parafuso ser de aço é $\frac{4}{7}$, e a probabilidade de o segundo ser de ferro é $\frac{3}{7}$ (observe que o número de parafusos da caixa continua o mesmo na segunda retirada, porque houve reposição do primeiro parafuso).
Assim, a probabilidade de obter a sequência

$$\text{A e F é: } P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$$

pelo teorema da multiplicação de probabilidades

b) Interessa qualquer uma das duas sequências possíveis de parafusos de metais diferentes: A e F ou F e A. Temos então:

$$\text{A e F: } P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49} \text{ ou F e A: } P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$$

Como o conectivo "ou" indica a adição das probabilidades, a probabilidade P de saírem parafusos de metais diferentes é dada por:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$$

19 Uma caixa contém exatamente 7 parafusos: 4 de aço e 3 de ferro. Retiram-se ao acaso 2 parafusos dessa caixa, sucessivamente e sem reposição. Calcular a probabilidade de:

a) sair o primeiro parafuso de aço e o segundo de ferro.

b) saírem 2 parafusos de metais diferentes.

Resolução

a) Queremos que o primeiro parafuso seja de aço (A) e o segundo de ferro (F). A probabilidade de o primeiro parafuso ser de aço é $\frac{4}{7}$, e a probabilidade de o segundo ser de ferro é $\frac{3}{6}$ (diminuímos uma unidade no denominador porque não houve reposição do primeiro parafuso retirado).
Assim, a probabilidade de obter a sequência

$$\text{A e F é: } P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

pelo teorema da multiplicação de probabilidades

b) Interessa qualquer uma das duas sequências possíveis de parafusos de metais diferentes: A e F ou F e A. Temos então:

$$\text{A e F: } P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7} \text{ ou F e A: } P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

Como o conectivo "ou" indica a adição das probabilidades, a probabilidade P de saírem parafusos de metais diferentes é dada por:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

20 Uma urna contém exatamente 9 bolas: 5 azuis (A) e 4 vermelhas (V).

a) Retirando *simultaneamente* 3 bolas da urna, qual é a probabilidade de obter 2 bolas azuis e 1 vermelha?

b) Retirando *sucessivamente* e sem reposição 3 bolas da urna, qual é a probabilidade de obter 2 bolas azuis e 1 vermelha?

Resolução

a) Ao retirar as 3 bolas simultaneamente, consideramos como resultado do experimento um conjunto de bolas, e não uma sequência, isto é, não levamos em consideração a ordem das bolas.

Assim, o espaço amostral E do experimento é formado por todos os conjuntos de 3 bolas da urna, que pode ser calculado por:

$$n(E) = C_{9,3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$$

O evento B que interessa é formado por todos os conjuntos possíveis de 3 bolas da urna, sendo 2 azuis e 1 vermelha. O número de elementos de B pode ser calculado por:

$n(B) = C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 10 \cdot 4 = 40$

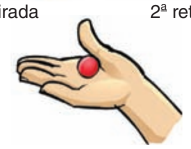
Concluímos que:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

b) Ao retirar as 3 bolas sucessivamente e sem reposição, consideramos como resultado do experimento uma sequência de bolas, e não um conjunto, isto é, levamos em consideração a ordem de retirada das bolas; por exemplo:

1ª retirada

2ª retirada



3ª retirada

Apresentamos a seguir as três sequências possíveis com as respectivas probabilidades, P_1, P_2 e P_3:

$$\text{AAV: } P_1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63}$$

ou

$$\text{AVA: } P_2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63}$$

ou

$$\text{VAA: } P_3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63}$$

Concluímos, então, que a probabilidade P de serem retiradas 2 bolas azuis e 1 vermelha é dada por:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{10}{63} + \frac{10}{63} + \frac{10}{63} = \frac{30}{63} = \frac{10}{21}$$

Propriedade das retiradas simultâneas

Comparando os resultados dos itens **a** e **b** do exercício resolvido 20, constatamos que a probabilidade de retirar simultaneamente as bolas é igual à probabilidade de retirá-las sucessivamente e sem reposição. Esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira:

> Sejam $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ elementos de um conjunto A com n elementos, com $k \leq n$. A probabilidade de se retirarem **simultaneamente** esses k elementos do conjunto A é igual à probabilidade de retirá-los **sucessivamente e sem reposição**.

Sugerimos que todo problema em que for pedida a probabilidade de retiradas simultâneas seja transformado no problema equivalente de retiradas sucessivas sem reposição, tomando-se o cuidado de considerar a ordem dos objetos nas retiradas sucessivas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

21 Uma urna contém exatamente 11 bolas: 6 azuis e 5 vermelhas. Retirando-se simultaneamente 4 bolas, qual é a probabilidade de saírem 3 bolas azuis e 1 vermelha?

Resolução

Em vez de retirar as bolas **simultaneamente**, resolveremos um problema equivalente, retirando as bolas **sucessivamente** e **sem reposição**.

Assim, as sequências que nos interessam, com suas respectivas probabilidades, são:

AAAV: $P_1 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{66}$ ou

AAVA: $P_2 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66}$ ou

AVAA: $P_3 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66}$ ou

VAAA: $P_4 = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66}$

Logo, a probabilidade total é:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{20}{66} = \frac{10}{33}$$

(*Observação*: Podemos calcular apenas P_1 e multiplicá-la por 4, pois todas as sequências têm a mesma probabilidade.)

22 Uma urna contém exatamente 6 bolas, sendo: 2 brancas (B), 2 vermelhas (V) e 2 azuis (A). Retirando simultaneamente 2 bolas da urna, calcular a probabilidade de as bolas retiradas terem a mesma cor.

Resolução

Vamos resolver esse problema de dois modos diferentes, raciocinando como se as retiradas fossem sucessivas e sem reposição.

1º modo

Primeiro fazemos um esquema representando as bolas:

B B V V A A

As três sequências que interessam e suas respectivas probabilidades P_1, P_2 e P_3 são:

BB: $P_1 = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

ou

VV: $P_2 = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

ou

AA: $P_3 = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

Assim, a probabilidade P de saírem duas cores iguais é dada por:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

2º modo

Nessa resolução, vamos raciocinar de uma nova maneira: a probabilidade de a primeira bola retirada ter qualquer uma das cores, branca, vermelha ou azul, é igual a 1; e a probabilidade de a segunda bola ter a mesma cor da primeira bola retirada é $\frac{1}{5}$.

O produto dessas duas probabilidades é a probabilidade P procurada, isto é:

$$P = \underbrace{1}_{\substack{\text{probabilidade} \\ \text{de a 1ª bola} \\ \text{ter qualquer} \\ \text{uma das cores,} \\ \text{B, V ou A}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{\substack{\text{probabilidade} \\ \text{de a 2ª bola} \\ \text{ter a mesma} \\ \text{cor da 1ª}}} = \frac{1}{5}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

46 Uma urna contém precisamente 10 bolas, sendo: 3 verdes, 2 pretas e 5 azuis. Retirando 3 bolas da urna, uma de cada vez e com reposição, calcule a probabilidade de saírem:

a) a primeira bola verde, a segunda preta e a terceira azul.
b) 3 bolas de cores diferentes.
c) 3 bolas azuis.

47 Uma urna contém 10 bolas, sendo precisamente: 3 verdes, 2 pretas e 5 azuis. Retirando 3 bolas da urna, uma de cada vez e sem reposição, calcule a probabilidade de saírem:

a) a primeira bola verde, a segunda preta e a terceira azul.
b) 3 bolas de cores diferentes.
c) 3 bolas azuis.

48 Um estojo contém exatamente 9 canetas esferográficas, sendo: 5 de tinta azul e 4 de tinta vermelha. Retirando aleatoriamente 5 canetas desse estojo, sucessivamente e sem reposição, calcule a probabilidade de sair:

a) 4 de tinta azul e uma de tinta vermelha.
b) 3 de tinta azul e 2 de tinta vermelha.
c) 5 de tinta azul.
d) pelo menos uma de tinta vermelha.

49 Uma moeda é lançada seis vezes sobre uma mesa. Considera-se como resultado do experimento a sequência formada pelas faces da moeda voltadas para cima, cara (C) ou coroa (K), na ordem dos lançamentos. Qual é a probabilidade de ocorrer um resultado com 5 caras e 1 coroa?

50 Uma caixa de joias contém exatamente 5 pérolas falsas e 6 pérolas verdadeiras.
Retirando simultaneamente 4 pérolas dessa urna, calcule a probabilidade de obter:

a) 3 verdadeiras e 1 falsa.
b) todas verdadeiras.
c) pelo menos uma falsa.

51 Em uma caixa de costura, há exatamente 5 botões de quatro furos e 4 botões de dois furos.
Retirando simultaneamente 6 botões dessa caixa, qual é a probabilidade de saírem 5 botões de quatro furos e 1 de dois furos?

52 Um mágico colocou em sua cartola 4 cartas de copas, 3 de paus e 2 de espadas.
A seguir, pediu a uma criança que retirasse simultaneamente 3 cartas da cartola. Calcule a probabilidade de a criança ter retirado:

a) 3 cartas de copas.
b) 2 cartas de copas e 1 de paus.
c) 3 cartas de naipes diferentes.

53 Sorteando 2 alunos entre 6 rapazes e 6 garotas de uma sala de aula, calcule a probabilidade de serem sorteados:

a) 2 rapazes.
b) um rapaz e uma garota.
c) Ana e Rui, sabendo que estão participando do sorteio.

54 Sorteando dois vértices distintos de um cubo, qual é a probabilidade de que ambos pertençam a uma mesma face do cubo?

55 Sob certas condições climáticas e de solo, a probabilidade de uma semente germinar é de 60%. Nessas condições, plantando 3 dessas sementes, a probabilidade de que nasça uma planta é:

a) 86,8%
b) 100%
c) 98,8%
d) 93,6%
e) 84,4%

56 A eficácia de um remédio A na cura de uma doença é de 90%, isto é, a probabilidade de um doente curar-se com esse medicamento é 90%. João e Pedro apresentaram essa doença, por isso seu médico receitou-lhes o remédio A. Calcule a probabilidade de:

a) os dois serem curados pelo medicamento.
b) nenhum deles ser curado pelo medicamento.
c) apenas João ser curado pelo medicamento.
d) apenas um deles ser curado pelo medicamento.

Resolva os exercícios complementares 71 a 93.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 (Cesgranrio-RJ) Dois eventos, A e B, são mutuamente exclusivos. Se $P(A \cup B) = 1$ e $P(A) = 3P(B)$, então:

a) $P(B) = 0{,}25$
b) $P(B) = 0{,}33$
c) $P(A) = 0{,}8$
d) $P(B) = 0{,}4$
e) $P(A) = 0{,}45$

2 Dois eventos, A e B, de um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, são tais que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{ e } P(B/A) = \frac{4}{n-2}$$

a) Qual é o maior valor possível do número natural n?
b) Qual é o menor valor possível do número natural n?

3 Dois eventos independentes, A e B, são tais que $P(A) = \frac{3}{8}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Calcule:

a) $P(B)$

b) $P(A \cup B)$

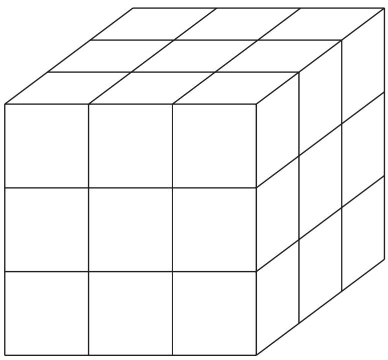
4 Dois eventos, A e B, de um espaço amostral E, finito e não vazio, são tais que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = x$ e $P(A \cup B) = 0{,}7$.

a) Determine o valor de x considerando que A e B sejam mutuamente exclusivos.

b) Determine o valor de x considerando que A e B sejam independentes.

Exercícios contextualizados

5 Colocando-se face a face 27 cubinhos brancos de mesmo tamanho, forma-se o cubo representado na figura abaixo, cujas seis faces serão pintadas de azul.



Depois da pintura, deixa-se a tinta secar e separam-se os 27 cubinhos. Sorteando um desses cubinhos ao acaso, qual é a probabilidade de obter um cubinho com:

a) exatamente uma face pintada de azul?

b) exatamente duas faces pintadas de azul?

c) nenhuma face pintada de azul?

6 Um dado é lançado três vezes consecutivas sobre um tabuleiro. Qual é a probabilidade de que o produto dos números de pontos apresentados na face superior seja ímpar?

7 (UFPE) Uma urna contém 12 bolas verdes e 8 bolas amarelas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas na urna de modo que a probabilidade de retirarmos dela, aleatoriamente, uma bola azul seja $\frac{2}{3}$?

a) 5

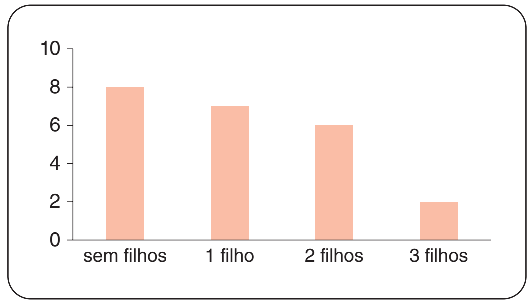
b) 10

c) 20

d) 30

e) 40

8 (Enem) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o ensino médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:

a) $\frac{1}{3}$

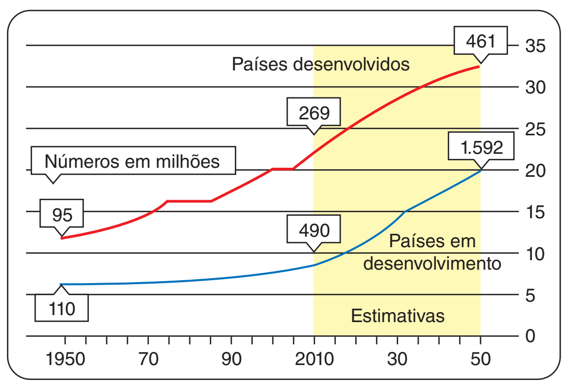
b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{7}{15}$

d) $\frac{7}{23}$

e) $\frac{7}{25}$

9 (Enem) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950, havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: Perspectiva da População Mundial. *ONU*, 2009. Disponível em: <http://www.economist.com>. Acesso em: 9 jul. 2009. (Adaptado.)

Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{20}$

c) $\frac{8}{25}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{3}{25}$

10 Em uma caixa há apenas peras e maçãs, num total de 40 frutas, sendo que há 6 maçãs a mais do que peras. Retirando aleatoriamente uma fruta dessa caixa, qual é a probabilidade de obter uma pera?

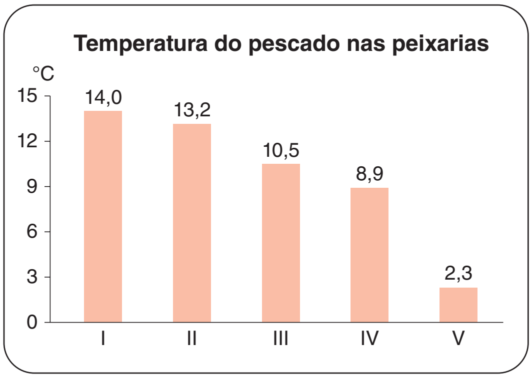
11 (Enem) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela abaixo apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

Pacientes	Problemas respiratórios causados pelas queimadas	Problemas respiratórios resultantes de outras causas	Outras doenças	Total
Idosos	50	150	60	260
Crianças	150	210	90	450

Escolhendo aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a:

a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.
b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.
c) 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.
d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.
e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

12 (Enem)



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (com adaptações).

Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico anterior apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 °C e 4 °C.
Selecionando aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{6}$

13 (Enem) Num determinado bairro, há duas empresas de ônibus, Andabem e Bompasseio, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela.

Horário dos ônibus	
Andabem	Bompasseio
...	...
6 h 00 min	6 h 10 min
6 h 30 min	6 h 40 min
7 h 00 min	7 h 10 min
7 h 30 min	7 h 40 min
...	...

Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho nem preferência por nenhuma das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal. Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa Andabem é:

a) um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
b) um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
c) metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
d) o dobro da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
e) o triplo da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.

14 (UEL-PR) Um recipiente contém bolas numeradas de 1 a 50. Supondo que cada bola tenha a mesma probabilidade de ser escolhida, então a probabilidade de que uma bola sorteada tenha número múltiplo de 3 e de 4, simultaneamente, é de:

a) 8% b) 10% c) 15% d) 28% e) 36%

15 (Fuvest-SP) Dois dados cúbicos, não viciados, com faces numeradas de 1 a 6, serão lançados simultaneamente. A probabilidade de que sejam sorteados dois números consecutivos, cuja soma seja um número primo, é de:

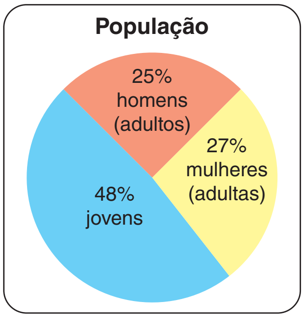
a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{2}{3}$

16 Uma pesquisa realizada com 80 clientes de uma loja revelou que 60 deles têm rendimento mensal superior a R$ 2.000,00 e 50 têm rendimento mensal inferior a R$ 2.800,00. Sorteando um desses clientes, qual é a probabilidade de ele ter rendimento mensal superior a R$ 2.000,00 e inferior a R$ 2.800,00?

17 (Vunesp) Em um colégio, foi realizada uma pesquisa sobre as atividades extracurriculares dos alunos. Dos 500 alunos entrevistados, 240 praticavam um tipo de esporte, 180 frequentavam um curso de idiomas e 120 realizavam as duas atividades, ou seja, praticavam um tipo de esporte e frequentavam um curso de idiomas. Se, nesse grupo de 500 estudantes, um é escolhido ao acaso, a probabilidade de que ele realize pelo menos uma dessas duas atividades é:

a) $\frac{18}{25}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{12}{25}$ d) $\frac{6}{25}$ e) $\frac{2}{5}$

18 (Fuvest-SP) Um recenseamento revelou as seguintes características sobre a idade e a escolaridade da população de uma cidade:



Escolaridade	Jovens	Mulheres	Homens
Fundamental incompleto	30%	15%	18%
Fundamental completo	20%	30%	28%
Médio incompleto	26%	20%	16%
Médio completo	18%	28%	28%
Superior incompleto	4%	4%	5%
Superior completo	2%	3%	5%

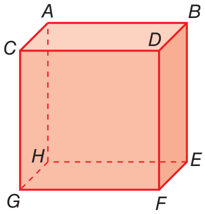
Se for sorteada ao acaso uma pessoa da cidade, a probabilidade de ela ter curso superior (completo ou incompleto) é:

a) 6,12% c) 8,45% e) 10,23%
b) 7,27% d) 9,57%

19 Uma pessoa faz caminhadas três vezes por semana, em dias escolhidos aleatoriamente de 2ª-feira a domingo. Qual é a probabilidade de, na próxima semana:

a) ela caminhar na 2ª, na 5ª e no domingo?
b) ela caminhar em três dias consecutivos?

20 Considere todas as retas determinadas pelos oito vértices do cubo representado abaixo. Sorteando uma dessas retas, qual é a probabilidade de ela passar pelo vértice *A*?



21 Em um jogo, o apostador assinala um mínimo de 6 e um máximo de 15 números em um cartão com 48 números. Entre esses 48 números, serão sorteados 6.

a) Calcule o número total de maneiras diferentes de preencher um cartão com a aposta mínima.
b) Qual é a probabilidade de serem sorteados os números de um cartão com a aposta mínima?

22 Uma comissão de 4 pessoas será escolhida, aleatoriamente, entre 4 homens e 3 mulheres.

a) Cada elemento do espaço amostral desse experimento é uma comissão de 4 pessoas. Aplicando os conceitos estudados em Análise combinatória, calcule o número de elementos desse espaço amostral.
b) Calcule a probabilidade de escolher uma comissão formada por 2 homens e 2 mulheres.

23 Uma equipe de educadores será formada por 5 pessoas escolhidas entre 4 pedagogos e 5 professores. Se as pessoas forem escolhidas aleatoriamente, qual é a probabilidade de ser escolhida uma equipe com 3 professores e 2 pedagogos?

24 Dois candidatos, X e Y, concorrem a uma vaga para a diretoria de uma empresa. Para a escolha, foi feita uma eleição, na qual votaram apenas os três atuais diretores. Como os dois candidatos eram igualmente capazes, cada um dos três eleitores votou aleatoriamente em um único candidato. A probabilidade de X ser eleito com três votos é:

a) 12,5% c) 30% e) 15,6%
b) 25% d) 18,5%

25 (FGV) Em uma sala existem 6 casais (marido e mulher). Entre essas 12 pessoas, 2 são selecionadas ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de selecionar um homem e sua esposa?
b) Qual é a probabilidade de selecionar dois homens?

26 (UFMG) Em uma mesa, estão espalhados 50 pares de cartas. As duas cartas de cada par são iguais, e cartas de pares distintos são diferentes. Suponha que duas dessas cartas são retiradas da mesa ao acaso. Então, é correto afirmar que a probabilidade de essas duas cartas serem iguais é:

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{1}{99}$ c) $\frac{1}{50}$ d) $\frac{1}{49}$

27 (Vunesp) Escolhem-se aleatoriamente três dos seis vértices de um hexágono regular. Qual é a probabilidade de que os vértices escolhidos determinem um triângulo equilátero?

28 (UFMG) Vinte alunos de uma escola, entre os quais Gabriel, Mateus e Roger, formam uma fila aleatoriamente.

a) Determine a probabilidade de essa fila ser formada de tal modo que Gabriel, Mateus e Roger apareçam juntos, em qualquer ordem.
b) Determine a probabilidade de essa fila ser formada de tal modo que, entre Gabriel e Mateus, haja exatamente cinco outros alunos.

29 (UFMA) Uma urna contém *K* bolas, numeradas de 1 a K. A média aritmética calculada com os números dessas bolas é 139. Se extrairmos dessa urna uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de seu número ser um múltiplo de 7?

30 (Fuvest-SP) Um apreciador deseja adquirir, para sua adega, 10 garrafas de vinho de um lote constituído por 4 garrafas da Espanha, 5 garrafas da Itália e 6 garrafas da França, todas de diferentes marcas.

a) De quantas maneiras é possível escolher 10 garrafas desse lote?

b) De quantas maneiras é possível escolher 10 garrafas do lote, sendo 2 garrafas da Espanha, 4 da Itália e 4 da França?

c) Qual é a probabilidade de que, escolhidas ao acaso 10 garrafas do lote, haja exatamente 4 garrafas da Itália e, pelo menos, uma garrafa de cada um dos outros dois países?

31 (Fuvest-SP) Em uma equipe de basquete, a distribuição de idades dos jogadores é a seguinte:

Idade	Nº de jogadores
22	1
25	3
26	4
29	1
31	2
32	1

Será sorteada, aleatoriamente, uma comissão de dois jogadores para representar a equipe perante os dirigentes.

a) Quantas possibilidades distintas existem para formar essa comissão?

b) Qual é a probabilidade de a média de idade dos dois jogadores da comissão sorteada ser estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores?

32 Um dado é lançado três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de que a soma dos números de pontos nas faces voltadas para cima:

a) ultrapasse 18?

b) seja menor que 19?

33 Considere a sequência (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 20$, tal que $a_n = 2n^2 + 5$. Sorteando um elemento dessa sequência, calcule a probabilidade de obter:

a) o número 455.

b) o número 31.

c) um número ímpar.

34 Em uma caixa foram misturadas n baterias de telefone celular: algumas perfeitas e outras defeituosas. Retirando ao acaso uma bateria dessa caixa, a probabilidade de ela ser perfeita é $\frac{2n - 23}{21}$. Calcule o o menor e o maior valor possível de n.

35 Em uma sessão da Assembleia Legislativa de um estado, um deputado será escolhido, ao acaso, para dar início aos trabalhos do dia. A probabilidade de que o escolhido seja de um partido político X é $\frac{27 - n}{9}$, em que n é o número de deputados presentes desse partido. Pode-se concluir que o número mínimo de deputados do partido X que participam dessa sessão é:

a) 15

b) 16

c) 17

d) 18

e) 19

36 Em um congresso internacional sobre educação, um participante foi escolhido aleatoriamente. A probabilidade de o escolhido ser professor da rede pública de ensino é 0,12. Qual é a probabilidade de que o escolhido não seja professor da rede pública de ensino?

37 A probabilidade de um jogador marcar um gol em uma cobrança de pênalti é $\frac{18}{23}$. Qual é a probabilidade de ele não marcar o gol ao bater um pênalti?

38 A probabilidade de um paciente qualquer apresentar certo tipo de reação a um medicamento é $\frac{2n + 1}{3n}$ e a de não apresentar é $\frac{3n - 5}{6}$. Determine o valor numérico que representa a probabilidade de um paciente não apresentar essa reação em um tratamento com esse medicamento.

39 (Enem) Um médico está estudando um novo medicamento que combate um tipo de câncer em estágios avançados. Porém, devido ao forte efeito dos seus componentes, a cada dose administrada há uma chance de 10% de que o paciente sofra algum dos efeitos colaterais observados no estudo, tais como dores de cabeça, vômitos ou mesmo agravamento dos sintomas da doença. O médico oferece tratamentos compostos por 3, 4, 6, 8 ou 10 doses do medicamento, de acordo com o risco que o paciente pretende assumir. Se um paciente considera aceitável um risco de até 35% de chances de que ocorra algum dos efeitos colaterais durante o tratamento, qual é o maior número admissível de doses para esse paciente?

a) 3 doses.

b) 4 doses.

c) 6 doses.

d) 8 doses.

e) 10 doses.

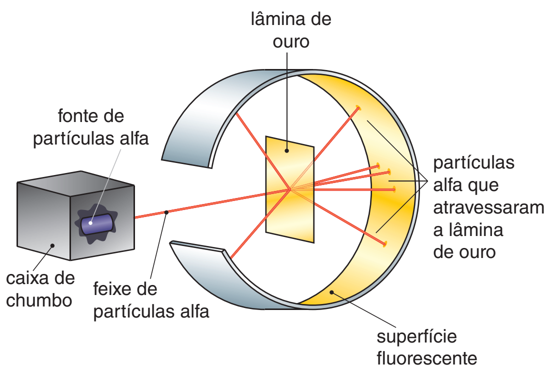
40 Uma caixa contém apenas camisetas de tamanho médio e de tamanho grande. Retirando ao acaso uma camiseta da caixa, a probabilidade de obter uma camiseta de tamanho médio é nove vezes a probabilidade de obter uma de tamanho grande.
Calcule a probabilidade de obter uma camiseta de tamanho grande.

41 As estatísticas mostram que a probabilidade de um atirador acertar o alvo em um único tiro é sete vezes a probabilidade de ele errar.
Qual é a probabilidade de acerto no próximo tiro?

42 (UFMA) Uma moeda é viciada de tal forma que a probabilidade de sair cara num lançamento é o quádruplo da de sair coroa.
Então, lançando-se uma vez a moeda, qual é a probabilidade de sair coroa?

43 Numa eleição para representante de uma classe, todos os 30 alunos votaram em um dos candidatos A ou B. O candidato A venceu com o total de 20 votos.
Escolhendo-se ao acaso dois dos alunos que votaram nessa eleição, qual é a probabilidade de que pelo menos um deles tenha votado no vencedor?

44 O famoso experimento do físico e químico Ernest Rutherford (1871-1937) que levou à descoberta do núcleo atômico baseou-se em fazer incidir um feixe de partículas alfa (partículas radioativas portadoras de carga elétrica positiva) sobre uma lâmina delgada de ouro.
Com o auxílio de um anteparo que emitia luminosidade instantânea ao ser atingido por uma partícula alfa, Rutherford estimou que uma em cada 10^5 dessas partículas ou é desviada ou é repelida pela lâmina de ouro.



Essa experiência mostrou que a probabilidade de uma partícula alfa atravessar a lâmina de ouro, sem sofrer alteração em sua trajetória, é:
a) menor que 50%.
b) maior que 50% e menor que 78%.
c) maior que 78% e menor que 89%.
d) maior que 89% e menor que 99%.
e) maior que 99%.

45 (UFV-MG) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 a 100. A probabilidade de o bilhete sorteado ser um número maior que 40 ou número par é:
a) 60% **b)** 70% **c)** 80% **d)** 90% **e)** 50%

46 Sorteando um número entre os números naturais de 1 a 1.000, qual é a probabilidade de sair um número par ou um número de dois algarismos?

47 Um livro de 200 páginas contém 80 ilustrações, sendo 50 coloridas e as demais em preto e branco. Não existe página com mais de uma ilustração. Escolhendo aleatoriamente uma página desse livro, qual é a probabilidade de ela apresentar uma ilustração colorida ou de não conter nenhuma ilustração?

48 Pressionando uma tecla, aleatoriamente, no teclado de um computador, a probabilidade de aparecer uma letra na tela do monitor é $\frac{3}{11}$ e a de aparecer um algarismo é $\frac{2}{11}$.
Qual é a probabilidade de aparecer na tela uma letra ou um algarismo?

49 Entre os automóveis estocados no pátio de uma montadora, escolhe-se um ao acaso. A probabilidade de que o automóvel escolhido tenha freio ABS é $\frac{5}{8}$, a probabilidade de que ele tenha direção hidráulica é $\frac{2}{3}$, e a probabilidade de que ele tenha freio ABS ou direção hidráulica é $\frac{5}{6}$. Calcule a probabilidade de esse automóvel ter freio ABS e direção hidráulica.

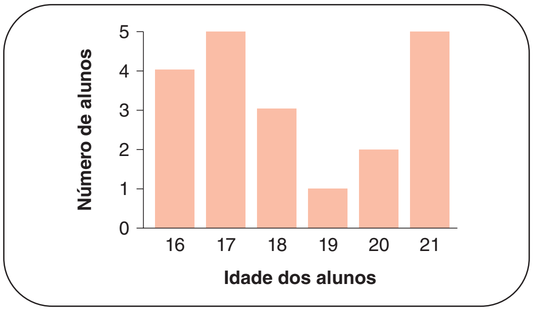
50 Um vendedor de autopeças vai visitar duas lojas, A e B. Sua experiência mostra que a probabilidade de venda é 75% na loja A e 78% na loja B. Sabendo que a probabilidade de, nessa visita, o vendedor conseguir vender seus produtos nas duas lojas é 62%, calcule a probabilidade de ele vender em pelo menos uma dessas lojas.

51 Dos refrigeradores expostos em uma loja, um cliente escolheu um aleatoriamente. A probabilidade de o refrigerador escolhido ser da marca X e ser *frost free* é $\frac{7}{10}$. Sabendo que a probabilidade de o escolhido ser da marca X é $\frac{3}{5}$ e que a probabilidade de ele ser *frost free* é $\frac{3}{4}$, calcule a probabilidade de esse refrigerador ser da marca X ou ser *frost free*.

52 A cobertura de um evento internacional é feita por repórteres do jornal A, sendo 8 homens e 4 mulheres; por repórteres do jornal B, sendo 6 homens e 9 mulheres; e por repórteres do jornal C, sendo 7 homens e algumas mulheres. Em uma entrevista coletiva da qual participam todos esses repórteres, será sorteado um deles para a primeira pergunta.
Sabendo que $\frac{2}{3}$ é a probabilidade de que o profissional sorteado seja uma mulher ou seja do jornal A, calcule o número de repórteres mulheres do jornal C que participam da cobertura do evento.

53 (UFPE) Uma fábrica usa, nos seus produtos, um sistema de codificação cujos códigos são sequências formadas por uma das 26 letras do alfabeto (incluídas K, W e Y) seguida de dois dígitos de 0 a 9 (exemplos: S90, K23).
Calcule a probabilidade de um código desse sistema, escolhido aleatoriamente, ter uma vogal ou dois dígitos iguais.

54 (Vunesp) Num curso de Inglês, a distribuição das idades dos alunos é dada pelo gráfico:



Com base nesses dados, determine:
a) o número total de alunos do curso e o número de alunos com no mínimo 19 anos.
b) escolhido um aluno ao acaso, qual a probabilidade de sua idade ser no mínimo 19 anos ou de ser exatamente 16 anos.

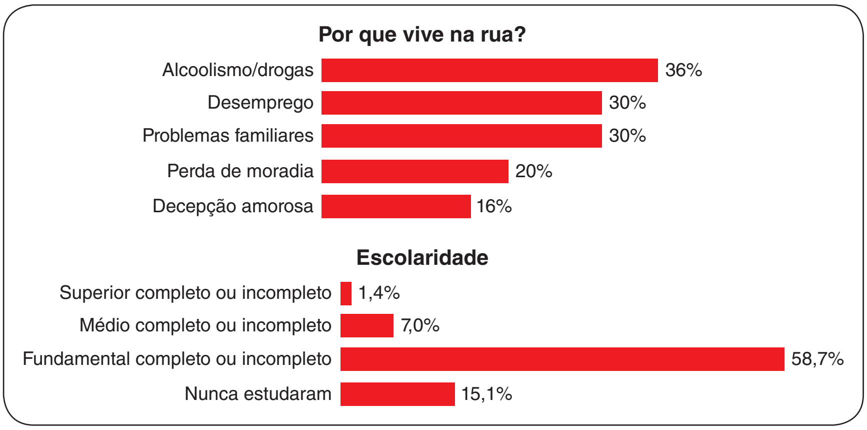
55 No *freezer* de um supermercado, há somente sorvetes de chocolate ou sorvetes da marca Ice, num total de 60 unidades, sendo 40 de chocolate. Retirando-se um sorvete aleatoriamente desse *freezer*, a probabilidade de que ele seja de chocolate e da marca Ice é $\frac{1}{5}$. Determine o número de sorvetes da marca Ice nesse *freezer*.

56 Um estudo sobre a longevidade de uma espécie de animais revelou que, escolhido um animal dessa espécie ao acaso, a probabilidade de que ele viva 30 anos ou menos é 0,6, e a probabilidade de que ele viva 30 anos ou mais é 0,5. Calcule a probabilidade de esse animal viver exatamente 30 anos.

57 (Enem)

A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31.922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros a seguir.



Isto é, 7/5/2008, p. 21 (com adaptações).

I. As informações apresentadas no texto são suficientes para se concluir que:

a) as pessoas que vivem na rua e sobrevivem de esmolas são aquelas que nunca estudaram.
b) as pessoas que vivem na rua e cursaram o ensino fundamental, completo ou incompleto, são aquelas que sabem ler e escrever.
c) existem pessoas que declararam mais de um motivo para estarem vivendo na rua.
d) mais da metade das pessoas que vivem na rua e que ingressaram no ensino superior se diplomou.
e) as pessoas que declararam o desemprego como motivo para viver na rua também declararam a decepção amorosa.

II. No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a:

a) 12% **b)** 16% **c)** 20% **d)** 36% **e)** 52%

58 Um baralho é composto de 52 cartas, que são divididas em quatro naipes distintos: ouros (♦), copas (♥), espadas (♠) e paus (♣). De cada naipe há 13 cartas: 9 cartas numeradas de 2 a 10, valete (J), dama (Q), rei (K) e ás (A). Por exemplo, do naipe de ouros temos as 13 cartas:

Sorteia-se uma entre essas 52 cartas. Sabendo que a carta sorteada é um rei, calcule a probabilidade de ela ser de ouros.

59 Um congresso sobre doenças psicossomáticas reúne 48 psiquiatras, dos quais 18 são mulheres; 72 psicólogos, dos quais 53 são mulheres; e 27 neurologistas, dos quais 10 são mulheres. Um dos participantes foi sorteado para coordenar os trabalhos. Sabendo que a pessoa sorteada é mulher, qual é a probabilidade de ela ser psiquiatra?

60 Uma agência oferece pacotes de viagem para Natal ou para Fortaleza. De acordo com o tipo de hotel, os pacotes são classificados como: A (hotel cinco estrelas), B (quatro estrelas) e C (três estrelas). Em determinado dia, partiram apenas dois aviões fretados pela agência de viagens, um com destino a Natal e outro a Fortaleza. Entre os passageiros que viajaram para Natal, 70 optaram por pacotes do tipo A, 80 por B e 90 por C. Entre os passageiros que viajaram para Fortaleza, 60 optaram por pacotes do tipo A, 85 por B e 95 por C. Um prêmio foi sorteado a um dos passageiros que viajaram nesse dia. Sabendo que o ganhador do prêmio foi para Natal, qual é a probabilidade de ele ter optado pelo pacote do tipo A?

61 (Vunesp) Numa comunidade formada de 1.000 pessoas, foi feito um teste para detectar a presença de uma doença. Como o teste não é totalmente eficaz, existem pessoas doentes cujo resultado do teste foi negativo e existem pessoas sadias com resultado do teste positivo. Sabe-se que 200 pessoas da comunidade são portadoras dessa doença. Essa informação e alguns dos dados obtidos com o teste foram colocados na tabela abaixo.

Resultado do exame			
Situação	**Positivo (P)**	**Negativo (N)**	**Total**
Sadio (S)	80	c	800
Doente (D)	a	40	200
Total	b	d	1.000

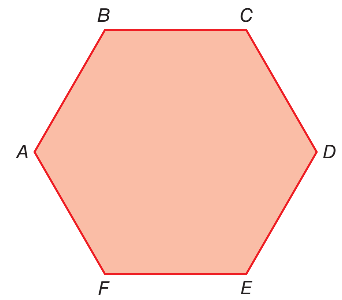
a) Determine os valores a, b, c e d.
b) Uma pessoa da comunidade é escolhida ao acaso e verifica-se que o resultado do teste foi positivo. Determine a probabilidade de essa pessoa ser sadia.

62 (UMC-SP) A tabela a seguir fornece, por sexo e área escolhida, o número de inscritos em um vestibular para ingresso em curso superior:

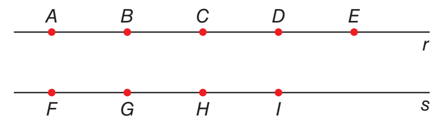
	Área		
Sexo	**Biomédicas**	**Exatas**	**Humanas**
Masculino	2.500	1.500	1.500
Feminino	1.500	1.000	2.000

Escolhido, ao acaso, um dos inscritos e representando por p_1 a probabilidade de o escolhido ser do sexo masculino e ter optado por Exatas e por p_2 a probabilidade de o escolhido ser do sexo feminino sabendo-se que optou por Biomédicas, pode-se concluir que:
a) $p_1 = 0{,}6$ e $p_2 = 0{,}375$
b) $p_1 = 0{,}6$ e $p_2 = 0{,}15$
c) $p_1 = 0{,}15$ e $p_2 = 0{,}15$
d) $p_1 = 0{,}15$ e $p_2 = 0{,}375$
e) $p_1 = 0{,}375$ e $p_2 = 0{,}15$

63 Sorteia-se uma das retas determinadas por dois vértices quaisquer do hexágono abaixo.
Sabendo que a reta sorteada não contém nenhum dos lados do polígono, calcule a probabilidade de ela passar pelo vértice F.



64 Os pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I pertencem às retas paralelas r e s, representadas a seguir. Entre todos os triângulos determinados por três quaisquer desses pontos, sorteou-se um, observando que ele tem um lado contido na reta s. Qual é a probabilidade de que esse triângulo tenha o ponto F como vértice?



65 Em uma caixa há exatamente 4 bolas vermelhas e 3 azuis. Sorteiam-se 2 bolas dessa urna, uma de cada vez, e repõe-se na urna a bola retirada.
a) Sabendo que a primeira bola retirada foi azul, qual é a probabilidade de que a segunda bola seja azul?
b) Sabendo que a primeira bola retirada não foi azul, qual é a probabilidade de que a segunda bola seja azul?

66 (Vunesp) Uma pesquisa publicada pela revista *Veja* de 7 de junho de 2006 sobre os hábitos alimentares dos brasileiros mostrou que, no almoço, aproximadamente 70% dos brasileiros comem carne bovina e que, no jantar, esse índice cai para 50%. Supondo que a probabilidade condicional de uma pessoa comer carne bovina no jantar dado que ela comeu carne bovina no almoço seja $\frac{6}{10}$, determine a probabilidade de a pessoa comer carne bovina no almoço ou no jantar.

67 Um quadriculado é formado por 9 quadradinhos, numerados de 1 a 9. Uma criança pinta 2 deles, aleatoriamente, um de cada vez.
a) Considerando como resultado desse experimento o conjunto dos pares ordenados (x, y), em que x é o número do quadradinho pintado em primeiro lugar e y é o número do quadradinho pintado depois, quantos elementos possui o espaço amostral E desse experimento?
b) Determine o número de elementos do evento $A = \{(x, y) \in E \mid x \text{ é número ímpar}\}$.
c) Determine o número de elementos do evento $B = \{(x, y) \in E \mid y \text{ é número ímpar}\}$.
d) Calcule a probabilidade $P(B/A)$.
e) Os eventos A e B são dependentes ou independentes? Por quê?

68 De uma urna com 4 bolas de cores diferentes, azul, vermelha, marrom e branca, serão retiradas 2 bolas, sucessivamente e com reposição. Considera-se como resultado desse experimento o par ordenado (x, y) em que x é a cor da primeira bola retirada e y é a cor da segunda bola retirada.

a) Indicando por A, V, M e B as bolas azul, vermelha, marrom e branca, respectivamente, construa o espaço amostral E desse experimento e determine $n(E)$.

b) Determine os elementos do evento S, formado pelos pares ordenados de E cuja segunda bola retirada é vermelha, e calcule $P(S)$.

c) Determine os elementos do evento T, formado pelos pares ordenados de E cuja primeira bola retirada é azul, e calcule $P(T)$.

d) Calcule a probabilidade de a segunda bola ser vermelha sabendo que a primeira foi azul.

e) Os eventos S e T são independentes? Por quê?

69 De uma urna com exatamente 5 bolas de cores diferentes (azul, vermelha, verde, marrom e preta) são retiradas aleatoriamente 2 bolas, uma de cada vez.

a) Sabendo que na primeira retirada saiu uma bola vermelha e que essa foi reposta na urna, calcule a probabilidade de a segunda bola retirada ser vermelha.

b) Sabendo que na primeira retirada saiu uma bola vermelha e que essa não foi reposta na urna, calcule a probabilidade de a segunda bola retirada ser vermelha.

c) Em qual dos dois itens anteriores os eventos "bola vermelha na primeira retirada" e "bola vermelha na segunda retirada" são independentes? Por quê?

70 Uma moeda é lançada três vezes, considerando-se como resultado o terno ordenado (x, y, z) das faces voltadas para cima obtidas no primeiro, segundo e terceiro lançamentos, respectivamente.

a) Indicando por C e K as faces cara e coroa, respectivamente, construa o espaço amostral E desse experimento.

b) Determine os elementos do evento A, formado pelos ternos ordenados de E com pelo menos uma cara e uma coroa.

c) Determine os elementos do evento B, formado pelos ternos ordenados de E com pelo menos duas caras.

d) Mostre que A e B são eventos independentes.

71 (PUC-RJ) Em uma amostra de 20 peças, existem exatamente 4 defeituosas. Retirando-se ao acaso, sem reposição, 3 peças, qual é a probabilidade de todas as 3 serem perfeitas?

72 Uma pessoa tem no bolso exatamente 2 moedas de R$ 1,00, 4 moedas de R$ 0,50 e 3 moedas de R$ 0,10. Essa pessoa retira, simultaneamente, 3 moedas do bolso. Calcule a probabilidade de:

a) as moedas retiradas terem valores diferentes entre si.

b) saírem duas moedas de R$ 0,50 e uma de R$ 0,10.

c) as moedas retiradas totalizarem R$ 1,20.

73 Uma urna contém precisamente 5 bolas vermelhas, 3 azuis e 4 pretas. Retiram-se, simultaneamente, 6 bolas da urna. Calcule a probabilidade de:

a) saírem 4 bolas vermelhas e 2 azuis.

b) saírem 5 bolas vermelhas.

74 (UFMG) Considere uma prova de Matemática constituída de quatro questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada uma, das quais apenas uma é correta.
Um candidato decide fazer essa prova escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão.
Então, é correto afirmar que a probabilidade de esse candidato acertar, nessa prova, exatamente uma questão é:

a) $\frac{27}{64}$ **b)** $\frac{27}{256}$ **c)** $\frac{9}{64}$ **d)** $\frac{9}{256}$

75 (UFPA) De um refrigerador que tem em seu interior 3 refrigerantes da marca A, 4 refrigerantes da marca B e 5 refrigerantes da marca C, retiram-se dois refrigerantes sem observar a marca. A probabilidade de que os dois retirados sejam da mesma marca é:

a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{5}{33}$ **c)** $\frac{19}{66}$ **d)** $\frac{7}{22}$ **e)** $\frac{3}{11}$

76 (Uerj) Com o intuito de separar o lixo para fins de reciclagem, uma instituição colocou em suas dependências cinco lixeiras de diferentes cores, de acordo com o tipo de resíduo a que se destinam: vidro, metal, plástico, papel e orgânico.

Sem olhar para as lixeiras, João joga em uma delas uma embalagem plástica e, ao mesmo tempo, em outra, uma garrafa de vidro. A probabilidade de que ele tenha usado corretamente pelo menos uma lixeira é igual a:

a) 25% **b)** 30% **c)** 35% **d)** 40%

77 (UFRJ) O setor de controle de qualidade de uma pequena confecção fez um levantamento das peças produzidas classificando-as como aproveitáveis ou não aproveitáveis. As porcentagens de peças aproveitáveis estão na tabela abaixo.

Peça	Aproveitável
Camiseta	96%
Bermuda	98%
Calça	90%

Um segundo levantamento verificou que 75% das camisetas aproveitáveis, 90% das bermudas aproveitáveis e 85% das calças aproveitáveis são de primeira qualidade.
Escolhendo-se aleatoriamente uma calça e uma camiseta dessa confecção, calcule a probabilidade p de as condições a seguir serem ambas satisfeitas: a camiseta ser de primeira qualidade e a calça não ser aproveitável.

78 (UFPB) Num programa de televisão, existem duas urnas, A e B, contendo bolas destinadas a um sorteio de brindes. Na urna A, existem 10 bolas amarelas e 2 azuis, e na urna B, 9 bolas amarelas e 6 azuis. Um participante é convidado a retirar uma bola de cada urna, sabendo que será premiado caso retire bolas da mesma cor. Qual é a probabilidade de esse participante ser premiado?

79 (ITA-SP) Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se P_1 é a probabilidade de não sair bola azul e P_2 é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ é:

a) 0,21
b) 0,25
c) 0,28
d) 0,35
e) 0,40

80 Sorteando duas arestas distintas de um cubo, qual é a probabilidade de elas serem paralelas?

81 Uma dona de casa tem o hábito de guardar na caixa de fósforos os palitos já queimados.
Em determinado dia, havia na caixa exatamente 18 palitos queimados e 22 perfeitos. Calcule a probabilidade de:

a) retirando um palito da caixa, ao acaso, este seja perfeito.
b) retirando um palito da caixa, ao acaso, este seja queimado.
c) retirando três palitos da caixa, sucessivamente e sem reposição, apenas o terceiro seja perfeito.

82 (Uenf-RJ) Uma pesquisa realizada em um hospital indicou que a probabilidade de um paciente morrer no prazo de um mês, após determinada operação de câncer, é igual a 20%.
Se três pacientes são submetidos a essa operação, calcule a probabilidade de, nesse prazo:

a) Todos sobreviverem.
b) Apenas dois sobreviverem.

83 Carlos e Tobias são candidatos às duas vagas existentes no departamento de recursos humanos de uma empresa. Após a divulgação do resultado do teste realizado, em que outros candidatos além dos dois foram aprovados, Carlos avaliou que a probabilidade de ser ele um dos escolhidos é 60%, e Tobias avaliou que a probabilidade de ser ele o escolhido é 70%. Admitindo que essas avaliações estejam corretas, a probabilidade de pelo menos um dos dois ser escolhido é:

a) 46%
b) 38%
c) 54%
d) 88%
e) 36%

84 (Enem) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2 \cdot (0{,}2\%)^4$
b) $4 \cdot (0{,}2\%)^2$
c) $6 \cdot (0{,}2\%)^2 \div (99{,}8\%)^2$
d) $4 \cdot (0{,}2\%)$
e) $6 \cdot (0{,}2\%) \div (99{,}8\%)$

85 A probabilidade de faltar energia elétrica ao longo de cada mês em certo bairro é 20%. No período de janeiro a março de um mesmo ano, qual é a probabilidade de faltar energia elétrica somente no mês de março?

86 Quatro cartas — uma de cobrança, outra de felicitação por aniversário, outra de felicitação por casamento, e a quarta de pêsames — serão enviadas a quatro pessoas diferentes. A pessoa incumbida de enviá-las distraiu-se e escreveu, aleatoriamente, os quatro endereços dos destinatários, um em cada envelope. A probabilidade de que exatamente dois desses destinatários recebam a carta adequada é:

a) $\frac{1}{24}$
b) $\frac{5}{24}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{3}{7}$
e) $\frac{1}{4}$

87 (Unopar-PR) Cada uma das dez questões de uma prova apresenta uma única afirmação, que deve ser classificada como verdadeira (V) ou falsa (F). Um aluno, que nada sabe sobre a matéria, vai responder todas as questões ao acaso. A probabilidade de ele não tirar zero é:

a) $\frac{1}{256}$
b) $\frac{511}{512}$
c) $\frac{3}{512}$
d) $\frac{1}{1.024}$
e) $\frac{1.023}{1.024}$

88 (Fuvest-SP) Em um jogo entre Pedro e José, cada um deles lança, em cada rodada, um mesmo dado honesto uma única vez. O dado é cúbico, e cada uma de suas 6 faces estampa um único algarismo de maneira que todos os algarismos de 1 a 6 estejam representados nas faces do dado. Um participante vence, em uma certa rodada, se a diferença entre seus pontos e os pontos de seu adversário for, no mínimo, de duas unidades. Se nenhum dos participantes vencer, passa-se a uma nova rodada.
Dessa forma, determine a probabilidade de:

a) Pedro vencer na primeira rodada.
b) Nenhum dos dois participantes vencer na primeira rodada.
c) Um dos participantes vencer até a quarta rodada.

89 (UFPE) O controle de qualidade de uma fábrica de lâmpadas testa 3 (escolhidas aleatoriamente) de cada 60 lâmpadas produzidas; se mais de uma lâmpada entre as 3 selecionadas é defeituosa, então as 60 lâmpadas são excluídas da produção. Supondo que 10% de cada 60 lâmpadas produzidas sejam defeituosas, determine a probabilidade p de mais de uma das lâmpadas testadas ser defeituosa.

90 (Ibmec-SP) A fase final de um processo de seleção de gerentes e supervisores para uma empresa é constituída de uma entrevista individual, com duração de uma hora para os candidatos a gerente e 30 minutos para os candidatos a supervisor.
Nessa etapa, restam 10 candidatos, sendo 5 para cada um dos cargos. Todas as entrevistas serão realizadas no mesmo dia, sendo chamado um candidato por vez, e não havendo intervalo entre duas entrevistas consecutivas.
A ordem de chamada dos candidatos será definida por sorteio, e a primeira entrevista ocorrerá às 10 h.
Márcia, uma das candidatas ao cargo de gerente, está preocupada, pois tem um compromisso nesse dia, precisando sair antes do término da última entrevista.

a) Calcule a probabilidade de que a entrevista de Márcia termine até as 11 h 30 min.

b) Calcule a probabilidade de que a entrevista de Márcia termine até as 12 h.

91 Dois aparelhos de ar condicionado, A e B, ligam e desligam automaticamente, acionados pela própria temperatura ambiente.
Considerando o período de 1 h, a soma dos tempos em que A permanece ligado totaliza 45 minutos e a dos tempos em que B permanece ligado totaliza 48 minutos.
Sabendo que em certo instante o aparelho A está ligado, qual é a probabilidade de que B também esteja ligado?

92 (Fuvest-SP) Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas.
Três bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição.
Determine:

a) A probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca.

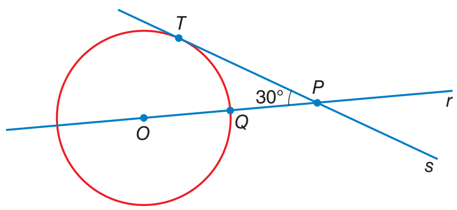
b) A probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca, sabendo que as 3 bolas retiradas não são da mesma cor.

93 Uma senha de e-mail é formada por 4 algarismos. Uma pessoa esqueceu sua senha e vai tentar entrar no seu e-mail com uma senha selecionada ao acaso. Sabendo que após três tentativas erradas o e-mail é bloqueado, qual é a probabilidade de ela bloquear seu e-mail?

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Na figura abaixo, a reta r passa pelo centro O da circunferência e a reta s é tangente à circunferência no ponto T. Determine a medida do raio dessa circunferência sabendo que a medida do segmento $\overline{PQ}$ é 12 cm.



2 (Unifor-CE) Os ângulos da base de um triângulo isósceles medem 30° cada um. Sabendo-se que essa base mede 0,8 dm, a área desse triângulo vale:

a) $2\sqrt{3}$ dm^2 **b)** $4\sqrt{3}$ m^2 **c)** $8\sqrt{3}$ dam^2 **d)** $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ cm^2 **e)** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm^2

3 (ITA-SP) Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1$, então o valor do determinante $\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}$ é igual a:

a) 0 **b)** 4 **c)** 8 **d)** 12 **e)** 16

4 (UFRN) Arranjam-se os dígitos 1, 2, 3 e 4 de todos os modos possíveis, formando-se 24 números de quatro dígitos distintos. Listam-se, em ordem crescente, os 24 números formados. Nessa lista, o número 3.241 ocupa a:

a) 14ª posição. **b)** 13ª posição. **c)** 16ª posição. **d)** 15ª posição.

› **Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.**

Exercício

Em uma caixa A havia 3 peças defeituosas e 5 perfeitas, em outra caixa B havia 2 peças defeituosas e 3 perfeitas. Duas peças foram retiradas aleatoriamente, uma de cada caixa, constatando-se que apenas uma das peças era defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça defeituosa tenha sido retirada da caixa A?

Resolução

Sejam:

D: as peças defeituosas

P: as peças perfeitas

DDD PPPPP	DD PPP
Caixa A	Caixa B

- Probabilidade de retirar uma peça defeituosa da caixa A: $\frac{3}{8}$
- Probabilidade de retirar uma peça perfeita da caixa B: $\frac{3}{5}$

Como apenas uma das duas peças retiradas é defeituosa, a probabilidade de que ela tenha vindo da caixa A é dada por:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{40}$$ ERRADO!

Comentário

Consideremos o espaço amostral E e os eventos G e H descritos a seguir:

$E = \{(x, y) \mid x$ é a peça da caixa A e y é a peça da caixa $B\}$

$G = \{(m, n) \in E \mid$ uma das duas peças é perfeita e a outra é defeituosa$\}$

$H = \{(r, s) \in E \mid s$ é a peça perfeita da caixa $B\}$

O aluno deveria ter calculado a probabilidade condicional $P(H/G)$, no entanto, ele calculou $P(H \cap G)$, errando, portanto, a resposta.

› **Refaça essa resolução, corrigindo-a.**

RESPOSTAS

CAPÍTULO 6 Matrizes

Para pensar

	1998	2003	2008
Brasil	65,2%	89%	91,5%
Japão	73%	82%	87,3%
Argentina	48%	80%	90,8%
Estados Unidos	67%	50%	54,2%

Exercícios propostos

1 a)

	Filé de frango (100 g)	Sardinha (100 g)	Contra-filé (100 g)
Energia (kcal)	159	164	278
Proteína (g)	32	32,2	32,4

ou

	Energia (kcal)	Proteína (g)
Filé de frango (100 g)	159	32
Sardinha (100 g)	164	32,2
Contrafilé (100 g)	278	32,4

b) $\begin{pmatrix} 159 & 164 & 278 \\ 32 & 32,2 & 32,4 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 159 & 32 \\ 164 & 32,2 \\ 278 & 34,4 \end{pmatrix}$

c) 3×2 ou 2×3

2 a) R$ 2.800,00 c) R$ 7.730,00
b) R$ 10.580,00

3 a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4 $x = 4$

5 A igualdade não é possível, pois as matrizes não são do mesmo tipo.

6 a) $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

7 $x = 1$; $y = 4$

8 d

9 a) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 26 \\ 3 & -15 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 25 \\ -4 & -10 & -7 \end{pmatrix}$

10 $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -9 \\ -12 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

11 $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

DICA: As propriedades da igualdade e das operações com matrizes permitem resolver um sistema de equações matriciais pelos mesmos métodos aplicados na resolução de sistemas de equações do 1º grau.

12 a) 4 milhões de toneladas
b) 11 milhões de toneladas
c) 15 milhões de toneladas
d) 24 milhões de toneladas
e) $C = A + B = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 15 \\ 19 & 25 & 24 \end{pmatrix}$
f) $D = A - B = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -7 \\ -11 & -15 & -12 \end{pmatrix}$

13 a) $\begin{pmatrix} 26 \\ -4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

b) Não existe. e) Não existe.

c) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

14 a) $\begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 26 & 26 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & 32 & 16 \\ 2 & 16 & 8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

15 a) F b) V c) F

16 sim **17** b **18** 408

19 $x = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

20 a) $\begin{cases} x + 2y + 5z = 12 \\ -2x + 4y = -11 \\ 3x - 3y + z = 9 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ e

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

21 a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) Não existe matriz inversa de C.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

2 d

3 a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4 d

5 $x = 8$ e $y = -4$ ou $x = -8$ e $y = 4$

6 4

7 a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -9 \\ 9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 10 & 12 & 10 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 16 & 1 & -11 \\ 10 & 14 & 24 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 6 & 24 & 36 \\ -30 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

8 $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 7 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

9 $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

10 d

11 a) $\begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) Este produto não existe, pois o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

12 b

13 não

14 $\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}$

15 $\begin{pmatrix} 2 & \frac{10}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

16 x = 0 ou x = 4

17 a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

DICA: As propriedades da multiplicação de potências de mesma base numérica também valem para a multiplicação de potências de mesma base matricial.

18 a) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

19 a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

20 x = 0 ou x = −1 e y = 2 ou y = 3

21 c

22 a) F c) V e) F
b) V d) F

23 d
DICA: Aplique o método da substituição.

24 b
DICA: Aplique a propriedade da transposta do produto de matrizes e a propriedade associativa da multiplicação de matrizes.

25 a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Não existe matriz inversa de C.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

26 d

27 a
DICA: Isole a matriz I em um dos membros da igualdade e fatore o outro membro.

28 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

• **Exercícios contextualizados**

29 a) $A = \begin{pmatrix} 1.100 & 1.210 & 1.331 \\ 2.400 & 2.880 & 3.456 \end{pmatrix}$

b) $a_{ij} = \begin{cases} (1,1)^j \cdot 1.000, \text{ se } i = 1 \\ (1,2)^j \cdot 2.000, \text{ se } i = 2 \end{cases}$

DICA: O montante M acumulado ao final de t unidades de tempo pela aplicação de um capital inicial C, em regime de juro composto, à taxa i por unidade de tempo é dado por $M = (1 + i)^t$.

30 a) no instante 2 do dia 4
b) 37,3 °C

31 a

32 a) 5
b) 0

c) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

33 c

34 e

35 1 + 2 + 16 = 19

36 e

37 e

38 a) $\begin{pmatrix} 1.400 & 1.800 & 1.750 \\ 1.450 & 1.600 & 1.700 \end{pmatrix}$

b) $C_{23} = 1.700$ representa a quantidade, em quilograma, de fertilizante Z usado nas plantações de milho, soja e feijão na região Q.

39 d

Exercícios de revisão cumulativa

1 d

2 d

3 demonstração

4 a

Análise da resolução

$X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, com $\{b, c\} \subset \mathbb{R}$

CAPÍTULO 7 Sistemas lineares e determinantes

Para pensar

1 9

2 2 vitórias e 8 empates

Exercícios propostos

1 a) $-\frac{11}{2}$ c) sim

b) $-\frac{41}{2}$ d) infinitos

2 a) I. V; II. F
b) $p = 0$; $q = 4$
c) Resposta possível:
$(5, 0, 3)$; $\left(1, \frac{10}{3}, 5\right)$

3 a) V c) V e) V
b) F d) V f) F

4 Resposta possível: (4, −1, 3), (4, 0, 1) e (4, 1, −1)

5 b

6 c

7 a

8 e
DICA: A partir da equação $u + 5c + 2d = 20$, em que u, d e c representam os números de notas de um, cinco e dez reais, respectivamente, construa uma tabela.

9 c

10 e

11 a) SPD b) SI c) SPI d) SI

12 a) $k = \frac{2}{3}$ b) SPI

13 demonstração
DICA: Substitua x, y e z por 1, p e $4p$, respectivamente, obtendo equações incompatíveis.

14 a) qualquer número real k, com $k \neq 0$
b) $k = 0$
c) $k = 0$

15 d

16 a) SPD; $S = \{(2, 1, 3)\}$
b) SPI; $S = \{(7 - 18z, 1 - 3z, z)$, com $z \in \mathbb{R}\}$
c) SPI; $S = \left\{\left(\frac{y - 7}{2}, y, 2\right), \text{com } y \in \mathbb{R}\right\}$
d) SPD; $S = \{(0, 0, 0)\}$
e) SPI; $S = \{(4z, z, z)$, com $z \in \mathbb{R}\}$

17 2

18 $S = \{(t, 3t - 9z, 1 - t + 3z, z)$, com $t, z \in \mathbb{R}\}$

19 $k = 4$

20 a) SPD; $S = \{(1, 3, 2)\}$
b) SI; $S = \varnothing$
c) SPI; $S = \{(-3 - 4z, 5 + z, z)$, com $z \in \mathbb{R}\}$
d) SPD; $S = \left\{\left(-\frac{11}{4}, 4, -\frac{1}{2}\right)\right\}$
e) SPD; $S = \{(-13, 8)\}$
f) SI; $S = \varnothing$
g) SPD; $S = \{(0, 0)\}$
h) SPI; $S = \left\{\left(-\frac{5z}{11}, \frac{4z}{11}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$
i) SPD; $S = \{(0, 0)\}$
j) SPI; $S = \left\{\left(-\frac{z}{4}, \frac{3z}{4}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$

21 e

22 b

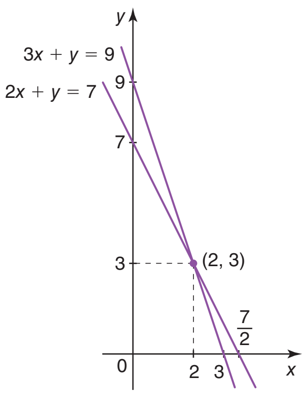
23 c

24 a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 9z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$

b) $(9z, 3z, z)$, com $z \in \mathbb{R}^*_+$

25 demonstração

26



27 a) F b) V c) V d) V e) V f) F

28 a) 18; SPD b) 6; SPD c) 0; SPI d) 0; SI e) −13; SPD f) 0; SPI

29 c

30 qualquer número real k, com $k \neq -6$

31 qualquer número real k, com $k \neq 5$.

32 −4

DICA: Todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial. Assim, dizer que um sistema linear homogêneo admite soluções diferentes da trivial significa que além da solução trivial o sistema admite outras soluções.

33 b

34 a) $S = \{-3, 3\}$ b) $S = \left\{2, -\frac{3}{5}\right\}$

35 a) concorrentes
b) paralelas distintas
c) coincidentes

36 a) $\begin{cases} \text{para } k \neq 2, \text{ SPD} \\ \text{para } k = 2, \text{ SI} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{para } k \neq -5, \text{ SPD} \\ \text{para } k = -5, \text{ SI} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{para } k \neq 5 \text{ e } k \neq -5, \text{ SPD} \\ \text{para } k = 5 \text{ ou } k = -5, \text{ SPI} \end{cases}$

37 a) $\begin{cases} \text{para } m \neq -1, \text{ SPD} \\ \text{para } m = -1, \text{ SPI} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{para } m \neq 2 \text{ e } m \neq 1, \text{ SPD} \\ \text{para } m = 2 \text{ ou } m = 1, \text{ SI} \end{cases}$

38 $\begin{cases} \text{para } p \neq 2, \text{ SPD} \\ \text{para } p = 2, \text{ SPI} \end{cases}$

39 a) $\begin{cases} \text{para } m \neq 6, \text{ SPD} \\ \text{para } m = 6 \text{ e } n \neq 3, \text{ SI} \\ \text{para } m = 6 \text{ e } n = 3, \text{ SPI} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{para } m \neq 1 \text{ e } m \neq -1, \text{ SPD} \\ \text{para } m = 1 \text{ e } n \neq 1, \text{ SI} \\ \text{para } m = 1 \text{ e } n = 1, \text{ SPI} \\ \text{para } m = -1 \text{ e } n \neq -1, \text{ SI} \\ \text{para } m = -1 \text{ e } n = -1, \text{ SPI} \end{cases}$

40 a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 6x + 3z = 30 \\ x - y = k \end{cases}$

b) zero
c) R$ 1,00

41 a) $\begin{cases} \text{para } m = 2, \text{ SI} \\ \text{para } m \neq 2, \text{ SPI} \end{cases}$

b) SPI para qualquer valor real de m

42 a) $\begin{cases} \text{para } a = -1, \text{ SPD} \\ \text{para } a \neq -1, \text{ SI} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{para } a = -3, \text{ SPD} \\ \text{para } a \neq -3, \text{ SI} \end{cases}$

43 $\begin{cases} \text{para } p \neq 9, \text{ SPI} \\ \text{para } p = 9 \text{ e } q = 12, \text{ SPI} \\ \text{para } p = 9 \text{ e } q \neq 12, \text{ SI} \end{cases}$

44 a) 10 b) 76 c) −13

45 −16

46 SPD

47 a) $\begin{cases} 6a - 8b + 0c + 0d = 0 \\ 6a + 0b - 9c + 0d = 0 \\ 6a + 0b + 0c - 12d = 0 \\ 0a + 0b + 9c - 12d = 0 \end{cases}$

b) SPI

DICA: Uma sequência de números não nulos (a, b, c, d) é inversamente proporcional a outra sequência de números não nulos (x, y, z, w) se, e somente se, $ax = by = cz = dw$.

48 a) 4 b) −4 c) 8 d) 60 e) 24 f) −24 g) −40

49 a) 0 b) 0 c) 0 d) 40 e) 12

50 $S = \{-2, -1, 1, 4\}$

51 qualquer número real k, com $k \neq 1$, $k \neq 2$ e $k \neq -5$

52 0

53 500

54 (13, 16, 21)

55 7

56 0

57 a) $m_{2j} = 4m_{1j} + 3m_{3j}$, com $1 \leqslant j \leqslant 4$

b) 0

DICA: A sequência (x, y, z, w) é combinação linear das sequências (a, b, c, d) e (e, f, g, h) se existirem dois números reais p e q tal que $(x, y, z, w) = (pa + qe, pb + qf, pc + qg, pd + qh)$.

58 a) 4 b) −72 c) −10

59 $S = \{5\}$

60 b

61 −1

62 $\sqrt[3]{6}$

63 0 ou −1

64 a) A é invertível; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) B é invertível; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

65 $\begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 26 \end{bmatrix}$

DICA: Observe que $A \cdot A^{-1} = I$ e $I \cdot X = X$.

66 2

DICA: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 $\frac{5}{2}$

2 19

DICA: Se um número n de dois algarismos possui x e y como algarismos das dezenas e das unidades, respectivamente, então $n = 10x + y$.

3 e

4 demonstração; (2, 3, 1)

DICA: Nas equações do sistema, substitua x, y e z por p, $2p - 1$ e 1, respectivamente.

5 demonstração; resposta possível: (3, 0, −2) e (2, 1, −1)

6 qualquer número real p, com $p \neq 0$

7 0

8 0

9 a) 4
b) (0, 0)
c) Resposta possível: $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ e (3, −2)

10 a) SPD; $S = \{(12, 25, 0, 4)\}$
b) SPI; $S = \{(9 - 2b, b, 4), \text{ com } b \in \mathbb{R}\}$
c) SPI; $S = \{(1 - 12s, 1 + 5s, 3s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\}$

11 e

DICA: Efetue a multiplicação das matrizes do primeiro membro e aplique a definição de igualdade de matrizes.

12 a) V b) V c) F d) F e) F

13 $a = 8$ e $b = -2$

14 a) SPI;
$S = \left\{\left(\frac{11z + 2}{2}, \frac{4 - 5z}{2}, z\right), \text{ com } z \in \mathbb{R}\right\}$

b) SPD; $S = \{(-1, 6, -5)\}$
c) SI; $S = \varnothing$
d) SPI;
$S = \left\{\left(\frac{8 - 5z}{13}, \frac{1 - 12z}{13}, z\right), \text{ com } z \in \mathbb{R}\right\}$

e) SPD; $S = \left\{\left(\frac{11}{9}, \frac{1}{9}\right)\right\}$
f) SPD; S = {(0, 1, 1, 2)}
g) SPD; S = {(0, 0)}
h) SPD; S = {(0, 0, 0)}
i) $S = \{(-y, y), \text{com } y \in \mathbb{R}\}$
j) SPI; $S = \left\{\left(-\frac{11z}{3}, \frac{10z}{3}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$

15 a) SPI b) SPI

16 b

17 S = {(1, −4, 0)}

18 b

19 $S = \left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$

20 a) Resposta possível: (−1, 3, 4)
b) $S = \{(7 - 2z, z - 1, z), \text{com } z \in \mathbb{R}\}$
c) 52

21 d

22 demonstração

23 a) SPI b) SPD c) SI

24 a) zero; SI
b) zero; SPI
c) 9; SPD

25 a) zero; SPI
b) −6; SPD

26 c **27** c

28 qualquer número real m, com $m \neq 3$

29 $k = 6$ ou $k = -6$

30 $k = -\frac{1}{2}$ ou $k = -2$

31 2

32 d

33 $\alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

34 c

35 $\begin{cases} \text{para } a \neq 4 \text{ e } a \neq -4\text{, SPD} \\ \text{para } a = 4\text{, SPI} \\ \text{para } a = -4\text{, SI} \end{cases}$

36 $\begin{cases} \text{para } k \neq 10\text{, SPD} \\ \text{para } k = 10\text{, SPI} \end{cases}$

37 a) $\begin{cases} \text{para } p \neq 1\text{, SPD} \\ \text{para } p = 1\text{, SPI} \end{cases}$
b) $\begin{cases} \text{para } p \neq 4 \text{ e } p \neq -11\text{, SPD} \\ \text{para } p = 4 \text{ ou } p = -11\text{, SPI} \end{cases}$

38 SPI para qualquer valor real de m.

39 SPD para qualquer valor real de p.

40 d

41 a) V b) F c) F d) F

42 e

43 d

44 $p = 3$ e qualquer número real q, com $q \neq 2$

45 d

46 $\begin{cases} \text{para } a \neq 3\text{, SPI} \\ \text{para } a = 3\text{, SI} \end{cases}$

47 a **48** a **49** b

50 $\begin{cases} \text{para } m = 9\text{, SPD} \\ \text{para } m \neq 9\text{, SI} \end{cases}$

51 5

52 a) 14 b) 1 c) 10 d) −57

53 d

54 128
DICA: Ao aplicar o teorema de Laplace em um determinante de ordem n, obtém-se determinante(s) de ordem $n - 1$.

55 qualquer número real m, com $m \neq \frac{1}{2}$

56 −2

57 $\begin{cases} \text{para } p \neq -1\text{, SPD} \\ \text{para } p = -1\text{, SPI} \end{cases}$

58 0 **59** 0 **60** 0

61 demonstração

62 80 **63** $\pm\sqrt{7}$ **64** 5

65 3 **66** −6 **67** a

68 b

69 a) A quarta coluna é combinação linear das duas primeiras colunas. Essa combinação linear pode ser descrita por:
$a_{i4} = 2a_{i1} + a_{i2}$, com $1 \leq i \leq 4$.
b) 0

70 95 **71** 15

72 e
DICA: Aplique o teorema de Jacobi.

73 $AB^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

74 $\frac{94}{27}$ **75** c

76 c
DICA: Isole A^2.

77 $\pm 2\sqrt{2}$ **78** e

79 qualquer número real x, com $x \neq -3$

80 c

81 demonstração

82 demonstração

83 a) sim; $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$
b) sim; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
c) não
d) sim; $\begin{pmatrix} -16 & -3 & 13 \\ 7 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Exercícios contextualizados**

84 a) $3x + 5y + 10z = 48$
b) resposta possível: (1, 1, 4), (1, 3, 3), (11, 3, 0) e (6, 4, 1).

85 4, 6, 8, 10 ou 12 partidas
DICA: A partir da equação $3v + e = 12$, em que v e e representam os números de vitórias e de empates, respectivamente, construa uma tabela.

86 a) $5x + 10y + 15z = 40$
b) 1 verde, 2 azuis e 1 amarela; ou 3 verdes, 1 azul e 1 amarela

87 e
DICA: Após montar a equação sugerida no enunciado, isole uma das variáveis, observando que o seu valor deve ser natural não nulo.

88 a) 640 g b) $19x + 35y = 30.000$

89 R$ 26,02

90 b **91** e

92 c **93** 3 mm^3

94 2.000 maçãs, 3.000 peras e 5.000 laranjas

95 R$ 200.000,00

96 a

97 a

98 c

99 Amélia possui R$ 24,00, Lúcia R$ 18,00 e Maria R$ 36,00.

100 97

101 c

102 a) C b) E c) C d) E

103 b

104 A esmeralda custa R$ 12.500,00, o rubi R$ 25.000,00 e a safira R$ 37.500,00.

105 c
DICA: Após montar o sistema de equações sugerido no enunciado, isole a incógnita que representa a quantia aplicada no fundo C em função de uma incógnita que representa a quantia aplicada em um dos outros fundos, observando que essas incógnitas representam números positivos.

106 c

107 94

DICA: Após montar o sistema de equações sugerido no enunciado, isole a incógnita que representa a quantidade de canetas em função das demais incógnitas, observando que essas incógnitas representam números naturais não nulos.

108 e

109 b

110 a) $\begin{cases} y = z - 2 \\ x = -5z + 27 \end{cases}$

b) 12 borrachas, 1 lápis e 3 canetas; ou 7 borrachas, 2 lápis e 4 canetas; ou 2 borrachas, 3 lápis e 5 canetas

111 b

112 6

113 a) 0,1

b) mais de 100.000 garrafas

114 a) $\begin{cases} x + y = c \\ (2k - 6)x - ky = 0 \end{cases}$

b) $k \in \mathbb{R}_+^*$, com $k \neq 2$

115 a) $\begin{cases} 3kx - 4y = 0 \\ 2kx - 4z = 0 \\ 2ky - 3z = 0 \end{cases}$

b) O sistema é possível e indeterminado para qualquer número k, com $k \in \mathbb{R}_+^*$.

116 c

117 a) $\begin{cases} 10a - 8b + 0c + 0d = 0 \\ 0a + 15b - 10c + 0d = 0 \\ 0a + 0b + kc - 15d = 0 \\ ka + 0b + 0c - 8d = 0 \end{cases}$

b) SPI

118 Não é possível conhecer o preço de cada tipo de pacote de ração, pois o sistema linear obtido a partir desses dados é possível e indeterminado.

DICA: Classifique o sistema linear obtido a partir das informações fornecidas pela tabela.

Exercícios de revisão cumulativa

1 b

2 a) $\begin{bmatrix} 1{,}02 & 1{,}03 \\ (1{,}02)^2 & (1{,}03)^2 \\ (1{,}02)^3 & (1{,}02)^3 \end{bmatrix}$

b) $a_{ij} = \begin{cases} (1{,}02)^i, \text{ se } j = 1 \\ (1{,}03)^i, \text{ se } j = 2 \end{cases}$

3 Não existe número x que satisfaça a igualdade.

4 $a = 3$ e $b = 2$

Análise da resolução

a

CAPÍTULO 8 Análise combinatória e binômio de Newton

Para pensar

1 Resposta pessoal.

2 123456

3 6 senhas

Exercícios propostos

1 a)

	cara	coroa
1	(1, cara)	(1, coroa)
2	(2, cara)	(2, coroa)
3	(3, cara)	(3, coroa)
4	(4, cara)	(4, coroa)
5	(5, cara)	(5, coroa)
6	(6, cara)	(6, coroa)

b) 12

2 4.680

3 a) 1.296 b) 360

4 720

5 a) 500 b) 96

6 a) 36 b) 20

DICA: Observe que, para um número ser par, ele deve terminar com um algarismo par. Comece pelo número de possibilidades da casa das unidades.

7 a) 6 b) 12

8 e

9 c

10 a) 40.000 c) 175.742.424

b) 2.880

11 44 **12** 4 **13** 200

14 216 **15** 320 **16** b

17 12.960 **18** 117.936 **19** 2.880

20 a) 720 c) 18 e) 6

b) 5.040 d) 3 f) 3

21 a) F d) V g) V

b) F e) F h) V

c) V f) F i) F

22 a) 8 e) $\dfrac{1}{n^2 - n}$

b) $\dfrac{1}{720}$ f) $\dfrac{1}{n^2 + n}$

c) $\dfrac{12}{11}$ g) $n^2 + 5n + 6$

d) n h) $\dfrac{1}{n^2 - 5n + 6}$

23 b **24** e **25** b

26 a) S = {8} c) S = {5}

b) S = {37} d) S = {8}

27 c

28 c

DICA: Decomponha em fatores primos o número 40.320 e acrescente o fator 1 ao produto desses primos.

29 $n = 10$

DICA: Acrescente o fator 1 ao produto do segundo membro e represente esse produto, em ordem crescente de números naturais consecutivos.

30 a

31 a) combinação d) arranjo

b) arranjo e) arranjo

c) combinação f) combinação

32 a) 20; 60

b) (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d)

c) (a, b, c), (a, b, d), (a, b, e), (c, b, a), (c, b, d), (c, b, e), (d, b, a), (d, b, c), (d, b, e), (e, b, a), (e, b, c), (e, b, d)

33 a) 120 b) 90 c) 5.040

34 a) 720 b) 30 c) 1.680

35 d **36** a

37 a) S = {5}

b) S = {5}

38 4

39 a) 120

b) BDFGC, BDGFC, BFDGC, BFGDC, BGDFC, BGFDC

40 5.040 **41** 120 **42** 1.728

43 e

44 a) 40.320 d) 4.320

b) 1.440 e) 36.000

c) 720

45 a) 5.040 f) 1.440

b) 720 g) 120

c) 120 h) 720

d) 2.160 i) 4.320

e) 2.880

46 60

DICA: O número de anagramas que apresentam o G antes do D é igual ao número de anagramas que apresentam o G depois do D.

47 a) 2.520 c) 3.360

b) 840 d) 840

48 a) 120 e) 32

b) 60 f) 20

c) 80 g) 40

d) 40

49 d

50 a) 10 b) 16 c) 31

51 a) 126 b) 210

52 5

53 {a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, e}, {b, c}, {b, d}, {b, e}, {c, d}, {c, e}, {d, e}

54 a) 56 b) 35 c) 35

55 a) 21
b) 35
c) 35
DICA: Um polígono é convexo se, e somente se, a reta r que contém qualquer um de seus lados deixa os outros lados em um mesmo semiplano de origem r.
d) 21
e) 15
f) 10

56 a) 21
b) 14

57 35
DICA: Diagonal de um polígono é qualquer segmento de reta com extremos de dois vértices não consecutivos do polígono.

58 a) 26 d) 60
b) 96 e) 90
c) 33

59 150
DICA: Um paralelogramo estará determinado se escolhermos duas retas distintas em um dos feixes de paralelas e duas retas distintas do outro feixe de paralelas.

60 13.605 **61** 35 **62** a

63 45 **64** d **65** 8

66 6 **67** 98 **68** 105

69 a) 56 b) 8 c) 28

70 a) 35 b) 20 c) 15

71 200

72 d

73 a) 24 b) 288 c) 3.744

74 a) $x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$
b) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
c) $16x^4 + 32x^3y^2 + 24x^2y^4 + 8xy^6 + y^8$

75 a

76 a) 216 c) 1.024
b) −1 d) 64

77 d **78** e **79** a

80 d

81 S = {(−5, 3)}

82 1

83 $112x^{12}$

84 $-280x^{11}$

85 a **86** 11.520 **87** −448

88 e **89** b **90** 1.120

Exercícios complementares

• Exercícios técnicos

1 a) $\frac{1}{13}$ e) $\frac{1}{66}$
b) 72 f) $n^2 + 3n + 2$
c) 336 g) $n^2 - 7n + 12$
d) 560

2 d

3 a) S = {7} d) S = {6}
b) S = {6} e) S = ∅
c) S = {1} f) S = ℕ

4 d **5** c **6** b

7 É número composto divisível por 11.
DICA: O número 50! contém o fator 11.

8 e
DICA: O número 23! contém o fator 10.

9 a) S = {6} c) S = ∅
b) S = {5} d) S = {3}

10 $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 3\}$

11 a

12 S = {8}

13 120
DICA: Uma função $f: A \rightarrow B$ é bijetora quando for injetora e sobrejetora. Em outras palavras, elementos distintos do domínio de f devem ter imagens distintas, e todo elemento do contradomínio de f é imagem de algum elemento do domínio.

14 10

15 a) 30 b) 41

16 S = {3} **17** e **18** 4

19 b **20** 10 **21** c

22 a **23** x = 1 e y = 3

24 e **25** 219

26 demonstração

27 d **28** 720 **29** d

30 a **31** 28 **32** 280

33 96

• Exercícios contextualizados

34 b **35** b **36** a

37 a) 250 b) 48

38 a) 324 b) 48

39 b **40** 720 **41** d

42 c **43** d **44** 8.748

45 d **46** a **47** 444

48 d

49 a) 48 b) 36
DICA: Inicialmente, calcule o número de possibilidades de colorir dois países que não tenham uma linha como fronteira comum.

50 b

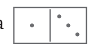
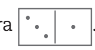
51 a) 600 b) 160 c) 24.960

52 c

53 8
DICA: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

54 a

55 a) 2.730 b) 182 c) 182 d) 364

56 e
DICA: Calcule inicialmente o número de pedras que apresentam números de pontos distintos, e observe, por exemplo, que a pedra  é a mesma pedra .

57 19 **58** b **59** d

60 e

61 a) F c) V e) F
b) F d) V

62 c **63** c **64** c

65 a **66** c **67** a

68 d **69** 720 **70** e

71 c **72** a

73 a) 120 d) 360 g) 24
b) 120 e) 360 h) 144
c) 24 f) 216 i) 360

74 a) $(n - 1)!$
b) $(n - 1) \cdot (n - 1)!$

75 a) $(n + 4)!$
b) $48 \cdot n!$
c) $24 \cdot (n + 1)!$

76 7

77 a) 120 b) 62 c) 63ª posição
DICA: O resultado do item **b** é o total de números que vêm antes de 34.215.

78 b

79 a) 15.120
b) 1.680

80 a) 3.360 d) 1.260 g) 420
b) 840 e) 1.680 h) 840
c) 1.680 f) 960

81 e **82** 56 **83** 1.260

84 1.365
DICA: O número de sequências é igual ao número de permutações dos elementos → ... →↑ ... ↑.

85 b **86** e **87** c
88 11 **89** c **90** 70
91 d **92** a **93** 300
94 6.720 **95** b **96** a
97 c **98** 66 **99** b
100 125 **101** 21 **102** 2.520
103 90 **104** 205 **105** c

106 a) 480.700
b) 474.265
c) 1.365.289

Exercícios de revisão cumulativa

1 a) $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$
b) (1, 0)

2 a) $p = 1$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$
b) $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$

3 a

4 $\frac{1}{2}$

Análise da resolução

3.600

CAPÍTULO 9 Probabilidade

Para pensar

1 0,002 **2** 0,00002

Exercícios propostos

1 e **2** 60%

3 a) 70% b) 30%

4 d

5 a) $\frac{1}{37}$ b) $\frac{10}{37}$ c) $\frac{26}{37}$

6 a) $\frac{1}{2}$ ou 50% c) $\frac{3}{4}$ ou 75%
b) $\frac{1}{4}$ ou 25%

7 a) $\frac{1}{8}$ ou 12,5% c) $\frac{7}{8}$ ou 87,5%
b) $\frac{3}{8}$ ou 37,5% d) $\frac{7}{8}$ ou 87,5%

8 a) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{6}$ e) 1
b) $\frac{1}{12}$ d) 0

9 $\frac{5}{9}$

10 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$

11 $\frac{13}{25}$ ou 52%
DICA: Construa um diagrama de Venn.

12 $\frac{1}{3}$ **13** 22% **14** a

15 $\frac{5}{16}$ ou 31,25%
DICA: O número de permutações das letras c c c k k é $P_5^{(3,2)}$.

16 a) V b) V c) F d) F

17 a
DICA: Sendo A um evento qualquer de um espaço amostral E, a probabilidade P(A) obedece a condição $0 \leq P(A) \leq 1$.

18 a) 0 b) 1

19 a) $\frac{1}{6}$ b) 0

20 28

21 $\frac{2}{5}$ **22** $\frac{3}{4}$

23 e
DICA: Se A e B são eventos complementares, a soma de suas probabilidades é 1.

24 a) 729
b) Resposta possível: (1, 3, 5)
c) 125
d) $\frac{125}{729}$
e) $\frac{604}{729}$

25 $\frac{6}{7}$ **26** $\frac{6}{7}$ **27** $\frac{7}{9}$

28 $\frac{1}{2}$ **29** $\frac{3}{5}$ **30** e

31 $\frac{3}{4}$
DICA: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

32 $\frac{2}{15}$ **33** $\frac{1}{4}$

34 $\frac{5}{6}$
DICA: A probabilidade P(B/A) pode ser calculada de duas maneiras equivalentes:
$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ ou
$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

35 $\frac{1}{5}$

36 a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{5}$

37 $\frac{1}{2}$ **38** $\frac{19}{99}$ **39** $\frac{3}{7}$

40 $\frac{53}{75}$
DICA: Construa um diagrama de Venn.

41 $\frac{1}{175.760}$

42 a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{13}{15}$

43 a) 36 b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{6}$
e) Sim, pois P(A/B) = P(A).
DICA: Se P(A/B) = P(A) os eventos são independentes, se $P(A/B) \neq P(A)$ os eventos são dependentes.

44 a) 12 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$
e) Não, pois $P(B/A) \neq P(B)$.

45 a) sim b) não

46 a) $\frac{3}{100}$ b) $\frac{9}{50}$ c) $\frac{1}{8}$

47 a) $\frac{1}{24}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{12}$

48 a) $\frac{10}{63}$ b) $\frac{10}{21}$ c) $\frac{1}{126}$ d) $\frac{125}{126}$
DICA: No item **d**, só não podem sair 5 canetas de tinta azul.

49 $\frac{3}{32}$

50 a) $\frac{10}{33}$ b) $\frac{1}{22}$ c) $\frac{21}{22}$
DICA: A probabilidade de se retirarem elementos simultaneamente de um conjunto é igual à probabilidade de retirá-los um a um sem reposição. Ao se supor retiradas sucessivas e sem reposição deve-se levar em consideração a ordem de retirada.

51 $\frac{1}{21}$

52 a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{3}{14}$ c) $\frac{2}{7}$

53 a) $\frac{5}{22}$ b) $\frac{6}{11}$ c) $\frac{1}{66}$

54 $\frac{6}{7}$ **55** d

56 a) 81% b) 1% c) 9% d) 18%

Exercícios complementares

- **Exercícios técnicos**

1 a

2 a) 10 b) 6

3 a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{17}{24}$

4 a) $x = 0{,}3$ b) $x = 0{,}5$

- **Exercícios contextualizados**

5 a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{27}$

6 12,5%
DICA: O produto de dois números é ímpar se, e somente se, ambos forem ímpares.

7 e **8** e **9** c

10 $\frac{9}{20}$ **11** e **12** d

13 d **14** a **15** a

16 $\frac{3}{8}$ **17** b **18** b

19 a) $\frac{1}{35}$ b) $\frac{1}{7}$

DICA: Considere o espaço amostral $E = \{\{x, y, z\} \mid x, y \text{ e } z$ são dias de 2ª-feira a domingo$\}$ e os eventos $A = \{\{2^a\text{-feira}, 5^a\text{-feira}, \text{domingo}\}\}$ e $B = \{\{a, b, c\} \in E \mid a, b$ e c são dias consecutivos$\}$.

20 $\frac{1}{4}$

21 a) 12.271.512 b) $\frac{1}{12.271.512}$

22 a) 35 b) $\frac{18}{35}$

23 $\frac{10}{21}$

24 a

25 a) $\frac{1}{11}$ b) $\frac{5}{22}$

DICA: Considere o espaço amostral $E = \{\{x, y\} \mid x$ e y são pessoas da sala$\}$ e o evento $A = \{\{a, b\} \in E \mid a$ e b são marido e mulher$\}$.

26 b **27** $\frac{1}{10}$

28 a) $\frac{3}{190}$

DICA: Considere o espaço amostral $E = \{x \mid x$ é fila formada pelos 20 alunos$\}$ e o evento $A = \{y \in E \mid y$ é fila que contém Gabriel, Mateus e Roger juntos em qualquer ordem$\}$.

b) $\frac{7}{95}$

29 $\frac{39}{277}$

DICA: A soma S_n dos n termos da PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

30 a) 3.003 b) 450 c) $\frac{95}{273}$

31 a) 66 b) $\frac{31}{66}$

32 a) 0 b) 1

33 a) $\frac{1}{20}$ b) 0 c) 1

34 12 e 22

35 d

36 0,88

37 $\frac{5}{23}$

38 $\frac{1}{6}$

DICA: A soma das probabilidades de dois eventos complementares é 1.

39 b **40** $\frac{1}{10}$ **41** $\frac{7}{8}$

42 $\frac{1}{5}$

43 $\frac{26}{29}$

DICA: Não pode ocorrer o sorteio de dois alunos que votaram no candidato derrotado.

44 e

45 c

46 $\frac{109}{200}$ ou 54,5%

47 $\frac{17}{20}$ **48** $\frac{5}{11}$ **49** $\frac{11}{24}$

50 91%

DICA: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

51 $\frac{13}{20}$

52 5

DICA: Uma boa forma de visualizar o cruzamento de um grande número de informações é construir uma tabela. Nesse caso, a tabela pode ter duas linhas, homens e mulheres, por três colunas, jornal A, jornal B e jornal C.

53 $\frac{71}{260}$

54 a) 20; 8 b) $\frac{3}{5}$

55 32

56 0,1

DICA: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

57 **I.** c **II.** a

58 $\frac{1}{4}$

59 $\frac{2}{9}$

DICA: Construa uma tabela.

60 $\frac{7}{24}$

61 a) $a = 160$; $b = 240$; $c = 720$; $d = 760$

b) $\frac{1}{3}$

DICA: $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

62 d

63 $\frac{1}{3}$ **64** $\frac{1}{2}$

65 a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{3}{7}$

66 78%

67 a) 72

b) 40

c) 40

d) $\frac{1}{2}$

e) Dependentes, pois $P(B/A) \neq P(B)$.

68 a) 16

b) $P(S) = \frac{1}{4}$

c) $P(T) = \frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{4}$

e) Sim, pois $P(S/T) = P(S)$.

69 a) $\frac{1}{5}$

b) 0

c) No item **a**, pois $P(B/A) = P(B)$.

70 a) $E = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, k, k), (k, c, c), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)\}$

b) $A = \{(c, c, k), (c, k, c), (c, k, k), (k, c, c), (k, c, k), (k, k, c)\}$

c) $B = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k\ c), (k, c, c)\}$

d) demonstração

DICA: Mostre que $P(B/A) = P(B)$.

71 $\frac{28}{57}$

72 a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{3}{14}$ c) $\frac{1}{14}$

73 a) $\frac{5}{308}$

DICA: O número de permutações das letras VVVVAA é dado por $P_6^{(4,2)}$

b) $\frac{1}{132}$

74 a **75** c **76** c

77 7,2% **78** $\frac{17}{30}$ **79** e

80 $\frac{3}{11}$

DICA: A primeira aresta escolhida pode ser qualquer uma, logo a probabilidade da primeira escolha é 1. A segunda aresta escolhida, dentre as restantes, deve ser paralela à primeira.

81 a) $\frac{11}{20}$ b) $\frac{9}{20}$ c) $\frac{561}{4.940}$

82 a) 51,2% b) 38,4%

83 d **84** c **85** 12,8%

86 e

DICA: Indicando por A, B, C e D os destinatários cujas cartas adequadas seriam a, b, c e d, respectivamente, faça uma tabela com todas as possibilidades.

87 e

88 a) $\frac{5}{18}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{6.305}{6.561}$

DICA: Os eventos V e N determinados, respectivamente, por "haver vencedor até a 4ª rodada" e "não haver vencedor até a 4ª rodada" são complementares.

89 $\frac{83}{3.422}$

90 a) $\frac{7}{45}$ b) $\frac{43}{180}$

91 $\frac{4}{5}$

92 a) $\frac{15}{56}$ b) $\frac{1}{3}$

93 $\frac{9.997}{10.000}$

Exercícios de revisão cumulativa

1 12 cm

2 d **3** d **4** c

Análise da resolução

$\frac{9}{19}$

TEXTO COMPLEMENTAR

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Especificamente sobre os números naturais, há um princípio que pode ser usado em diversas demonstrações. A necessidade desse princípio pode ser sentida observando as igualdades:

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$

Você arriscaria prever o resultado de $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$?

Um observador atento perceberia que, nas igualdades apresentadas, em cada soma acrescentou-se o próximo número ímpar aos números ímpares da soma anterior, e que os resultados são os quadrados perfeitos: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 e 7^2. Isso nos leva a suspeitar que $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$ deve ser 8^2, ou seja, 64. De fato, é mesmo:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$$

E a próxima soma: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$ seria 9^2; e a próxima, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$ seria 10^2; e assim por diante.

Mesmo que a nossa suspeita se concretizasse para milhares de somas, acrescentando o próximo número ímpar a cada soma anterior, ainda assim não teríamos certeza sobre a próxima soma. Essa certeza pode ser obtida pelo método de demonstração conhecido como **princípio da indução matemática**, enunciado a seguir.

O princípio da indução matemática também é chamado de princípio da indução finita, ou, ainda, princípio da indução completa.

Uma proposição $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n não nulo se forem obedecidas as duas condições a seguir:

I. $P(1)$ é verdadeira.

II. Para todo $k \in \mathbb{N}^*$ vale a implicação:

$P(k)$ é verdadeira $\Rightarrow$ $P(k + 1)$ é verdadeira.

Na implicação ao lado, isto é, $P(k)$ é verdadeira $\Rightarrow$ $P(k + 1)$ é verdadeira, a sentença "$P(k)$ é verdadeira" é chamada de **hipótese de indução**.

Para entender esse princípio, consideremos o conjunto A, com $A \subset \mathbb{N}^*$, dos valores de n para os quais $P(n)$ é verdadeira, tal que a propriedade $P(n)$ seja verdadeira para $n = 1$. Assim, temos:

I. $1 \in A$, isto é, $P(1)$ é verdadeira.

II. Admitindo a validade da implicação $P(k)$ é verdadeira $\Rightarrow$ $P(k + 1)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$P(1)$ é verdadeira $\Rightarrow$ $P(2)$ é verdadeira; logo, $2 \in A$.

$P(2)$ é verdadeira $\Rightarrow$ $P(3)$ é verdadeira; logo, $3 \in A$.

$P(3)$ é verdadeira $\Rightarrow$ $P(4)$ é verdadeira; logo, $4 \in A$.

$P(4)$ é verdadeira $\Rightarrow$ $P(5)$ é verdadeira; logo, $5 \in A$.

...

$P(k)$ é verdadeira $\Rightarrow$ $P(k + 1)$ é verdadeira.

Assim, todos os números naturais não nulos pertencem a A, isto é, $\mathbb{N}^* \subset A$. Mas, por hipótese, $A \subset \mathbb{N}^*$; logo, $A = \mathbb{N}^*$. Portanto, a propriedade $P(n)$ é válida para todo número natural não nulo.

Exercícios resolvidos

1 Provar, pelo princípio da indução matemática, que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2, isto é,
$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução
Indicando por $P(n)$ a propriedade a ser provada, vamos aplicar o princípio da indução matemática.

I. $P(1)$ é verdadeira, pois para $n = 1$ a propriedade se resume a:
$2 \cdot 1 - 1 = 1^2$

II. Provaremos a validade da implicação $\underbrace{P(k) \text{ é verdadeira}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow P(k + 1)$ é verdadeira, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, isto é:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Temos:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

por hipótese de indução

Logo, vale a implicação citada em (II).
Como $P(n)$ satisfaz (I) e (II), concluímos, pelo PIM, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Provar, pelo princípio da indução matemática, que
$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \dfrac{(1 + n)n}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução
Indicando por $P(n)$ a propriedade a ser provada, vamos aplicar o princípio da indução matemática.

I. $P(1)$ é verdadeira, pois para $n = 1$ a propriedade se resume a:
$1 = \dfrac{(1 + 1) \cdot 1}{2}$

II. Provaremos a validade da implicação $\underbrace{P(k) \text{ é verdadeira}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow P(k + 1)$ é verdadeira, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, isto é:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + ... + k = \frac{(1 + k)k}{2}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (k + 1) = \frac{(k + 2)(k + 1)}{2}$$

Temos:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + ... + k}_{} + (k + 1) = \underbrace{\frac{(1 + k)k}{2}}_{} + (k + 1) =$$

por hipótese de indução

$$= \frac{(1 + k)k}{2} + \frac{2(k + 1)}{2} = \frac{(k + 2)(k + 1)}{2}$$

Logo, vale a implicação citada em (II).
Como $P(n)$ satisfaz (I) e (II), concluímos, pelo PIM, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Vamos considerar $2n$ pessoas em uma sala, com $n \in \mathbb{N}^*$, e que cada pessoa cumprimente uma das outras, uma única vez, com um aperto de mão. Aplicando o princípio da indução matemática, provar que o número de apertos de mãos entre essas pessoas é $2n^2 - n$.


TIM PANNELL/CORBIS/LATINSTOCK

Resolução

Indiquemos por $P(n)$ a propriedade a ser provada, isto é, "se $2n$ pessoas estão na sala, com $n \in \mathbb{N}^*$, e cada uma delas cumprimenta cada uma das outras, uma única vez, com um aperto de mão, então o número de apertos de mãos é $2n^2 - n$".

Temos:

I. $P(1)$ é verdadeira, pois para $n = 1$ o número de pessoas da sala é 2 e, portanto, haverá um único aperto de mão, ou seja, o número de apertos de mãos é $2 \cdot 1^2 - 1$.

II. Provaremos a validade da implicação $\underbrace{P(k) \text{ é verdadeira}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow P(k + 1)$ é verdadeira, para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k \geqslant 1$.

Isto é, se $2k$ pessoas na sala promovem $2k^2 - k$ apertos de mãos, então $2(k + 1)$ pessoas na sala promoverão
$2(k + 1)^2 - (k + 1) = 2k^2 + 3k + 1$ apertos de mãos.

De fato:

Para $n = k + 1$ teremos $2k + 2$ pessoas na sala, isto é, acrescentamos duas novas pessoas às $2k$ pessoas que já estavam na sala, admitidas na hipótese de indução. Essas novas pessoas se cumprimentam e cada uma delas cumprimenta cada uma das $2k$ pessoas que já estavam na sala. Assim, aos apertos de mãos com as pessoas que já estavam na sala, acrescentam-se mais $4k + 1$ apertos de mãos. Portanto, o total de apertos de mãos entre as $2k + 2$ pessoas é dado por $2k^2 - k + 4k + 1$, ou seja, $2k^2 + 3k + 1$. Logo, vale a implicação citada em (II).

Como $P(n)$ satisfaz (I) e (II), concluímos, pelo PIM, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 1$.

Outra forma do princípio da indução matemática

Uma proposição $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n, com $n \geqslant b$, em que b é um número natural fixo, se forem obedecidas as duas condições a seguir.

I. $P(b)$ é verdadeira.

II. Para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k \geqslant b$, temos a implicação:

$$P(k) \text{ é verdadeira} \Rightarrow P(k + 1) \text{ é verdadeira.}$$

Exercícios resolvidos

4 Provar, pelo princípio da indução matemática, que:

$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + ... + (3n - 8) = \dfrac{3n^2 - 13n + 14}{2}$, $\forall\, n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$.

Resolução

Indicando por $P(n)$ a propriedade a ser provada, vamos aplicar o princípio da indução matemática:

I. $P(3)$ é verdadeira, pois para $n = 3$ a propriedade se resume a:

$$1 = \frac{3 \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 + 14}{2}$$

II. Provaremos a validade da implicação $\underbrace{P(k) \text{ é verdadeira}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeira, para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k \geqslant 3$, isto é:

$$\underbrace{1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3k - 8) = \frac{3k^2 - 13k + 14}{2}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3k - 8) + [3(k + 1) - 8] = \frac{3(k+1)^2 - 13(k+1) + 14}{2}$$

Observando que $\frac{3(k+1)^2 - 13(k+1) + 14}{2} = \frac{3(k^2 + 2k + 1) - 13(k+1) + 14}{2} = \frac{3k^2 - 7k + 4}{2}$, a implicação que devemos provar pode ser representada por:

$$\underbrace{1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3k - 8) = \frac{3k^2 - 13k + 14}{2}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3k - 8) + [3(k + 1) - 8] = \frac{3k^2 - 7k + 4}{2}$$

Temos:

$$\underbrace{1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3k - 8)} + [3(k + 1) - 8] = \underbrace{\frac{3k^2 - 13k + 14}{2}} +$$

por hipótese de indução

$$+ [3(k+1) - 8] = \frac{3k^2 - 13k + 14}{2} + 3k - 5 = \frac{3k^2 - 13k + 14 + 6k - 10}{2} =$$

$$= \frac{3k^2 - 7k + 4}{2}$$

Logo, vale a implicação citada em (II).

Como $P(n)$ satisfaz (I) e (II), concluímos, pelo PIM, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 3$.

5 Provar, pelo princípio da indução matemática, que:

$5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot \ldots \cdot 5^n = 5^{\frac{n^2 + n - 2}{2}}$, $\forall\, n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

Resolução

Indicando por $P(n)$ a propriedade a ser provada, vamos aplicar o princípio da indução matemática:

I. $P(2)$ é verdadeira, pois para $n = 2$ a propriedade se resume a:

$$5^2 = 5^{\frac{2^2 + 2 - 2}{2}}$$

II. Provaremos a validade da implicação $\underbrace{P(k) \text{ é verdadeira}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeira, para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k \geqslant 2$, isto é:

$$\underbrace{5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot \ldots \cdot 5^k = 5^{\frac{k^2 + k - 2}{2}}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot \ldots \cdot 5^k \cdot 5^{k+1} = 5^{\frac{(k+1)^2 + (k+1) - 2}{2}}$$

Observando que $\frac{(k+1)^2 + (k+1) - 2}{2} = \frac{k^2 + 2k + 1 + k + 1 - 2}{2} = \frac{k^2 + 3k}{2}$, a implicação que devemos provar pode ser representada por:

$$\underbrace{5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot \ldots \cdot 5^k = 5^{\frac{k^2 + k - 2}{2}}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot \ldots \cdot 5^k \cdot 5^{k+1} = 5^{\frac{k^2 + 3k}{2}}$$

Temos:

$$\underbrace{5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot \ldots \cdot 5^k}_{\text{por hipótese de indução}} \cdot 5^{k+1} = \underbrace{5^{\frac{k^2+k-2}{2}}} \cdot 5^{k+1} =$$

$$= 5^{\frac{k^2+k-2}{2}+k+1} = 5^{\frac{k^2+k-2+2k+2}{2}} = 5^{\frac{k^2+3k}{2}}$$

Logo, vale a implicação citada em (II).

Como $P(n)$ satisfaz (I) e (II), concluímos, pelo PIM, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$.

Exercícios propostos

1 Prove, pelo princípio da indução matemática, que:

a) A soma dos n primeiros números naturais pares não nulos é igual a $n^2 + n$, isto é, $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \ldots + 3 \cdot 2^n = 6(2^n - 1)$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $\left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d) $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 3}{2}$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

e) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Seja $P(n)$ a proposição:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

a) Prove que, para todo número natural k não nulo, vale a implicação: $P(k)$ é verdadeira $\Rightarrow$ $P(k+1)$ é verdadeira.

b) Com a prova do item **a**, pode-se concluir que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$?

3 Prove, pelo princípio da indução matemática, que:

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 6} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

d) $2^n > n$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

4 Prove, pelo princípio da indução matemática, que:

a) $5 + 9 + 13 + 17 + \ldots + (4n + 5) = 2n^2 + 7n + 5$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}$.
(Note que o menor valor que n deve assumir é zero; logo, você deve iniciar a demonstração provando que $P(0)$ é verdadeira.)

b) $10 + 14 + 18 + 22 + \ldots + (2 + 4n) = 2n^2 + 4n - 6$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

c) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^n = 2^{\frac{n^2+n-6}{2}}$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$.

5 Há muitos e muitos anos, em uma ilha distante do continente, no oceano Pacífico, habitava uma única espécie de ave, hoje extinta. Nenhuma dessas aves jamais saiu da ilha nem jamais chegou à ilha uma nova ave vinda de outro lugar.

Essas aves eram negras e tinham, em sua cabeça, uma única pena vermelha.

Nenhuma delas jamais viu sua própria pena vermelha, mas todos os dias cada uma delas via a pena vermelha de todas as outras habitantes da ilha. Essa pena vermelha era tão venerada que, se uma ave, de algum modo, percebesse a perda de sua pena vermelha, no dia seguinte a essa constatação, ela se suicidava.

Certa manhã, todas as aves da ilha constataram, por indícios, que alguma(s) ave(s) perdera(m) sua pena vermelha. Exatamente n dias depois dessa constatação, houve o suicídio de pelo menos uma ave. Supondo que todas as aves raciocinaram de maneira correta, quantas se suicidaram nesse dia?

6 Admitindo como conhecido o teorema:

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Prove, por indução matemática, que a soma S das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados (ou n vértices) é $S = (n - 2) \cdot 180°$, para qualquer número n de lados, com $n \geqslant 3$.

TEXTO COMPLEMENTAR

Demonstração da propriedade P1 dos determinantes

O determinante de uma matriz quadrada A qualquer é igual ao determinante de sua transposta, ou seja:

$$\det A = \det A^t$$

Demonstração

Indicando a propriedade por $P(n)$, podemos demonstrá-la pelo princípio da indução matemática para $n \in \mathbb{N}^*$:

I. $P(1)$ é verdadeira, pois, sendo $A = (a_{11})$, temos $A^t = (a_{11})$ e, portanto, $\det A = \det A^t = a_{11}$.

II. Provaremos a validade da implicação:

$$\underbrace{P(k) \text{ é verdadeira}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow P(k + 1) \text{ é verdadeira, para todo } k \in \mathbb{N}^*$$

Ou seja, devemos mostrar que, se o determinante de toda matriz quadrada de ordem k é igual ao determinante de sua transposta, então o determinante de toda matriz quadrada de ordem $k + 1$ é igual ao determinante de sua transposta.

De fato, seja a matriz B de ordem $k + 1$:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{(1)(k+1)} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{(2)(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{(k+1)(1)} & b_{(k+1)(2)} & b_{(k+1)(3)} & \cdots & b_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace na primeira coluna de B, temos:

$$\det B = b_{11} \cdot B_{11} + b_{21} \cdot B_{21} + b_{31} \cdot B_{31} + \ldots + b_{(k+1)(1)} \cdot B_{(k+1)(1)}$$

em que cada B_{ij} é o cofator do elemento b_{ij}, isto é:

$$B_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{(2)(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{(k+1)(2)} & b_{(k+1)(3)} & \cdots & b_{(k+1)(k+1)} \end{vmatrix}$$

$$B_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{(1)(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{(k+1)(2)} & b_{(k+1)(3)} & \cdots & b_{(k+1)(k+1)} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$B_{(k+1)(1)} = (-1)^{k+2} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{(1)(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k2} & b_{k3} & \cdots & b_{(k)(k+1)} \end{vmatrix}$$

Como cada um dos determinantes acima tem ordem k, temos, pela hipótese de indução, que cada um deles é igual ao determinante da matriz transposta que o originou, e portanto os cofatores $B_{11}, B_{21}, B_{23}, \ldots, B_{(k+1)(1)}$ são respectivamente iguais aos cofatores dos elementos $b_{11}, b_{21}, b_{23}, \ldots, b_{(k+1)(1)}$ da primeira linha da matriz B^t:

$$B^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & \cdots & b_{(k+1)(1)} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \cdots & b_{(k+1)(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{(1)(k+1)} & b_{(2)(k+1)} & b_{(3)(k+1)} & \cdots & b_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos que det B = det B^t.

TEXTO COMPLEMENTAR

Demonstração da propriedade P3 dos determinantes

Permutando entre si duas filas paralelas de uma matriz quadrada A, obtemos uma nova matriz B tal que $B = -\det A$.

Demonstração

Basta provar a propriedade para linhas, pois toda propriedade válida para linhas é válida também para colunas.

Indicando a propriedade por $P(n)$, podemos demonstrá-la pelo princípio da indução matemática para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 2$:

I. $P(2)$ é verdadeira, pois, permutando as linhas de $A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, obtemos $B = \begin{pmatrix} p & q \\ m & n \end{pmatrix}$ e:

$$\det A = mq - pn = -(pn - mq) = -\det B.$$

II. Provaremos a validade da implicação:

$$\underbrace{P(k) \text{ é verdadeira}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow P(k+1) \text{ é verdadeira, para todo } k \in \mathbb{N}, \text{ com } k \geqslant 2$$

Ou seja, se em toda matriz quadrada de ordem k a permutação de duas linhas muda o sinal do determinante, então em toda matriz de ordem $(k + 1)$ a permutação de duas linhas muda o sinal do determinante.

De fato, sejam as matrizes A e B, de mesma ordem $(k + 1)$, tal que B foi obtida por uma permutação de duas linhas de A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{(1)(k+1)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{(2)(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k+1)(1)} & a_{(k+1)(2)} & a_{(k+1)(3)} & \cdots & a_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{(1)(k+1)} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{(2)(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{(k+1)(1)} & b_{(k+1)(2)} & b_{(k+1)(3)} & \cdots & b_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace em uma linha i de B, que não seja uma das linhas que foram permutadas, temos:

$$\det B = b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + b_{i3}B_{i3} + \ldots + b_{(i)(k+1)}B_{(i)(k+1)}$$

Observe que:

- cada elemento b_{ij} da linha escolhida para o desenvolvimento por Laplace é igual ao seu correspondente a_{ij} na matriz A;
- cada cofator B_{ij} é o produto da potência $(-1)^{i+j}$ pelo determinante D da matriz que se obtém eliminando a linha i e a coluna j de B;
- cada cofator A_{ij} é o produto da potência $(-1)^{i+j}$ pelo determinante D' da matriz que se obtém eliminando a linha i e a coluna j de A.

Como D e D' têm ordem k e um deles é obtido a partir do outro por uma permutação de linhas, temos, **por hipótese de indução**, que $D = -D'$ e, portanto, $B_{ij} = -A_{ij}$.
Logo:

$\det B = b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + b_{i3}B_{i3} + \dots + b_{(i)(k+1)}B_{(i)(k+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det B = a_{i1}(-A_{i1}) + a_{i2}(-A_{i2}) + a_{i3}(-A_{i3}) + \dots + a_{(i)(k+1)}(-A_{(i)(k+1)})$

$\therefore \det B = -(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \dots + a_{(i)(k+1)}A_{(i)(k+1)})$

$\therefore \det B = -\det A$

TEXTO COMPLEMENTAR

Demonstração da propriedade P7 dos determinantes

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Demonstração

Vamos demonstrar essa propriedade para matrizes triangulares A cujos elementos abaixo da diagonal principal são nulos. Como $\det A = \det A^t$, a demonstração vale também para matrizes triangulares cujos elementos acima da diagonal principal são nulos.

Indicando a propriedade por $P(n)$, podemos demonstrá-la pelo princípio da indução matemática para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$:

I. $P(2)$ é verdadeira, pois para $n = 2$ o teorema de Laplace, aplicado à primeira coluna, nos fornece:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot A_{11} = ac$$

II. Provaremos a validade da implicação:

$$\underbrace{P(k) \text{ é verdadeira}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow P(k+1) \text{ é verdadeira, para todo } k \in \mathbb{N}, \text{ com } k \geqslant 2$$

Isto é, provaremos que, se o determinante de toda matriz triangular de ordem k é o produto dos elementos da diagonal principal, então o determinante de toda matriz triangular de ordem $k + 1$ é o produto dos elementos da diagonal principal.

De fato, seja a matriz triangular de ordem $k + 1$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{(1)(k+1)} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{(2)(k+1)} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace na primeira coluna, temos:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} \quad \text{(I)}$$

em que:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{(2)(k+1)} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{(3)(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(k+1)(k+1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{(2)(k+1)} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{(3)(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(k+1)(k+1)} \end{vmatrix}$$

Como A_{11} é um determinante de ordem k, temos, por hipótese de indução:

$A_{11} = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{(k+1)(k+1)}$ (II)

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{(k+1)(k+1)}$

Ou seja, o determinante da matriz triangular A é o produto dos elementos da diagonal principal.

TEXTO COMPLEMENTAR

Método do escalonamento para a obtenção da inversa de uma matriz

Para a obtenção da inversa de uma matriz, podemos optar por outro método, fundamentado no escalonamento de sistemas lineares. Por exemplo, a matriz A abaixo tem o determinante diferente de zero e, portanto, admite inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Sendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(I)}$$

Efetuando a multiplicação e aplicando o conceito de igualdade de matrizes, podemos separar as equações assim obtidas nos três sistemas lineares a seguir:

$$\begin{cases} a + 2d + 3g = 1 \\ 2a + 5d + 7g = 0 \\ 3a + 7d + 11g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2e + 3h = 0 \\ 2b + 5e + 7h = 1 \\ 3b + 7e + 11h = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c + 2f + 3i = 0 \\ 2c + 5f + 7i = 0 \\ 3c + 7f + 11i = 1 \end{cases}$$

A seguir, escalonamos cada um dos sistemas, de modo que a matriz dos coeficientes de cada um deles se transforme na matriz identidade. Após esses cálculos obtemos:

$$\begin{cases} a + 0d + 0g = 6 \\ 0a + d + 0g = -1 \\ 0a + 0d + g = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 0e + 0h = -1 \\ 0b + e + 0h = 2 \\ 0b + 0e + h = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c + 0f + 0i = -1 \\ 0c + f + 0i = -1 \\ 0c + 0f + i = 1 \end{cases}$$

Note que, em cada sistema, os termos independentes formam uma coluna da matriz inversa. Além disso, a ordem inicial das incógnitas permanece inalterada.

Para agilizar esse processo, em vez de efetuar a multiplicação no primeiro membro da igualdade (I), vamos aplicar o escalonamento na forma matricial de tal modo a transformar a matriz A na matriz identidade. Veja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nota:

Observando que nesse processo a matriz das variáveis $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ não interfere no resultado, podemos adotar a notação:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

com o significado de: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Assim, temos:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Logo, a matriz à direita da linha tracejada é a inversa de A.

TEXTO COMPLEMENTAR

O triângulo de Pascal

O filósofo, físico e matemático francês Blaise Pascal contribuiu para as ciências com pesquisas em variados temas. Na Matemática, dentre muitos outros trabalhos, ele se dedicou ao estudo de uma tabela de números binomiais conhecida como **triângulo de Yang Hui**, que foi um matemático chinês do século XIII. Na verdade, esse triângulo é mais antigo que Yang Hui, que viveu de 1238 a 1298.

IMAGNO/GETTY IMAGES

Blaise Pascal (1623-1662).

Devido ao estudo minucioso e às inúmeras propriedades descobertas por Pascal acerca do **triângulo de Yang Hui**, essa tabela ficou conhecida, em muitos países, inclusive no Brasil, como **triângulo de Pascal**, apresentado a seguir, em que cada número binomial $\binom{n}{p}$ está localizado na linha n e coluna p:

	coluna 0	coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4	...	coluna n
linha 0 →	$\binom{0}{0}$						
linha 1 →	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
linha 2 →	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
linha 3 →	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
linha 4 →	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
⋮	⋮						
linha n →	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	...	$\binom{n}{n}$
	⋮						

Observe que:

- o primeiro número binomial de cada linha é igual a 1, pois todo binomial de denominador zero é igual a 1;
- o último número binomial de cada linha é igual a 1, pois todo binomial de numerador igual ao denominador é igual a 1;
- pela relação de Stiffel, a soma de dois números binomiais consecutivos de uma linha é igual ao binomial localizado na linha seguinte, embaixo do segundo binomial somado; por exemplo $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$.

Com essas observações, podemos construir o triângulo de Pascal com os valores dos binomiais já calculados:

	coluna 0	coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4	coluna 5	coluna 6	coluna 7	
linha 0 →	1								
linha 1 →	1	1							
linha 2 →	1	2	1						
linha 3 →	1	3	3	1					
linha 4 →	1	4	6	4	1				
linha 5 →	1	5	10	10	5	1			
linha 6 →	1	6	15	20	15	6	1		
linha 7 →	1	7	21	35	35	21	7	1	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Observe que o valor do binomial $\binom{n}{p}$ é o número localizado na linha n e coluna p.

Exemplos

a) O valor do binomial $\binom{5}{2}$ é o número localizado na linha 5 e coluna 2, isto é, $\binom{5}{2} = 10$.

b) O valor do binomial $\binom{7}{4}$ é o número localizado na linha 7 e coluna 4, isto é, $\binom{7}{4} = 35$.

c) O desenvolvimento da potência $(x + a)^6$ apresenta os coeficientes na 6ª linha do triângulo de Pascal:
$(x + a)^6 = 1x^0a^6 + 6x^1a^5 + 15x^2a^4 + 20x^3a^3 + 15x^4a^2 +$
$+ 6x^5a^1 + 1x^6a^0$

Propriedades do triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal possui inúmeras propriedades, das quais destacamos as seguintes:

P1. A soma dos elementos que formam a linha n do triângulo de Pascal é 2^n, isto é:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Exemplos

a)

$$\begin{array}{lllllllll}
\text{linha 0} \longrightarrow & 1 & & & & & \longrightarrow & \text{soma } 2^0 = 1 \\
\text{linha 1} \longrightarrow & 1 & 1 & & & & \longrightarrow & \text{soma } 2^1 = 2 \\
\text{linha 2} \longrightarrow & 1 & 2 & 1 & & & \longrightarrow & \text{soma } 2^2 = 4 \\
\text{linha 3} \longrightarrow & 1 & 3 & 3 & 1 & & \longrightarrow & \text{soma } 2^3 = 8 \\
\text{linha 4} \longrightarrow & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \longrightarrow & \text{soma } 2^4 = 16 \\
 & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

b) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10}$

P2. A soma dos elementos da coluna p, desde o primeiro até o elemento da linha n, é igual ao elemento localizado na coluna da direita e na linha abaixo, isto é:

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

Exemplo

coluna 0
coluna 1
coluna 2

$$\begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & \boxed{1} \\
1 & 3 & \boxed{3} & 1 \\
1 & 4 & \boxed{6} & 4 & 1 \\
1 & 5 & \boxed{10} & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & \boxed{15} & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
\vdots
\end{array}$$

Isto é: $\underbrace{\binom{2}{2}}_{1} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{3} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} + \underbrace{\binom{6}{2}}_{15} = \underbrace{\binom{7}{3}}_{35}$

P3. A soma dos elementos da transversal n, desde o primeiro até o elemento da coluna p, é igual ao número localizado na linha abaixo do último elemento somado e na mesma coluna deste, isto é:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{0} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

Exemplos

a) transversal 2 transversal 1 transversal 0

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
⋮

Isto é: $\underbrace{\dbinom{1}{0}}_{1} + \underbrace{\dbinom{2}{1}}_{2} + \underbrace{\dbinom{3}{2}}_{3} + \underbrace{\dbinom{4}{3}}_{4} = \underbrace{\dbinom{5}{3}}_{10}$

b) $\dbinom{5}{0} + \dbinom{6}{1} + \dbinom{7}{2} + \dbinom{8}{3} + \dbinom{9}{4} = \dbinom{10}{4}$

Exercícios resolvidos

1 Demonstrar a propriedade P1 do triângulo de Pascal – A soma dos elementos que formam a linha n do triângulo de Pascal é 2^n:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Resolução

A soma $S = \dbinom{n}{0} + \dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{2} + \ldots + \dbinom{n}{n}$ não se altera se multiplicarmos cada parcela $\dbinom{n}{p}$ por $1^p \cdot 1^{n-p}$, com $p \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$:

$$S = \binom{n}{0} \cdot 1^0 \cdot 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 1^2 \cdot 1^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot 1^n \cdot 1^0$$

Comparando essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton, concluímos:

$$S = \binom{n}{0} \cdot 1^0 \cdot 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 1^2 \cdot 1^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot 1^n \cdot 1^0 = (1 + 1)^n = 2^n$$

2 Demonstrar a propriedade P2 do triângulo de Pascal – A soma dos elementos da coluna p, desde o primeiro até o elemento da linha n, é igual ao elemento localizado na coluna da direita e na linha abaixo:

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

Resolução

Indicando a propriedade por $P(n)$, vamos aplicar o princípio da indução matemática.

I. Como a interpretação de $P(0)$ pode gerar alguma dúvida, provaremos inicialmente que $P(0)$ e $P(1)$ são ambas verdadeiras.
$P(0)$ é verdadeira, pois para $n = 0$ a propriedade se reduz a:

$$\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$$

$P(1)$ é verdadeira, pois para $n = 1$ a propriedade se reduz a:

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} = \binom{p+2}{p+1}$$

Aplicando a relação de Stiffel, podemos representar $\binom{p+2}{p+1}$ pela soma $\binom{p+1}{p} + \binom{p+1}{p+1}$ e, portanto, a igualdade anterior é equivalente a: $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} = \binom{p+1}{p} + \binom{p+1}{p+1}$

Como $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$, deduzimos que $P(1)$ é verdadeira.

II. Por hipótese de indução, admitiremos a validade da propriedade para $n = k$, isto é:

$$\underbrace{\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + ... + \binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1}}_{\text{hipótese de indução}}$$

Assim, provaremos a validade da implicação:

$$\underbrace{P(k) \text{ é verdadeira}}_{\text{hipótese de indução}} \Rightarrow P(k+1) \text{ é verdadeira, para todo } k \in \mathbb{N}$$

Ou seja:

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + ... + \binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + ... + \binom{p+k}{p} + \binom{p+k+1}{p} = \binom{p+k+2}{p+1}$$

Temos:

$$\underbrace{\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + ... + \binom{p+k}{p}}_{\text{hipótese de indução}} + \binom{p+k+1}{p} = \overbrace{\binom{p+k+1}{p+1} + \binom{p+k+1}{p}}^{\text{relação de Stiffel}} = \binom{p+k+2}{p+1}$$

Logo, vale a implicação citada em (II).

Como $P(n)$ satisfaz (I) e (II), concluímos pelo PIM que $P(n)$ é verdadeira para qualquer valor natural de n.

3 Demonstrar a propriedade P3 do triângulo de Pascal – A soma dos elementos da transversal n, desde o primeiro até o elemento da coluna p, é igual ao número localizado na linha abaixo do último elemento somado e na mesma coluna deste:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

Resolução

Faremos a demonstração por indução matemática sobre p.

I. A propriedade é verdadeira para $p = 0$, pois para esse valor a proposição se reduz a:

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

II. Por hipótese de indução, admitimos a validade da propriedade para $p = k$, isto é:

$$\underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}}_{\text{hipótese de indução}}$$

E, provaremos a implicação:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+ \ldots. + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+ \ldots. + \binom{n+k}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

Temos:

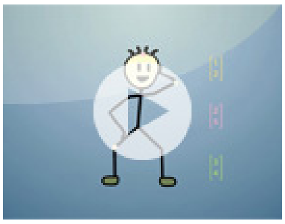
$$\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+ \ldots. + \binom{n+k}{k}}_{\text{hipótese de indução}} + \binom{n+k+1}{k+1} = \overbrace{\binom{n+k+1}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}}^{\text{relação de Stiffel}} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

Logo, vale a implicação citada em (II).

Como a propriedade satisfaz (I) e (II), concluímos pelo PIM que a proposição é verdadeira para qualquer valor natural de p.

CONTEÚDO DIGITAL - PARTE 2

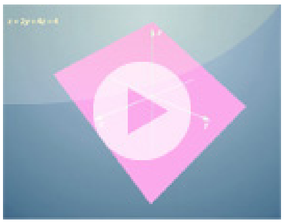
Animações



As matrizes e as transformações geométricas

Matemática 2 > Parte 2 > Cap. 6 > Seção 6.2

Mostra a utilização de matrizes para realizar transformações geométricas: translação, escalamento e rotação.



Interpretação geométrica de um sistema linear

Matemática 2 > Parte 2 > Cap. 7 > Seção 7.2

Mostra a representação gráfica de equações do primeiro grau com três variáveis e a interpretação de um sistema de equações conforme as diferentes posições relativas dos planos.

O jogo das três portas

Matemática 2 > Parte 2 > Cap. 9 > Seção 9.1

Esta animação mostra uma situação de análise de probabilidade condicional, utilizando como exemplo um jogo chamado "O jogo das três portas".

PARTE III

PARTE
III

Capítulo
10

Geometria de posição

Desde a órbita elíptica dos planetas até a configuração simétrica das asas de uma borboleta, a natureza apresenta imensa variedade de formas. Aplicando conhecimentos adquiridos por meio da observação da natureza ou criando suas próprias formas, o universo da tecnologia tem evoluído ao longo dos anos. Neste capítulo, estudaremos a Geometria de posição cujo objetivo é compreender as figuras quanto à sua forma e à sua posição no espaço.

10.1 Aspectos preliminares da Geometria

No estudo da Geometria, assim como no de outras ciências, é preciso uma visão geral e também o conhecimento da linguagem, dos símbolos e das notações utilizadas.

10.2 Posições relativas entre retas, planos e entre reta e plano

As posições relativas de duas retas, dois planos ou de um plano e uma reta são definidas a partir dos conceitos de intersecção e coplanaridade.

10.3 Perpendicularidade

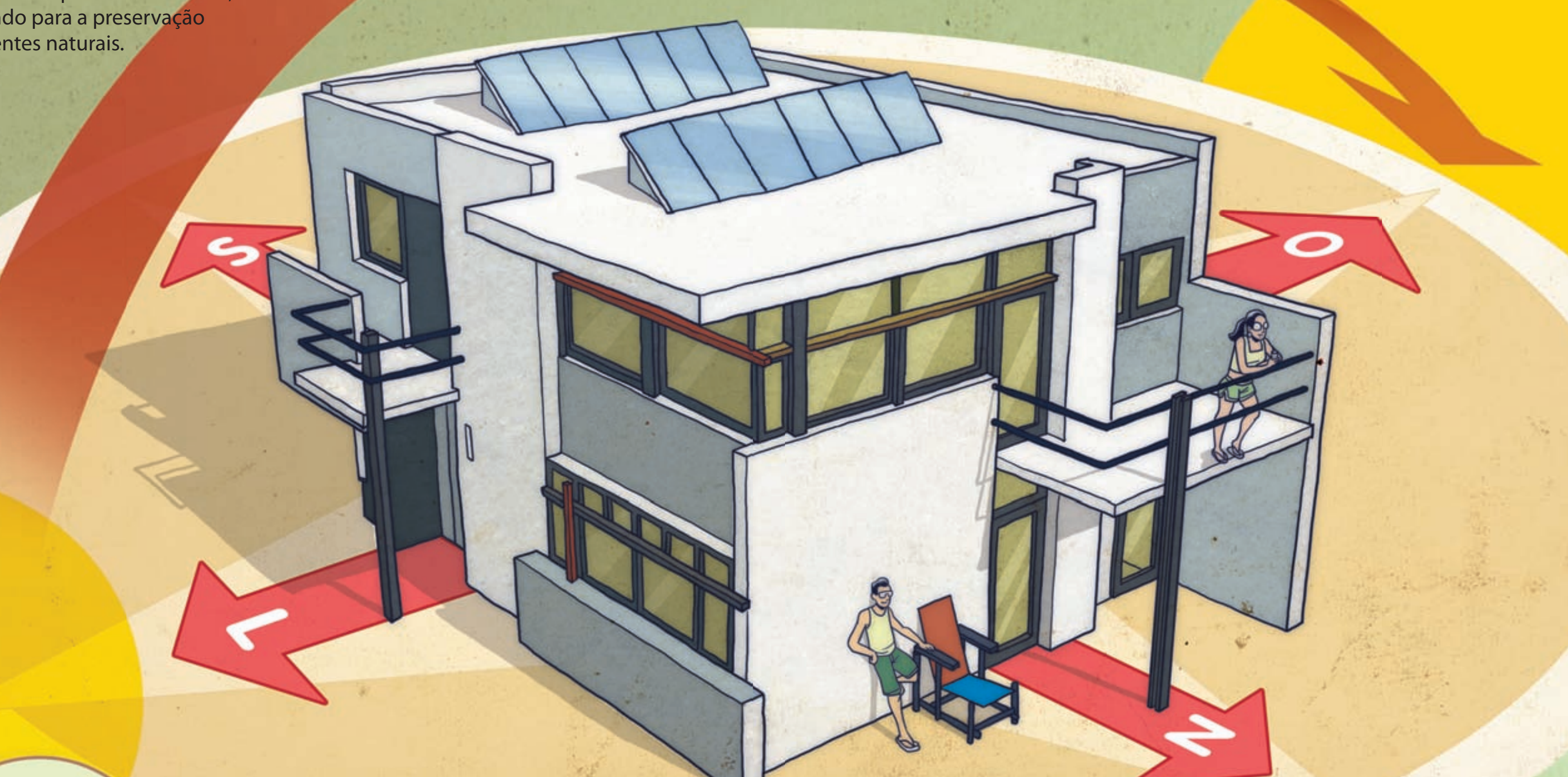
O conceito de perpendicularidade entre retas é estendido para perpendicularidade entre reta e plano e entre planos.

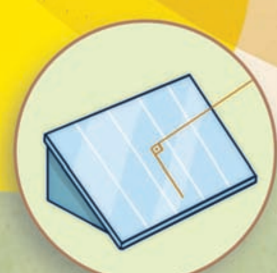
Fontes de energia

Os impactos ambientais decorrentes da construção de usinas para a produção de energia geram discussões mundiais sobre as fontes de energia usuais (termelétrica, hidrelétrica, eólica, nuclear e solar) e a viabilidade econômica de fontes renováveis, não poluentes, que não agridam o meio ambiente. Essas discussões envolvem interesses ambientais, sociais, políticos e econômicos.

O Sol nosso de cada dia

Por ser uma fonte inesgotável, totalmente limpa, além de gratuita, cada vez mais a energia solar se torna solução energética para aliviar os impactos ambientais, contribuindo para a preservação dos ambientes naturais.





Coletor de energia solar

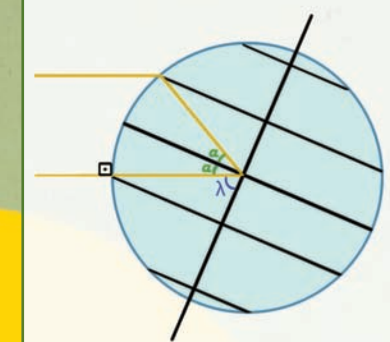
Captando a radiação solar, podemos obter calor e eletricidade, respectivamente, por meio de coletores térmicos e de módulos fotovoltaicos. Para conseguir melhor aproveitamento, os raios do Sol devem incidir perpendicularmente no plano dos coletores.

Para pensar

1. Você conhece outros dispositivos tecnológicos em que a perpendicularidade é importante?
2. Observe o esquema da incidência dos raios solares no hemisfério Sul. Qual é o valor da medida α?

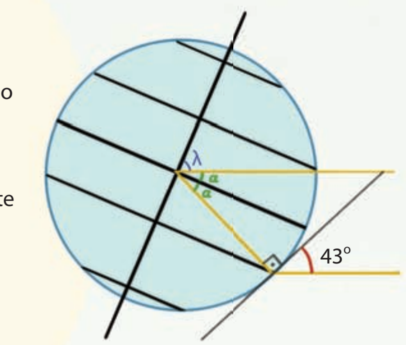
Posição relativa

Pelas dimensões continentais e por ser cortado pela linha do Equador e pelo trópico de Capricórnio, o Brasil tem alta insolação anual.



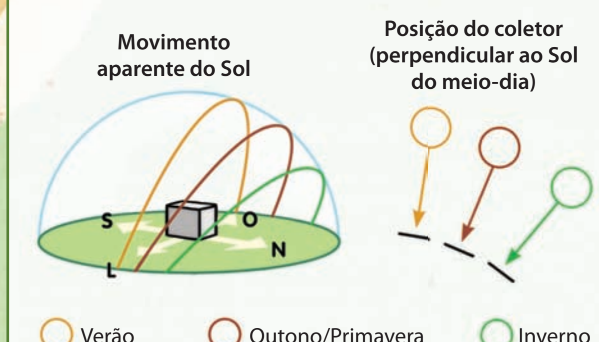
No hemisfério Sul, os coletores devem ser orientados para o norte, pois, quando é verão nesse hemisfério, os raios incidem perpendicularmente na superfície da Terra.

Quando é inverno no hemisfério Sul, o ângulo de incidência é de aproximadamente 43 graus com a superfície.



Movimento aparente do Sol

Por causa da inclinação do eixo de rotação da Terra, os raios do Sol incidem na superfície terrestre com diferentes inclinações, de acordo com a estação do ano. Por isso é necessário modificar a inclinação dos coletores solares ao longo do ano.



Seção 10.1

Aspectos preliminares da Geometria

Objetivos

- **Reconhecer** os conceitos primitivos da Geometria.
- **Identificar** os elementos do espaço.
- **Entender** a diferença entre postulado e teorema.

Termos e conceitos

- conceitos primitivos
- espaço
- segmento de reta
- conjunto convexo
- semirreta
- semiplano
- semiespaço
- figuras geométricas

Uma visão geral

Quando vamos alugar um filme em uma videolocadora, geralmente, lemos a sinopse da história para ter uma noção do enredo.

Do mesmo modo, antes de iniciar o estudo de um novo assunto, convém conhecer algumas ideias que serão desenvolvidas. Assim, você terá uma visão global do que será visto, e isso vai ajudá-lo a se localizar em cada etapa do estudo. Acompanhe, a seguir, os passos da construção da Geometria:

- Admitem-se alguns conceitos sem definição: são os chamados **conceitos primitivos**. Não é possível definir tais conceitos, porque eles constituem o início da teoria, e, portanto, não há recursos para defini-los. **Ponto**, **reta** e **plano** são conceitos primitivos da Geometria.
- Certas proposições, chamadas de **postulados** (ou axiomas), são admitidas como verdadeiras, sem demonstração. Não se pode demonstrar um postulado, porque ele é uma das verdades iniciais da teoria, por isso não há recursos suficientes para demonstrá-lo.
- Novos conceitos são definidos com base nos postulados e nos conceitos primitivos.
- Novas proposições são criadas e podem ser **demonstradas** com base nos conceitos primitivos, nas definições e nos postulados já estabelecidos. Essas novas proposições são chamadas de **teoremas**.

Acrescentando informações a essa visão geral, a **Geometria de posição** estuda as figuras geométricas quanto à sua forma e à sua posição, enquanto a **Geometria métrica** estuda as figuras geométricas em relação às suas medidas.

Neste capítulo, destacaremos os conceitos fundamentais da Geometria de posição por meio de 11 postulados e 37 teoremas, o que não esgota o assunto, mas fornece os subsídios necessários e suficientes para o estudo da Geometria métrica, que é nosso objetivo maior.

Como estudar a Geometria de posição

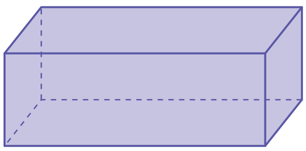
Para facilitar a organização do estudo da Geometria de posição é importante:

- construir uma lista de definições, uma de postulados e uma de teoremas. E, conforme eles forem aparecendo na teoria, acrescentá-los às listas (no caso dos teoremas, somente os enunciados, não as demonstrações);

- conhecer todas as proposições das listas;
- saber demonstrar alguns teoremas para entender o relacionamento sistêmico entre as proposições, isto é, como os postulados e os primeiros teoremas vão justificando os teoremas seguintes. Mas não é preciso saber demonstrar todos eles;
- observar objetos do cotidiano que sirvam de modelos para representar os entes geométricos; por exemplo, uma superfície plana pode ser representada pelo tampo de uma mesa.

Uma técnica de desenho

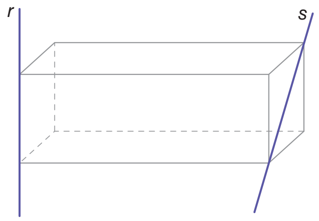
Para aprender Geometria não é preciso nenhuma habilidade especial em desenho, mas é conveniente conhecer algumas técnicas de representação gráfica de figuras espaciais. Uma técnica recomendável é o uso do desenho do paralelepípedo reto-retângulo como figura de apoio, na qual serão representadas outras figuras espaciais. Esse paralelepípedo é uma figura tridimensional cuja forma lembra uma caixa de sapatos:



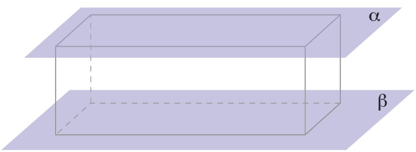
paralelepípedo reto-retângulo

O paralelepípedo deve ser apenas um suporte, por isso sugerimos que seja desenhado com traços leves, mas não seja apagado depois do desenho das figuras principais que se deseja representar. Isso ajudará, em um estudo posterior, a entender as posições das figuras no espaço.

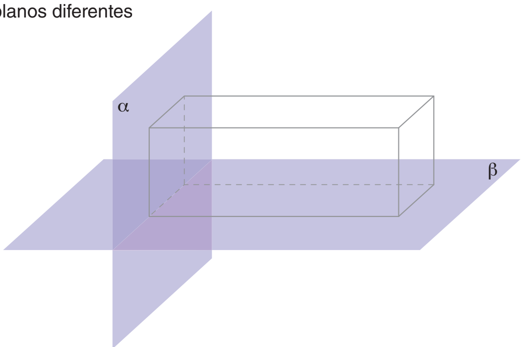
Exemplos



retas contidas em planos diferentes



planos paralelos distintos



planos perpendiculares

Além dessa técnica de desenho, é aconselhável que você associe as definições, os postulados e teoremas da Geometria de posição a objetos do cotidiano que tenham a forma de paralelepípedo reto-retângulo. Um bom modelo é uma sala com a forma de paralelepípedo, como a sua sala de aula, que, provavelmente, tem essa forma. Em muitos casos, faremos explicitamente esse tipo de associação, em outros, deixaremos para você encontrar um modelo que descreva a propriedade geométrica em questão.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Posições relativas em um paralelepípedo reto-retângulo.*

Após essa introdução, estamos prontos para dar início ao estudo da Geometria.

O espaço e seus elementos

Conceitos primitivos

Como já vimos:

Ponto, **reta** e **plano** são conceitos primitivos da Geometria.

Existem três postulados que garantem sua existência:

P.1 Existem infinitos pontos.

P.2 Existe reta. Uma reta é um conjunto r de infinitos pontos, e há infinitos pontos que não pertencem a r.

P.3 Existe plano. Um plano é um conjunto α de infinitos pontos, e há infinitos pontos que não pertencem a α.

O espaço

Os pontos, as retas, os planos, bem como todos os demais objetos geométricos que definiremos, fazem parte do espaço. Mas o que é o espaço?

Usamos frequentemente a palavra **espaço** no nosso cotidiano em afirmações do tipo: "O cometa se desloca pelo espaço sideral"; "Abram um espaço para eu me sentar"; "Há muito espaço nesta sala" etc.

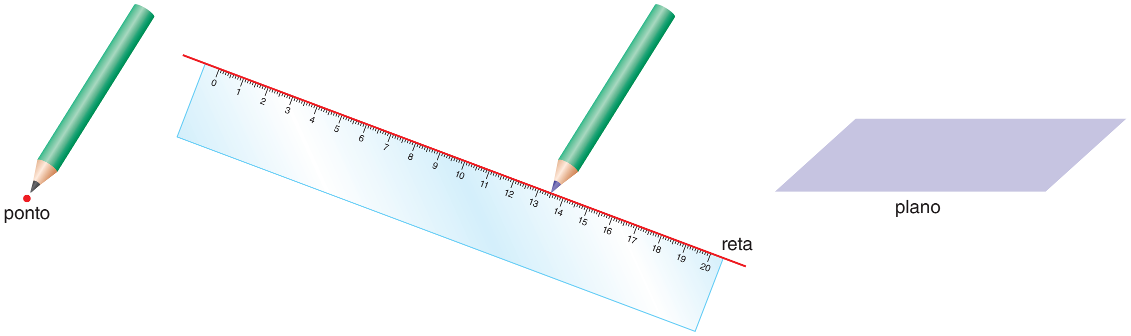
Embora haja relação entre os significados da palavra espaço empregados no cotidiano e o significado geométrico dessa palavra, o conceito de espaço em Geometria é mais preciso. Sua definição precisa fundamenta-se no postulado P.1:

Espaço é o conjunto de todos os pontos.

Podemos adotar como modelo do espaço geométrico o conjunto de todos os pontos do espaço físico: um ponto da sua sala de aula, ou qualquer outro ponto da Terra, da Lua, ou seja de onde for, fazem parte desse modelo.

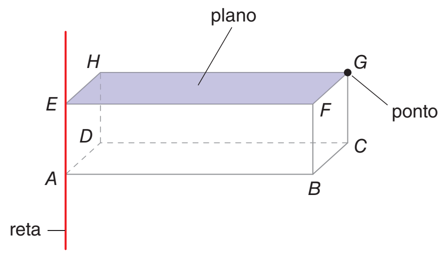
Representações e notações

Os objetos da Geometria são imaginários, isto é, não existem concretamente, porém, podemos representá-los por **modelos**. Por exemplo, podemos representar um ponto por uma marca feita com a ponta do lápis, uma reta, por uma linha desenhada com o auxílio de uma régua, e um plano, por um paralelogramo:

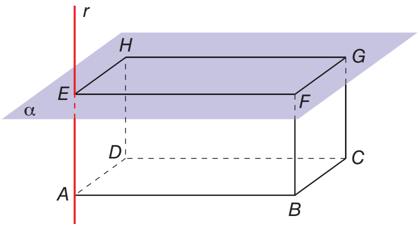


É usual nomear os pontos por letras maiúsculas: A, B, C, D, ...; as retas por letras minúsculas: a, b, c, d, ...; e os planos por letras gregas minúsculas: α (alfa), β (beta), γ (gama)...

Representando esses objetos em um paralelepípedo, temos:



Devemos imaginar que a reta e o plano continuam indefinidamente. Por exemplo:

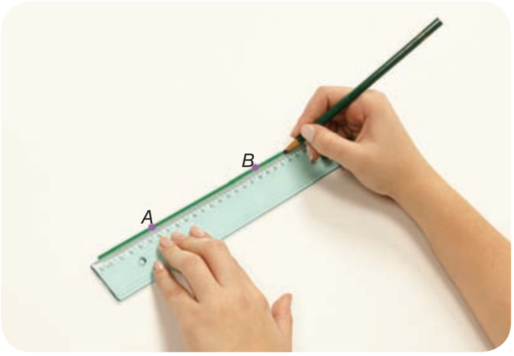


A reta r e o plano α devem ser imaginados além dos limites do paralelepípedo.

Ainda podemos nos referir à reta r acima como $\overleftrightarrow{AE}$ ou $\overleftrightarrow{EA}$ e ao plano α como pl(FGH). Essas notações se justificam devido aos seguintes postulados:

P.4 Dois pontos distintos determinam uma reta.

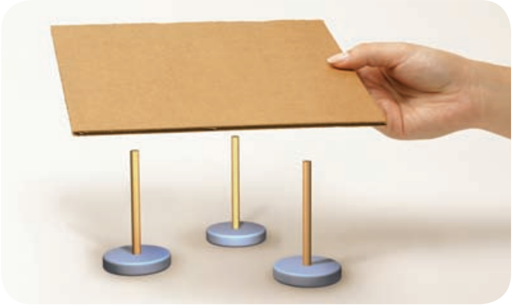
Para compreender melhor esse postulado, desenhe dois pontos distintos em seu caderno e, com o auxílio de uma régua, tente desenhar duas retas diferentes que passam por eles. Você verá que não é possível, pois a segunda reta desenhada vai coincidir com a primeira, portanto existe uma única reta que passa pelos dois pontos.



P.5 Três pontos não colineares determinam um plano.

Visualize esse postulado por meio do modelo a seguir.

Uma chapa plana pode ser sustentada por, no mínimo, três pinos que não estejam alinhados.



Notas:

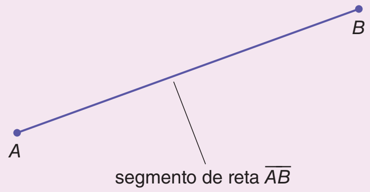
1. Pontos colineares são pontos que pertencem à mesma reta.
2. Na Matemática, a palavra "determina" engloba a existência e a unicidade. Assim, poderíamos enunciar o postulado P.4 da seguinte maneira: "Existe uma única reta que passa simultaneamente por dois pontos distintos".
3. Se um ponto pertence a uma reta, dizemos que a reta passa por esse ponto.
4. Se um ponto pertence a um plano, dizemos que o plano passa por esse ponto.

Outros elementos

Segmento de reta

Dois pontos, A e B, de uma reta determinam um **segmento de reta**, de modo que:

- Se $A \not\equiv B$, o segmento é formado por A e B e todos os pontos que estão entre A e B.



- Se $A \equiv B$, temos o segmento formado apenas por um ponto, chamado de **segmento nulo**.

Indicamos o segmento de extremos A e B por $\overline{AB}$.

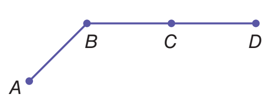
Notas:

1. O conceito "estar entre" é um conceito primitivo.
2. Lemos $A \equiv B$ como A coincide com B.
3. Lemos $A \not\equiv B$ como A distinto de B.

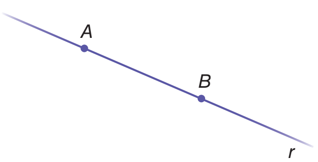
Temos ainda:

- **Segmentos consecutivos** são aqueles que têm um extremo em comum.
- A **reta suporte** de um segmento é a reta que contém esse segmento.

Exemplos



$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são segmentos consecutivos.
$\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são segmentos consecutivos.
$\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ são segmentos consecutivos.
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ não são segmentos consecutivos.



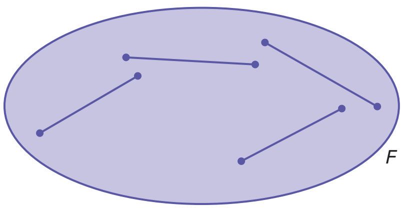
r é a reta suporte do segmento $\overline{AB}$.

Conjunto convexo

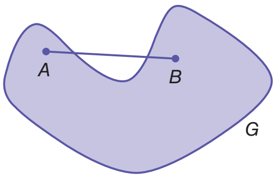
Um conjunto U de pontos é **convexo** se, e somente se, dois pontos quaisquer de U são extremos de um segmento de reta contido em U.

Exemplos

a) A figura F abaixo é formada pela linha de contorno e toda a região roxa. Essa figura é um conjunto convexo de pontos, pois dois pontos quaisquer de F são extremos de um segmento de reta contido em F.



b) A figura G abaixo é formada pela linha de contorno e toda a região roxa. Essa figura não é um conjunto convexo de pontos, pois existem pelo menos dois pontos de G que são extremos de um segmento de reta não contido em G. Por exemplo, $A \in G$, $B \in G$ e o segmento $\overline{AB}$ não está contido em G.



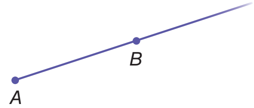
Semirreta

De acordo com o postulado:

P.6 Todo ponto A de uma reta r separa essa reta em dois conjuntos convexos e disjuntos, r' e r'', tal que o segmento de reta que liga um ponto qualquer de r' a um ponto qualquer de r'' passa por A.

Definimos:

A reunião do conjunto $\{A\}$ com cada um dos conjuntos r' ou r'', descritos no postulado P.6, é chamada de **semirreta** de origem A. Se essa semirreta passa por um ponto B, distinto de A, podemos indicá-la por $\overrightarrow{AB}$.



semirreta $\overrightarrow{AB}$

Nota:

Duas semirretas distintas que têm a origem no mesmo ponto A e estão contidas na mesma reta são chamadas de semirretas opostas em relação ao ponto A.

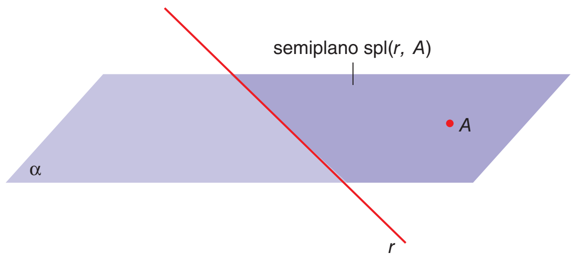
Semiplano

De acordo com o postulado:

P.7 Toda reta r de um plano α separa esse plano em dois conjuntos convexos e disjuntos, α' e α'', tal que o segmento de reta que liga um ponto qualquer de α' a um ponto qualquer de α'' tem um único ponto em comum com r.

Definimos:

A reunião da reta r com cada um dos conjuntos α' ou α'', descritos no postulado P.7, é chamada de **semiplano** de origem r. Representamos por spl(r, A) um semiplano que tem origem r e passa por um ponto A, com $A \notin r$.



Nota:

Dois semiplanos distintos que têm origem na mesma reta r e estão contidos em um mesmo plano são chamados de semiplanos opostos em relação à reta r.

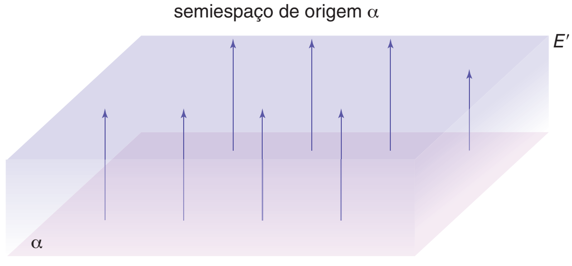
Semiespaço

De acordo com o postulado:

P.8 Todo plano α divide o espaço E em dois conjuntos convexos e disjuntos, E' e E'', tal que o segmento de reta que liga um ponto qualquer de E' a um ponto qualquer de E'' tem um único ponto em comum com α.

Definimos:

A reunião do plano α com cada um dos conjuntos E' ou E'', descritos no postulado P.8, é chamada de **semiespaço** de origem α.



O conjunto E' formado pelos pontos do plano α e pelos pontos "acima" de α é um semiespaço de origem α.

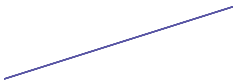
Dois semiespaços distintos que têm origem no mesmo plano α são chamados de semiespaços opostos em relação ao plano α.

Figuras geométricas

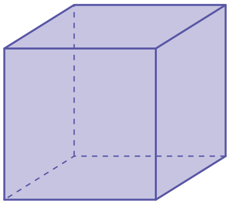
Figura geométrica é qualquer conjunto não vazio de pontos.

Exemplo

Uma reta e um cubo são figuras geométricas.



reta

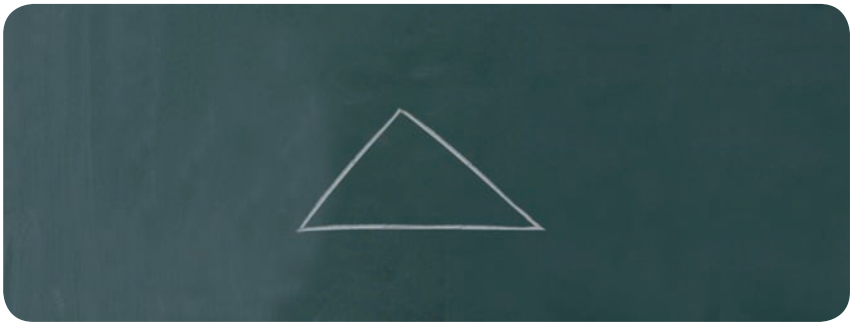


cubo

Uma figura geométrica é **plana** quando todos os seus pontos são coplanares, isto é, pertencem a um mesmo plano.

Exemplo

Ao desenhar qualquer figura em uma lousa plana, todos os pontos do desenho pertencerão a um mesmo plano (que é o plano da lousa). Por isso dizemos que o desenho é uma **figura geométrica plana**.



Uma figura geométrica é **reversa** quando seus pontos não são coplanares.

Exemplo

Ao pôr uma caixa de sapatos com o fundo apoiado no tampo de uma mesa, observamos que todos os pontos do fundo tocam o plano do tampo, porém muitos outros pontos da caixa não o tocam, isto é, os pontos da caixa não pertencem todos a um mesmo plano. Por isso dizemos que o paralelepípedo, figura cuja forma lembra a caixa de sapatos, é uma **figura geométrica reversa**.

Nota:

As figuras reversas podem ser chamadas, também, de figuras espaciais, porém essa denominação é ambígua, pois figura espacial é qualquer figura do espaço e, portanto, uma figura plana também é espacial. Por isso, é preferível a denominação de figura reversa como referência a uma figura não plana.

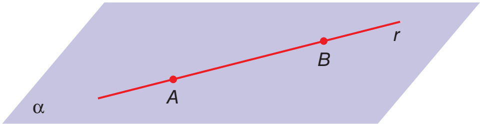
Dadas duas figuras geométricas A e B, dizemos que:

- elas são **coincidentes** quando todo ponto de A pertence a B e todo ponto de B pertence a A; indicamos esse fato por $A \equiv B$.
- elas são **distintas** quando não são coincidentes; indicamos esse fato por $A \not\equiv B$.

A linguagem dos conjuntos e a Geometria

Como uma reta, um plano e o espaço são conjuntos de pontos, adotamos na Geometria a linguagem dos conjuntos, como você já deve ter percebido. Por isso, dizemos que um ponto pertence a uma reta, um segmento de reta está contido em uma reta, um plano está contido no espaço etc. Embora Euclides não adotasse essa linguagem, ela simplifica significativamente o enunciado das propriedades como no importante postulado a seguir:

P.9 Se dois pontos distintos de uma reta r pertencem a um plano α, então todos os pontos de r pertencem a α, isto é, r está contida em α.

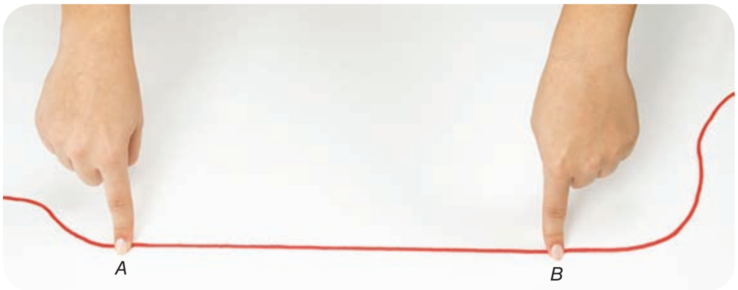


Nota:

Dizer que uma reta r está contida em um plano α equivale a dizer que o plano α passa pela reta r.

O seguinte modelo pode ajudar na compreensão desse postulado.

Estique um barbante, fazendo com que dois de seus pontos fiquem em contato com o plano do tampo de uma mesa. Você verá que todos os pontos da parte esticada do barbante também ficarão em contato com esse plano. Relacione essa situação com o postulado P.9.



A seguir, demonstraremos alguns teoremas, que exemplificam a aplicação da linguagem dos conjuntos na Geometria.

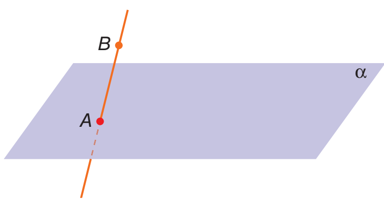
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Demonstrar o teorema:

> **T.1** Dado um plano α, existe uma reta que não está contida em α.

Resolução

Pelo postulado P.3, o plano α é um conjunto de infinitos pontos e existem infinitos pontos que não pertencem a α. Tomemos um ponto A, com $A \in \alpha$, e um ponto B, com $B \notin \alpha$. Portanto, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ não está contida em α.



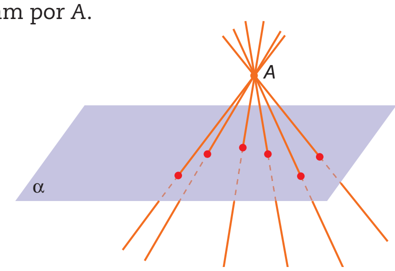
Nunca deixe de associar um modelo à proposição estudada. Nesse caso, considere o plano α do teto de sua sala de aula. Uma reta r, comum a duas paredes, por exemplo, não está contida em α.

2 Demonstrar o teorema:

> **T.2** Por um ponto passam infinitas retas.

Resolução

Seja α um plano. De acordo com o postulado P.3, existem infinitos pontos que não pertencem a α. Seja A um desses pontos.
Ainda pelo postulado P.3, α é um conjunto de infinitos pontos. Cada um desses infinitos pontos e o ponto A determinam uma reta, de acordo com o postulado P.4. Logo, existem infinitas retas que passam por A.



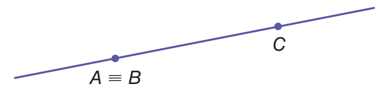
(*Nota*: Essa demonstração não descreve todas as retas que passam por A, porém mostra que existem infinitas retas que passam por A.)

3 Demonstrar o teorema:

> **T.3** Três pontos não colineares são necessariamente distintos entre si.

Resolução

Sejam A, B e C três pontos não colineares. Se dois deles coincidissem, por exemplo $A \equiv B$, existiria uma reta passando pelos três simultaneamente.



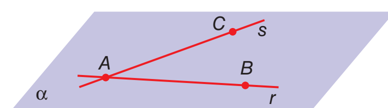
Isso contraria a hipótese de os três não serem colineares; logo, os três pontos, A, B e C, são distintos entre si.

4 Demonstrar o teorema:

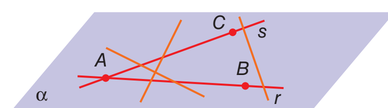
> **T.4** Um plano contém infinitas retas.

Resolução

Sejam três pontos não colineares A, B e C de um plano α. Os pontos A e B determinam uma reta r e os pontos A e C determinam uma reta s, de acordo com o postulado P.4.
As retas r e s estão contidas em α, de acordo com o postulado P.9; e $r \not\equiv s$, pois A, B e C não são colineares.



Pelo postulado P.2, as retas r e s são conjuntos de infinitos pontos. Cada um dos infinitos pontos de r com um ponto qualquer de s determina uma reta contida em α, de acordo com os postulados P.4 e P.9. Assim, existem infinitas retas contidas em α.



(*Nota*: Essa demonstração não descreve todas as retas contidas em α; porém mostra que existem infinitas retas contidas em α.)
Visualize concretamente esse teorema, desenhando retas no plano da lousa.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das seguintes afirmações.

a) Ponto, reta e plano são conceitos primitivos, ou seja, conceitos que não se definem.
b) Uma reta é limitada pela sua origem e pela sua extremidade.
c) Um plano é limitado pelo seu contorno.
d) Postulado é uma proposição que não pode ser demonstrada.
e) Há infinitos pontos que pertencem a uma reta r qualquer e há infinitos pontos que não pertencem a r.
f) Se os pontos distintos A e B pertencem à reta r e à reta s, então $r \equiv s$.
g) Dois pontos quaisquer são sempre colineares.
h) Três pontos quaisquer são sempre colineares.
i) Há infinitos pontos que pertencem a um plano α qualquer e há infinitos pontos que não pertencem a α.
j) Dado um plano α, existe uma única reta não contida em α.
k) Dado um plano α, existe uma reta não contida em α.
l) Há infinitas retas contidas em um plano α qualquer e há infinitas retas que não estão contidas em α.
m) Se os pontos A, B e C pertencem ao plano α e ao plano β, então $\alpha \equiv \beta$.
n) Se os pontos não colineares A, B e C pertencem ao plano α e ao plano β, então $\alpha \equiv \beta$.
o) Três pontos quaisquer são sempre coplanares.
p) Quatro pontos quaisquer são sempre coplanares.
q) Se A e B são pontos distintos que pertencem a um plano α, então a reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida em α.
r) Uma reta e um plano podem ter exatamente dois pontos distintos em comum.
s) Uma circunferência é uma figura geométrica plana.
t) Um cubo é uma figura geométrica plana.

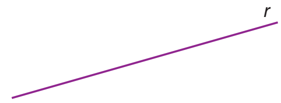
2 Na reta r, representada abaixo, são dados quatro pontos distintos A, B, C e D.

Em relação a essa figura, classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações.

a) $\overline{AC} \cup \overline{CD} = \overline{AD}$
b) $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \overline{AD}$
c) $A \in \overline{AB}$
d) $B \notin \overline{AC}$
e) C está entre B e D.
f) B está entre B e D.
g) $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ são segmentos consecutivos.
h) $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são segmentos consecutivos.
i) $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são segmentos colineares.
j) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm retas suporte distintas.

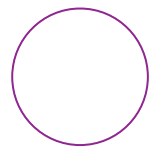
3 Classifique como convexa ou não convexa cada uma das figuras a seguir.

a) Reta.

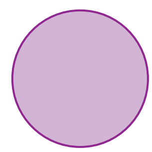


b) Plano.

c) Circunferência.

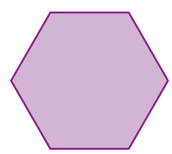


d) Círculo.



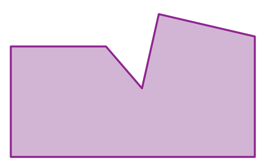
(*Nota*: Lembre-se de que círculo é a reunião da circunferência, que é a linha de contorno, com o conjunto dos pontos interiores.)

e) O polígono abaixo.



(*Nota*: Lembre-se de que o polígono é a reunião do contorno com o conjunto dos pontos interiores a ele.)

f) O polígono abaixo.



4 Na reta r, representada abaixo, são dados quatro pontos distintos A, B, C e D.

Em relação a essa figura, classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações.

a) $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BD} = r$
b) $\overline{BA} \cup \overline{BD} = r$
c) $\overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{CA} = \overline{BC}$
d) $C \notin \overline{AB}$
e) $D \notin \overrightarrow{BA}$
f) $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD} = \varnothing$

Resolva os exercícios complementares 2 a 4, 8 a 11 e 59.

Seção 10.2

Posições relativas entre retas, planos e entre reta e plano

Objetivos

- **Reconhecer** as posições relativas entre duas retas.
- **Reconhecer** as posições relativas entre reta e plano.
- **Reconhecer** as posições relativas entre dois planos.

Termos e conceitos

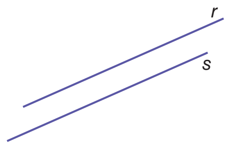
- retas paralelas
- retas concorrentes
- retas reversas
- reta paralela a um plano
- reta secante a um plano
- reta contida em um plano
- planos paralelos
- planos secantes

Posições relativas entre duas retas

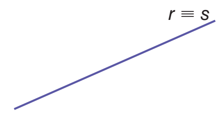
Duas retas coplanares podem ter duas posições relativas possíveis: paralelas (distintas ou coincidentes) ou concorrentes. No espaço, duas retas podem ter uma terceira posição relativa: elas podem ser reversas. Acompanhe as definições a seguir.

Retas paralelas

Duas retas coplanares são **paralelas** se, e somente se, não têm ponto em comum ou têm todos os seus pontos em comum.



r e *s* são retas paralelas distintas ($r \,/\!\!/\, s$ e $r \not\equiv s$).



r e *s* são retas paralelas coincidentes ($r \,/\!\!/\, s$ e $r \equiv s$).

Nota:

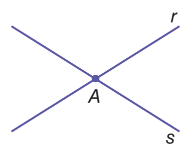
Usamos o símbolo $/\!\!/$ para indicar o paralelismo.

Postulado das paralelas

P.10 Dada uma reta *r* e um ponto *A*, existe uma única reta que passa por *A* e é paralela a *r*.

Retas concorrentes

Duas retas são **concorrentes** se, e somente se, têm um único ponto em comum.



r e *s* são concorrentes.

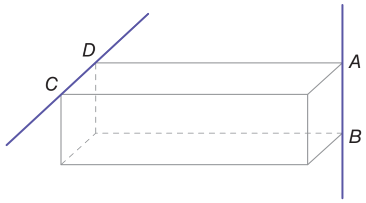
Retas reversas

Duas retas são **reversas** se, e somente se, não são coplanares.

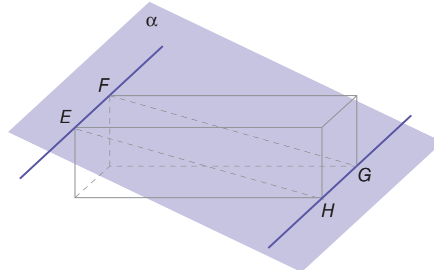
Em outras palavras, duas retas são reversas se, e somente se, não existe um plano que contenha as duas simultaneamente.

Exemplos

Para visualizar, observe os paralelepípedos abaixo:



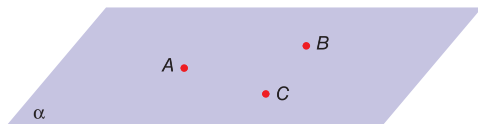
As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são reversas, pois não existe um plano que contenha ambas ao mesmo tempo.



As retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ não são reversas, pois existe um plano α que as contém: é o plano que contém o retângulo *EFGH*.

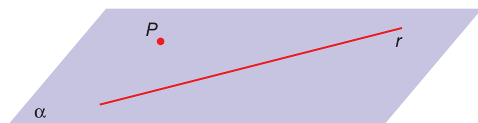
Determinação de um plano

Um plano pode ser determinado por meio de um dos quatro casos fundamentais a seguir.



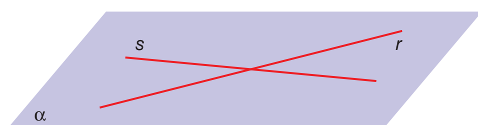
$\alpha \equiv \text{pl}(ABC)$

P.5 Três pontos não colineares determinam um plano.



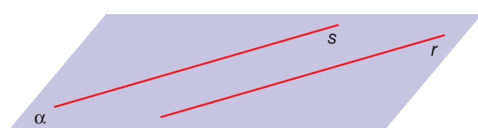
$\alpha \equiv \text{pl}(r, P)$

T.5 Uma reta e um ponto que não pertence a ela determinam um plano.



$\alpha \equiv \text{pl}(r, s)$

T.6 Duas retas concorrentes determinam um plano.



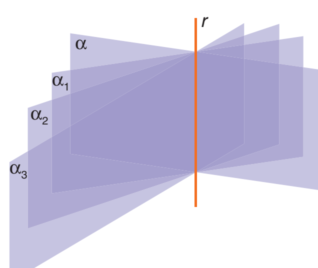
$\alpha \equiv \text{pl}(r, s)$

T.7 Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

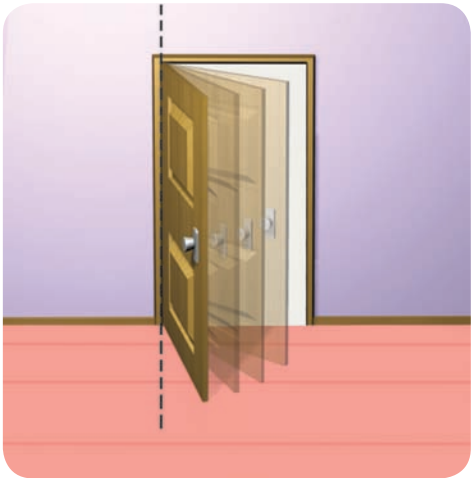
Note que o primeiro caso é o postulado P.5. Os demais casos são teoremas (T.5, T.6 e T.7).

Esses casos de determinação de um plano têm como consequências os teoremas:

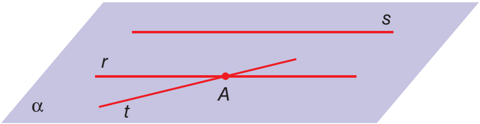
T.8 Por uma reta passam infinitos planos.



Para visualizar essa situação por meio de um modelo, observe as infinitas posições possíveis de uma porta que se movimenta em torno do eixo que a prende ao batente. Cada posição da porta representa um dos infinitos planos que contêm o eixo.



T.9 Se r, s e t são retas coplanares tais que r e t são concorrentes e $r \parallel s$, então s e t são concorrentes.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 Demonstrar o teorema:

T.5 Uma reta r e um ponto P, com $P \notin r$, determinam um plano.

Resolução

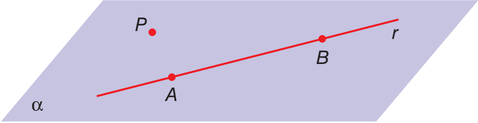
Ao dizer que uma reta e um ponto fora dela determinam um plano, estamos afirmando que **existe e é único** o plano que passa simultaneamente pela reta e pelo ponto. Por isso, devemos separar a demonstração em duas partes: existência e unicidade.

1ª parte: existência

Sejam A e B dois pontos distintos de r.

Como $P \notin r$, temos A, B e P não colineares e, portanto, pelo postulado P.5, esses três pontos determinam um plano α.

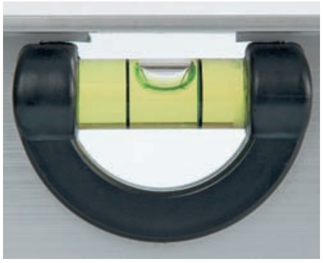
Pelo postulado P.9, temos ainda $r \subset \alpha$. Logo, existe um plano α que passa por r e por P.



2ª parte: unicidade

Suponhamos que exista outro plano α' que passe por r e P simultaneamente. Como A, B e P são pontos não colineares, existe um único plano que passa por eles, de acordo com o postulado P.5. Logo, $\alpha \equiv \alpha'$.

6 Para a construção do contrapiso de uma pequena área, um pedreiro fixou três taliscas (pedaços de cerâmica ou madeira), em posições não colineares do piso ainda desnivelado.
A seguir, sobrepôs uma régua de alumínio perfeitamente reta a cada par de taliscas, ajustando-as, com a ajuda de um nível de bolha, de modo que cada par de taliscas ficasse em uma reta horizontal. Depois que a massa que fixava as taliscas secou, o pedreiro preencheu a região com argamassa. Finalmente, retirou o excesso de argamassa com o auxílio da régua de alumínio, passando-a por duas taliscas de cada vez, deixando a superfície lisa e mantendo as taliscas como parte dessa superfície. Dessa forma, o pedreiro concluiu que o contrapiso era plano e horizontal.
Utilizando uma ou mais proposições estudadas na Geometria de posição, explicar por que a conclusão do pedreiro é verdadeira.



Nível de bolha, aparelho usado para nivelar uma superfície com a horizontal.

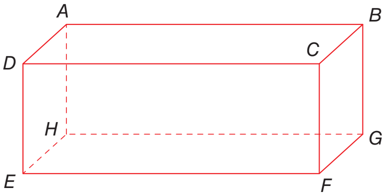
Resolução

Fundamentalmente, o pedreiro aplicou o postulado P.5: "Três pontos não colineares determinam um plano". Além disso, como as direções da régua, sobre duas taliscas quaisquer, eram horizontais, o plano do contrapiso era horizontal.
Na prática, para grandes áreas usam-se mais de três taliscas.

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração dos teoremas* T.6, T.7, T.8 e T.9.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5 O paralelepípedo reto-retângulo será adotado como modelo para a visualização de vários objetos e situações espaciais; por isso ele estará presente em muitos exercícios. Considerando o paralelepípedo reto-retângulo representado ao lado, classifique cada uma das afirmações seguintes como V (verdadeira) ou F (falsa).



a) $\overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{DC}$
b) $\overleftrightarrow{CD} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{HG}$
c) $\overleftrightarrow{EF} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{FG}$
d) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são concorrentes.
e) $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são reversas.
f) Existe um plano que contém $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{HE}$.
g) $\overleftrightarrow{CF}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são reversas.
h) As retas $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são concorrentes.
i) As retas $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{HF}$ são coplanares.
j) $D \in pl(ABC)$
k) $F \notin pl(HEG)$
l) As retas $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são reversas.

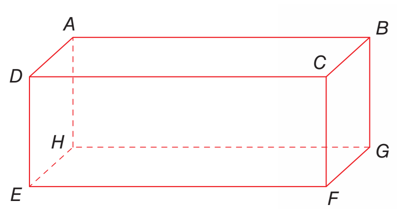
6 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das seguintes afirmações.
a) Se r e s são retas paralelas, então $r \cap s = \varnothing$.
b) Se r e s são retas paralelas distintas, então $r \cap s = \varnothing$.
c) Duas retas concorrentes têm um único ponto em comum.
d) Se r e s são retas com um ponto em comum, então r e s são concorrentes.
e) Se r e s são retas que têm dois pontos distintos em comum, então $r \mathbin{/\!/} s$.
f) Se r e s são retas coincidentes, então elas têm um único ponto em comum.
g) Se r e s são retas coincidentes, então elas têm um ponto em comum.
h) Se r e s são retas que passam pelo ponto A e ambas são paralelas à reta t, então $r \equiv s$.

i) Dadas duas retas quaisquer r e s, existe um plano que contém as duas simultaneamente.
j) Retas reversas são retas não coplanares.
k) Se r e s são retas distintas, então $r \cap s = \varnothing$.
l) Se r e s são retas tais que $r \cap s = \varnothing$, então r e s são retas distintas.
m) Se r, s e t são retas tais que $r \mathbin{/\!/} s$ e $s \mathbin{/\!/} t$, então $r \mathbin{/\!/} t$.

7 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das seguintes afirmações.
a) Se as retas r e s são reversas, então existe uma reta t tal que $r \mathbin{/\!/} t$ e $s \mathbin{/\!/} t$.
b) Se r, s e t são retas tais que r é reversa a s e s é reversa a t, então r é reversa a t.
c) Se a, b e c são retas coplanares tais que a concorre com b e $a \mathbin{/\!/} c$, então b concorre com c.
d) Se a, b, r e s são retas coplanares tais que a concorre com b, $a \mathbin{/\!/} r$ e $b \mathbin{/\!/} s$, então r e s são concorrentes.
e) Se r e s são retas reversas e um ponto P pertence a r, então existe uma reta que passa por P e é paralela a s.
f) Se r e s são retas reversas e um ponto P pertence a r, então existe uma reta que passa por P e concorre com s.
g) Dados uma reta r e um ponto P, $P \notin r$, existe uma única reta que passa por P e é reversa a r.
h) Se r, s e t são retas tais que r é reversa a s e r é paralela a t, então s é reversa a t.

8 Classifique cada uma das afirmações a seguir como V (verdadeira) ou F (falsa).
a) Três pontos distintos determinam um plano.
b) Os vértices de um triângulo determinam um plano.
c) Dados uma reta r e um ponto P, existe um único plano que contém r e passa por P.
d) Dados uma reta r e um ponto P, com $P \notin r$, existe um único plano que contém r e passa por P.
e) Duas retas quaisquer determinam um plano.
f) Se r e s são retas concorrentes, então existe um único plano que contém ambas.
g) Se r e s são retas paralelas, então existe um único plano que contém r e s.
h) Se r e s são retas paralelas distintas, então existe um único plano que contém ambas.
i) Se r e s são retas coplanares, então essas retas são concorrentes ou paralelas.
j) Se duas retas são concorrentes ou paralelas, então elas são coplanares.
k) Três retas paralelas entre si são coplanares.
l) Três retas paralelas entre si podem ser coplanares.
m) Se r, s e t são retas distintas que concorrem em um mesmo ponto, então essas retas são coplanares.
n) Duas retas concorrentes e um ponto que não pertence a nenhuma delas são coplanares.

9 Para cada um dos itens a seguir, copie em seu caderno o paralelepípedo reto-retângulo representado abaixo.



Agora, desenhe no paralelepípedo um triângulo contido no plano determinado:
a) pelos pontos A, B e C;
b) pelas retas $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{EG}$;
c) pelas retas $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{CG}$;
d) pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o ponto F.

10 Quantos planos existem passando por três pontos quaisquer entre quatro pontos não coplanares A, B, C e D? Faça um desenho que represente todos os planos determinados.

11 A foto ao lado mostra um cavalete com tripé, objeto do cotidiano dos artistas plásticos. É comum a utilização do tripé quando se pretende dar estabilidade a um objeto portátil. Por exemplo, o cavalete de um pintor não pode balançar quando o pincel toca a tela. Explique, por meio de uma proposição da Geometria, por que o tripé não balança mesmo que esteja apoiado em um piso irregular.

Resolva os exercícios complementares 1, 5 a 7, 12 a 14 e 67 a 69.

Posições relativas entre reta e plano

Uma reta e um plano podem ter três posições relativas, conforme é descrito a seguir.

Reta paralela a um plano

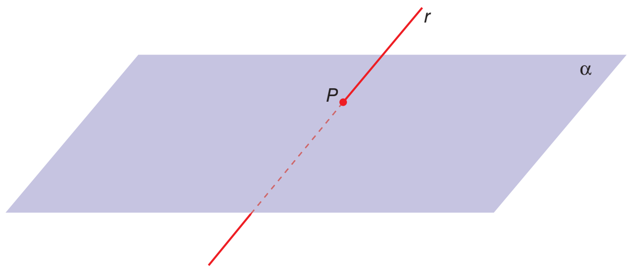
Uma reta r é **paralela** a um plano α se, e somente se, r e α não têm nenhum ponto em comum. Ou seja:

$$r /\!/ \alpha \iff r \cap \alpha = \varnothing$$

Dizemos que um segmento $\overline{AB}$ é paralelo a um plano α se, e somente se, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a α.

Reta secante (ou concorrente) a um plano

Uma reta r é **secante** (ou **concorrente**) a um plano α se, e somente se, r e α têm um único ponto em comum.

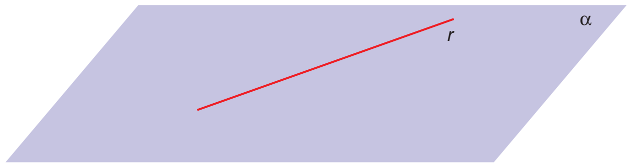


Se r é secante a α, podemos dizer também que r e α são secantes.

Reta contida em um plano

Uma reta r está **contida** em um plano α se, e somente se, todos os pontos de r pertencem ao plano α.

$$r \subset \alpha \iff r \cap \alpha = r$$



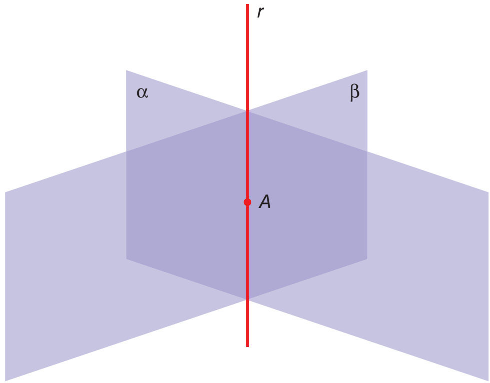
Postulado e teoremas

Um estudo mais apurado sobre as posições relativas entre reta e plano necessita do seguinte postulado:

P.11 Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então eles têm pelo menos dois pontos distintos em comum.

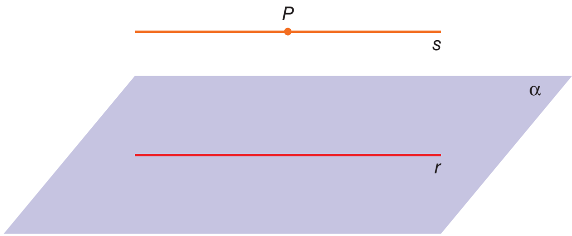
Essa proposição, juntamente com outras estudadas até aqui, tem como consequências os teoremas:

T.10 Se dois planos distintos α e β têm um ponto A em comum, então $\alpha \cap \beta$ é uma reta.

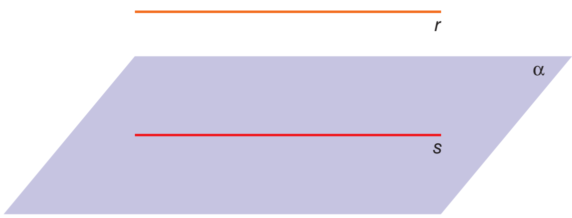


$$\left.\begin{array}{l}\alpha \neq \beta \\ A \in \alpha \text{ e } A \in \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = r$$

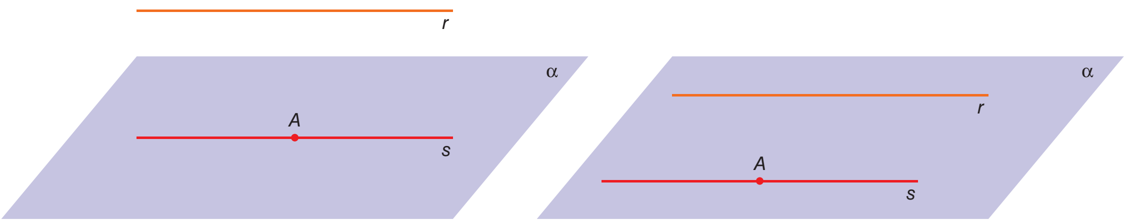
T.11 Dados um plano α e um ponto P, com $P \notin \alpha$, existe pelo menos uma reta que passa por P e é paralela a α.



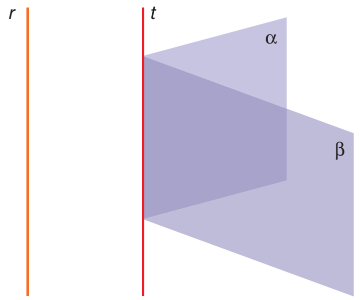
T.12 Uma reta r, não contida em um plano α, é paralela a α se, e somente se, r é paralela a uma reta s contida em α.



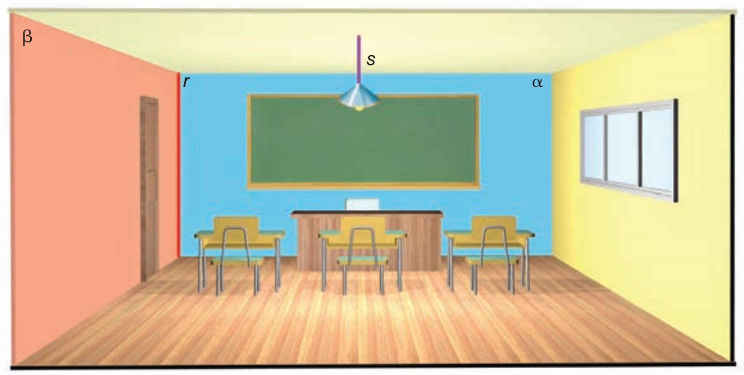
T.13 Se uma reta *r* é paralela a um plano α ou está contida em α, e um ponto *A* pertence a α, então a reta *s* que passa por *A* e é paralela a *r* está contida em α.



T.14 Se uma reta *r* é paralela a dois planos secantes α e β, então *r* é paralela à reta *t* comum a α e a β.

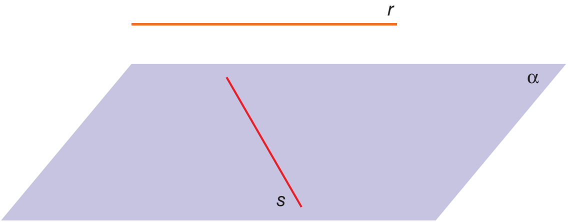


Para representar essa situação por meio de um modelo, consideremos a ilustração a seguir, que apresenta um lustre preso ao teto de uma sala de aula com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo.



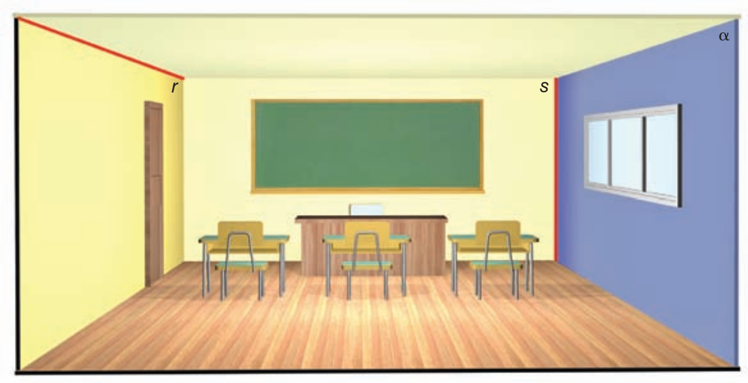
Os planos α e β das paredes da lousa e da porta, respectivamente, são secantes, tendo *r* como reta comum. A reta *s*, representada pelo fio que prende o lustre ao teto, é paralela aos planos α e β; consequentemente, *s* é paralela a *r*.

T.15 Se *r* e *s* são retas reversas, então existe um único plano α que contém *s* e é paralelo a *r*.



Observe um modelo para ilustrar essa situação.

Na ilustração abaixo, em que está representado o interior de uma sala de aula com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, as arestas em vermelho representam duas retas reversas *r* e *s*.



O plano α, onde está localizada a janela, é o único plano que contém *s* e é paralelo a *r*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7 Demonstrar o teorema:

> **T.10** Se dois planos distintos α e β têm um ponto A em comum, então $\alpha \cap \beta$ é uma reta.

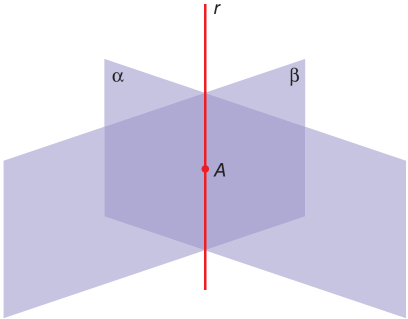
Resolução

1ª parte: existência

Como α e β são planos distintos com um ponto *A* em comum, pelo postulado P.11, existe pelo menos mais um ponto *B*, distinto de *A*, comum a α e β.
Assim, pelo postulado P.9, temos:

- $A \in \alpha$ e $B \in \alpha$, com $A \neq B \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$
- $A \in \beta$ e $B \in \beta$, com $A \neq B \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \beta$

Logo, existe uma reta comum a α e β.



2ª parte: unicidade

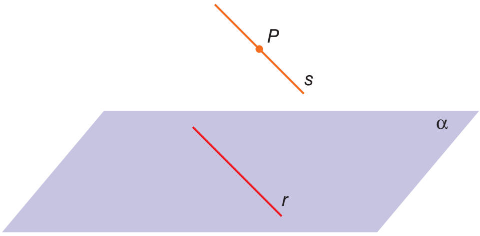
Suponhamos que exista um ponto *C*, comum a α e β, que não pertença à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Assim, os planos distintos α e β passam simultaneamente por $\overleftrightarrow{AB}$ e por *C*, o que é **absurdo**, pois contraria o teorema T.5, segundo o qual existe um único plano que passa simultaneamente por uma reta e por um ponto fora dela. Logo, α e β têm unicamente a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em comum.

8 Demonstrar o teorema:

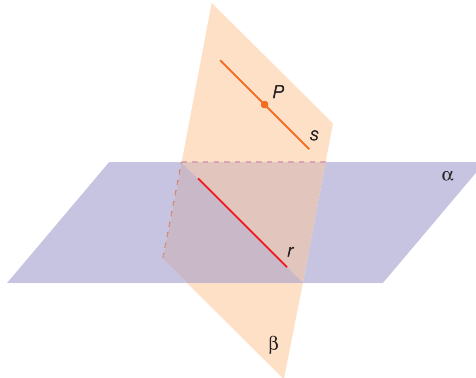
> **T.11** Dados um plano α e um ponto P, com $P \notin \alpha$, existe pelo menos uma reta que passa por P e é paralela a α.

Resolução

Seja *r* uma reta contida em α. Como $P \notin \alpha$, logo, $P \notin r$. Pelo postulado P.10, existe uma única reta s que passa por P e é paralela a *r*.



Para mostrar que α é paralelo a s, vamos provar que $s \cap \alpha = \varnothing$.
Como s e r são paralelas distintas, pois $P \in s$ e $P \notin r$, pelo teorema T.7 elas determinam um plano $\beta \equiv pl(r, s)$.
Os planos α e β são distintos, pois $P \in \beta$ e $P \notin \alpha$, e têm a reta r em comum. Portanto, pelo teorema T.10, $\alpha \cap \beta = r$.
Assim, se $s \in \beta$ tivesse algum ponto em comum com α, esse ponto deveria pertencer a r. Mas como r e s são paralelas distintas, esse ponto não existe. Logo, s não tem ponto em comum com α, ou seja, $s /\!/ \alpha$.

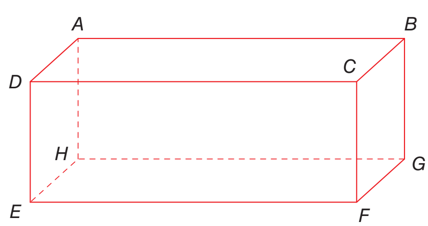


(*Nota*: Pelo ponto P podemos traçar infinitas retas paralelas a α.)

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração dos teoremas* T.12, T.13, T.14 e T.15.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 Considerando como modelo o paralelepípedo reto-retângulo:



Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações a seguir.

a) $\overleftrightarrow{AB} /\!/ pl(FGH)$
b) $\overleftrightarrow{AC} /\!/ pl(FGH)$
c) $\overleftrightarrow{AC} /\!/ pl(BCG)$
d) $\overleftrightarrow{AB} /\!/ pl(DCF)$
e) $\overleftrightarrow{AB} \subset pl(HGB)$
f) $\overleftrightarrow{EF} \subset pl(FGB)$
g) $\overleftrightarrow{DC}$ é secante ao plano $pl(BGF)$.
h) $\overleftrightarrow{AD}$ é secante ao plano $pl(HGF)$.
i) $\overleftrightarrow{EB}$ é secante ao plano $pl(BGF)$.
j) $\{F\} = \overleftrightarrow{CF} \cap pl(HGF)$
k) $\overleftrightarrow{DE} \subset pl(AHC)$
l) $\overleftrightarrow{DE} /\!/ pl(AHC)$

13 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações a seguir.

a) Se uma reta r tem um único ponto em comum com um plano α, então r é secante a α.
b) Se A e B pertencem a semiespaços opostos em relação a um plano α, então a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é secante a α.
c) Se uma reta r é paralela a uma reta s contida em um plano α, então $r /\!/ \alpha$.
d) Se uma reta r não está contida em um plano α e é paralela a uma reta s contida em α, então $r /\!/ \alpha$.
e) Se uma reta r é paralela a um plano α, então ela é paralela a apenas uma reta contida em α.
f) Se uma reta r é paralela a um plano α, então r é reversa a infinitas retas contidas em α.
g) Se dois pontos distintos, A e B, pertencem a uma reta r e a um plano α, então r tem infinitos pontos em comum com α.
h) Se o ponto A pertence a uma reta r e a um plano α, e uma reta s é paralela a r e está contida em α, então r está contida em α.
i) Dados um ponto P e um plano α, existem infinitas retas que passam por P e são paralelas a α.
j) Dados um ponto P e um plano α, com $P \notin \alpha$, existem infinitas retas que passam por P e são paralelas a α.
k) Se as retas r e s são reversas e t é uma reta paralela a r e distinta de r, então $pl(r, t) \cap s = \varnothing$.
l) Se r e s são retas concorrentes e t é uma reta paralela a r e distinta de r, então $t /\!/ pl(r, s)$.

14 Demonstre que: "Se dois planos distintos, α e β, têm três pontos, A, B e C, em comum, então A, B e C são pontos colineares".

15 Demonstre que: "Se uma reta r e um plano α são tais que $r \not\subset \alpha$ e $r \cap \alpha \neq \varnothing$, então r e α têm um único ponto em comum".

Resolva os exercícios complementares 15 a 20 e 70.

Posições relativas entre dois planos

Dois planos podem ter duas posições relativas, conforme é descrito a seguir.

Planos paralelos

Dois planos são **paralelos** se, e somente se, não têm ponto em comum ou têm todos os seus pontos em comum.

α e β são planos paralelos distintos.
($\alpha /\!/ \beta$ e $\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$)

α e β são planos paralelos coincidentes.
($\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha = \beta$)

Nota:

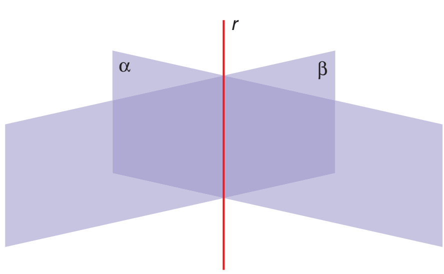
Para visualizar essas situações por meio de modelos do cotidiano, observe:

- o plano do teto e o plano do piso da sala de aula; eles são planos paralelos distintos;

- o plano do piso de sua sala de aula e o plano do piso da sala vizinha; eles são planos paralelos coincidentes, ou seja, são o mesmo plano.

Planos secantes

Dois planos são **secantes** se, e somente se, têm uma única reta em comum.



α e β são planos secantes.

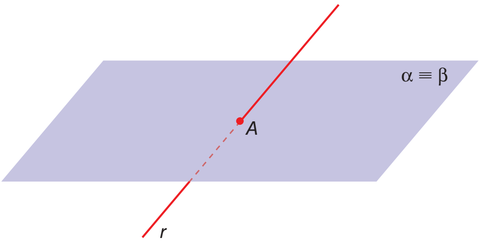
Nota:

Para visualizar essa situação por meio de modelos do cotidiano, observe as placas de ruas em um cruzamento ou uma porta giratória, daquelas usadas em bancos ou em hotéis.

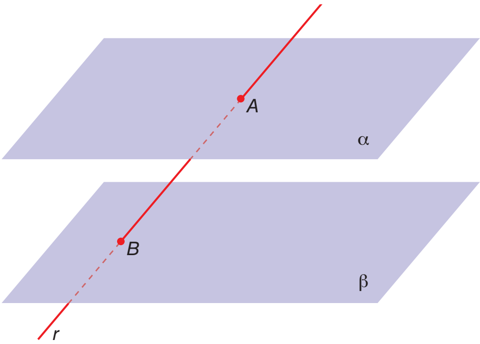
Teoremas

Vamos estudar alguns teoremas sobre as posições relativas entre dois planos.

T.16 Se dois planos α e β são paralelos e uma reta *r* é secante a α, então *r* é secante a β.

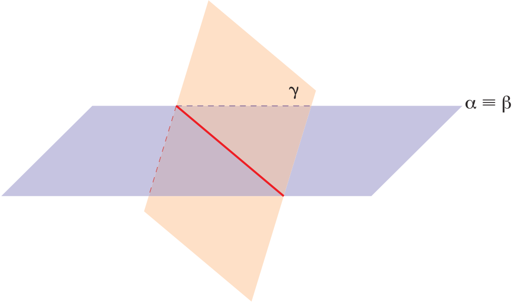


α e β são planos paralelos coincidentes.

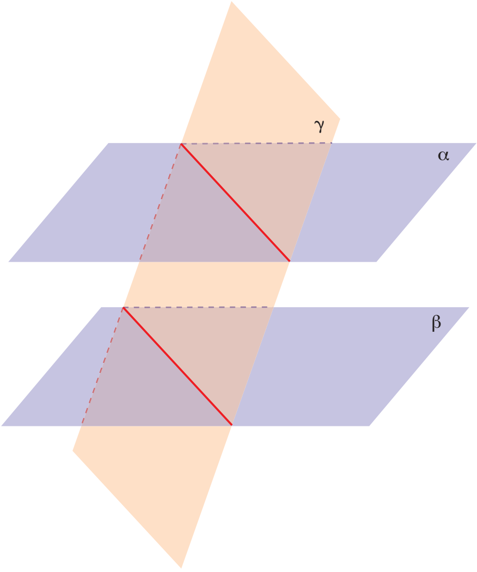


α e β são planos paralelos distintos.

T.17 Se dois planos α e β são paralelos e um plano γ é secante a α, então γ é secante a β.

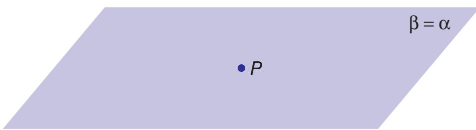


α e β são planos paralelos coincidentes.

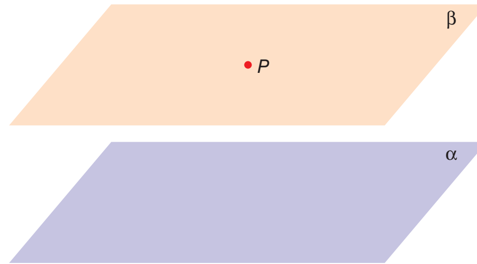


α e β são planos paralelos distintos.

T.18 Dados um plano α e um ponto P, existe e é único o plano β que passa por P e é paralelo a α.

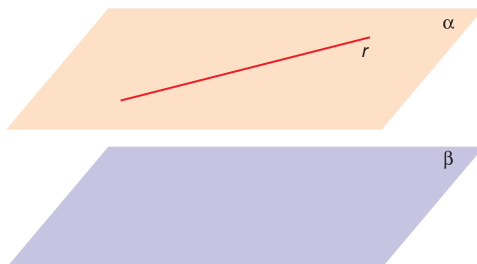


P pertence a α.



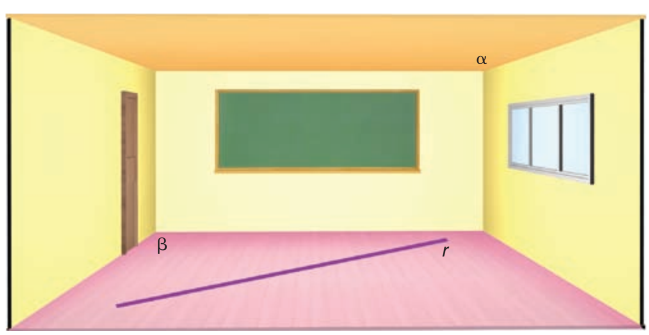
P não pertence a α.

T.19 Se dois planos distintos α e β são paralelos, então toda reta r contida em α é paralela a β.

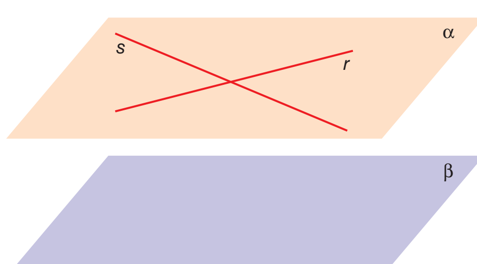


Esse teorema pode ser descrito pelo modelo a seguir.

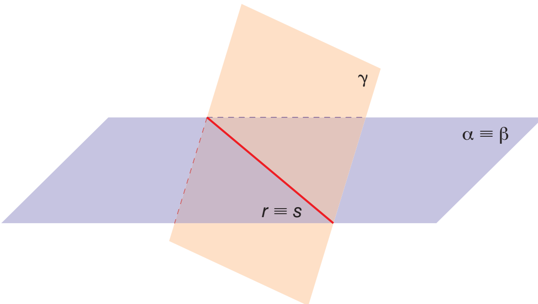
Em uma sala com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, o plano α do teto é paralelo ao plano β do piso; logo, qualquer reta desenhada no plano do teto não terá ponto em comum com o plano do piso, portanto, será paralela ao piso. Analogamente, qualquer reta r desenhada no plano do piso não terá ponto em comum com o plano do teto, portanto, será paralela ao teto.



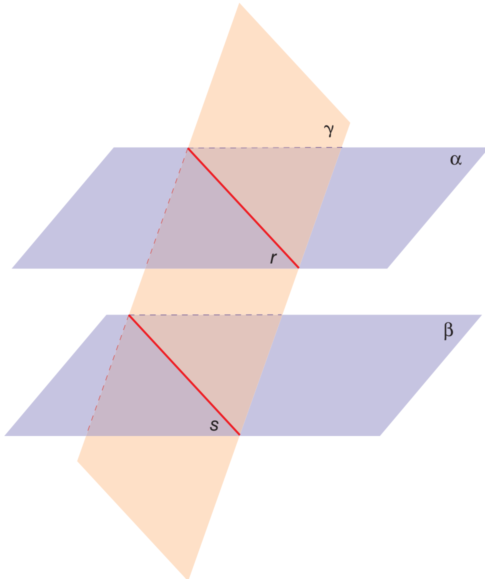
T.20 Dois planos distintos α e β são paralelos se, e somente se, existem duas retas concorrentes contidas num deles e paralelas ao outro.



T.21 Se um plano γ é secante a dois planos paralelos α e β, então a reta r, comum a γ e a α, é paralela à reta s, comum a γ e a β.

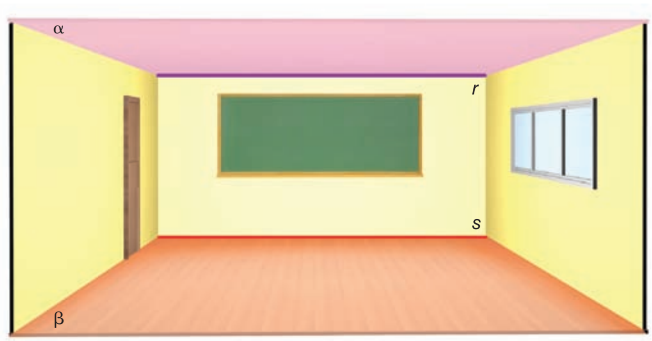


α e β são planos paralelos coincidentes.

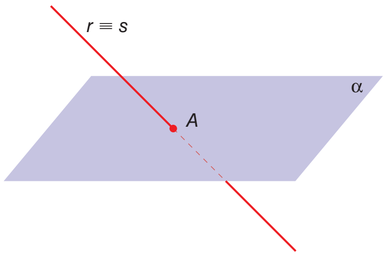


α e β são planos paralelos distintos.

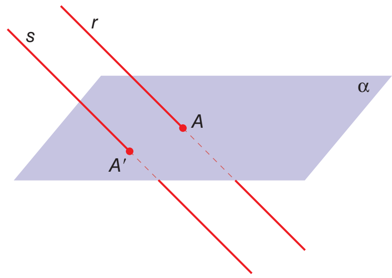
Visualize o caso dos planos paralelos distintos, observando as intersecções de uma parede com os planos α e β do teto e do piso de uma sala com a forma de um paralelepípedo. Essas intersecções são as retas r e s paralelas.



T.22 Se r e s são retas paralelas e r é secante a um plano α, então s é secante a α.

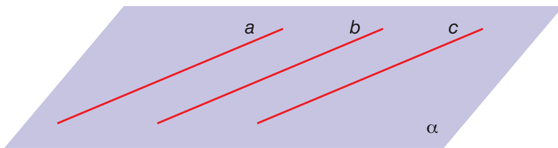


r e s são paralelas coincidentes.

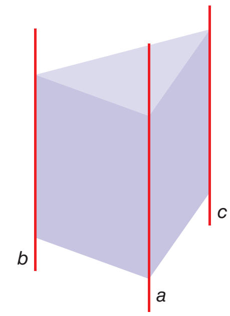


r e s são paralelas distintas.

T.23 Se três retas, a, b e c, são tais que $a \parallel b$ e $b \parallel c$, então $a \parallel c$.

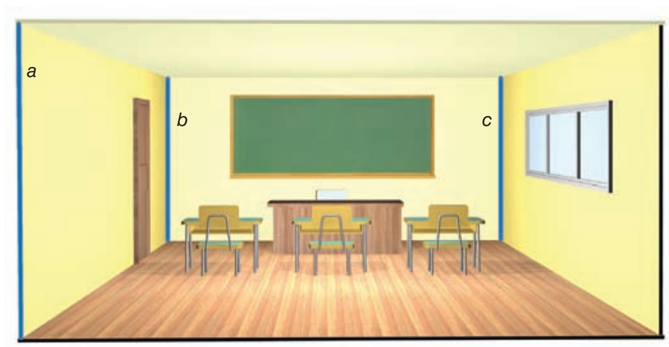


a, b e c são coplanares.



a, b e c não são coplanares.

O caso das retas não coplanares pode ser modelado pelas intersecções de paredes de uma sala com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, conforme ilustra a figura abaixo.



Note que a reta a é paralela à reta b e b é paralela a c; consequentemente, a é paralela a c.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9 Demonstrar o teorema:

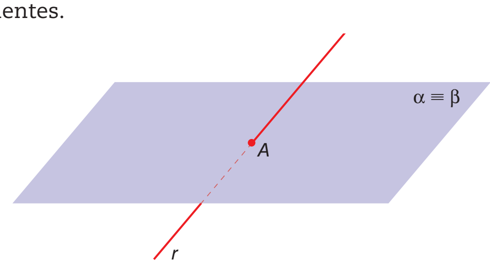
> **T.16** Se dois planos, α e β, são paralelos e uma reta r é secante a α, então r é secante a β.

Resolução

Consideremos dois casos:

1º caso: $\alpha \equiv \beta$

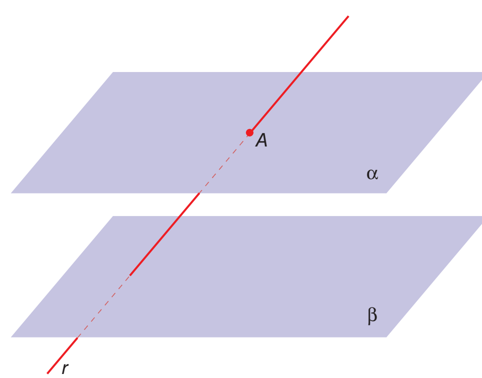
Nesse caso, α e β são planos paralelos coincidentes.



A demonstração desse caso é imediata, pois, se r é secante a α e $\alpha \equiv \beta$, então r é secante a β.

2º caso: $\alpha \parallel \beta$ e $\alpha \not\equiv \beta$

Nesse caso, α e β são planos paralelos distintos.



Se r é secante a α, então existe um único ponto A que pertence a r e a α, ou seja, $r \cap \alpha = \{A\}$. E ainda:

- r não está contida em β, pois $A \in r$ e $A \notin \beta$;
- r não é paralela a β, pois, se assim fosse, pelo teorema T.12 teríamos uma reta r' paralela a r e contida em β.

Desse modo, teríamos:

$r' \subset \beta$, $r' /\!/ r$, $A \in r$, $A \in \alpha$

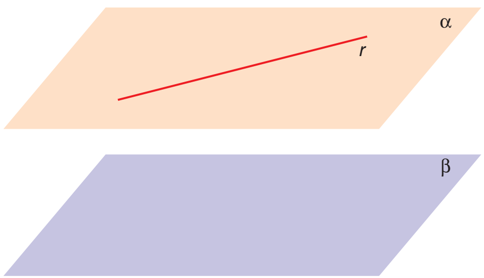
Assim, pelo teorema T.13, teríamos que $r \subset \alpha$, o que contraria a hipótese de r ser secante a α.

Logo, se r não está contida em β e não é paralela a β, então resta apenas uma possibilidade: r é secante a β.

10 Demonstrar o teorema:

> **T.19** Se dois planos distintos, α e β, são paralelos, então toda reta r contida em α é paralela a β.

Resolução



Como $\alpha \cap \beta = \varnothing$ e r está contida em α, concluímos que $r \cap \beta = \varnothing$, ou seja, r é paralela a β.

11 Demonstrar o teorema:

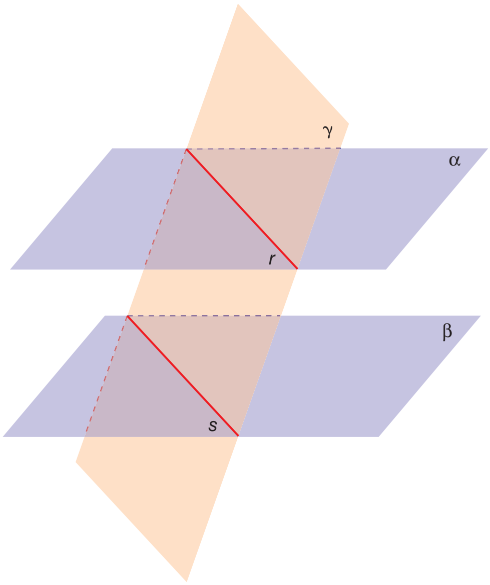
> **T.21** Se um plano γ é secante a dois planos paralelos, α e β, então a reta r, comum a γ e α, é paralela à reta s, comum a γ e β.

Resolução

1º caso: $\alpha \equiv \beta$

Esse caso é imediato, pois, se $\gamma \cap \alpha = r$ e $\alpha \equiv \beta$, então a reta s, com $\gamma \cap \beta = s$, coincide com r e, portanto, r e s são paralelas coincidentes.

2º caso: $\alpha /\!/ \beta$ e $\alpha \not\equiv \beta$



Temos:

$r = \alpha \cap \gamma \Rightarrow r \subset \alpha$ e $r \subset \gamma$

e

$s = \beta \cap \gamma \Rightarrow s \subset \beta$ e $s \subset \gamma$

Como α e β são planos paralelos distintos, isto é, $\alpha \cap \beta = \varnothing$, e, ainda, $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, concluímos que $r \cap s = \varnothing$. Além de não terem ponto em comum, as retas r e s são coplanares, pois $r \subset \gamma$ e $s \subset \gamma$; logo, $r /\!/ s$.

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração dos teoremas* T.17, T.18, T.20, T.22 e T.23.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

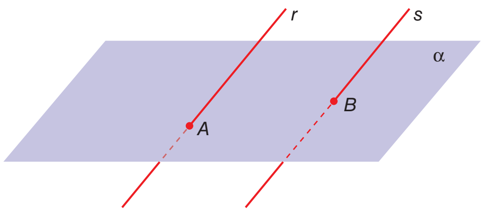
16 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das seguintes afirmações:

a) Dois planos que possuem uma única reta em comum são secantes.
b) Dois planos que possuem uma reta em comum são secantes.
c) Dois planos distintos que possuem uma reta em comum são secantes.
d) Dois planos distintos que possuem um ponto em comum são secantes.
e) Se uma reta r é paralela a dois planos secantes, então r é paralela à reta comum a esses dois planos.
f) Se uma reta r é paralela à reta comum a dois planos secantes, então r é paralela a cada um desses dois planos.
g) Se um ponto A pertence a dois planos, α e β, então $\alpha \equiv \beta$.
h) Se existe um ponto A comum a dois planos, α e β, e existe um ponto B tal que $B \in \alpha$ e $B \notin \beta$, então a intersecção de α e β é uma reta.
i) A intersecção de dois planos pode ser um segmento de reta.
j) Três planos podem ter um único ponto em comum.
k) Três planos podem ter uma única reta em comum.
l) Se duas retas, r e s, têm um único ponto em comum e r está contida em um plano α, então s e α têm um único ponto em comum.

m) Existem infinitos planos que passam por um mesmo ponto.
n) Se α e β são planos paralelos distintos, então α contém uma única reta paralela a β.
o) Se α e β são planos paralelos distintos, então α contém uma reta paralela a β.
p) Se um plano α contém uma reta paralela a um plano β, então α é paralelo a β.
q) Se α e β são planos paralelos distintos e r e s são retas tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então r é paralela a s ou r é reversa a s.
r) Se r e s são retas paralelas distintas contidas em um plano α, e β é um plano paralelo a r e a s, então $\alpha /\!/ \beta$.
s) Se um plano α contém duas retas concorrentes, r e s, paralelas a um plano β, então $\alpha /\!/ \beta$.
t) Se α, β e γ são planos tais que $\alpha /\!/ \beta$ e $\beta /\!/ \gamma$, então $\alpha /\!/ \gamma$.
u) Se α e β são planos paralelos e um plano γ é secante a α, então γ é secante a β.
v) Se a reta r é comum a dois planos secantes, α e β, e uma reta s intercepta α e β nos pontos distintos A e B, respectivamente, então r é reversa a s.

17 Leia esta afirmação: "Se dois planos são paralelos, então toda reta contida em um deles é paralela ao outro". Ela é verdadeira ou falsa? Por quê?

18 Duas retas r e s, paralelas distintas, são secantes a um plano α nos pontos A e B. Qual é a intersecção do plano α com o plano pl(r, s)?



19 Um plano γ é secante a dois planos, α e β, tal que $\alpha \cap \gamma = r$ e $\beta \cap \gamma = s$, em que r e s são retas paralelas distintas. Podemos afirmar que $\alpha /\!/ \beta$? Por quê?

20 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações a seguir.
a) Se dois planos são secantes, então toda reta contida em um deles é secante ao outro.
b) Se dois planos, α e β, são secantes e duas retas distintas, r e s, são tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então r e s podem ser paralelas.
c) Se dois planos, α e β, são secantes e duas retas distintas, r e s, são tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então r e s podem ser reversas.
d) Dois planos distintos podem ter um ponto em comum.
e) Dois planos distintos podem ter um único ponto em comum.
f) Se uma reta r é paralela a dois planos, α e β, então $\alpha /\!/ \beta$.
g) Se um plano α contém duas retas distintas paralelas a um plano β, então $\alpha /\!/ \beta$.
h) Se duas retas concorrentes, r e s, são, respectivamente, paralelas a duas retas, t e u, então t e u determinam um plano.
i) Considerando todos os infinitos planos paralelos a uma reta t, existe uma reta r secante a todos esses planos.
j) Considerando todos os infinitos planos que contêm uma reta t, existe uma reta r secante a todos esses planos.
k) Considerando todos os infinitos planos que contêm uma reta t, existe uma reta r paralela a todos esses planos.

21 Considere a proposição: "Se três retas distintas, r, s e t, são reversas duas a duas e não existe um plano paralelo às três, então existe uma reta u, paralela a r e concorrente com s e com t". Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta com uma figura.
(*Sugestão*: Use como modelo o paralelepípedo reto-retângulo.)

22 Demonstre que: "Se r e s são retas reversas e a reta t concorre com r e com s, então o plano pl(r, t) é secante ao plano pl(s, t)".

23 Após o término da construção do contrapiso de uma sala, um engenheiro conferiu a qualidade do trabalho colocando uma régua perfeitamente reta em duas direções diferentes, constatando que, em ambas, a régua ficava na horizontal e totalmente encostada no contrapiso. Repetindo esse procedimento em várias regiões da sala, o engenheiro concluiu que o contrapiso era plano e horizontal.
Utilizando uma ou mais proposições estudadas na Geometria de posição, explique por que a conclusão do engenheiro é verdadeira.

Resolva os exercícios complementares 21 a 28, 60 e 61.

Perpendicularidade

Objetivos

- Reconhecer retas perpendiculares, retas ortogonais, reta perpendicular a um plano e planos perpendiculares.
- Identificar projeções ortogonais sobre um plano.

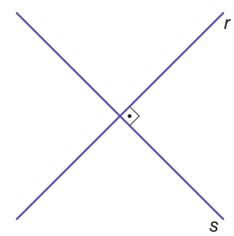
Termos e conceitos

- retas perpendiculares
- retas ortogonais
- reta perpendicular a um plano
- planos perpendiculares
- projeção ortogonal de um ponto sobre um plano

A palavra latina *perpendicularis*, que significa "o que está a prumo", deu origem à palavra portuguesa "perpendicular", que significa "o que se intercepta em ângulo reto". A perpendicularidade pode ocorrer entre duas retas, entre uma reta e um plano ou entre dois planos, conforme veremos a seguir.

Retas perpendiculares

Duas retas r e s são **perpendiculares** se, e somente se, são concorrentes e determinam um ângulo reto entre si. Se r e s são perpendiculares, indicamos: $r \perp s$ ou $s \perp r$.



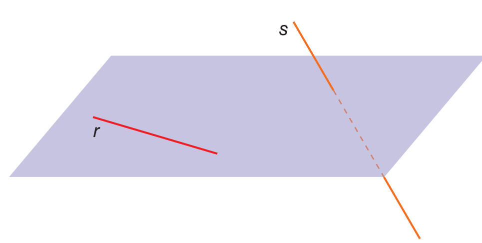
Ainda definimos:

- Duas linhas retas quaisquer (segmentos de reta ou semirretas) são perpendiculares se, e somente se, estão contidas em retas perpendiculares.
- Duas retas concorrentes não perpendiculares entre si são chamadas de **retas oblíquas** entre si.

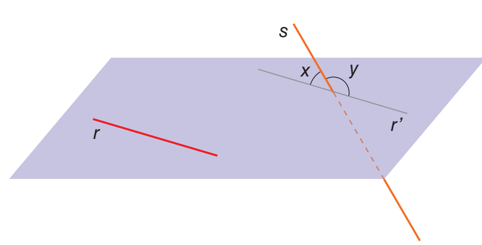
Se duas retas formam um ângulo reto entre si, então elas formam quatro ângulos retos. Podemos demonstrar esse teorema com base no fato de que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Retas ortogonais

Sejam as retas reversas r e s representadas a seguir:

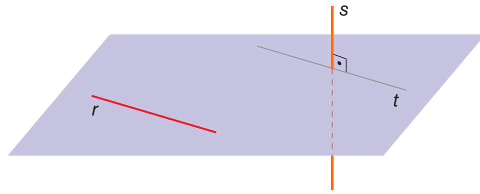


Consideremos uma reta r' paralela a r e concorrente com s:



A reta r' forma com a reta s os ângulos $\hat{x}$, $\hat{y}$ e seus opostos pelo vértice. Estes são, por definição, os ângulos formados pelas retas reversas r e s. Se esses ângulos forem retos, as retas reversas são chamadas de ortogonais. Assim, definimos:

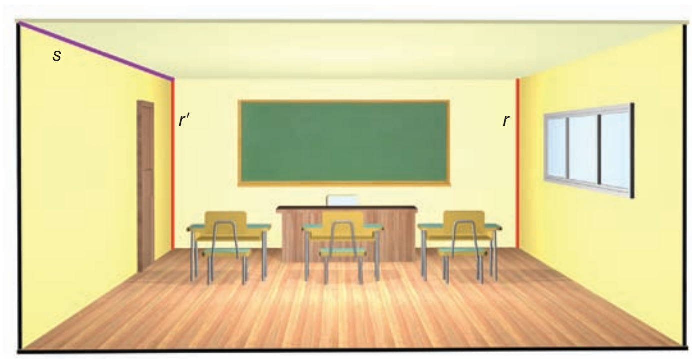
Duas retas, r e s, são **ortogonais** se, e somente se, são reversas e os ângulos formados por elas são retos. Se r e s são ortogonais, indicamos: $r \perp s$ ou $s \perp r$.



r e s são reversas, $t \,/\!/\, r$ e $t \perp s \Leftrightarrow r$ e s são ortogonais.

Observe o modelo a seguir, que ilustra essa definição.

Na sala com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, representada na figura, as retas r e s são ortogonais, pois elas são reversas e a reta r' é paralela a r e é perpendicular a s.



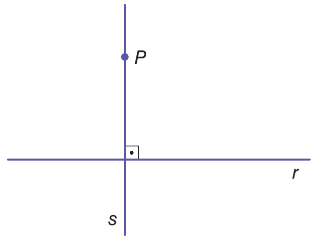
Notas:

1. Dizemos que duas retas formam ângulo reto entre si quando elas são perpendiculares ou ortogonais.
2. Há autores que definem duas retas ortogonais como "retas que formam ângulos retos entre si". Segundo essa definição, retas perpendiculares também são ortogonais. Preferimos adotar a definição que exige, além da formação do ângulo reto, que as retas ortogonais sejam reversas. Desse modo, retas perpendiculares são necessariamente coplanares e retas ortogonais são necessariamente reversas.

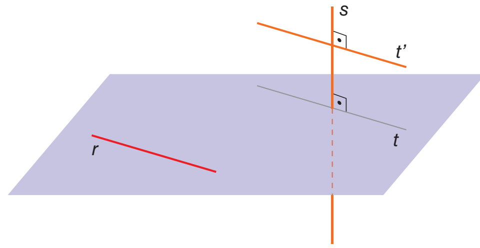
Teoremas

O estudo da perpendicularidade e da ortogonalidade entre retas inclui os teoremas enunciados a seguir.

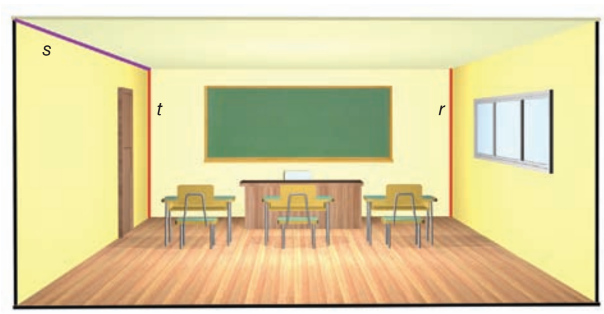
T.24 Dados um ponto P e uma reta r, com $P \notin r$, existe uma única reta s que passa por P e é perpendicular a r.



T.25 Se *r* e *s* são retas ortogonais, então toda reta paralela a *r* e concorrente com *s* é perpendicular a *s*.

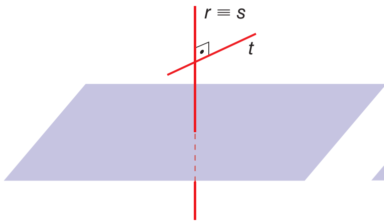


Observe o modelo a seguir, representando essa situação.

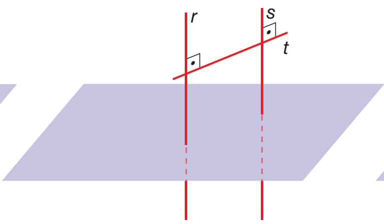


As retas *r* e *s* são ortogonais e a reta *t* é paralela a *r* e concorrente com *s*; logo, *t* é perpendicular a *s*.

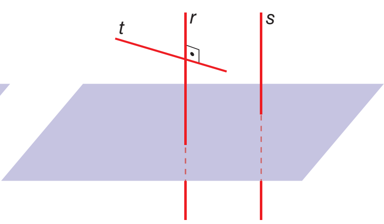
T.26 Se duas retas, *r* e *s*, são paralelas e uma reta *t* é perpendicular a *r*, então *t* é perpendicular ou ortogonal a *s*.



r e *s* são coincidentes.

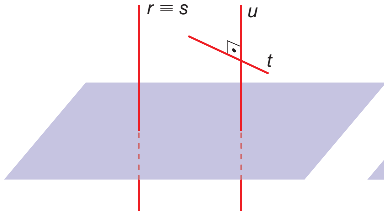


r e *s* são paralelas distintas e *t* é concorrente a *s*.

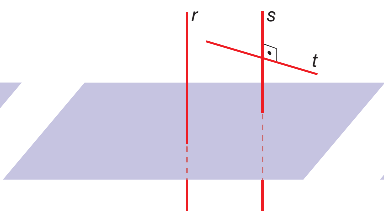


r e *s* são paralelas distintas e *t* é reversa a *s*.

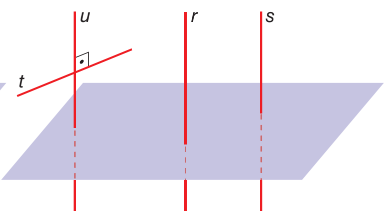
T.27 Se duas retas, *r* e *s*, são paralelas e uma reta *t* é ortogonal a *r*, então *t* é perpendicular ou ortogonal a *s*.



r e *s* são coincidentes.



r e *s* são paralelas distintas e *t* é concorrente a *s*.



r e *s* são paralelas distintas e *t* é reversa a *s*.

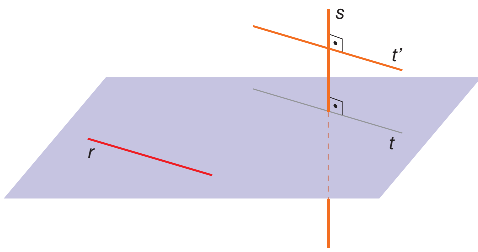
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12 Demonstrar o teorema:

> **T.25** Se r e s são retas ortogonais, então toda reta paralela a r e concorrente com s é perpendicular a s.

Resolução

Como r é ortogonal a s, existe uma reta t paralela a r e perpendicular a s. Toda reta t' paralela a r e concorrente com s será paralela a t. Assim, t e t' são retas paralelas interceptadas pela transversal s e, portanto, os ângulos correspondentes determinados por essas retas são congruentes; logo, sendo s perpendicular a t, temos também que s é perpendicular a t'.



13 Demonstrar o teorema:

> **T.26** Se duas retas, r e s, são paralelas e uma reta t é perpendicular a r, então t é perpendicular ou ortogonal a s.

Resolução

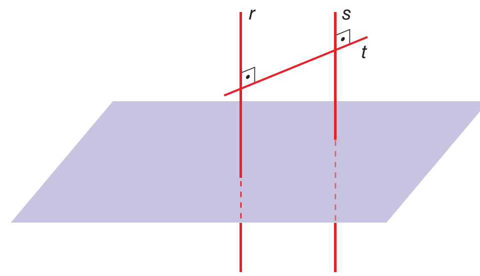
Se $r \equiv s$, então $t \perp s$, pois, por hipótese, $t \perp r$.

Suponhamos agora que $r \not\equiv s$. A reta t não pode ser paralela a s, pois t é concorrente com r e $r /\!/ s$. Há então duas possibilidades:

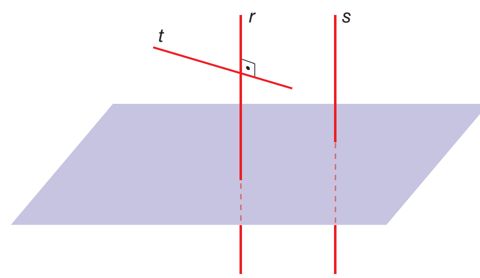
(1) t é concorrente com s; ou

(2) t é reversa a s.

Ocorrendo a possibilidade (1), temos duas retas paralelas, r e s, cortadas por uma transversal t. Logo, os ângulos correspondentes determinados por essas três retas são congruentes e, como $t \perp r$, concluímos que $t \perp s$.



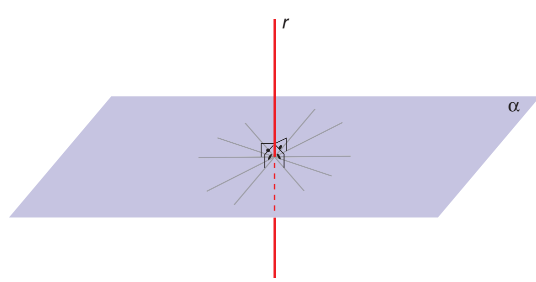
Ocorrendo a possibilidade (2), temos $r /\!/ s$, $r \not\equiv s$ e $t \perp r$. Assim, t é ortogonal a s, pela definição de retas ortogonais.



Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração dos teoremas* T.24 *e* T.27.

Reta perpendicular a um plano

> Uma reta r secante a um plano α é **perpendicular** a α se, e somente se, todas as retas do plano α que concorrem com r são perpendiculares a r. Indicamos que r é perpendicular a α por $r \perp \alpha$ ou por $\alpha \perp r$.

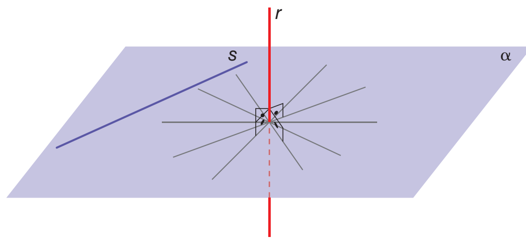


Para visualizar uma reta perpendicular a um plano por meio de um modelo, você pode observar um lustre preso ao teto por um único fio. Esse fio representa uma reta perpendicular ao plano horizontal do teto.

Teoremas

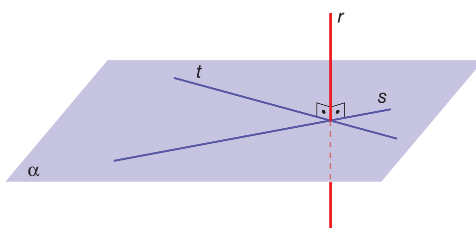
Os principais teoremas que envolvem reta perpendicular a um plano são enunciados a seguir.

T.28 Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então *r* forma ângulo reto com todas as retas contidas em α.



Qualquer reta contida em α e concorrente com *r* é perpendicular a *r*, e qualquer reta contida em α e reversa a *r* é ortogonal a *r*.

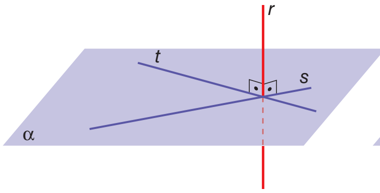
T.29 Se uma reta *r* é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano α, então *r* é perpendicular a α.



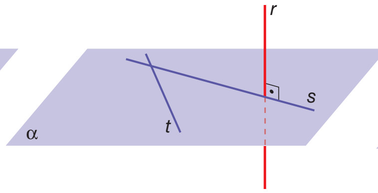
Observe o modelo representando essa situação:

A reta *r* é perpendicular às retas concorrentes *s* e *t* do plano α do piso; logo, *r* é perpendicular a α.

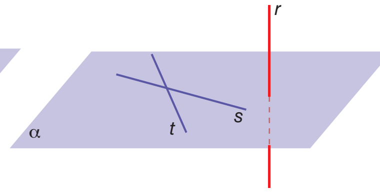
T.30 Se uma reta r forma ângulo reto com duas retas concorrentes s e t de um plano α, então r é perpendicular a α.



r é perpendicular às retas concorrentes s e t do plano α.

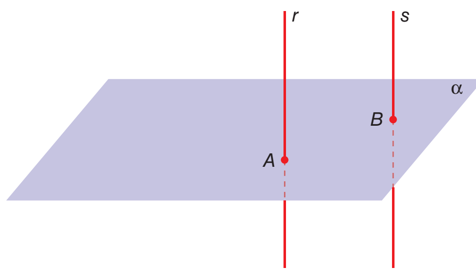


r é perpendicular a s e ortogonal a t, em que t e s são retas concorrentes contidas em α.

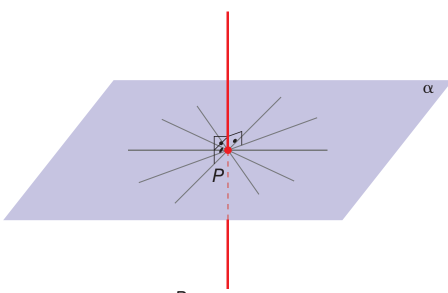


r é ortogonal às retas concorrentes s e t do plano α.

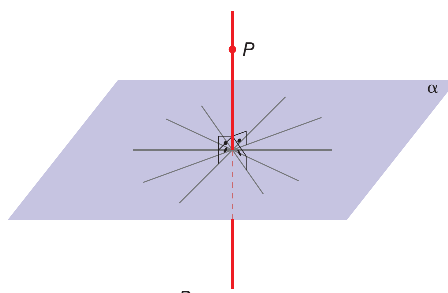
T.31 Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta s, paralela a r, é perpendicular a α.



T.32 Dados um ponto P e um plano α, existe uma única reta que passa por P e é perpendicular a α.

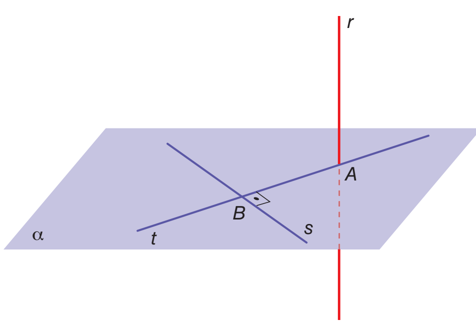


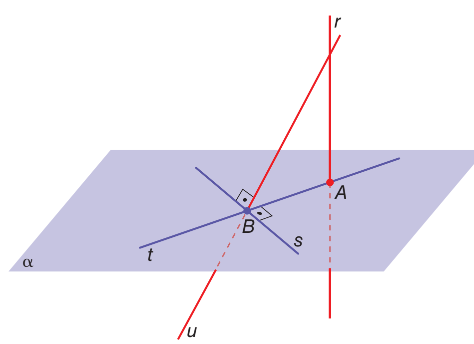
$P \in \alpha$



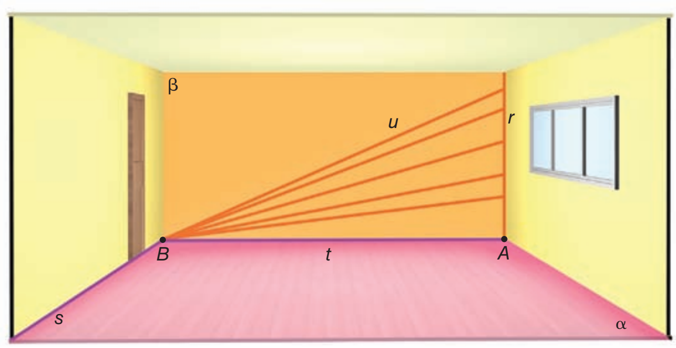
$P \notin \alpha$

T.33 **(Teorema das três perpendiculares)** Se r é uma reta perpendicular a um plano α em um ponto A, s é uma reta contida em α e não passa por A, e t é uma reta que passa por A e é perpendicular a s no ponto B, então toda reta u que passa por B e concorre com r é perpendicular a s.





O modelo a seguir representa o interior de uma sala com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo. Observe como esse modelo auxilia o entendimento do teorema das três perpendiculares.



A reta s é perpendicular ao plano β (face do paralelepípedo), pois contém uma aresta do paralelepípedo perpendicular a β. Logo, qualquer reta contida em β que concorra com s é perpendicular a s. Como $u \subset \beta$ e u concorre com s, concluímos que u é perpendicular a s.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Teorema das três perpendiculares*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

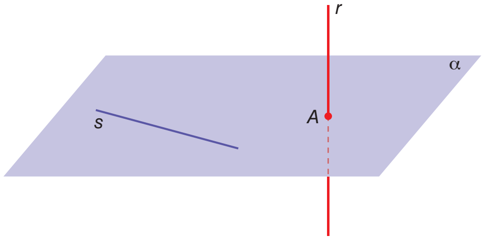
14 Demonstrar o teorema:

> **T.28** Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r forma um ângulo reto com todas as retas contidas em α.

Resolução

Seja A o ponto comum a r e α, com $r \perp \alpha$.

Pela definição de reta perpendicular a um plano, r é perpendicular a todas as retas do plano α que passam pelo ponto A. Seja s uma reta, contida em α, que não passa por A.



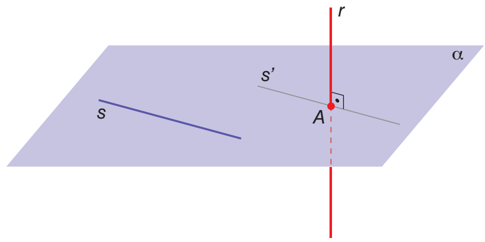
Como s não é concorrente com r, ocorre uma, e apenas uma, das seguintes alternativas:

(1) s é paralela a r; ou

(2) s é reversa a r.

A alternativa (1) é absurda, pois, como $s \subset \alpha$ e $A \in \alpha$, teríamos, pelo teorema T.13, $r \subset \alpha$, o que contraria o fato de r ser perpendicular a α. Resta, então, a alternativa (2), ou seja, s é reversa a r.

Seja s', com $s' \subset \alpha$, a reta que passa por A e é paralela a s.



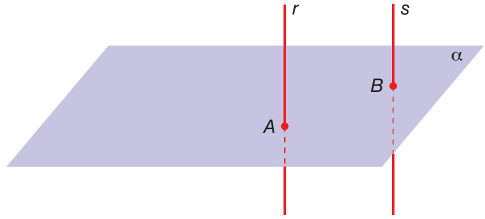
A reta s' é perpendicular a r, pois r é perpendicular a α em A. Logo, s e r são ortogonais.
Concluímos então que qualquer reta contida em α ou é perpendicular a r ou é ortogonal a r, o que significa que qualquer reta do plano α forma um ângulo reto com r.

15 Demonstrar o teorema:

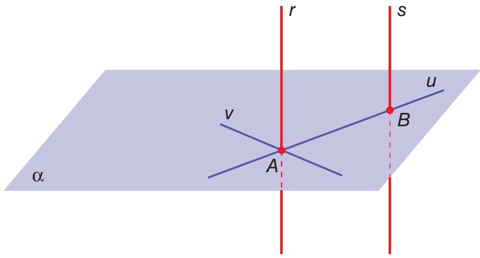
> **T.31** Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta s, paralela a r, é perpendicular a α.

Resolução

Se $r \equiv s$, então $s \perp \alpha$, pois, por hipótese, $r \perp \alpha$.
Suponhamos, agora, que $r \not\equiv s$ e A e B sejam os pontos tais que $\{A\} = r \cap \alpha$ e $\{B\} = s \cap \alpha$:



Sejam u e v retas contidas em α tais que u concorre com v no ponto A e u passa por B:



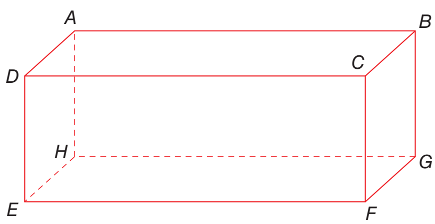
- A reta u está contida em α e concorre com r. Como $r \perp \alpha$, temos, pela definição de perpendicularidade entre reta e plano, $r \perp u$. Os ângulos correspondentes formados pelas paralelas r e s cortadas pela transversal u são congruentes; logo, $s \perp u$.
- A reta v está contida em α e concorre com r. Por hipótese, $r \perp \alpha$; logo, $r \perp v$. Como $r \perp v$, $r /\!/ s$ e $r \not\equiv s$, temos que s é ortogonal a v, por definição de retas ortogonais.

Assim, s forma um ângulo reto com duas retas concorrentes, u e v, do plano α; logo, pelo teorema T.30, concluímos que $s \perp \alpha$.

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração dos teoremas* T.29, T.30, T.32 *e* T.33.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

24 Tendo como modelo o paralelepípedo reto-retângulo representado abaixo, classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações seguintes.



a) $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BG}$.
b) $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AH}$.
c) $\overleftrightarrow{BC}$ é ortogonal a $\overleftrightarrow{AH}$.
d) $\overleftrightarrow{BC}$ forma ângulo reto com $\overleftrightarrow{BG}$.
e) $\overleftrightarrow{BC}$ forma ângulo reto com $\overleftrightarrow{AH}$.
f) $\overleftrightarrow{DC}$ é ortogonal a $\overleftrightarrow{HG}$.
g) $\overleftrightarrow{EC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{CF}$.
h) $\overleftrightarrow{EB}$ não é perpendicular a $\overleftrightarrow{BG}$.
i) $\overleftrightarrow{HF}$ é ortogonal a $\overleftrightarrow{BG}$.
j) $\overleftrightarrow{DC}$ é perpendicular ao plano pl(BGF).
k) $\overleftrightarrow{DG}$ é perpendicular ao plano pl(EFC).
l) $\overleftrightarrow{DE}$ é perpendicular aos planos pl(ABC) e pl(HGF).
m) As retas $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{CF}$, $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{AH}$ são perpendiculares ao plano pl(ABC).

25 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações seguintes.

a) Se duas retas são perpendiculares, então elas são concorrentes.
b) Se duas retas são concorrentes, então elas são perpendiculares.
c) Se duas retas são ortogonais, então elas são reversas.
d) Se duas retas são reversas, então elas são ortogonais.
e) Se duas retas, r e s, são perpendiculares, então toda reta perpendicular a r é paralela a s.
f) Se duas retas são ortogonais, então toda reta perpendicular a uma delas é paralela à outra.
g) Se duas retas são ortogonais, então existe uma reta perpendicular a ambas simultaneamente.
h) Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes contidas em um plano α, então r é perpendicular a α.
i) Se uma reta r é perpendicular a duas retas distintas contidas em um plano α, então r é perpendicular a α.
j) Se uma reta r é ortogonal a duas retas concorrentes contidas em um plano α, então r é perpendicular a α.
k) Se uma reta r é ortogonal a duas retas distintas contidas em um plano α, então r é perpendicular a α.
l) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r é perpendicular a uma única reta contida em α.
m) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r é perpendicular a uma reta contida em α.
n) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r é perpendicular a infinitas retas contidas em α.
o) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r é perpendicular a todas as retas contidas em α.
p) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r forma ângulo reto com todas as retas contidas em α.

26 Sejam A, B e C pontos não colineares pertencentes a um plano α e seja o ponto D, com $D \notin \alpha$. Sabendo que $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BC}$, podemos afirmar que:

a) $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AC}$
b) $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{DB}$
c) $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{BC}$
d) $\overleftrightarrow{DC} /\!/ \overleftrightarrow{AC}$
e) $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB}$

27 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações seguintes.

a) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta paralela a r é perpendicular a α.

b) Se as retas r e s são perpendiculares a um mesmo plano α, então $r \parallel s$.

c) Se uma reta r é perpendicular a dois planos, α e β, então $\alpha \parallel \beta$.

d) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta perpendicular a r está contida em α.

e) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta perpendicular a r é paralela a α.

f) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, e s é uma reta perpendicular a r, então ou $s \subset \alpha$ ou $s \parallel \alpha$.

28 Seja r uma reta secante a um plano α e não perpendicular a α, e seja s uma reta concorrente com r e perpendicular ao plano α. Se t é uma reta contida em α e perpendicular a r, então podemos afirmar que:

a) t é concorrente com s.

b) $t \parallel s$

c) $s \perp pl(t, r)$

d) $t \perp pl(s, r)$

e) t não forma ângulo reto com r.

29 Demonstre que: "Se dois planos, α e β, são paralelos e r é uma reta perpendicular a α, então r é perpendicular a β".

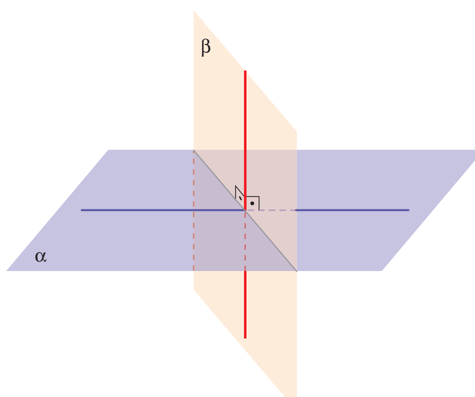
30 Para fixar uma haste perpendicular à superfície plana de uma peça de madeira, um marceneiro usou dois esquadros em posições diferentes, encostados na haste e na superfície plana da peça de madeira, como mostra a figura.

A perpendicularidade da haste em relação ao plano fica garantida por qual teorema da Geometria?

Resolva os exercícios complementares 29 a 37 e 62 a 65.

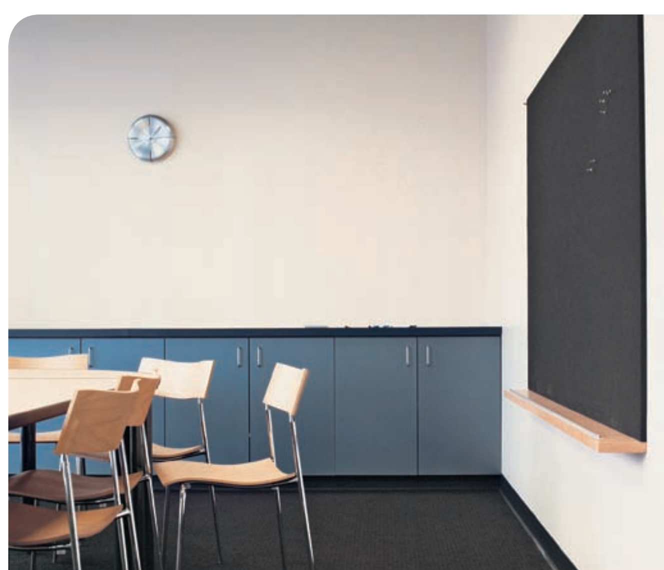
Planos perpendiculares

Dois planos são **perpendiculares** se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro. Indicamos que um plano α é perpendicular a um plano β por: $\alpha \perp \beta$.



Nota:

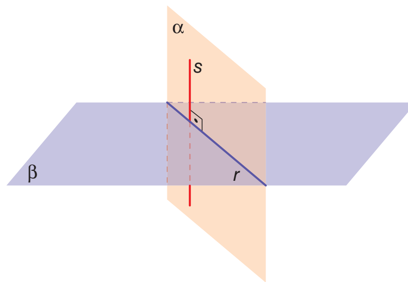
Para visualizar dois planos perpendiculares através de um modelo, você pode observar vários elementos à sua volta; por exemplo, observe o plano do piso e o plano de uma das paredes da sala de aula. Esses planos são perpendiculares.



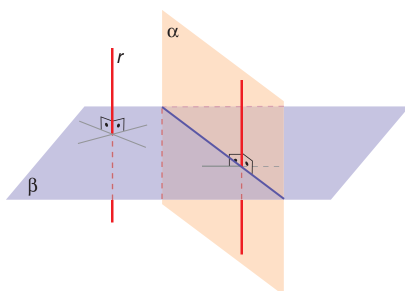
Teoremas

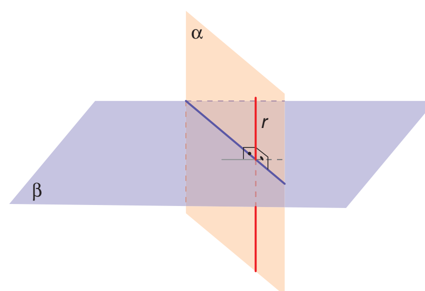
O estudo de planos perpendiculares inclui os seguintes teoremas:

T.34 Se α e β são planos perpendiculares tais que $\alpha \cap \beta = r$, e uma reta s, contida em α, é perpendicular a r, então s é perpendicular a β.

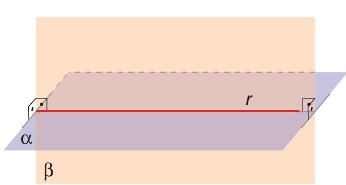


T.35 Se α e β são planos perpendiculares e uma reta r é perpendicular a β, então $r \,/\!/\, \alpha$ ou $r \subset \alpha$.

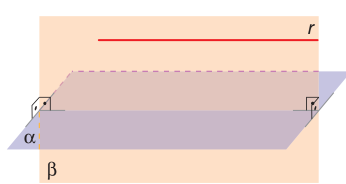




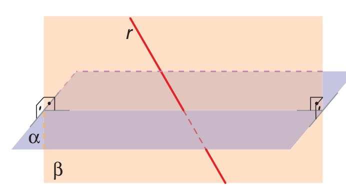
T.36 Se uma reta r não é perpendicular a um plano α, então existe um único plano β que contém r e é perpendicular a α.



r esta contida em α.

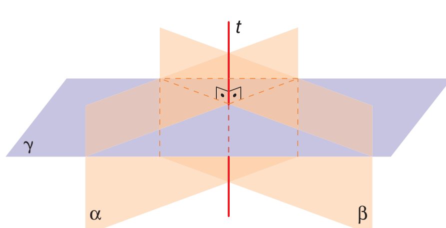


r é paralela a α.

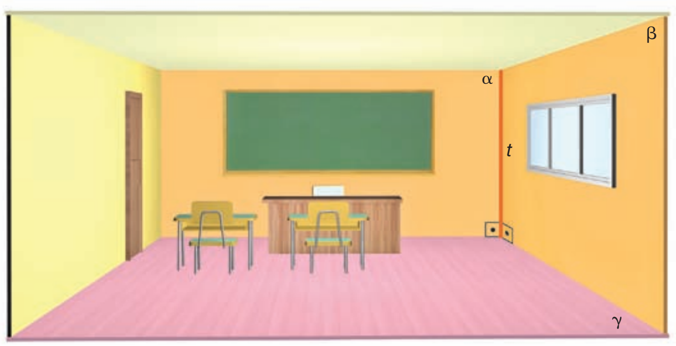


r é obliqua a α.

T.37 Se dois planos secantes α e β são perpendiculares a um plano γ, então a reta t, comum a α e β, é perpendicular a γ.



Observe essa situação no modelo a seguir, que representa o interior de uma sala com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo.



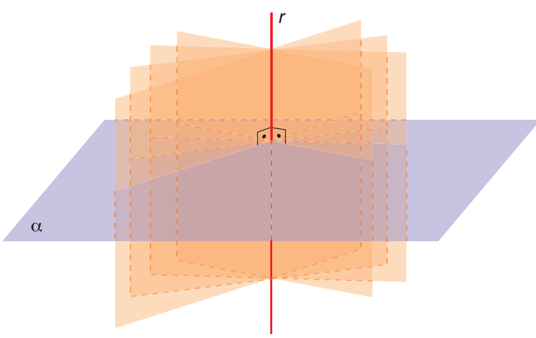
Os planos secantes α e β das paredes são perpendiculares ao plano γ do piso; logo, a reta t, comum a α e a β, é perpendicular a γ.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 Uma reta r é perpendicular a um plano α. Quantos planos contêm r e são perpendiculares a α?

Resolução

Se a reta r é perpendicular a α, então qualquer plano β que contém r é perpendicular a α, pois β contém uma reta (a própria reta r) perpendicular a α. Como, pelo teorema T.8, existem infinitos planos que contêm r, concluímos que existem infinitos planos contendo r e perpendiculares a α.



17 Dados um plano α e um ponto P, quantos planos passam por P e são perpendiculares a α?

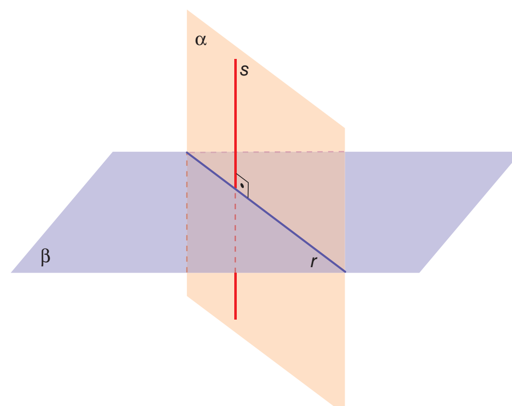
Resolução

Sabemos, pelo teorema T.32, que existe uma única reta r que passa por P e é perpendicular a α. Como qualquer plano que contém r é perpendicular a α, concluímos que existem infinitos planos que contêm P e são perpendiculares a α.

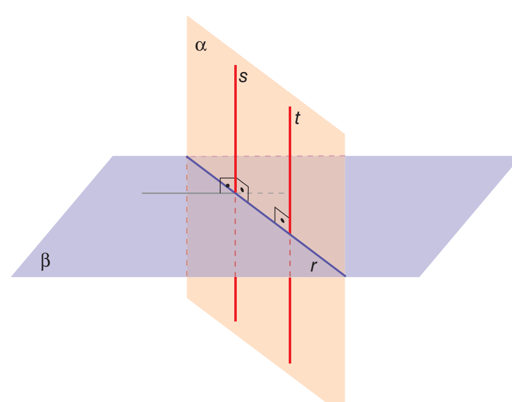
18 Demonstrar o teorema:

> **T.34** Se α e β são planos perpendiculares tais que $\alpha \cap \beta = r$ e uma reta s, contida em α, é perpendicular a r, então s é perpendicular a β.

Resolução



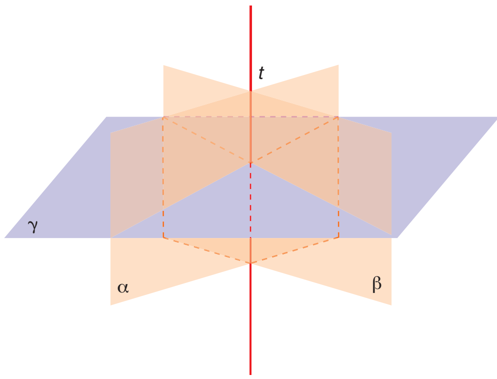
- Se $\alpha \perp \beta$, então, por definição de planos perpendiculares, existe uma reta t, contida em α, tal que $t \perp \beta$ e, portanto, $t \perp r$.
- Como t e s são coplanares e perpendiculares a r, temos $t \parallel s$.
- Como $t \parallel s$ e $t \perp \beta$, concluímos, pelo teorema T.31, que $s \perp \beta$.



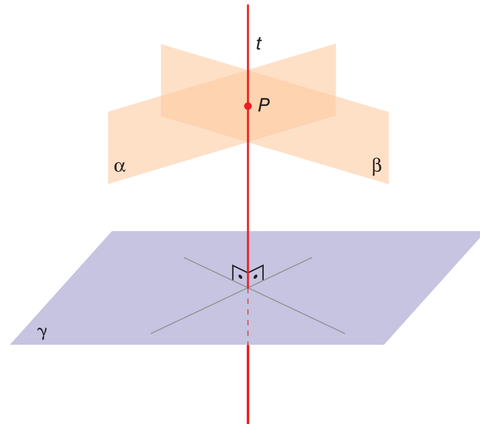
19 Demonstrar o teorema:

> **T.37** Se dois planos secantes, α e β, são perpendiculares a um plano γ, então a reta t, comum a α e a β, é perpendicular a γ.

Resolução



Seja t' a reta perpendicular a γ que passa por um ponto P, com $P \in t$. Como $P \in t$ e $t = \alpha \cap \beta$, então $P \in \alpha$ e $P \in \beta$.



Assim, temos:

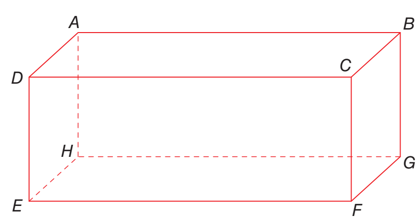
$$\left.\begin{array}{l}\alpha \perp \gamma\\ t' \perp \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow t' \subset \alpha \text{ ou } t' /\!/ \alpha$$, de acordo com o teorema T.35.

Como $P \in \alpha$ e $P \in t'$, concluímos que t' não é paralela a α e, portanto, $t' \subset \alpha$.
Analogamente, concluímos que $t' \subset \beta$.
Os planos α e β são secantes e, portanto, têm uma única reta em comum. Logo $t' \equiv t$ e assim, $t \perp \gamma$.

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração dos teoremas* T.35 *e* T.36.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

31 Tendo como modelo o paralelepípedo reto-retângulo representado ao lado, classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações seguintes.



a) $pl(CBG) \perp pl(ABC)$
b) $pl(ABC) \perp pl(ABG)$
c) $pl(DCF) \perp pl(ABG)$
d) $pl(ACF) \perp pl(EHF)$
e) $pl(DBG) \perp pl(ABG)$
f) A intersecção dos planos $pl(ACF)$ e $pl(DBG)$ é uma reta perpendicular ao plano $pl(HGF)$.
g) Existe um único plano que contém a reta $\overleftrightarrow{EB}$ e é perpendicular ao plano $pl(HGF)$.
h) Existe um único plano que contém a reta $\overleftrightarrow{BG}$ e é perpendicular ao plano $pl(HGF)$.

32 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações seguintes.
a) Se um plano α é perpendicular a um plano β, então existe uma única reta contida em α e perpendicular a β.
b) Se um plano α é perpendicular a um plano β, então existem infinitas retas contidas em α e perpendiculares a β.
c) Se dois planos secantes, α e β, são perpendiculares a um plano γ, então a reta t, comum a α e β, é perpendicular a γ.
d) Se dois planos, α e β, são perpendiculares a um plano γ, então $\alpha /\!/ \beta$.
e) Se dois planos, α e β, são secantes e a reta t, comum a α e β, é perpendicular a um plano γ, então $\alpha \perp \gamma$ e $\beta \perp \gamma$.
f) Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então existem infinitos planos que contêm *r* e são perpendiculares a α.
g) Se uma reta *r* não é perpendicular a um plano α, então existe um único plano que contém *r* e é perpendicular a α.
h) Dados um plano α e uma reta *r*, existe um único plano que contém *r* e é perpendicular a α.

33 Se dois planos, α e β, são perpendiculares entre si, e uma reta r, contida em α e secante a β, não é perpendicular à reta t, comum a α e β, então podemos afirmar que a reta s, contida em β e perpendicular a r, é tal que:

a) $s \equiv t$
b) $s \perp t$
c) s não é perpendicular a t.
d) s não é secante a α.
e) $s /\!/ \alpha$

34 Sejam uma reta r e dois planos secantes, α e β. Sob que condições existe um plano γ que contém r e é perpendicular a α e a β?

35 Se dois planos, α e β, são perpendiculares e uma reta r, que é perpendicular a β, tem um ponto P em comum com α, então podemos afirmar que:

a) $r \subset \alpha$
b) $P \in \beta$
c) $r /\!/ \alpha$
d) r é secante a α.
e) $r \subset \beta$

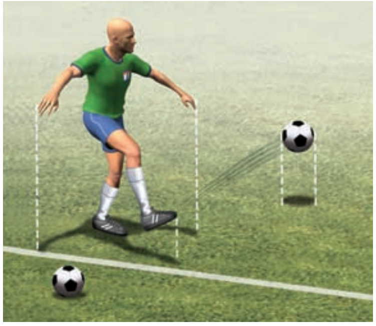
36 Demonstre que: "Se dois planos, α e β, são paralelos entre si e um plano γ é perpendicular a α, então γ é perpendicular a β".

Resolva os exercícios complementares 38 a 53 e 66.

Projeção ortogonal sobre um plano

Ao ser iluminada pelo Sol, uma bola de futebol projeta uma sombra sobre o campo. Se os raios solares forem oblíquos ao plano do campo, a sombra é chamada de projeção oblíqua da bola sobre o campo; e se os raios solares forem perpendiculares ao plano do campo, a sombra é chamada de **projeção ortogonal** da bola sobre o campo.

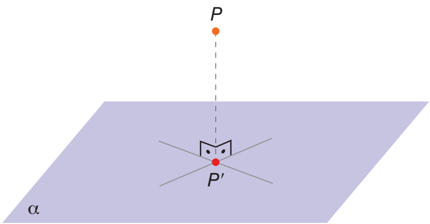
Os raios solares são oblíquos ao plano do campo, por isso as sombras das bolas são chamadas de projeções oblíquas das bolas sobre esse plano.



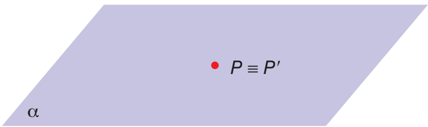
Os raios solares são perpendiculares ao plano do campo, por isso as sombras das bolas são chamadas de projeções ortogonais das bolas sobre esse plano.

Neste exemplo, escolhemos o Sol como fonte de luz porque os raios solares podem ser considerados paralelos, o que modela adequadamente as definições a seguir.

A **projeção ortogonal** de um ponto P sobre um plano α é o ponto P' tal que $P' \in \alpha$ e $\overline{PP'} \perp \alpha$.



$P \notin \alpha$

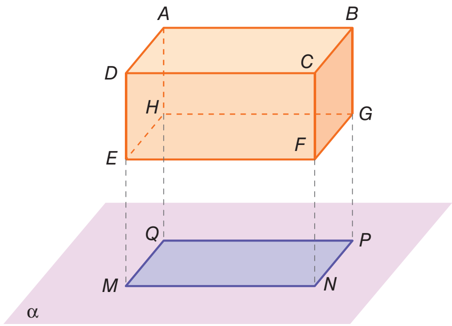


$P \in \alpha$ (Nesse caso, o ponto P coincide com a projeção ortogonal P'.)

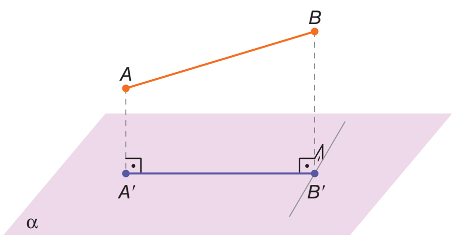
A **projeção ortogonal** de uma figura geométrica sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos da figura sobre esse plano.

Exemplos

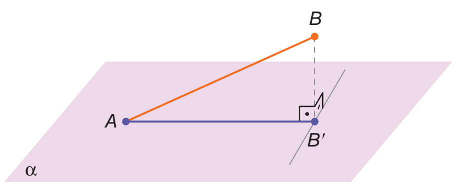
a) Na figura, o quadrilátero *MNPQ* representa as projeções ortogonais de todos os pontos do paralelepípedo *ABCDEFGH* sobre o plano α. Assim, esse quadrilátero é a projeção ortogonal do paralelepípedo sobre o plano α.



b) Na figura, $\{A, B\} \not\subset \alpha$. A projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre o plano α é o segmento $\overline{A'B'}$:



c) Na figura, $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$. A projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre o plano α é o segmento $\overline{AB'}$.

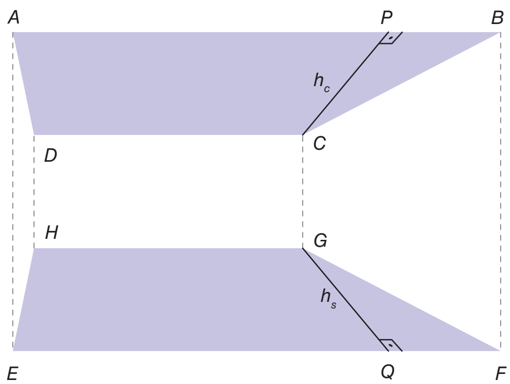


EXERCÍCIO RESOLVIDO

20 Uma cobertura tem a forma de um trapézio cujas bases medem 10 m e 8 m. Essas bases são paralelas ao terreno plano e horizontal, estando a base maior a 6 m acima do solo e a menor, a 5 m acima do solo. No momento em que os raios solares estão perpendiculares ao terreno, a sombra projetada pela cobertura sobre o terreno é um trapézio com 27 m² de área. Calcular a área dessa cobertura.

Resolução

Sejam *ABCD* e *EFGH* os trapézios da cobertura e da sombra, com alturas h_c e h_s, respectivamente, conforme a figura:

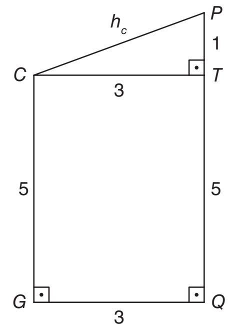


Seção 10.3 • Perpendicularidade

A projeção ortogonal $\overline{GH}$ tem a mesma medida da base $\overline{CD}$, pois o quadrilátero $CDHG$ é um retângulo; logo, $GH = CD = 8$ m. Raciocinando do mesmo modo, deduzimos que $EF = AB = 10$ m. Assim, a área do trapézio da sombra é dada por $\frac{(10 + 8) \cdot h_s}{2}$ m^2; portanto, a medida h_s, em metro, é dada por:

$$\frac{(10 + 8) \cdot h_s}{2} = 27 \Rightarrow h_s = 3$$

Observando as medidas, em metro, no quadrilátero $CGQP$, podemos obter a medida h_c pelo teorema de Pitágoras:



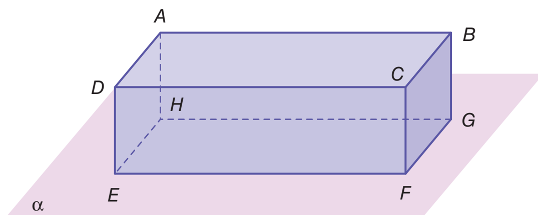
$$h_c^2 = 1^2 + 3^2 \Rightarrow h_c = \sqrt{10}$$

Concluímos, finalmente, que a área do trapézio da cobertura é:

$$\frac{(10 + 8) \cdot \sqrt{10}}{2} \text{ m}^2 = 9\sqrt{10} \text{ m}^2$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

37 Seja α o plano que contém a base $EFGH$ do paralelepípedo reto-retângulo $ABCDEFGH$ abaixo.



Descreva a projeção ortogonal:

a) do segmento $\overline{AB}$ sobre o plano α.
b) do segmento $\overline{DB}$ sobre o plano α.
c) do ponto D sobre o plano α.
d) do ponto E sobre o plano α.
e) do segmento $\overline{FG}$ sobre o plano α.
f) do segmento $\overline{EC}$ sobre o plano α.
g) do retângulo $ABCD$ sobre o plano α.
h) do retângulo $CBGF$ sobre o plano α.
i) do triângulo BDE sobre o plano α.
j) do segmento $\overline{BG}$ sobre o plano α.
k) do paralelepípedo $ABCDEFGH$ sobre o plano α.

38 Descreva a projeção ortogonal da reta r sobre o plano α em cada item.

a) A reta r é perpendicular ao plano α.
b) A reta r é secante ao plano α e não é perpendicular a α.
c) A reta r é paralela ao plano α.
d) A reta r está contida no plano α.

Resolva os exercícios complementares 54 a 58.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

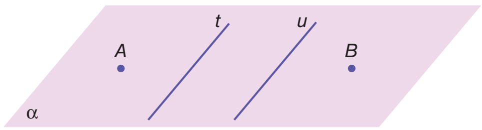
1 Quatro retas distintas entre si podem concorrer, duas a duas, em seis pontos distintos entre si? Justifique sua resposta com um desenho.

2 Demonstre que: "Três pontos distintos entre si podem não ser colineares".

3 Demonstre que: "Quatro pontos distintos entre si podem não ser coplanares".

4 Sejam seis pontos distintos entre si, de modo que não existam, entre eles, três colineares. Quantas retas ficam determinadas por esses pontos?

5 A figura abaixo mostra duas retas paralelas distintas, t e u, contidas em um plano α, e dois pontos distintos, A e B, pertencentes a α.



Em relação a essa figura, classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações.

a) $\text{spl}(t, A) \cup \text{spl}(u, B) = \alpha$
b) $\text{spl}(t, A) \cup \text{spl}(t, B) = \alpha$
c) $\text{spl}(t, B) \cup \text{spl}(u, A) \neq \alpha$
d) $\text{spl}(t, A) \cap \text{spl}(t, B) = t$
e) $\text{spl}(u, A) \cap \text{spl}(t, B) = \varnothing$
f) A intersecção dos semiplanos $\text{spl}(u, A)$ e $\text{spl}(t, B)$ é uma faixa plana infinita de bordas paralelas.
g) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ tem um único ponto em comum com t.
h) $t \subset \text{spl}(u, A)$

(*Nota*: A sigla spl significa semiplano.)

6 (Mackenzie-SP) Sejam r, s e t retas no espaço. Se r é perpendicular a t, e s é perpendicular a t, então:
a) r e s são paralelas.
b) r e s são reversas.
c) r e s são perpendiculares.
d) r, s e t são coplanares.
e) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

7 (Ceasesp-PE) Uma, e só uma, das alternativas abaixo é falsa. Assinale-a:
a) Por um ponto P de uma reta r do espaço passam infinitas retas perpendiculares a r.
b) Se duas retas do espaço são concorrentes, elas determinam o plano que as contém.
c) Duas retas do espaço determinam um plano se, e somente se, elas são concorrentes ou paralelas distintas.
d) Se três retas não coplanares têm um único ponto em comum, elas determinam três planos.
e) Cinco pontos não coplanares determinam, no máximo, três planos.

8 Uma reta pode coincidir com um plano? Por quê?

9 Sejam seis pontos distintos entre si, de modo que não existam entre eles quatro coplanares. Quantos planos ficam determinados por esses pontos?

10 Dados um ponto P e uma reta r, com $P \notin r$, deseja-se obter um ponto Q qualquer do plano $\text{pl}(r, P)$ tal que P e Q estejam em semiplanos opostos em relação à reta r. Descreva os procedimentos para a obtenção do ponto Q.

11 Dados três pontos não colineares, A, B e C, deseja-se obter um ponto D qualquer do plano $\text{pl}(ABC)$ tal que D e A estejam em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{BC}$. Descreva os procedimentos para a obtenção do ponto D.

12 Dadas duas retas paralelas distintas, r e s, deseja-se obter um ponto P qualquer do plano $\text{pl}(r, s)$ tal que P não pertença a nenhuma dessas retas. Descreva os procedimentos para a obtenção do ponto P.

13 Dadas duas retas concorrentes, r e s, deseja-se obter um ponto P qualquer do plano $\text{pl}(r, s)$ tal que P não pertença a nenhuma dessas retas. Descreva os procedimentos para a obtenção do ponto P.

14 Sejam r e s retas reversas e A e B pontos distintos pertencentes a r. Demonstre que, para qualquer ponto P, com $P \in s$, existe um único plano determinado por A, B e P.

15 Dadas duas retas reversas, r e s, deseja-se obter o plano α que contém s e é paralelo a r. Descreva os procedimentos para a obtenção do plano α.

16 Demonstre que: "Se r e s são retas com um único ponto comum e α e β são planos distintos tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então α e β são secantes".

17 (Mackenzie-SP) Considere as afirmações:
I. Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
II. Se dois planos são paralelos, toda reta de um é paralela a uma reta do outro.
III. Se duas retas são reversas, então existe uma única perpendicular comum a elas.

Então:
a) todas são verdadeiras.
b) somente a II é verdadeira.
c) somente a III é verdadeira.
d) somente a I é verdadeira.
e) somente II e III são verdadeiras.

18 (Mackenzie-SP) A reta r é paralela ao plano α. Então:
a) todas as retas de α são paralelas a r.
b) a reta r não pode ser coplanar com nenhuma reta de α.
c) existem em α retas paralelas a r e também existem em α retas reversas com r.
d) existem em α retas paralelas a r e também retas perpendiculares a r.
e) todo plano que contém r é paralelo a α.

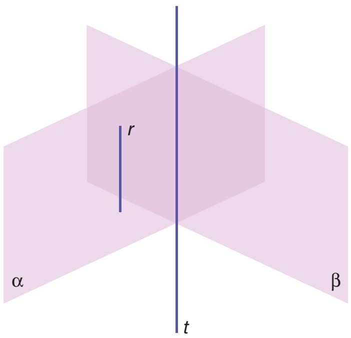
19 (FCC) Sejam um plano α e um ponto P não pertencente a α. Quantas retas paralelas a α podem ser traçadas, no máximo, pelo ponto P?
a) Nenhuma.
b) Uma.
c) Três.
d) Infinitas.
e) Duas.

20 (FCC) Se um plano α e uma reta r são tais que $r \cap \alpha = r$, então:
a) existe um plano que contém r e não intercepta α.
b) existe uma reta em α que é concorrente com r.
c) toda reta paralela a α é paralela a r.
d) toda reta paralela a r está contida em α.
e) toda reta perpendicular a α é perpendicular a r.

21 Se α e β são planos secantes cuja reta comum é t, e γ é um plano paralelo a α e distinto de α, então pode-se concluir que:
a) t é secante a γ.
b) t é paralela a γ.
c) t está contida em γ.
d) t é paralela a γ ou está contida em γ.
e) t é secante a γ ou está contida em γ.

22 Se uma reta r é secante a um plano α e é paralela a um plano β, então pode-se concluir que:
a) α é paralelo a β.
b) α e β têm um único ponto em comum.
c) α e β são secantes.
d) Existem pelo menos duas retas distintas comuns a α e β.
e) Todas as retas contidas em β interceptam o plano α.

23 Demonstre que: "Se t é a reta comum a dois planos secantes, α e β, e uma reta r contida em α é paralela a β, então $r \parallel t$".



24 Duas retas, r e s, concorrentes em um ponto P, são paralelas a um plano α, e outras duas retas, u e v, também concorrem no ponto P e são paralelas a α. Qual é a posição relativa dos planos $pl(r, s)$ e $pl(u, v)$?

25 Se uma reta r é paralela a um plano α, e s é uma reta paralela a r, então pode-se afirmar que:
a) s é paralela a α.
b) s está contida em α.
c) existem retas do plano α que são paralelas a s.
d) nenhuma reta de α é paralela a s.
e) nenhuma reta de α concorre com s.

26 Se r e s são retas reversas, então pode-se concluir que:
a) Todo plano que contém r é secante a s.
b) Não existe plano que contenha r e seja paralelo a s.
c) Existem dois planos paralelos α e β, com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.
d) Existem dois planos distintos que contêm r e são paralelos a s.
e) A reta s é secante a qualquer plano que contém r.

27 Se uma reta r é paralela a um plano α, então pode-se concluir que:
a) Todo plano que contém r é secante a α.
b) Não existe plano contendo r e secante a α.
c) Existem infinitos planos distintos que contêm r e são paralelos a α.
d) Qualquer reta do plano α é paralela a r.
e) Existe um único plano que contém r e é paralelo a α.

28 Demonstre que: "Dados uma reta r e um plano α, existe um plano β que contém r e é secante a α". (*Sugestão:* Faça a demonstração em três casos: r secante a α, r paralela a α e r contida em α.)

29 Uma reta r está contida em um plano α, e um ponto P é tal que $P \in \alpha$ e $P \notin r$. Se a reta s passa por P e $s \perp \alpha$, então podemos afirmar que toda reta t paralela a r:
a) está contida em α.
b) é perpendicular a s.
c) é ortogonal a s.
d) forma ângulo reto com s.
e) é paralela a s.

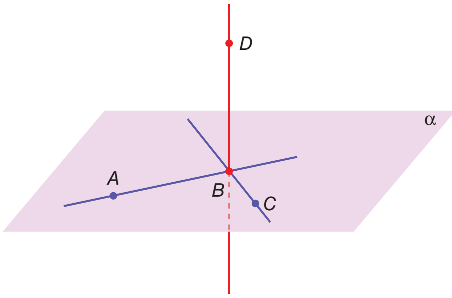
30 Uma reta r está contida em um plano α, e um ponto P é tal que $P \in \alpha$ e $P \notin r$. Se as retas s e t passam por P, com $s \perp r$ e $t \perp \alpha$, então podemos afirmar que toda reta u que passa por Q, com $\{Q\} = r \cap s$, e concorre com t é:
a) ortogonal a s.
b) coincidente com r.
c) ortogonal a r.
d) perpendicular a r.
e) perpendicular a s.

31 (FEI-SP) São dadas as proposições:
I. Uma reta é perpendicular a um plano quando ela é perpendicular a todas as retas desse plano.
II. Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta contida em um dos planos é paralela ao outro plano.
III. Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes, então ela é perpendicular ao plano que as contém.

É correto afirmar que:
a) I, II e III são verdadeiras.
b) I, II e III são falsas.
c) Apenas II é verdadeira.
d) Apenas III é verdadeira.
e) Apenas II e III são verdadeiras.

32 (UEL-PR) Considere uma reta s, contida em um plano α, e uma reta r perpendicular a s. Então, necessariamente:
a) r é perpendicular a α.
b) r e s são coplanares.
c) r é paralela a α.
d) r está contida em α.
e) Todas as retas paralelas a r interceptam s.

33 Demonstre que: "Se três pontos, A, B e C, de um plano α são tais que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ e um ponto D, com $D \notin \alpha$, é tal que $\overleftrightarrow{DB} \perp \alpha$, então $\overleftrightarrow{CB} \perp \text{pl}(ADB)$".



34 (UFSCar-SP) Dadas duas retas reversas r e s, então:

a) Existe plano paralelo a ambas.

b) Existe um único plano paralelo a ambas.

c) Todo plano, perpendicular a uma, encontra a outra em um ponto.

d) Existe sempre plano perpendicular a uma, que contém a outra.

e) r e s são perpendiculares.

35 Se α é um plano paralelo a cada uma das retas reversas r e s, então pode-se concluir que:

a) Qualquer reta t perpendicular a r é perpendicular a α.

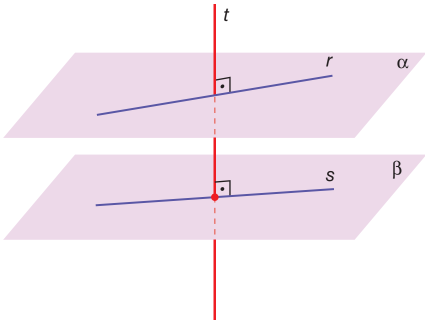
b) Qualquer reta perpendicular ao plano α é perpendicular a cada uma das retas r e s.

c) Não existem retas distintas t e u, perpendiculares a α, tal que t tenha um ponto em comum com r, e u tenha um ponto em comum com s.

d) Qualquer reta t que forma ângulo reto com cada uma das retas r e s é perpendicular a α.

e) Uma reta t que intercepte r, s e α é, necessariamente, perpendicular a α.

36 Demonstre que: "Se r e s são retas reversas e os planos α e β são tais que $\alpha \mathbin{/\!\!/} \beta$, $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então a reta t perpendicular a r e a s é perpendicular a α".



37 Se uma reta r é perpendicular a um plano α e uma reta s, perpendicular a r, passa por um ponto A, com $A \in \alpha$, então pode-se concluir que:

a) s está contida em α.

b) s é paralela a α.

c) s está contida em α ou s é paralela a α.

d) s pode ser secante a α.

e) s pode ser secante a α ou estar contida em α.

38 Se α e β são planos perpendiculares entre si e γ é um plano perpendicular à reta comum a α e β, então podemos afirmar que as retas r e s, com $r = \alpha \cap \gamma$ e $s = \beta \cap \gamma$, são:

a) paralelas distintas.

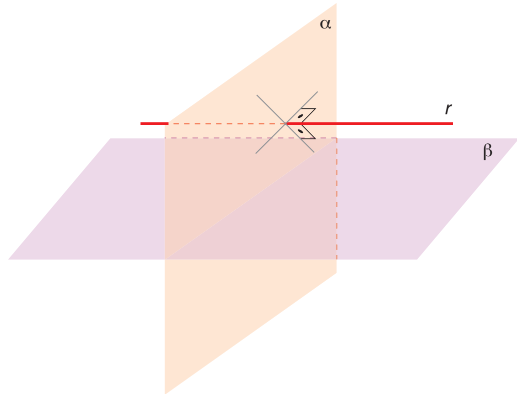
b) ortogonais.

c) perpendiculares.

d) coincidentes.

e) concorrentes e não perpendiculares.

39 Demonstre que: "Se uma reta r é paralela a um plano β e um plano α é perpendicular a r, então β é perpendicular a α".



40 (Faap-SP) A única proposição falsa é:

a) No espaço, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

b) Uma reta perpendicular a duas retas de um plano é perpendicular ao plano.

c) Dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si.

d) Um plano perpendicular a uma reta de outro plano é perpendicular a este plano.

e) Um plano perpendicular a dois planos que se interceptam é perpendicular à reta de intersecção destes.

41 Se α e β são planos secantes e P é um ponto qualquer, então pode-se concluir que:

a) Existe um plano γ que passa por P e é perpendicular a cada um dos planos α e β.

b) Qualquer plano γ que passa por P e é perpendicular a α, também é perpendicular a β.

c) O plano γ que passa por P e é paralelo a α é perpendicular a β.

d) A reta t, comum a α e β, e qualquer reta r, perpendicular a t, determinam um plano perpendicular a α e a β.

e) A reta t, comum a α e β, e qualquer reta r, paralela a t e distinta de t, determinam um plano perpendicular a α e a β.

42 Sejam dois planos perpendiculares, α e β, e uma reta r concorrente com uma reta s, com $s \subset \alpha$ e $s \perp \beta$. Sabendo que existe um plano γ que contém r, com $\gamma \perp \alpha$ e $\gamma \perp \beta$, podemos afirmar que:

a) $r \subset \alpha$

b) $r \perp \alpha$

c) $r \perp s$

d) $s \subset \gamma$

43 Demonstre que: "Se duas retas, r e s, são reversas, então existe uma reta v tal que $r \perp v$ e $s \perp v$".

44 Demonstre a unicidade da reta v do exercício anterior.

45 Se r e s são retas paralelas e os planos α e β são tais que $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$, então podemos afirmar que:
a) $\alpha \equiv \beta$
b) $\alpha /\!/ \beta$
c) $\alpha \perp \beta$
d) α é secante a β.
e) $\alpha \cap \beta = r \cap s$

46 (UEPB) As afirmações seguintes podem ser classificadas como verdadeiras (V) ou falsas (F).
I. Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles que for perpendicular à intersecção será perpendicular ao outro.
II. Se dois planos são perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.
III. Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas.
Nesse caso:
a) Apenas I e II são verdadeiras.
b) Todas são verdadeiras.
c) Todas são falsas.
d) Apenas I e III são verdadeiras.
e) Apenas II e III são falsas.

47 (UFBA) Com base nos conhecimentos sobre Geometria Espacial, pode-se afirmar:
(01) Se uma reta r e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular à reta r é também perpendicular ao plano α.
(02) Se um ponto P não pertence a uma reta s, então existe um único plano passando por P paralelo à reta s.
(04) Se uma reta r está contida em um plano α, e a reta s é reversa a r, então a reta s intercepta o plano α.
(08) Se α e β são dois planos perpendiculares, e r é uma reta perpendicular a α, que não está contida em β, então r é paralela a β.
(16) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
(32) Três planos distintos interceptam-se segundo uma reta ou um ponto.
- Qual é a soma dos números que antecedem as alternativas corretas?

48 (UFMA) Considere as seguintes assertivas:
I. Se o triângulo ABC retângulo em B e o paralelogramo $BCDE$ situam-se em planos distintos, então $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são segmentos ortogonais.
II. Seja r uma reta perpendicular a um plano α dado. Então, nesse plano, existe uma única reta que é perpendicular a r.
III. Dados dois planos perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.
Assinale a alternativa correta.
a) Apenas II é verdadeira.
b) Apenas I é verdadeira.
c) II e III são verdadeiras.
d) Apenas III é verdadeira.
e) I e III são verdadeiras.

49 (FCMSC-SP) Considere o seguinte: "Sempre existem
I. dois diferentes planos perpendiculares a uma reta, por um mesmo ponto."
II. duas diferentes retas perpendiculares a um mesmo plano, por um mesmo ponto desse plano."
III. dois diferentes planos contendo um mesmo ponto de um terceiro plano, e perpendiculares a esse terceiro plano."
IV. dois diferentes planos, paralelos a uma mesma reta."
V. dois diferentes planos, com um ponto comum, paralelos a um terceiro plano."
Responda corretamente:
a) III e IV são verdadeiras.
b) Todas são falsas.
c) Só I, II e IV são verdadeiras.
d) Só II é verdadeira.
e) III e V são verdadeiras.

50 Considerando três planos distintos α, β e λ, qual das alternativas a seguir é verdadeira?
a) Os três planos não podem ser perpendiculares entre si.
b) Se α é paralelo a β e λ é perpendicular a β, então λ é perpendicular a α e as intersecções $\alpha \cap \lambda$ e $\beta \cap \lambda$ são retas paralelas distintas.
c) Se α e β são secantes, então λ não pode ser perpendicular a α e β ao mesmo tempo.
d) Se α, β e λ são secantes entre si tal que a reta comum a α e β é perpendicular a λ, então α é perpendicular a β.
e) Se $\alpha \perp \beta$ e $\lambda \perp \beta$, então a reta comum a α e β pode não ser perpendicular à reta comum a λ e β.

51 (UFMA) Considere as afirmações:
I. Se dois planos são perpendiculares entre si, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.
II. Se uma reta é secante a um plano, então ela é concorrente a infinitas retas do plano.
III. Se $A \in r$, $B \in r$ e $A \in \alpha$, então $\alpha \subset \overleftrightarrow{AB}$.
Assinale a opção correta:
a) Somente a afirmação II é verdadeira.
b) Somente as afirmações I e II são verdadeiras.
c) Somente a afirmação I é verdadeira.
d) Somente as afirmações I e III são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são verdadeiras.
(*Nota*: No item III, A e B representam pontos, r representa uma reta e α representa um plano.)

52 (UFJF-MG) Sejam α e β dois planos perpendiculares entre si. Considere as afirmações:
I. Existe pelo menos uma reta perpendicular ao plano α e que intercepta o plano β em um único ponto.
II. Existe pelo menos uma reta perpendicular ao plano α e contida no plano β.
III. Existe pelo menos uma reta perpendicular ao plano α e paralela ao plano β.
É correto dizer que:
a) somente a afirmação I é verdadeira.
b) somente a afirmação II é verdadeira.
c) somente as afirmações II e III são verdadeiras.
d) somente a afirmação III é verdadeira.
e) somente as afirmações I e III são verdadeiras.

53 Sendo α e β dois planos quaisquer, pode-se afirmar que:
a) existe um plano paralelo a α e a β.
b) existe um ponto comum a α e a β.
c) existe uma reta comum a α e a β.
d) existe uma reta perpendicular a α e a β.
e) existe um plano perpendicular a α e a β.

54 Dois planos, α e β, são perpendiculares. Que figura geométrica é a projeção ortogonal de β sobre α?

55 Um plano α é perpendicular a um plano β, e uma circunferência C está contida em α. Que figura geométrica é a projeção ortogonal de C sobre β?

56 Dados um plano α e duas retas, *r* e *s*, sob que condições a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre esse plano:
a) são dois pontos?
b) é uma única reta?
c) são duas retas paralelas distintas?

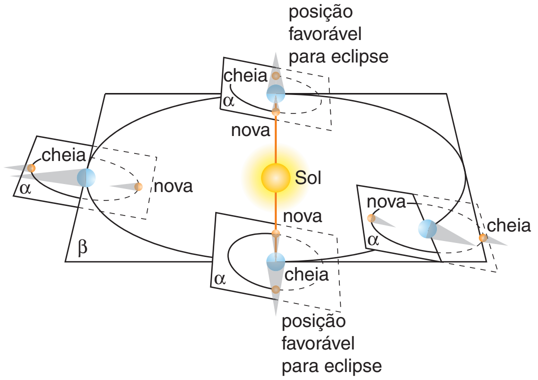
57 Dados um plano α e duas retas reversas, *r* e *s*, descreva a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre o plano α.

58 Dados dois planos, α e β, e um ângulo $A\hat{O}B$ contido em α, sob que condição esse ângulo é congruente à sua projeção ortogonal sobre o plano β?

Exercícios contextualizados

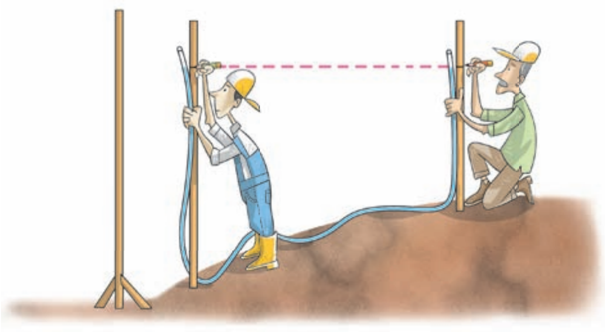
59 Durante um treinamento da Polícia Científica, realizou-se um disparo com uma arma de fogo. O projétil perfurou uma porta, alojando-se em uma parede atrás dessa porta.
Os policiais em treinamento concluíram que o projétil havia partido de algum ponto de um prédio cenográfico localizado em frente à porta. Após alguns procedimentos, eles concluíram que o disparo havia sido efetuado de uma janela do prédio.
Que procedimentos os policiais utilizaram para determinar o ponto do prédio de onde foi feito o disparo, admitindo que para pequenas distâncias a trajetória de uma bala é uma linha reta?

60 A órbita da Lua ao redor da Terra e o centro do nosso planeta estão em um mesmo plano α; e a órbita da Terra ao redor do Sol e o centro deste estão em um mesmo plano β. Quando a Lua entra na sombra da Terra, acontece um eclipse lunar, e quando a Terra é atingida pela sombra da Lua, acontece um eclipse solar.



Se o plano α coincidisse com o plano β, os eclipses seriam muito frequentes: aproximadamente dois por mês. Porém, o plano α é inclinado em relação ao plano β, o que faz com que os eclipses não sejam tão frequentes. De acordo com essas informações e considerando o Sol, a Terra e a Lua como pontos do espaço, um eclipse ocorre sempre que:
a) a reta Sol-Lua é perpendicular à reta Terra-Lua.
b) a reta Sol-Terra é perpendicular à reta Terra--Lua.
c) a reta Sol-Terra não coincide com a reta Terra--Lua.
d) a reta Sol-Lua está contida no plano α.
e) a Lua está no plano β.

61 Em um terreno em declive será construído um terraço plano e horizontal. Para determinar esse plano horizontal, um pedreiro fixou três estacas não coplanares e encheu parcialmente de água uma mangueira transparente. A seguir, pôs, junto a uma das estacas, um extremo da mangueira e marcou um ponto da estaca no mesmo nível da água por onde deverá passar o plano do terraço. Depois, segurando o extremo da mangueira nesse ponto da estaca, pediu a seu ajudante que pusesse o outro extremo da mangueira junto a outra estaca e marcasse sobre ela um ponto determinado pelo nível da água.

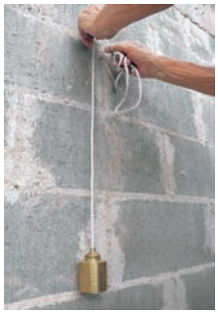


Um princípio dos vasos comunicantes garante que os dois pontos marcados estão na mesma reta horizontal. Que outro procedimento deve ser realizado pelo pedreiro para que o plano do terraço esteja determinado?

62 As instruções de um exame vestibular alertavam que cada teste era composto por cinco alternativas com uma, e apenas uma, correta. Um dos testes apresentou as seguintes alternativas:
a) As retas *r* e *s* são paralelas distintas.
b) As retas *r* e *s* não têm ponto comum.
c) As retas *r* e *s* são reversas.
d) As retas *r* e *s* são concorrentes.
e) Não existe plano que contém, simultaneamente, as retas *r* e *s*.
Qual é a alternativa correta desse teste?

63 Um poste está localizado em um terreno plano. Em dado instante, constata-se que o poste forma um ângulo reto com sua sombra. Pode-se concluir que o poste é perpendicular ao plano do terreno? Por quê?

64 Para verificar se uma parede está sendo construída corretamente na vertical, um pedreiro aproxima um fio de prumo a uma pequena distância da parede e observa se essa distância se mantém ao longo do fio.



Intuitivamente, o pedreiro está aplicando a seguinte proposição: "Se uma reta r é perpendicular a um plano β, então todo plano α paralelo à reta r é perpendicular ao plano β". Explique, entre os objetos envolvidos nos procedimentos do pedreiro, quais representam os planos α e β e a reta r.

65 Em um terreno plano e horizontal há um mastro vertical e uma linha reta r desenhada no solo e distante alguns metros do mastro. Pretende-se esticar um cabo de aço ligando o topo do mastro a um ponto dessa linha. Sem medir comprimentos, como pode ser determinado o ponto da linha r tal que o cabo de aço tenha o menor comprimento possível?

66 Ao mesmo tempo que a Terra gira em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica, ela também gira em torno de uma reta imaginária que passa pelos polos Norte e Sul. Essa reta, chamada eixo de rotação, não é perpendicular ao plano da órbita. Na verdade, esse eixo tem, aproximadamente, 23,5° de inclinação em relação a uma reta vertical ao plano da órbita.

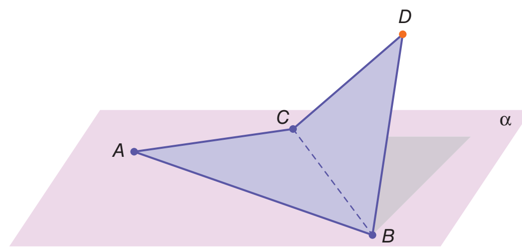
Sendo C o centro do Sol, r o eixo de rotação da Terra e s a reta que passa pelo centro da Terra e é perpendicular ao plano da órbita da Terra, para quais posições entre r, s e C:

a) o plano determinado por r e s é perpendicular ao plano da órbita da Terra?
b) o plano determinado por r e C é perpendicular ao plano da órbita da Terra?
c) o plano determinado por s e C é perpendicular ao plano da órbita da Terra?

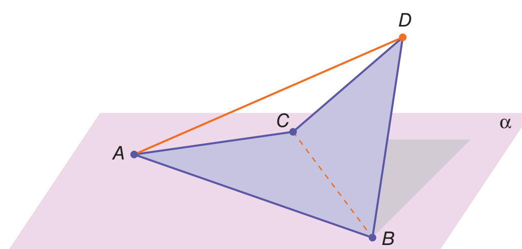
67 São dadas três retas, r, s e t, distintas entre si, e três pontos, A, B e C, distintos entre si, tais que $r \cap s = \{A\}$, $r \cap t = \{B\}$ e $s \cap t = \{C\}$. Demonstre que r, s e t são coplanares.

68 Demonstre que: "Se r, s e t são retas tais que $r \,/\!/\, s$, r concorre com t e s concorre com t, então r, s e t são coplanares".

69 Considere as seguintes definições.
- Polígono reverso é todo aquele cujos vértices não são coplanares.
- Diagonal de um polígono é todo segmento de reta cujos extremos são vértices não consecutivos.



$\{A, B, C\} \subset \alpha$ e $D \notin \alpha \Rightarrow ABCD$ é um quadrilátero reverso.



$\overline{AD}$ e $\overline{CB}$ são diagonais do quadrilátero $ABCD$.

Demonstre que as retas que contêm as diagonais de um quadrilátero reverso são reversas.

70 Sejam r e s duas retas reversas e α um plano tal que $r \subset \alpha$ e $\alpha \cap s \neq \varnothing$. Demonstre que s é secante a α.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Calcule o valor da expressão $E = \sum_{i=1°}^{360°} \text{sen } i$, isto é, $E = \text{sen } 1° + \text{sen } 2° + \text{sen } 3° + \ldots + \text{sen } 360°$.

2 Quantos pontos distintos da circunferência trigonométrica estão associados aos números reais da forma $x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{8}$, com $k \in \mathbb{Z}$?

3 (Vunesp) Considere os algarismos 2, 3, 5, 7 e 11. A quantidade total de números distintos que se obtêm multiplicando-se dois ou mais desses algarismos, sem repetição, é:
a) 120
b) 52
c) 36
d) 26
e) 21

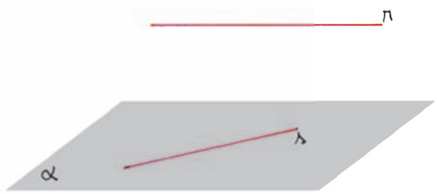
Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

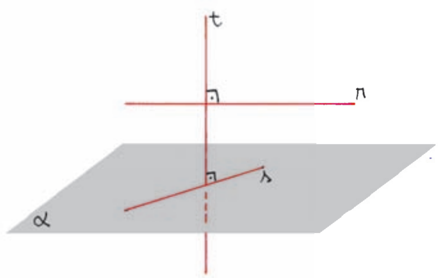
Descreva o processo de construção da reta *t*, perpendicular comum a duas retas reversas *r* e *s*.

Resolução

Considere duas retas reversas r e s. Pelo teorema T.15, existe um único plano α que contém uma reta e é paralelo a outra.



De todas as retas perpendiculares a α e concorrentes com s, uma delas é a reta t perpendicular comum a r e s.



Incompleto!

Comentário

As afirmações do aluno são verdadeiras, porém ele não descreveu o processo de construção da reta *t*. Para determinar a reta *t*, o aluno poderia ter aplicado, a seguir, o teorema T.36, obtendo o plano β que contém *r* e é perpendicular a α.

Refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo 11

Geometria métrica: poliedros

Para pensar

1. Você gosta de filmes de ficção científica? Conhece outros filmes que apresentam criaturas gigantes? Quais?
2. Um dado cúbico tem 2 cm de aresta. Ao ampliarmos 8 vezes cada aresta, qual será seu volume?

Neste capítulo, estudaremos os poliedros, que são blocos maciços cuja superfície é formada por polígonos.

11.1 Ângulos e distâncias
Os conceitos de ângulo e de distância serão ampliados para figuras não coplanares.

11.2 Poliedro
Além de áreas e volumes, estudaremos as relações entre o número de arestas, faces e vértices dos poliedros.

11.3 Prisma
O prisma é um poliedro com duas faces congruentes e paralelas, sendo as demais paralelogramos.

11.4 Volume de um prisma
Com base no volume de um paralelepípedo reto-retângulo, calculamos o volume de um prisma qualquer pelo princípio de Cavalieri.

11.5 Pirâmide
Pirâmide é um poliedro em que uma das faces, chamada base, é um polígono qualquer e as demais são triângulos com um vértice em comum.

11.6 Volume e semelhança de pirâmides
Com base no volume de um prisma, calculamos o volume de uma pirâmide qualquer pelo princípio de Cavalieri. O conceito de semelhança de figuras pode ser ampliado para poliedros.

A queda da mulher gigante

Os temas de ficção científica presentes em muitos filmes e seriados de TV sempre exerceram forte atração sobre o público. O ataque de criaturas gigantes faz tanto sucesso que filmes como King Kong *e* O ataque da mulher gigante *tiveram mais de uma versão.*

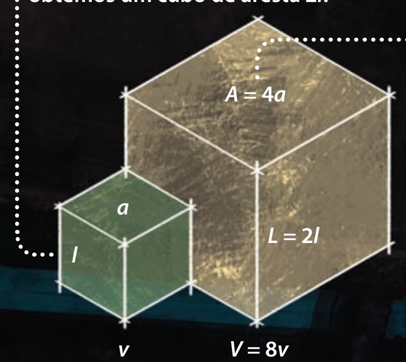
Ficção x Tecnologia

Mas será que os avanços científicos e tecnológicos poderão possibilitar a ampliação de animais ou pessoas? E, se isso for possível algum dia, as proporções entre as partes do corpo serão mantidas?

Ampliando

Para entender como seria ampliar uma criatura, vamos imaginar a ampliação de um cubo.

Considere um cubo cuja aresta mede l. Ao dobrar essa medida, obtemos um cubo de aresta $2l$.



O comprimento dobrou, mas a área da face e o volume do cubo não. A área da face do cubo ampliado é: $2l \cdot 2l = 4l^2$

O volume do cubo ampliado é: $2l \cdot 2l \cdot 2l = 8l^3$

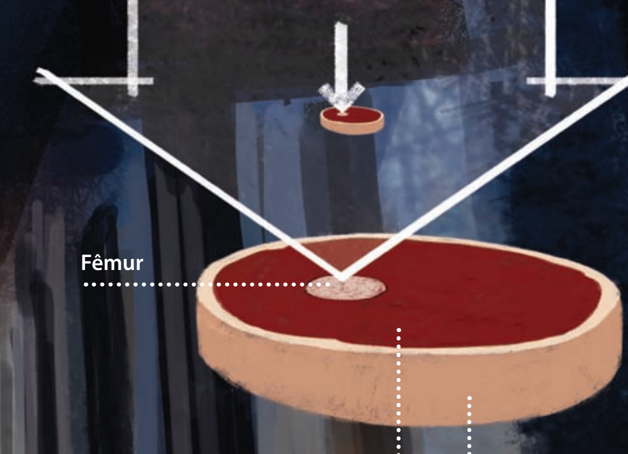
Esqueletos diferentes

A resistência de um osso é medida pela força aplicada por unidade de área. Quanto maior a área da secção transversal de um osso, maior será a massa suportada por ele. Assim, entendemos por que o diâmetro da perna de um elefante é muito maior que o diâmetro da perna de uma pessoa.

Quebrando a balança ou as pernas

Imagine uma mulher com 1,60 metro de altura e 60 quilogramas de massa. Se sua altura aumentasse 10 vezes, sua massa aumentaria 1.000 vezes. Será que seus ossos aguentariam 60.000 quilogramas?

Com certeza não, pois a área da secção transversal dos ossos aumentaria apenas 100 vezes, não suportando toda sua massa. Provavelmente, por não suportar a própria massa, a mulher gigante cairia no chão com as pernas quebradas.



Seção 11.1

Ângulos e distâncias

Objetivos

- **Determinar** a medida de ângulos entre reta e plano e entre dois planos.
- **Determinar** a distância entre figuras.

Termos e conceitos

- **ângulos entre reta e plano**
- **ângulos entre dois planos**
- **distância entre duas figuras geométricas**

Ângulos

Observe as situações a seguir:

- Para a construção de um relógio de sol horizontal, é fundamental que a haste fixa, cuja sombra indicará as horas, seja paralela ao eixo de rotação da Terra. Por isso, em cada local onde será construído o relógio, deverá ser calculada a medida do ângulo formado entre a haste e o plano do mostrador.

O relógio de sol é um dos mais antigos instrumentos criados para medir o tempo, havendo registros que comprovam seu uso já por volta de 1500 a.C.

- O ângulo de inclinação de um trecho de estrada é o ângulo formado entre o plano horizontal e o plano que contém esse trecho.

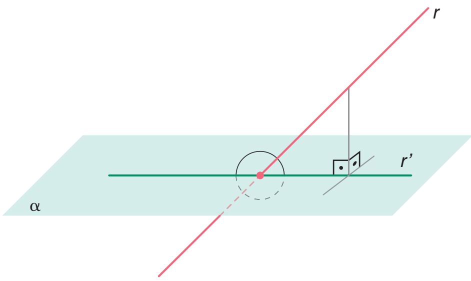
Nessas situações, são descritos ângulos entre reta e plano e entre dois planos. Mas como definir esses tipos de ângulo?

O fundamento para essas definições é o conceito de ângulo entre duas retas, já estudado em Geometria plana.

Nas rodovias, as medidas máximas recomendadas dos ângulos de inclinação pelo DNIT (Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes) dependem da classe da estrada de rodagem, podendo variar de 3° a 5°.

Ângulos entre reta e plano

Seja r uma reta secante a um plano α, e não perpendicular a α, e r' a projeção ortogonal de r sobre α. Os ângulos formados pela reta r e pelo plano α são os ângulos formados por r e r'.



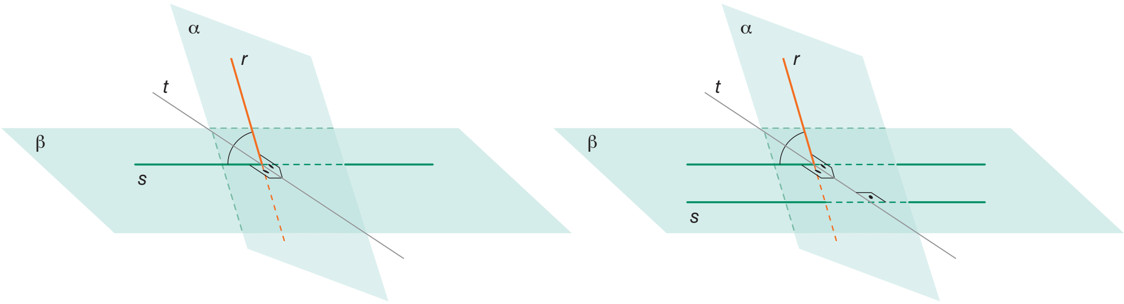
A reta r forma com α dois ângulos agudos opostos pelo vértice e dois ângulos obtusos opostos pelo vértice.

Convencionamos que o ângulo formado por uma reta s e um plano α, com $s \parallel \alpha$ ou $s \subset \alpha$, é o ângulo nulo.

Ângulos entre dois planos

Sejam α e β dois planos secantes e t a reta comum a esses planos. Os ângulos formados por α e β são os ângulos formados por duas retas r e s, perpendiculares a t, com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

As retas r e s podem ser concorrentes ou reversas, conforme mostram as figuras abaixo.



r e *s* concorrentes

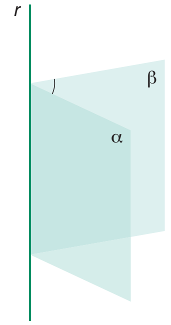
r e *s* reversas

Os planos α e β formam dois pares de ângulos opostos pelo vértice.

Convencionamos que o ângulo formado por dois planos paralelos é o ângulo nulo.

Nota:

Um ângulo formado por dois semiplanos α e β de mesma origem r é chamado de **ângulo diedro** (ou simplesmente **diedro**) de aresta r e faces α e β.

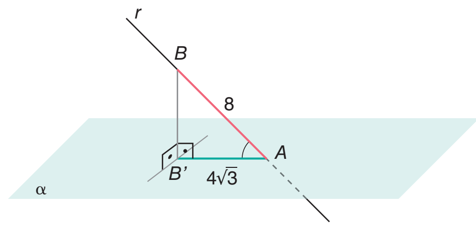


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Uma reta r é secante a um plano α em um ponto A. Um segmento de reta $\overline{AB}$, contido em r, mede 8 cm e a projeção ortogonal desse segmento sobre α mede $4\sqrt{3}$ cm. Calcular a medida de um ângulo agudo formado pela reta r e pelo plano α.

Resolução

Esquematizando a situação, temos:



O ângulo $B\hat{A}B'$ é um ângulo agudo formado pela reta r e por sua projeção ortogonal $\overline{AB'}$ sobre α; logo, esse ângulo é um ângulo agudo formado por r e α. Sendo x a medida desse ângulo, temos:

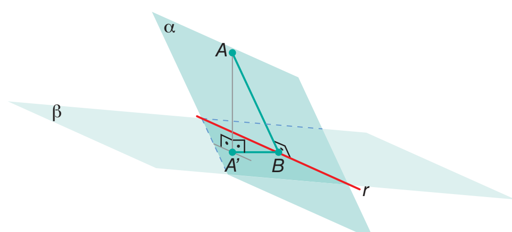
$$\cos x = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 30°$$

Concluímos, então, que a reta r forma um ângulo agudo de 30° com o plano α.

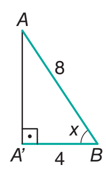
2 Dois planos α e β são secantes e r é a reta comum a eles. Dois pontos distintos A e B são tais que $B \in r$, $A \in \alpha$, $\overline{AB} \perp r$, $AB = 8$ cm e a projeção ortogonal $\overline{A'B}$, de $\overline{AB}$ sobre β, mede 4 cm. Calcular a medida de um ângulo agudo formado por α e β.

Resolução

Um esquema da situação é:



Os ângulos formados pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B}$ são os ângulos formados pelos planos α e β. Sendo x a medida do ângulo agudo $A\hat{B}A'$, temos:



$$\cos x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60°$$

Concluímos, então, que um ângulo agudo formado por α e β mede 60°.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

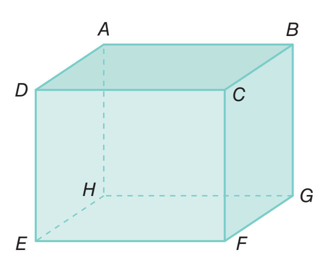
1 No paralelepípedo reto-retângulo representado ao lado, temos $EF = 5\sqrt{3}$ cm, $EH = 15$ cm e $DE = 10$ cm.

Calcule:

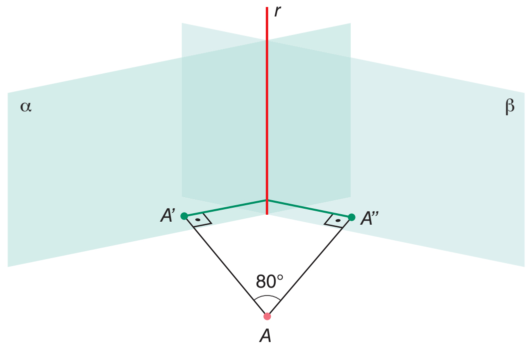
a) a tangente de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{DF}$ forma com o plano pl(EFG).

b) a tangente de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{HF}$ forma com o plano pl(EFC).

c) a medida de um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{EB}$ e o plano pl(EFG).

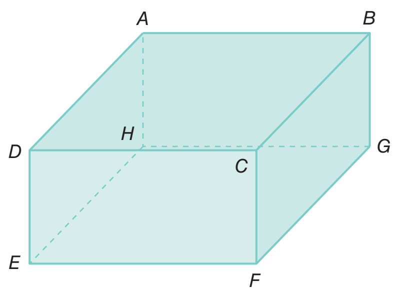


2 Dois planos α e β são secantes, a reta r é comum a ambos, e um ponto A não pertence a nenhum desses planos. As projeções ortogonais de A sobre α e β são A' e A'', respectivamente, tal que o ângulo $A'\hat{A}A''$ mede 80°.

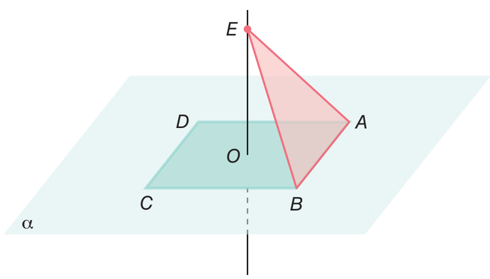


a) Calcule a medida de um ângulo obtuso formado por α e β.
b) Calcule a medida de um ângulo agudo formado por α e β.
c) Supondo que a distância entre A' e r seja igual à distância entre A'' e r, calcule a medida de um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{AA''}$ e o plano α.

3 No paralelepípedo reto-retângulo representado ao lado, temos $FG = HG = 6$ cm e $BG = 3\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida de um ângulo agudo formado pelos planos pl(BFH) e pl(GFH).



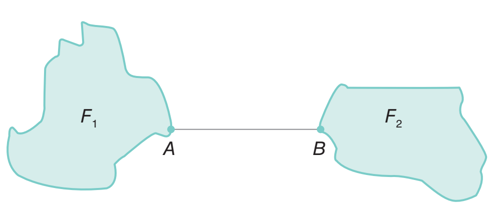
4 Um quadrado $ABCD$ de centro O e lado 12 cm está contido em um plano α. Um ponto E é tal que a reta $\overleftrightarrow{EO}$ é perpendicular a α e $EO = 6\sqrt{3}$ cm.
a) Calcule a medida x de um ângulo agudo formado pelos planos α e pl(ABE).
b) A medida y de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{EA}$ forma com o plano α é maior, menor ou igual à medida x obtida no item **a**? Por quê?



Resolva os exercícios complementares 1 e 2.

Distância entre duas figuras geométricas

A **distância entre duas figuras geométricas** F_1 e F_2 é a medida do menor segmento de reta que tem um extremo em F_1 e o outro extremo em F_2.



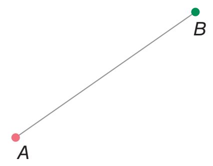
Se $\overline{AB}$ é o menor segmento de reta que liga as figuras F_1 e F_2, então a medida AB é a distância entre essas figuras.

As consequências dessa definição serão vistas a seguir.

Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos A e B é a medida do segmento $\overline{AB}$.

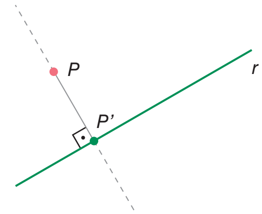
Indica-se a distância entre A e B por AB ou d_{AB}.



Distância entre um ponto e uma reta

A distância entre um ponto P e uma reta r é a medida do segmento $\overline{PP'}$, em que P' é a projeção ortogonal de P sobre r.

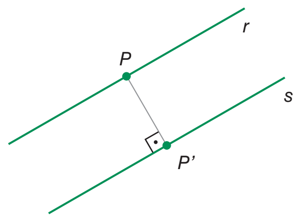
Indica-se a distância entre P e r por d_{Pr}.



Distância entre duas retas paralelas

A distância entre duas retas paralelas é a distância de um ponto P qualquer de uma delas à outra reta.

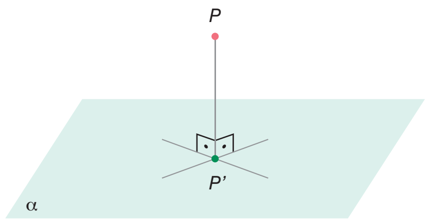
Indica-se a distância entre r e s por d_{rs}.



Distância entre um ponto e um plano

A distância entre um ponto P e um plano α é a medida do segmento $\overline{PP'}$, em que P' é a projeção ortogonal de P sobre α.

Indica-se a distância entre P e α por $d_{P\alpha}$.

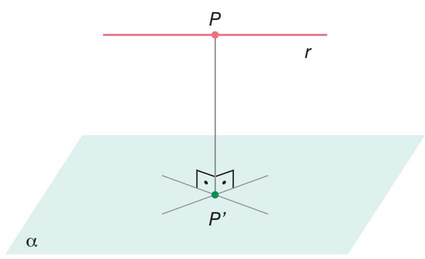


Distância entre uma reta e um plano paralelos

A distância entre uma reta r e um plano α paralelo a r é a distância de um ponto P qualquer de r ao plano α.

Indica-se a distância entre r e α por $d_{r\alpha}$.

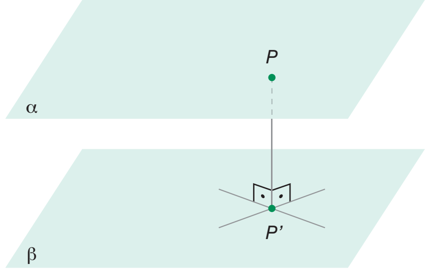
Se a reta for secante ao plano ou estiver contida nele, a distância entre eles será nula.



Distância entre dois planos paralelos

A distância entre dois planos paralelos é a distância de um ponto P qualquer de um deles ao outro.

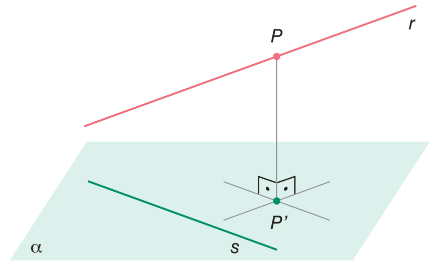
Indica-se a distância entre α e β por $d_{\alpha\beta}$.



Distância entre duas retas reversas

A distância entre duas retas reversas *r* e *s* é a distância entre um ponto qualquer de *r* ao plano que contém *s* e é paralelo a *r*.

Indica-se a distância entre *r* e *s* por d_{rs}.

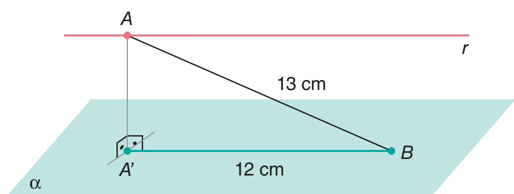


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 Um ponto *A* dista 13 cm de um ponto *B* pertencente a um plano α, e a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α mede 12 cm. Sendo *r* uma reta qualquer que passa por *A* e é paralela a α, calcular a distância entre *r* e α.

Resolução

Seja *A'* a projeção ortogonal de *A* sobre α:



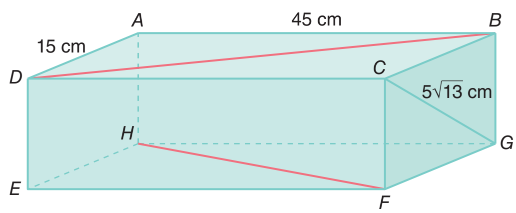
A distância entre *r* e α é, por definição, a distância de um ponto qualquer de *r* ao plano α. Essa distância *x* é a medida do cateto $\overline{AA'}$ do triângulo *AA'B*. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 25$

$\therefore x = 5$

Assim: $d_{r\alpha} = 5$ cm

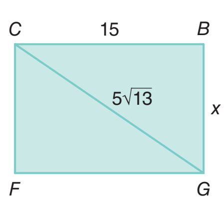
4 Considere o paralelepípedo reto-retângulo com as dimensões apresentadas:



Calcular a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{HF}$.

Resolução

O plano pl(*HGF*) é paralelo à reta $\overleftrightarrow{BD}$. Assim, a distância entre o ponto *B* e o plano pl(*HGF*) é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{HF}$. Indicando por *x* a medida do segmento $\overline{BG}$, temos, pelo teorema de Pitágoras:



$x^2 + 15^2 = \left(5\sqrt{13}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 100$

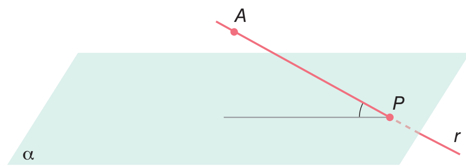
$\therefore x = 10$

Então, *BG* = 10 cm e, portanto, a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{HF}$ é 10 cm.

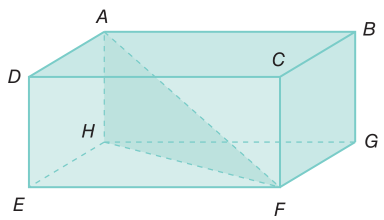
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5 Um ponto A dista 5 cm de um plano α e sua projeção ortogonal A' sobre α dista 12 cm de um ponto B pertencente a α. Calcule a distância entre os pontos A e B.

6 Uma reta r é secante a um plano α em um ponto P e forma um ângulo de 30° com esse plano. Um ponto A pertencente a r dista 10 m de P. Qual é a distância entre A e α?

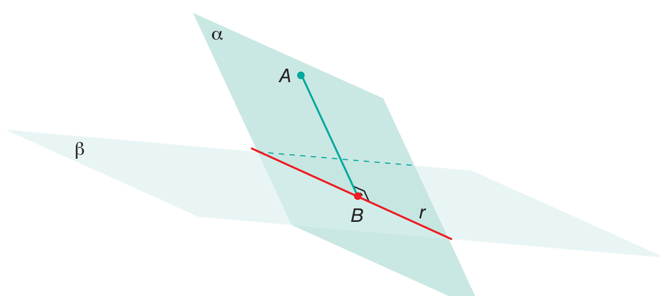


7 Considere o paralelepípedo reto-retângulo representado abaixo, em que $AF = 12$ cm e $AH = EH = 6$ cm:



a) Calcule a distância entre os pontos H e F.
b) Calcule a distância entre os pontos E e F.
c) Qual é a distância do ponto A ao plano pl(EFG)?
d) Qual é a distância do ponto B ao plano pl(EFG)?
e) Qual é a medida da projeção ortogonal do segmento $\overline{AF}$ sobre o plano pl(EFG)?
f) Qual é a medida da projeção ortogonal do segmento $\overline{AF}$ sobre o plano pl(ABC)?
g) Qual é a medida de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{AF}$ forma com o plano pl(EFG)?
h) Qual é a distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{CF}$?
i) Qual é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{HF}$?
j) Qual é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EG}$?
k) Calcule a medida de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{AF}$ forma com o plano pl(AHG).
l) Calcule a tangente de um ângulo agudo formado pelos planos pl(AHF) e pl(AHE).
m) Calcule a tangente de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{AF}$ forma com o plano pl(EFC).

8 Dois planos secantes α e β formam um ângulo de 60° e sua reta comum é r. Um segmento de reta $\overline{AB}$, com $A \in \alpha$ e $B \in r$, mede 10 cm e é perpendicular a r. Calcule a distância do ponto A ao plano β.



Resolva os exercícios complementares 3 a 7.

Seção 11.2

Poliedro

Objetivos

- **Identificar** um poliedro e seus elementos.
- **Classificar** e nomear poliedros.
- **Aplicar** a relação de Euler.

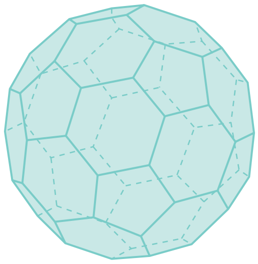
Termos e conceitos

- poliedro
- face de um poliedro
- aresta de um poliedro
- vértice de um poliedro

O conceito de poliedro

Você já observou como é formada a superfície de uma bola de futebol?

São várias peças poligonais costuradas lado a lado. O formato arredondado dessas peças deve-se à pressão interna do ar. Sem essa pressão interna, a superfície se assemelharia ao formato a seguir:



A reunião dessa superfície com o seu interior é um exemplo de poliedro.

A forma poliédrica, muito aplicada nas construções humanas, também é frequente na natureza, por exemplo, nos cristais, minerais e em várias formas de vírus.

Pirita cúbica, metal amarelo frequentemente confundido com o ouro.

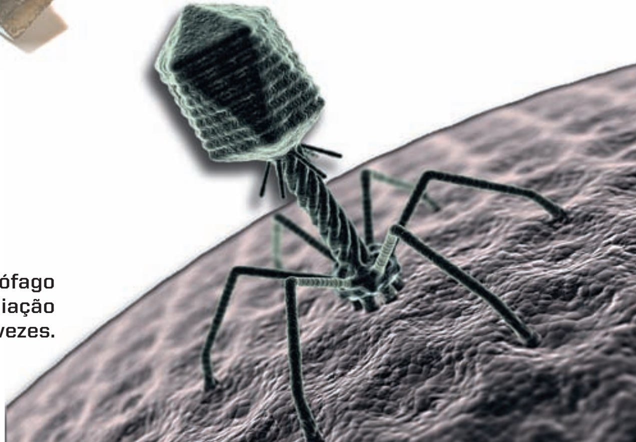


Imagem de vírus bacteriófago criada por computador, com ampliação aproximada de 200.000 vezes.

Definição

Seja uma superfície S formada por n polígonos, com $n \geqslant 4$, tal que:

- não há dois polígonos adjacentes contidos em um mesmo plano;
- cada lado de qualquer polígono é lado de dois e apenas dois deles.

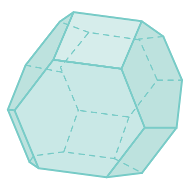
A superfície S separa o espaço em duas regiões que não têm ponto em comum: a região I, limitada por S, e a região ilimitada E. A reunião da superfície S com a região limitada I é chamada de **poliedro**.

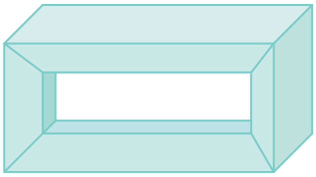
A superfície S é a superfície do poliedro e as regiões I e E são o interior e o exterior do poliedro, respectivamente.

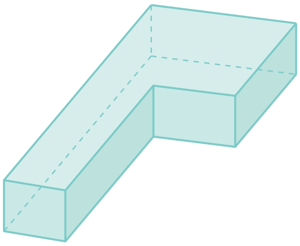
Notas:

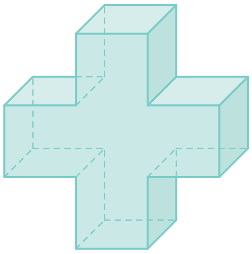
1. Polígonos adjacentes são polígonos distintos que têm pelo menos um lado em comum.
2. Um poliedro também pode ser chamado de sólido geométrico ou, simplesmente, sólido.

Exemplos



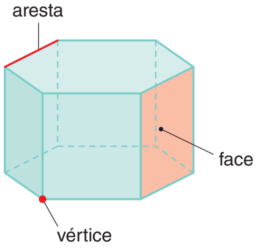






Elementos de um poliedro

- Cada polígono que compõe a superfície do poliedro é chamado de **face** do poliedro.
- Cada lado de uma face qualquer do poliedro é chamado de **aresta** do poliedro.
- Cada vértice de uma face qualquer do poliedro é chamado de **vértice** do poliedro.



Exemplo

No paralelepípedo:

- O polígono $HIJK$ é uma das seis faces do poliedro.
- O segmento $\overline{JM}$ é uma das doze arestas do poliedro.
- O ponto J é um dos oito vértices do poliedro.
- A reunião das seis faces é a superfície do poliedro.

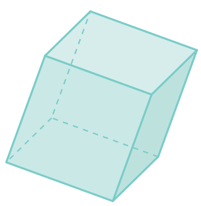
Nomenclatura dos poliedros

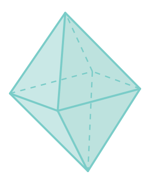
Os poliedros são nomeados de acordo com o seu número de faces.

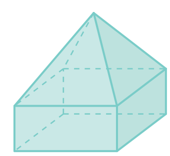
Veja, na tabela a seguir, os nomes dos poliedros que têm de 4 a 20 faces.

Número de faces	Nome do poliedro
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro
9	eneaedro
10	decaedro
11	undecaedro
12	dodecaedro
13	tridecaedro
14	tetradecaedro
15	pentadecaedro
16	hexadecaedro
17	heptadecaedro
18	octadecaedro
19	eneadecaedro
20	icosaedro

Exemplo


hexaedro


octaedro


eneaedro

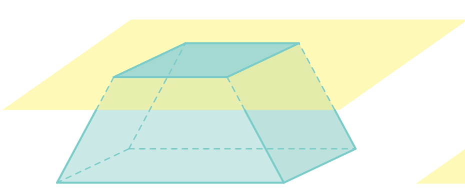
Quando falarmos de poliedros com mais de 20 faces, diremos o seu número de faces, não lhes dando nomes especiais.

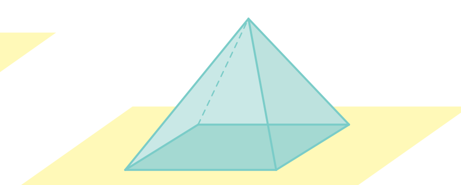
Poliedros convexos

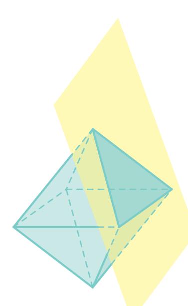
Um poliedro é **convexo** quando o plano que contém qualquer uma de suas faces deixa as outras faces contidas em um mesmo semiespaço.

Conclui-se dessa definição que todas as faces de um poliedro convexo são polígonos convexos.

Exemplos

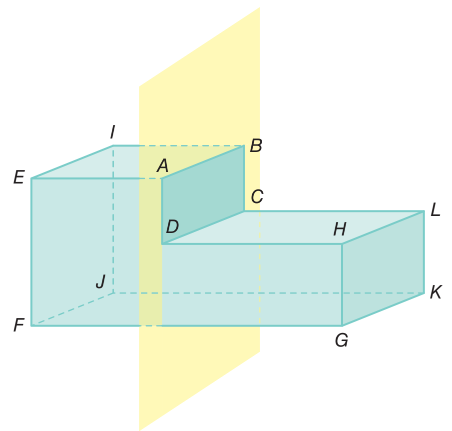

hexaedro convexo


pentaedro convexo


octaedro convexo

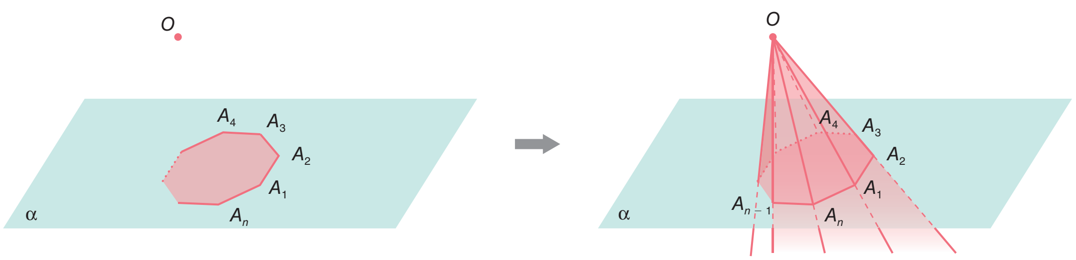
Contraexemplo

O poliedro abaixo não é convexo porque o plano que contém a face $ABCD$ não deixa as demais faces em um mesmo semiespaço (ou porque pelo menos uma de suas faces não é convexa).



Ângulo poliédrico convexo

Considere um polígono convexo $A_1A_2A_3 \dots A_n$, contido em um plano α, um ponto O que não pertence a α e a superfície $S = A_1\hat{O}A_2 \cup A_2\hat{O}A_3 \cup A_3\hat{O}A_4 \cup \dots \cup A_{n-1}\hat{O}A_n \cup A_n\hat{O}A_1$, que separa o espaço em dois conjuntos disjuntos I e E, sendo I convexo e E não convexo. A reunião de S com o conjunto convexo I é chamada de **ângulo poliédrico convexo**.

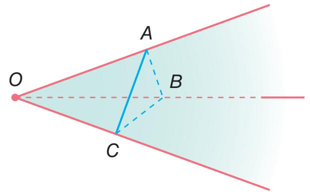


- O ponto O é o **vértice do ângulo poliédrico**.
- As semirretas $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, ..., $\overrightarrow{OA_n}$ são as **arestas do ângulo poliédrico**.
- Os ângulos $A_1\hat{O}A_2$, $A_2\hat{O}A_3$, $A_3\hat{O}A_4$, ..., $A_n\hat{O}A_1$ são as **faces do ângulo poliédrico**.
- O conjunto S é a **superfície do ângulo poliédrico**.
- O conjunto I é o **interior do ângulo poliédrico**.
- O conjunto E é o **exterior do ângulo poliédrico**.

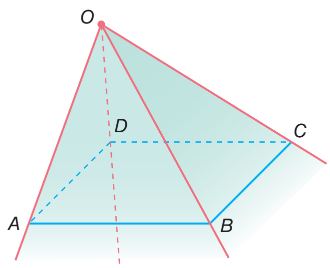
Nomenclatura

Os ângulos poliédricos são nomeados de acordo com seu número de arestas:

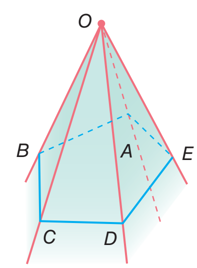
3 arestas
ângulo **tri**édrico



4 arestas
ângulo **tetra**édrico



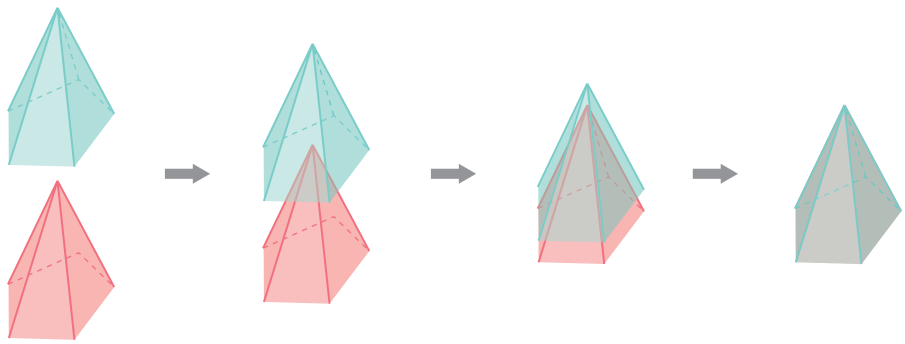
5 arestas
ângulo **penta**édrico



E assim por diante.

Ângulos poliédricos congruentes

Considere as superfícies de dois ângulos poliédricos que têm o mesmo número de arestas; por exemplo, 5 arestas cada um. Se for possível "encaixar" uma superfície na outra de modo que o vértice e as arestas de uma delas coincidam, respectivamente, com o vértice e as arestas da outra superfície, dizemos que os ângulos poliédricos são **congruentes**.

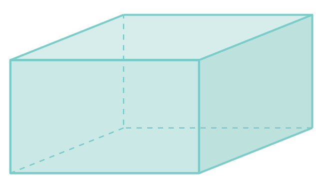


Formalmente, definimos:

> Dois ângulos poliédricos são congruentes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das faces de um deles e o conjunto das faces do outro, de modo que:
> - faces correspondentes são congruentes;
> - diedros determinados por faces correspondentes são congruentes.

Exemplo

Os oito ângulos poliédricos de um paralelepípedo reto-retângulo são congruentes entre si.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

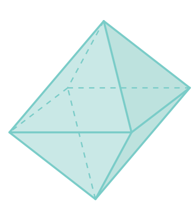
5 Um octaedro convexo possui todas as faces triangulares. Quantas arestas tem esse poliedro?

Resolução

O poliedro possui 8 faces e cada face possui 3 arestas. Multiplicando o número de faces pelo número de arestas de cada uma, obtemos o dobro do número de arestas do poliedro; isso porque cada aresta é lado de exatamente duas faces, portanto, nesse cálculo cada aresta é contada duas vezes.

Assim, o número A de arestas do poliedro é dado por:

$$A = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$



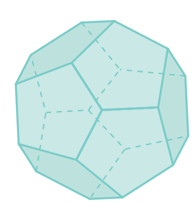
6 Um poliedro convexo é constituído por 20 ângulos triédricos. Quantas arestas tem esse poliedro?

Resolução

O poliedro possui 20 vértices, e de cada vértice partem 3 arestas. Multiplicando o número de vértices pelo número de arestas que partem de cada um deles, obtemos o dobro do número de arestas do poliedro; isso porque cada aresta une exatamente dois vértices do poliedro, portanto, nesse cálculo, cada aresta é contada duas vezes.

Assim, o número A de arestas do poliedro é dado por:

$$A = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$$



7 Um poliedro convexo é constituído por 6 ângulos triédricos e 4 ângulos tetraédricos. Quantas arestas possui esse poliedro?

Resolução

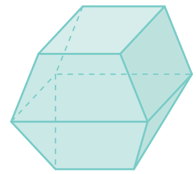
Sejam:

- o produto do número de ângulos triédricos pelo número de arestas de cada um: $6 \cdot 3$;
- o produto do número de ângulos tetraédricos pelo número de arestas de cada um: $4 \cdot 4$.

Adicionando os resultados dos itens acima, obtemos o dobro do número de arestas do poliedro, pois cada aresta une exatamente dois vértices do poliedro. Portanto, no cálculo $6 \cdot 3 + 4 \cdot 4$, cada aresta é contada duas vezes.

Assim, o número A de arestas do poliedro é dado por:

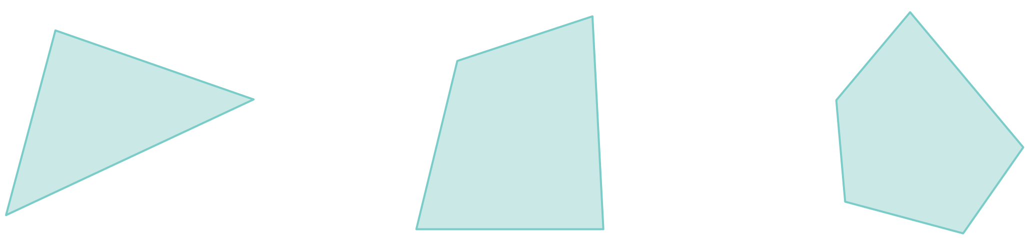
$$A = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{2} = 17$$



Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo.*

Relação de Euler

Observe os polígonos convexos a seguir.



O triângulo possui três lados e três vértices, o quadrilátero possui quatro lados e quatro vértices, e o pentágono possui cinco lados e cinco vértices. A relação que se observa entre o número de lados e o número de vértices desses polígonos pode ser generalizada para qualquer polígono convexo: o número de lados é igual ao número de vértices.

Uma questão natural que poderia surgir nesse momento é se haverá uma relação constante entre o número de vértices, o número de arestas e o número de faces de um poliedro convexo. A resposta a essa questão foi dada pelo matemático suíço Leonhard Euler, que demonstrou o teorema:

Leonhard Euler (1707-1783).

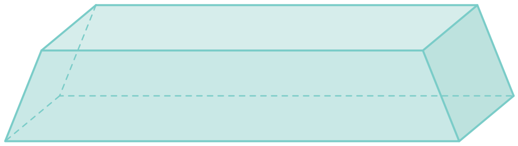
> Em todo poliedro convexo vale a relação:
> $$V - A + F = 2$$
> em que V, A e F representam os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

Exemplos

a) No poliedro convexo representado abaixo, temos $V = 8$, $A = 12$ e $F = 6$.

Assim:

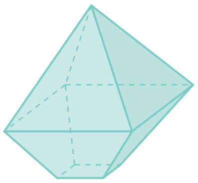
$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$



b) No poliedro convexo representado abaixo, temos $V = 9$, $A = 16$ e $F = 9$.

Assim:

$V - A + F = 9 - 16 + 9 = 2$



Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Relação de Euler*.

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Justificativa da relação de Euler*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Um poliedro convexo é constituído por 25 arestas e 15 faces. Quantos vértices possui esse poliedro?

Resolução

A relação de Euler, $V - A + F = 2$, vale para qualquer poliedro convexo. Como $A = 25$ e $F = 15$, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 25 + 15 = 2$

$\therefore V = 12$

Logo, o poliedro possui 12 vértices.

9 Um poliedro convexo é constituído por 20 arestas e seu número de vértices é igual ao número de faces. Quantas faces formam esse poliedro?

Resolução

O poliedro é convexo; logo, vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$. Como $A = 20$ e $V = F$, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow F - 20 + F = 2$

$\therefore F = 11$

Logo, o poliedro possui 11 faces.

10 Um decaedro convexo possui todas as faces quadrangulares. Determinar o número de vértices desse poliedro.

Resolução

O poliedro tem 10 faces com 4 arestas em cada uma; logo, o número A de arestas do poliedro é dado por: $A = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$

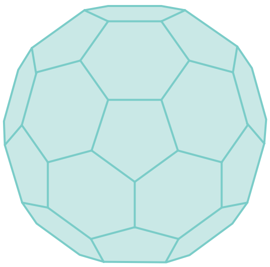
Como o poliedro é convexo com $A = 20$ e $F = 10$, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 20 + 10 = 2$

$\therefore V = 12$

Logo, o poliedro possui 12 vértices.

11 O *buckminsterfullereno* é uma estrutura formada por átomos de carbono distribuídos nos vértices de um poliedro convexo de 12 faces pentagonais e 20 hexagonais, havendo em cada vértice um único átomo. Quantos átomos compõem o *buckminsterfullereno*?



Resolução

Os números F e A de faces e arestas, respectivamente, desse poliedro são dados por:

$F = 12 + 20 = 32$ e $A = \frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = 90$

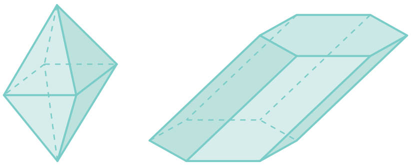
Pela relação de Euler, $V - A + F = 2$, calculamos o número V de vértices desse poliedro:

$V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 60$

Como em cada vértice do poliedro há um único átomo, concluímos que o *buckminsterfullereno* é composto por 60 átomos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9 Dois poliedros podem ter o mesmo número de faces, mas números de vértices diferentes. Os dois poliedros representados a seguir, por exemplo, são octaedros convexos e têm números de vértices diferentes: o primeiro tem seis vértices e o segundo tem doze.



Desenhe:

a) dois hexaedros convexos com números de vértices diferentes.

b) dois heptaedros convexos com números de vértices diferentes.

10 Um dodecaedro convexo possui todas as faces pentagonais. Quantas arestas possui esse poliedro?

11 Um eneaedro convexo é constituído por 4 faces triangulares e as demais faces quadrangulares. Quantas arestas possui esse poliedro?

12 Sabendo que um poliedro convexo é constituído por 12 ângulos pentaédricos, calcule o número de arestas desse poliedro.

13 Sabendo que um poliedro convexo é constituído por 10 ângulos triédricos e 5 ângulos tetraédricos, determine o número de arestas desse poliedro.

14 Calcule o número de vértices de um poliedro convexo constituído por 21 arestas e 15 faces.

15 Qual é o número de faces de um poliedro convexo constituído por 16 vértices e 24 arestas?

16 Calcule o número de arestas de um poliedro convexo constituído por 16 vértices e 21 faces.

17 Existe poliedro convexo que possua 20 vértices, 12 faces e 18 arestas? Por quê?

18 O número de faces de um decaedro convexo é igual ao número de vértices. Calcule o número de arestas desse poliedro.

19 Um poliedro convexo é constituído por 12 faces pentagonais. Calcule o número de vértices desse poliedro.

20 Qual é o número de vértices de um poliedro convexo constituído por 4 faces triangulares e 5 quadrangulares?

21 Um poliedro convexo é constituído por 10 ângulos triédricos. Determine o número de faces desse poliedro.

22 Um poliedro convexo é constituído por 2 ângulos pentaédricos e 5 ângulos tetraédricos. Calcule o número de faces desse poliedro.

Resolva os exercícios complementares 8 a 17 e 79 a 81.

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Poliedros de Platão*.

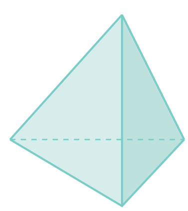
Poliedros regulares

Um poliedro convexo é **regular** se, e somente se, são obedecidas as condições:

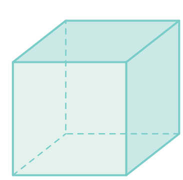
- todas as suas faces são polígonos regulares congruentes entre si;
- todos os seus ângulos poliédricos são congruentes entre si.

Exemplos

a) Um tetraedro regular possui: todas as faces triangulares regulares (triângulos equiláteros) congruentes entre si; e todos os ângulos triédricos congruentes entre si.



b) Um hexaedro regular, também chamado de cubo, possui: todas as faces quadradas congruentes entre si; e todos os ângulos triédricos congruentes entre si.

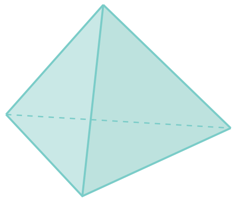


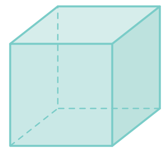
Propriedade

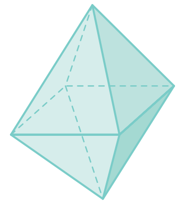
Demonstra-se que:

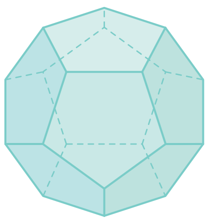
> Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares.

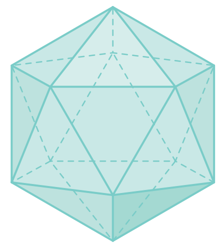
As cinco figuras seguintes mostram exemplos das cinco classes de poliedros regulares.


tetraedro regular


cubo

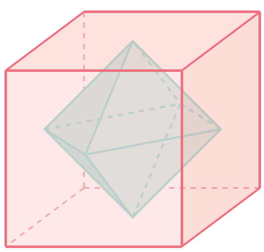

octaedro regular

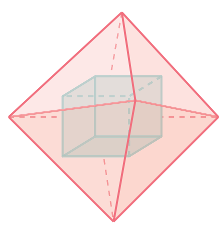

dodecaedro regular


icosaedro regular

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

23 Dois poliedros convexos são chamados de **poliedros conjugados** (ou duais) se, e somente se, o número de vértices de qualquer um deles é igual ao número de faces do outro. Todo poliedro regular admite um conjugado também regular. Uma forma de determinar o conjugado regular de um poliedro regular P_1 é construir o poliedro P_2 cujos vértices são os centros das faces de P_1. Por exemplo, os centros das faces de um hexaedro regular são os vértices de um octaedro regular, e os centros das faces de um octaedro regular são os vértices de um hexaedro regular; por isso, o hexaedro regular e o octaedro regular são chamados de **conjugados regulares**.





a) Faça um desenho mostrando o poliedro regular cujos vértices são os centros das faces de um tetraedro regular.

b) Qual é o conjugado regular do tetraedro regular?

c) Qual é o conjugado regular do dodecaedro regular?

d) Qual é o conjugado regular do icosaedro regular?

24 Calcule a medida da aresta do poliedro regular cujos vértices são os centros das faces de um cubo de aresta 10 cm.

25 Cada aresta de um icosaedro regular mede 6 cm. Calcule a área da superfície desse icosaedro.

Resolva os exercícios complementares 18 a 20.

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Os poliedros de Arquimedes.*

Seção 11.3

Prisma

› Objetivos

- **Identificar** um prisma e seus elementos.
- **Classificar** e nomear prismas.
- **Calcular** a área lateral e a área total de um prisma.
- **Identificar** um paralelepípedo reto-retângulo e calcular a medida de sua diagonal e sua área.

› Termos e conceitos

- prisma
- prisma reto
- prisma oblíquo
- prisma regular
- paralelepípedo reto-retângulo

O conceito de prisma

Nesta seção, vamos estudar o **prisma**, que é um poliedro com duas bases paralelas e congruentes de tal modo que as arestas que as unem são paralelas entre si.

Isaac Newton utilizou um prisma de cristal de bases triangulares, como o da foto, para decompor a luz solar nas cores do arco-íris.

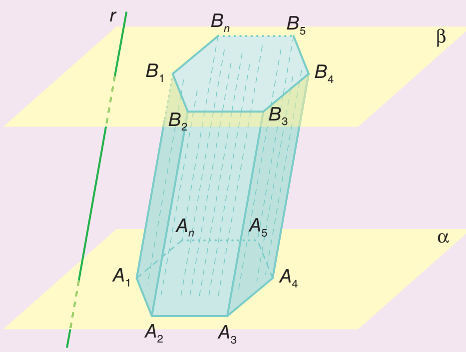
Os prismas são os poliedros mais comuns encontrados no dia a dia. Basta observar à sua volta e você verá dezenas deles: na forma dos edifícios, em calçamentos de ruas e calçadas, nas colmeias, em objetos domésticos, nas embalagens etc.

Para o estudo desse tipo de poliedro necessitamos de sua definição precisa, apresentada a seguir.

Definição

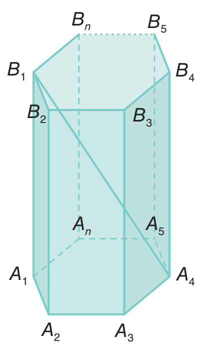
Sejam dois planos paralelos distintos, α e β, uma reta r secante a esses planos e um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ contido em α. Considere todos os segmentos de reta paralelos a r, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao polígono e o outro extremo pertencente a β.

A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado prisma convexo limitado ou, simplesmente, **prisma**.



Elementos de um prisma

Observando o prisma ao lado, temos:



- os polígonos $A_1A_2A_3...A_n$ e $B_1B_2B_3...B_n$ são as **bases** do prisma;
- as demais faces, exceto as bases, são as **faces laterais** do prisma, por exemplo, $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$ etc.;
- os vértices das faces são os **vértices** do prisma, por exemplo, A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ...;
- os lados das bases são as **arestas das bases** do prisma, por exemplo, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ ..., $\overline{B_1B_2}$, ...;
- as demais arestas, exceto as das bases, são as **arestas laterais** do prisma, por exemplo, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$, ...;
- a distância entre os planos das bases é a **altura** do prisma;
- todo segmento de reta cujos extremos são vértices que não pertencem a uma mesma face do prisma é a **diagonal do prisma**, por exemplo, $\overline{B_1A_4}$.

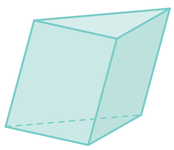
Destacamos que:

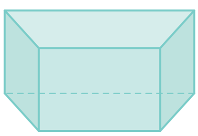
A soma das áreas de todas as faces laterais do prisma é denominada **área lateral** do prisma.

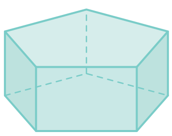
A soma da área lateral com as áreas das duas bases é chamada de **área total** do prisma.

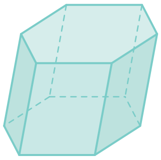
Nomenclatura dos prismas

Um prisma é classificado de acordo com o número de arestas de sua base:


prisma triangular


prisma quadrangular

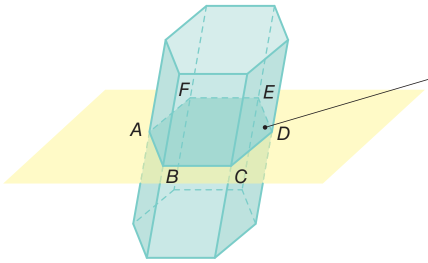

prisma pentagonal


prisma hexagonal

E assim por diante.

Secção transversal de um prisma

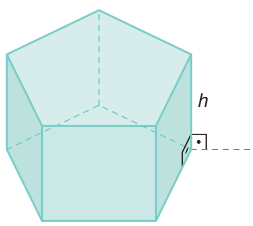
Uma **secção transversal** de um prisma é qualquer intersecção não vazia do prisma com um plano paralelo às suas bases.



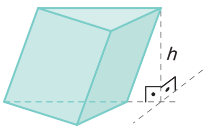
Observe que toda secção transversal de um prisma é um polígono congruente às suas bases.

Prisma reto e prisma oblíquo

Um prisma é **reto** se, e somente se, suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Um prisma que não é reto é chamado de prisma **oblíquo**.



prisma pentagonal reto

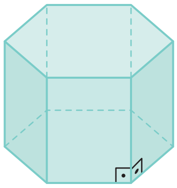


prisma triangular oblíquo

Note que em todo prisma reto a medida de uma aresta lateral é a própria altura do prisma.

Prisma regular

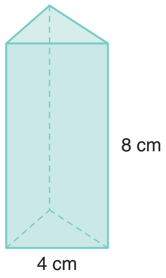
Um prisma é **regular** se, e somente se, é reto e suas bases são polígonos regulares.


prisma hexagonal regular: prisma reto com bases hexagonais regulares

Note que em todo prisma regular as faces laterais são retangulares e congruentes entre si.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12 Em um prisma triangular regular, cada aresta lateral mede 8 cm e cada aresta da base mede 4 cm.
Calcular do prisma:
a) a área de uma face lateral.
b) a área de uma base.
c) a área lateral.
d) a área total.



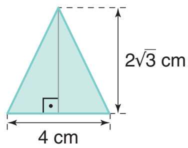
Resolução

a) Cada face lateral é um retângulo com 4 cm de base e 8 cm de altura. Logo, a área A_f de uma face lateral é dada por:

$$A_f = (4 \cdot 8)\ \text{cm}^2 = 32\ \text{cm}^2$$

b) Cada base é um triângulo equilátero com 4 cm de lado.

Lembrando que a medida h da altura de um triângulo equilátero de lado a é dada por $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, temos:



$$h = \frac{4\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

Portanto, a área B de uma base é dada por:

$$B = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

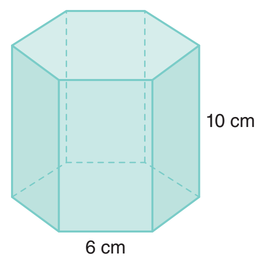
c) A área lateral A_ℓ é dada por:

$A_\ell = 3 \cdot A_f = 3 \cdot 32\ \text{cm}^2 = 96\ \text{cm}^2$

d) A área total A_T é dada por:

$A_T = A_\ell + 2B = \left(96 + 2 \cdot 4\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2 = 8\left(12 + \sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

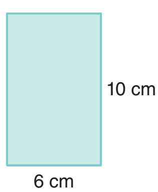
13 Em um prisma hexagonal regular, cada aresta da base mede 6 cm e cada aresta lateral mede 10 cm.
Calcular desse prisma:



a) a área de uma face lateral.
b) a área de uma base.
c) a área lateral.
d) a área total.

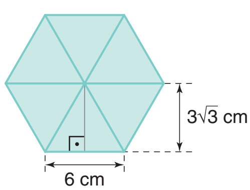
Resolução

a) Cada face lateral é um retângulo com 6 cm de base e 10 cm de altura. Logo, a área A_f de uma face lateral é dada por:



$$A_f = (6 \cdot 10)\ \text{cm}^2 = 60\ \text{cm}^2$$

b) Cada base é um hexágono regular com 6 cm de lado. Como as diagonais que passam pelo centro de um hexágono regular dividem-no em seis triângulos equiláteros, a área B de uma base desse prisma é seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 6 cm.



$$B = 6 \cdot \left(\frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{cm}^2 = 54\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

c) A área lateral A_ℓ é dada por:

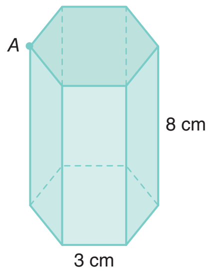
$A_\ell = 6 \cdot A_f = 6 \cdot 60\ \text{cm}^2 = 360\ \text{cm}^2$

d) A área total A_T é dada por:

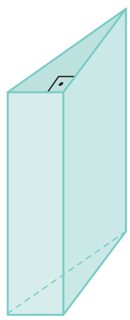
$A_T = A_\ell + 2B = \left(360 + 2 \cdot 54\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2 = 36\left(10 + 3\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

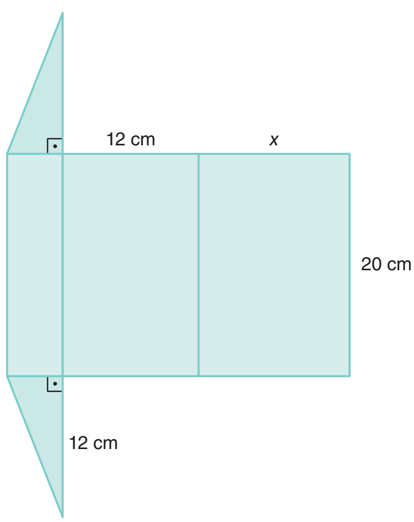
26 No prisma hexagonal regular, representado abaixo, cada aresta da base mede 3 cm e cada aresta lateral mede 8 cm. Calcule a medida da maior diagonal que tem como um dos extremos o vértice *A*.



27 Um prisma reto de altura 20 cm tem como bases triângulos retângulos com catetos de 5 cm e 12 cm.



a) **Planificar** a superfície de um prisma significa representar todas as suas faces em um mesmo plano. Nessa planificação, é usual representar cada face com um lado em comum com alguma outra face, como mostrado na figura abaixo, que é uma planificação desse prisma.



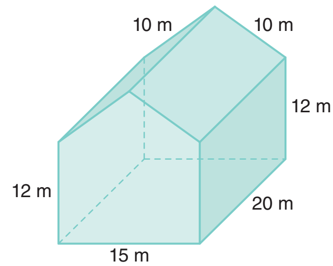
Determine a medida *x*.

b) Calcule a área de uma base desse prisma.

c) Calcule sua área lateral.

d) Calcule a área total.

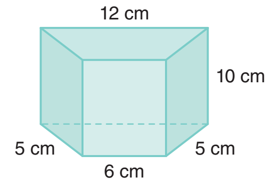
28 A figura abaixo representa um prisma pentagonal reto. Calcule a área lateral e a área total desse prisma.



29 Cada uma das bases de um prisma reto com 10 cm de altura é um trapézio isósceles com lados 5 cm, 5 cm, 6 cm e 12 cm.
Calcule desse prisma:

a) a área lateral.

b) a área total.



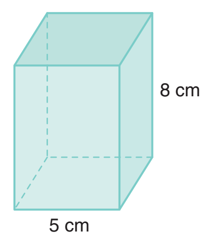
30 Em um prisma quadrangular regular, cada aresta da base mede 5 cm e cada aresta lateral mede 8 cm.
Calcule desse prisma:

a) a área de uma face lateral.

b) a área de uma base.

c) a área lateral.

d) a área total.



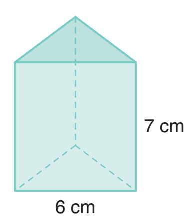
31 Em um prisma triangular regular, cada aresta da base mede 6 cm e cada aresta lateral mede 7 cm.
Calcule desse prisma:

a) a área de uma face lateral.

b) a área de uma base.

c) a área lateral.

d) a área total.



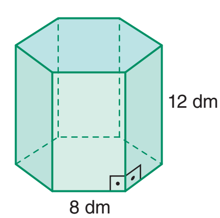
32 Cada aresta lateral de um prisma hexagonal regular mede 12 dm e cada aresta da base mede 8 dm.
Calcule desse prisma:

a) a área de uma face lateral.

b) a área de uma base.

c) a área lateral.

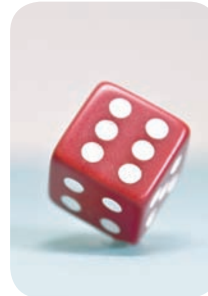
d) a área total.



Resolva os exercícios complementares 21 a 25, 82 e 83.

Paralelepípedo reto-retângulo

O que há em comum entre a forma dos blocos de pedra utilizados na pavimentação de ruas, a do baú de um caminhão e a de um dado?



Todos esses objetos têm a forma de um prisma reto de base retangular. Esse tipo de prisma é chamado de paralelepípedo reto-retângulo ou bloco retangular.

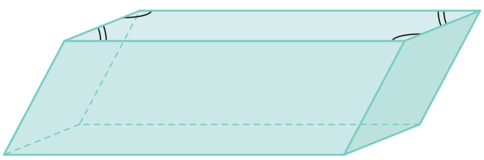
Definimos:

Paralelepípedo é todo prisma cujas bases são paralelogramos.

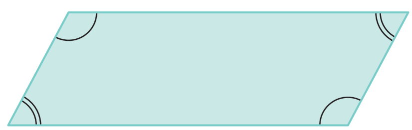
Um paralelepípedo é **reto** se suas arestas laterais são perpendiculares às bases. Um paralelepípedo que não é reto é chamado de paralelepípedo **oblíquo**.

Paralelepípedo reto-retângulo é todo prisma reto cujas bases são retângulos.

Exemplos

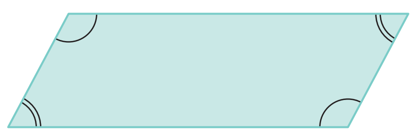


paralelepípedo oblíquo



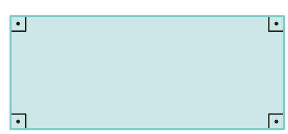
base: paralelogramo

paralelepípedo reto

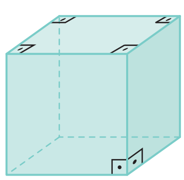


base: paralelogramo

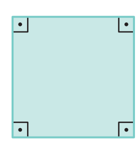
paralelepípedo reto-retângulo



base: retângulo



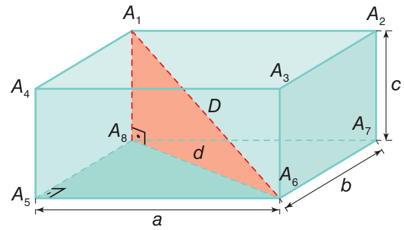
paralelepípedo reto-retângulo
de faces quadradas (cubo)



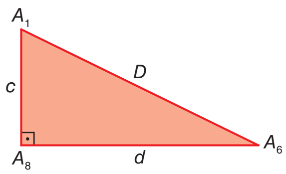
base: quadrado

Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

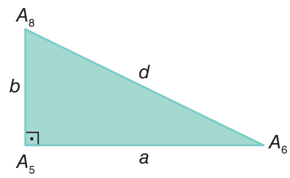
Considere um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões — comprimento, largura e altura — são as medidas a, b e c. Sendo d e D as medidas de uma diagonal da base e de uma diagonal do paralelepípedo, respectivamente, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos $A_1A_8A_6$ e $A_5A_8A_6$, temos:



$D^2 = d^2 + c^2$ (I)



$d^2 = a^2 + b^2$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos: $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Assim, concluímos:

$$\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Medida da diagonal de um cubo

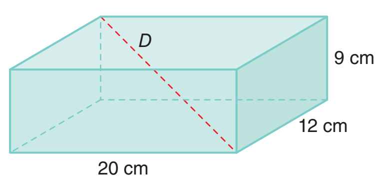
O cubo é um paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas têm a mesma medida a. Então, a medida D da diagonal é:

$$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2}$$

$$\boxed{D = a\sqrt{3}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 As dimensões — comprimento, largura e altura — de um paralelepípedo reto-retângulo são 20 cm, 12 cm e 9 cm. Calcular a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.



Resolução

Sendo D a medida de uma diagonal desse paralelepípedo, temos:

$D = \sqrt{20^2 + 12^2 + 9^2}$ cm $\Rightarrow D = \sqrt{625}$ cm $= 25$ cm

15 Cada diagonal das faces de um cubo mede $4\sqrt{2}$ cm. Calcular a medida D de uma diagonal desse cubo.

Resolução

Sendo a a medida, em centímetro, da aresta do cubo, podemos representá-lo pela figura abaixo.

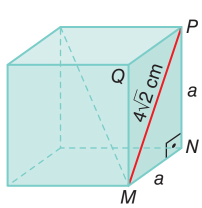
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MNP, temos:

$a^2 + a^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2a^2 = 32$

$\therefore a^2 = 16$

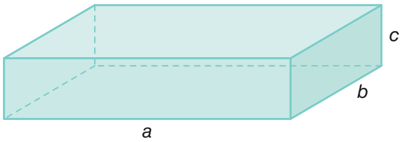
$\therefore a = 4$ cm

Logo: $D = a\sqrt{3} \Rightarrow D = 4\sqrt{3}$ cm



Área total de um paralelepípedo reto-retângulo

Considere um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões – comprimento, largura e altura – são as medidas a, b e c.



Temos, dentre as faces do paralelepípedo, dois retângulos de área ab, dois de área ac e dois de área bc. A área total desse paralelepípedo é a soma das áreas de suas seis faces:

$$A_T = 2ab + 2ac + 2bc$$

Portanto:

$$\boxed{A_T = 2(ab + ac + bc)}$$

Área total de um cubo

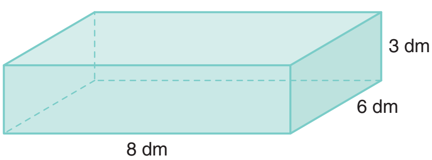
A área total A_T de um cubo cujas arestas têm medida a, é dada por:

$$A_T = 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) = 2 \cdot 3a^2$$

$$\boxed{A_T = 6a^2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 Calcular a área total de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões — comprimento, largura e altura — são 8 dm, 6 dm e 3 dm.



Resolução

A área total A_T desse paralelepípedo é dada por:

$A_T = 2(8 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 3)\ \text{dm}^2 \Rightarrow A_T = 2 \cdot 90\ \text{dm}^2 = 180\ \text{dm}^2$

17 As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 4. Sabendo que a área total desse paralelepípedo é 832 cm², calcular a medida de uma de suas diagonais.

Resolução

Sendo a, b e c as dimensões do paralelepípedo, temos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \\ c = 4k \end{cases}$$

Como a área total A_T é 832 cm², obtemos a constante de proporcionalidade k do seguinte modo:

$A_T = 2(ab + ac + bc) \Rightarrow 832 = 2(2k \cdot 3k + 2k \cdot 4k + 3k \cdot 4k)$

$\therefore 52k^2 = 832 \Rightarrow k^2 = 16$

$\therefore k = \pm 4$

O valor de k deve ser positivo, pois as dimensões do paralelepípedo não podem ser representadas por números negativos. Logo, $k = 4$.

Para $k = 4$, as dimensões do paralelepípedo são 8 cm, 12 cm e 16 cm e, portanto, a medida D de cada uma de suas diagonais é dada por:

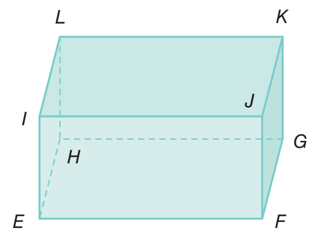
$D = \sqrt{8^2 + 12^2 + 16^2}\ \text{cm} \Rightarrow D = \sqrt{464}\ \text{cm} = 4\sqrt{29}\ \text{cm}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

33 Calcule a medida de uma diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são 6 dm, 4 dm e $2\sqrt{3}$ dm.

34 Em um paralelepípedo reto-retângulo, a largura mede o triplo da altura e o comprimento mede o quádruplo da altura. Dado que uma diagonal desse paralelepípedo mede $2\sqrt{26}$ cm, determine suas dimensões.

35 No paralelepípedo reto-retângulo *EFGHIJKL*, representado abaixo, tem-se $EF = 12$ cm, $FG = 5$ cm e $GK = 3\sqrt{3}$ cm.



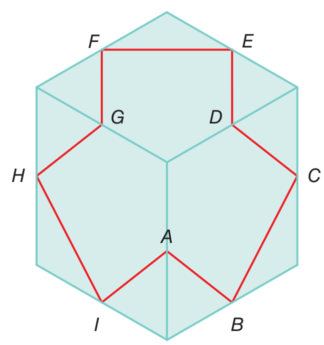
Calcule:

a) a medida d de uma diagonal da base *EFGH*.

b) a medida D de uma diagonal desse paralelepípedo.

c) a área total desse paralelepípedo.

36 (UFPB) Na figura abaixo, está representada a linha poligonal *ABCDEFGHIA* sobre a superfície de um cubo cuja aresta mede 2 cm.



Sabendo que as extremidades dos lados dessa linha poligonal são pontos médios de arestas do cubo, o comprimento dessa poligonal, em centímetro, é:

a) 9

b) $9\sqrt{2}$

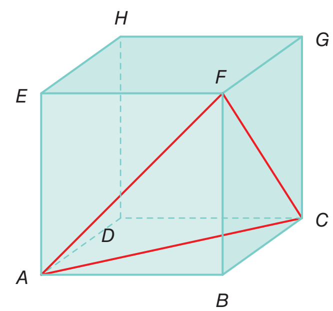
c) $9\sqrt{3}$

d) 18

e) $9\sqrt{5}$

(*Nota*: Linha poligonal é uma sucessão de segmentos de reta consecutivos e não colineares.)

37 (UFRJ) O triângulo *ACF* tem vértices coincidindo com três dos vértices de um cubo cuja aresta mede a, como mostra a figura abaixo. Determine a área do triângulo *ACF* em função de a.



38 A soma das medidas de todas as arestas de um cubo é 60 cm. Calcule desse cubo:

a) a medida da diagonal.

b) a área total.

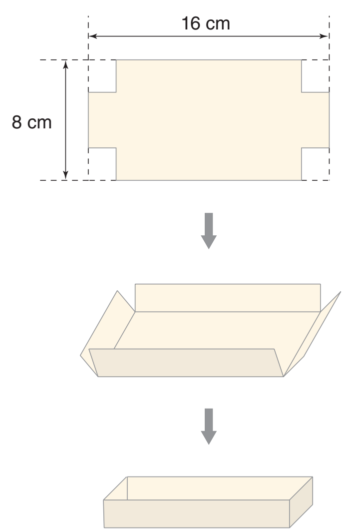
c) a área lateral.

39 A área total de um cubo é 96 dm^2. Calcule desse cubo:

a) a medida da diagonal.

b) a área lateral.

40 Uma folha retangular de cartolina tem 16 cm de comprimento por 8 cm de largura. Recortam-se dessa folha quatro quadrados congruentes de modo que cada um deles tenha um dos vértices em um vértice da folha. A seguir, dobra-se essa folha, formando uma superfície aberta de um paralelepípedo reto-retângulo. Qual é a medida do lado do quadrado retirado para que a área interna da caixa sem tampa assim obtida seja a quarta parte da área da folha original?



Resolva os exercícios complementares 26 a 30.

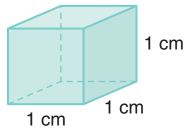
Volume de um prisma

Objetivos

- **Calcular** o volume de prismas.
- **Aplicar** o princípio de Cavalieri.

O cubo como unidade de volume

Considere um cubo com 1 cm de aresta. A porção do espaço ocupada por esse cubo é uma unidade de volume definida como 1 cm^3 (lemos: "um centímetro cúbico").

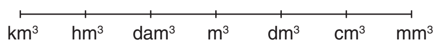


De maneira análoga, definem-se 1 mm^3, 1 dm^3, 1 m^3, 1 dam^3, 1 hm^3 e 1 km^3 como a porção do espaço ocupada por cubos com arestas de 1 mm, 1 dm, 1 m, 1 dam, 1 hm e 1 km, respectivamente.

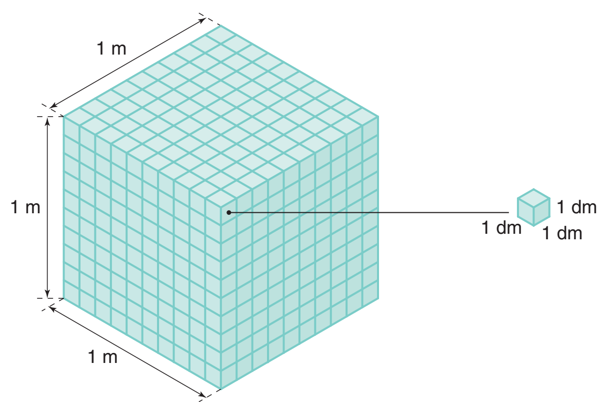
Nota:

Lemos: mm^3 – milímetro cúbico; dm^3 – decímetro cúbico; m^3 – metro cúbico; dam^3 – decâmetro cúbico; hm^3 – hectômetro cúbico; km^3 – quilômetro cúbico.

Essas unidades podem ser representadas na escala a seguir.



Cada unidade dessa escala vale 1.000 vezes a unidade imediatamente à sua direita. Para entender o porquê dessa relação, vamos dividir um cubo de 1 m de aresta em cubinhos de 1 dm de aresta.



Assim, observamos que o metro cúbico foi dividido em 1.000 decímetros cúbicos, com o que concluímos:

$$1\ m^3 = 1.000\ dm^3$$

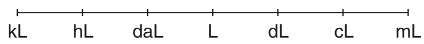
Repetindo o raciocínio para as demais unidades da escala, concluímos também que:

$$1\ km^3 = 1.000\ hm^3$$
$$1\ hm^3 = 1.000\ dam^3$$
$$1\ dam^3 = 1.000\ m^3$$
$$1\ dm^3 = 1.000\ cm^3$$
$$1\ cm^3 = 1.000\ mm^3$$

Outra unidade de volume muito usada é o **litro** (L), definida como 1 dm^3.

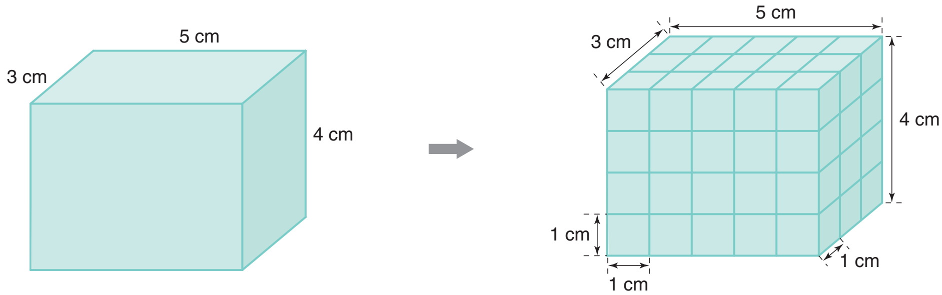
$$\boxed{1\ L = 1\ dm^3}$$

Os múltiplos do litro são o decalitro (daL), o hectolitro (hL) e o quilolitro (kL); e os submúltiplos são o decilitro (dL), o centilitro (cL) e o mililitro (mL). Essas unidades podem ser dispostas na escala a seguir, em que cada unidade vale dez vezes a unidade imediatamente à sua direita.



Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

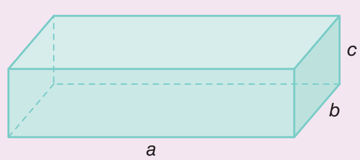
Adotando o centímetro cúbico como unidade, vamos medir o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 5 cm, 3 cm e 4 cm. Para isso, dividimos o paralelepípedo em cubinhos com 1 cm de aresta:



Como obtivemos 4 camadas horizontais com 15 cubinhos em cada uma, concluímos que o volume do paralelepípedo é igual ao volume de 60 cubinhos de aresta 1 cm. Portanto, o volume V do paralelepípedo pode ser calculado pelo produto das três dimensões:

$$V = 5\ cm \cdot 3\ cm \cdot 4\ cm = 60\ cm^3$$

O **volume** V de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é o produto das três dimensões:



$$V = a \cdot b \cdot c$$

Volume de um cubo

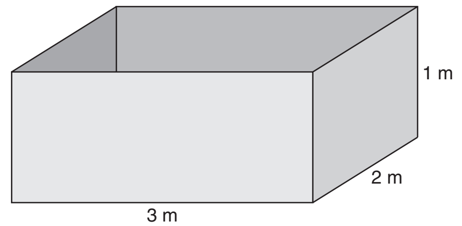
O volume V de um cubo cujas arestas têm medida a é dado por:

$$V = a \cdot a \cdot a$$

$$\boxed{V = a^3}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

18 Uma caixa-d'água tem, internamente, a forma de um paralelepípedo reto-retângulo com 3 m de comprimento, 2 m de largura e 1 m de altura. Calcular a capacidade dessa caixa-d'água em litro.



Resolução

A capacidade de um recipiente é o seu volume interno.

O volume interno V da caixa-d'água é dado por:

$V = 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ m}^3 = 6 \text{ m}^3$

Como $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ e $1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ dm}^3$, temos:

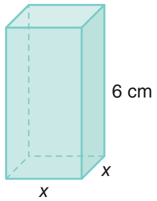
$V = 6.000 \text{ dm}^3$

$\therefore V = 6.000 \text{ L}$

Logo, a capacidade da caixa-d'água, que é o seu volume interno, é 6.000 L.

19 Em um paralelepípedo reto-retângulo com 6 cm de altura, o comprimento tem a mesma medida da largura. Calcule o volume desse paralelepípedo, sabendo que sua área total é 90 cm^2.

Resolução



Indicando por x a medida do comprimento e da largura do paralelepípedo, e por A_T e V sua área total e seu volume, respectivamente, temos:

$A_T = 90 \Rightarrow 2(6x + 6x + x^2) = 90$

$\therefore x^2 + 12x - 45 = 0$

$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-45) = 324$

$\therefore x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-12 \pm 18}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -15$

Como x representa a medida de um segmento de reta, consideramos apenas seu valor positivo, isto é, $x = 3$.

Assim, as dimensões do paralelepípedo são 3 cm, 3 cm e 6 cm e, portanto, o volume V é dado por:

$V = (3 \cdot 3 \cdot 6) \text{ cm}^3 = 54 \text{ cm}^3$

20 Calcular o volume de um cubo cuja área total A_T é 13,5 dm^2.

Resolução

Indicado por a a medida, em decímetro, das arestas do cubo, temos:

$A_T = 6a^2 \Rightarrow 13{,}5 = 6a^2$

$\therefore a^2 = 2{,}25 \Rightarrow a = 1{,}5$

Logo, o volume V do cubo é dado por:

$V = a^3 \Rightarrow V = (1{,}5)^3 \text{ dm}^3$

$\therefore V = 3{,}375 \text{ dm}^3$

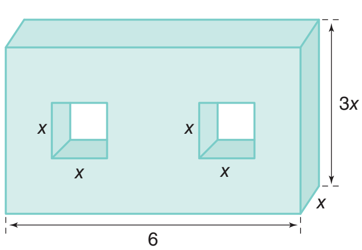
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

41 Em um paralelepípedo reto-retângulo de altura 60 dm, o comprimento mede $\frac{2}{3}$ da altura, e a largura mede $\frac{4}{5}$ do comprimento. Calcule o volume desse paralelepípedo em decímetro cúbico.

42 Em um paralelepípedo de volume 80 dm^3, as dimensões – comprimento, largura e altura – são diretamente proporcionais aos números 5, 2 e 1. Calcule a área total desse paralelepípedo.

43 A diagonal de um cubo mede 3 cm. Calcule o volume desse cubo.

44 De um paralelepípedo reto-retângulo com dimensões x, $3x$ e 6, são removidos dois cubos de aresta x, como indicado na figura. Calcule o comprimento da aresta dos cubos, sabendo que o volume retirado é igual à terça parte do volume do sólido restante.



45 Um tanque tem, internamente, a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cuja diagonal mede $5\sqrt{21}$ m. Os números que representam as dimensões internas – comprimento, largura e altura – em metro, desse paralelepípedo, formam uma progressão geométrica de razão 2. Calcule a capacidade desse tanque, em litro.

46 Para calcular a capacidade de um jarro de forma irregular, Paulo retirou água de um aquário que tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e encheu completamente o jarro.
Observando que o fundo do aquário tem 50 cm de comprimento por 30 cm de largura e que, após a retirada, o nível da superfície da água desceu 2 cm, o rapaz concluiu, corretamente, que a capacidade do jarro é:

a) 3 L
b) 0,3 L
c) 2 L
d) 2,8, L
e) 2,7 L

47 (UFPE) Um reservatório de forma cúbica tem aresta medindo 3 m e é preenchido em três horas utilizando uma bomba-d'água. Com a mesma bomba, em quantas horas preenche-se um reservatório na forma de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 4 m, 6 m e 9 m?

Resolva os exercícios complementares 31 a 36 e 84 a 96.

O princípio de Cavalieri

As figuras abaixo mostram as mesmas moedas empilhadas de duas maneiras diferentes. Que relação existe entre o volume da primeira pilha de moedas e o volume da segunda pilha?

É claro que as pilhas têm volumes iguais, pois o volume de cada pilha é a soma dos volumes das moedas que a compõem, e as duas pilhas são compostas pelas mesmas moedas.

Essa ideia intuitiva foi transformada em uma importante proposição pelo matemático, professor da Universidade de Bolonha, Bonaventura Cavalieri. A obra mais importante de Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum* (*Geometria dos indivisíveis contínuos*), publicada em 1635, apresenta o princípio, enunciado a seguir, para a comparação dos volumes de dois sólidos geométricos.

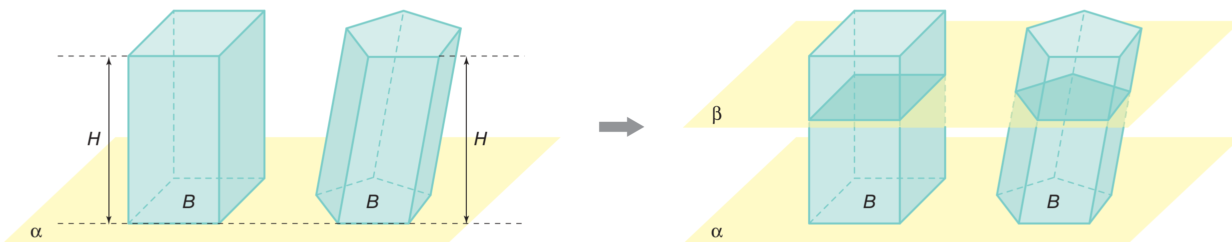
Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

Sejam dois sólidos geométricos P_1 e P_2 e um plano α. Se qualquer plano β, paralelo a α, que intercepta um dos sólidos também intercepta o outro e determina nesses sólidos **secções de mesma área**, então os sólidos P_1 e P_2 têm **volumes iguais**.

Para exemplificar, vejamos, no item a seguir, como se calcula o volume de um prisma qualquer, comparando-o com o volume de um paralelepípedo reto-retângulo.

Volume de um prisma

Considere, em um semiespaço de origem α, um paralelepípedo reto-retângulo e um prisma de mesma altura H, cujas bases estão contidas em α e têm a mesma área B. Note que qualquer plano β, paralelo a α, que intercepta um dos prismas também intercepta o outro:

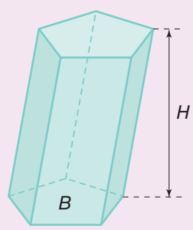


Como qualquer secção transversal de um prisma é congruente às suas bases, temos que qualquer plano β, nas condições anteriores, determina nesses prismas secções de mesma área. Assim, o princípio de Cavalieri nos garante que os prismas têm volumes iguais.

Sendo m e n as dimensões da base do paralelepípedo, seu volume V é dado por $V = mnH$. Como a área B da base desse paralelepípedo é $B = mn$, temos $V = BH$, que também é o volume do outro prisma.

Assim, concluímos:

O **volume** de um prisma qualquer é igual ao produto da área de sua base por sua altura.



$$V = B \cdot H$$

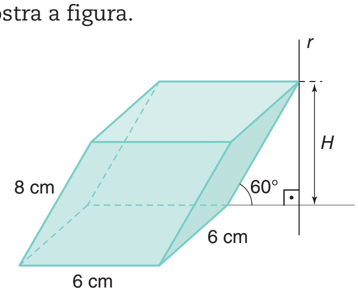
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

21 A base de um prisma é um quadrado de lado 6 cm. Cada aresta lateral desse prisma mede 8 cm e forma com os planos das bases ângulos de 60°. Calcular o volume desse prisma.

Resolução

A área B da base do prisma é a área de um quadrado com 6 cm de lado; logo, $B = 36\text{ cm}^2$.

Para calcular a altura H desse prisma, vamos traçar por um dos vértices a reta r perpendicular aos planos das bases, conforme mostra a figura.



Assim:

$\text{sen } 60° = \dfrac{H}{8} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{H}{8}$

$\therefore H = 4\sqrt{3}\text{ cm}$

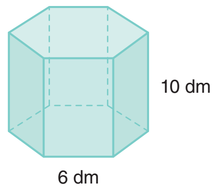
Calculando o volume V do prisma, que é dado por $V = BH$, temos:

$V = 36 \cdot 4\sqrt{3}\text{ cm}^3 \Rightarrow V = 144\sqrt{3}\text{ cm}^3$

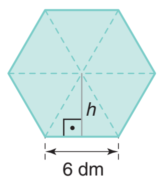
22 Em um prisma hexagonal regular cada aresta da base mede 6 dm e cada aresta lateral mede 10 dm. Calcular o volume desse prisma.

Resolução

Como todo prisma regular é reto, temos que a sua altura H é igual à medida de uma aresta lateral. Logo: $H = 10$ dm



Em todo prisma regular, as bases são polígonos regulares; portanto, cada base desse prisma é um hexágono regular, conforme a figura abaixo.



A medida h é a altura de um triângulo equilátero de lado 6 dm; logo:

$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2} \text{ dm} = 3\sqrt{3} \text{ dm}$$

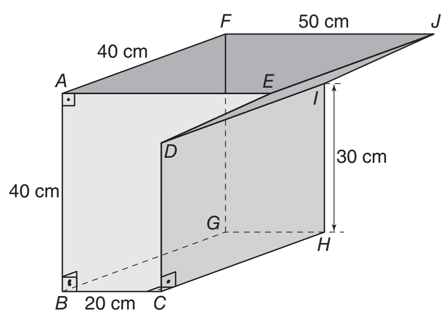
A área B da base do prisma é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 6 dm, ou seja:

$$B = 6 \cdot \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \text{ dm}^2 = 54\sqrt{3} \text{ dm}^2$$

Calculando o volume V do prisma, que é dado por $V = BH$, temos:

$$V = 54\sqrt{3} \cdot 10 \text{ dm}^3 = 540\sqrt{3} \text{ dm}^3$$

23 Um tanque de lavar roupas tem internamente a forma e as dimensões descritas pela figura a seguir, em que os pentágonos não convexos $ABCDE$ e $FGHIJ$ são congruentes e paralelos, e os segmentos $\overline{AF}$, $\overline{EJ}$, $\overline{DI}$, $\overline{CH}$ e $\overline{BG}$ são paralelos entre si e perpendiculares aos planos dos pentágonos. Calcular a capacidade desse tanque em litro.



Resolução

O plano que contém a face $CDIH$ separa a figura em dois prismas: o paralelepípedo reto-retângulo $ABCKFGHL$ e o prisma triangular reto $KDELIJ$, conforme mostra a figura.

O volume V_1 do paralelepípedo reto-retângulo $ABCKFGHL$ é dado por:

$V_1 = 20 \cdot 40 \cdot 40 \text{ cm}^3 \Rightarrow V_1 = 32.000 \text{ cm}^3$

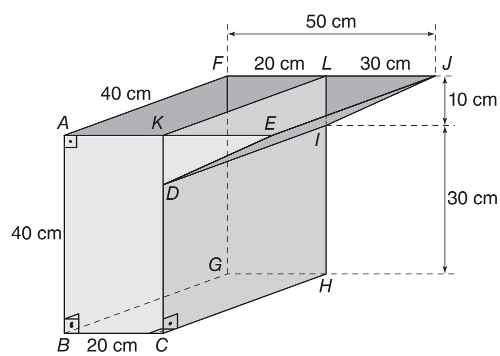
A base DEK do prisma $KDELIJ$ é um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{KD}$ e $\overline{KE}$ medem 10 cm e 30 cm, respectivamente. Logo, o volume V_2 do prisma $KDELIJ$ é dado por:

$$V_2 = \left(\frac{10 \cdot 30}{2}\right) \cdot 40 \text{ cm}^3 \Rightarrow V_2 = 6.000 \text{ cm}^3$$

Assim, o volume V do tanque é:

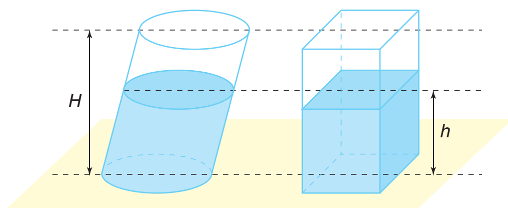
$V = V_1 + V_2 = 38.000 \text{ cm}^3$ ou, ainda, $V = 38 \text{ dm}^3$

Como 1 dm^3 equivale a 1 L, concluímos que a capacidade do tanque é 38 L.

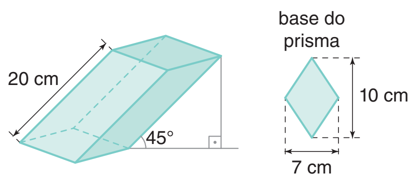


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

48 Dois vasos de formas diferentes têm internamente a mesma altura H e bases planas de mesma área. Essas bases estão apoiadas sobre o mesmo plano horizontal de uma mesa, conforme mostra a figura. Colocando água em ambos até a mesma altura h (qualquer que seja h, com $0 < h \leqslant H$), verificamos que, nos dois vasos, a área da superfície da água é a mesma. Que relação existe entre os volumes internos desses dois vasos? Justifique sua resposta.



49 Em um prisma cujas bases são losangos de diagonais 7 cm e 10 cm, as arestas laterais medem 20 cm e formam ângulos de 45° com os planos das bases.

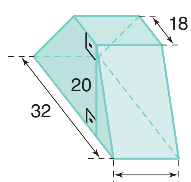


Calcule desse prisma:

a) a altura. **b)** o volume.

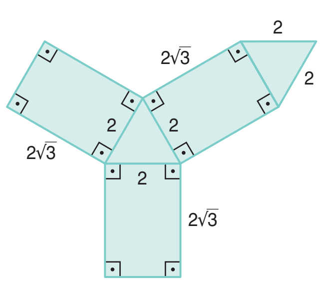
50 A base de um prisma reto é um triângulo retângulo de catetos 6 cm e 8 cm. Calcule o volume desse prisma, sabendo que cada aresta lateral tem a mesma medida da maior aresta da base.

51 O sólido representado ao lado possui duas faces trapezoidais, paralelas e congruentes, e as demais faces são retangulares. Sabendo que as medidas indicadas estão em centímetro e que o volume desse sólido é 3.000 cm³, determine a medida x.

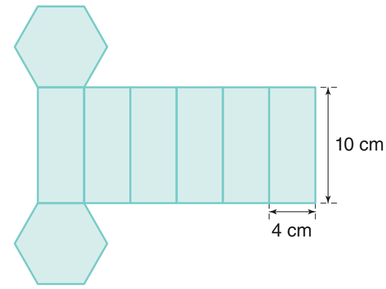


52 Em um prisma regular triangular, cada aresta da base mede 6 cm e cada aresta lateral mede 9 cm. Calcule o volume desse prisma.

53 A figura abaixo representa a planificação da superfície de um prisma triangular. Calcule o volume desse prisma.



54 Calcule o volume de um prisma regular cuja superfície planificada é apresentada a seguir:



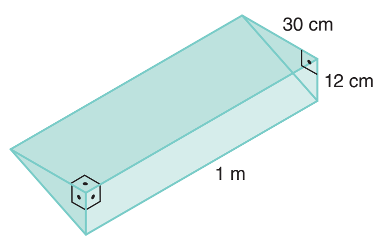
55 Um prisma hexagonal regular tem 5 dm de altura e 120 dm² de área lateral. Calcule o volume desse prisma.

56 Todas as arestas de um prisma hexagonal regular têm a mesma medida. Calcule a área total desse prisma, sabendo que seu volume é $324\sqrt{3}$ cm³.

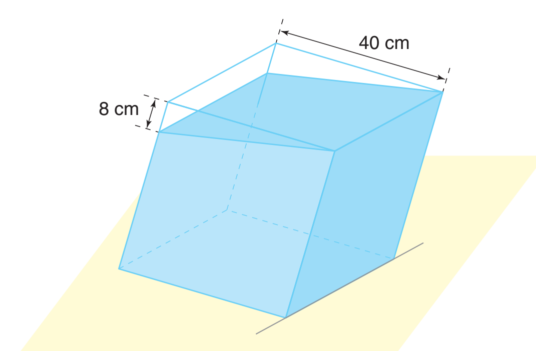
57 Em um prisma triangular regular de altura $2\sqrt{3}$ dm, a área de uma face lateral é igual à área de uma das bases. Calcule o volume desse prisma.

58 (Ulbra-RS) Sabendo-se que cada degrau tem a forma e as dimensões do prisma a seguir, o volume de concreto que se gasta para fazer 10 degraus é:

a) 0,18 m³
b) 1,8 m³
c) 3 m³
d) 18 m³
e) 10 m³



59 Um recipiente tem internamente a forma de um cubo com 40 cm de aresta, e sua base está em um plano horizontal. Esse recipiente, cheio de água, é inclinado em torno de uma aresta, que permanece na horizontal. De acordo com a medida indicada na figura abaixo, quantos litros de água foram derramados com essa inclinação?



Resolva os exercícios complementares 37 a 45 e 97 a 101.

Seção 11.5

Pirâmide

Objetivos

- **Identificar** uma pirâmide e seus elementos.
- **Classificar** e nomear pirâmides.
- **Calcular** a área lateral e a área total de uma pirâmide.
- **Calcular** as medidas dos apótemas da pirâmide regular e da base.

Termos e conceitos

- pirâmide
- pirâmide regular
- apótema de uma pirâmide regular
- apótema da base de uma pirâmide regular

O conceito de pirâmide

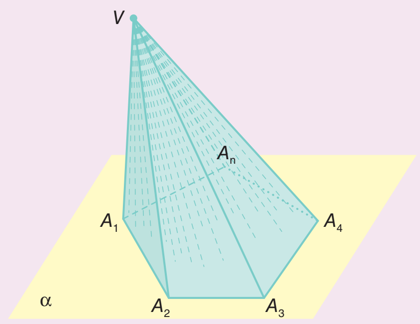
No terceiro milênio antes da Era Cristã, os egípcios construíram grandes monumentos para servir de tumbas aos seus faraós. Esses monumentos têm a forma de um poliedro chamado **pirâmide**.

Por possuírem bases quadrangulares, essas construções são chamadas de pirâmides quadrangulares. Na Geometria, o conceito de pirâmide é mais geral, conforme a definição a seguir.

Definição

Sejam um polígono convexo $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ contido em um plano α e um ponto V, não pertencente a α. Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao polígono e o outro extremo em V.

A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado pirâmide convexa limitada ou, simplesmente, **pirâmide**.



Elementos de uma pirâmide

Observando a pirâmide apresentada na definição, temos:

- o ponto V é o **vértice** da pirâmide;
- o polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ é a **base** da pirâmide;
- os pontos A_1, A_2, A_3, ... e A_n são os **vértices da base**;
- as demais faces, exceto a base, são as **faces laterais**;

As três pirâmides de Gizé foram construídas há mais de 4.500 anos para o sepultamento dos faraós Quéops, Quéfren e Miquerinos.

- os lados da base são as **arestas da base**;
- as demais arestas, exceto as das bases, são as **arestas laterais**;
- a distância entre o vértice V e o plano da base é a **altura** da pirâmide.

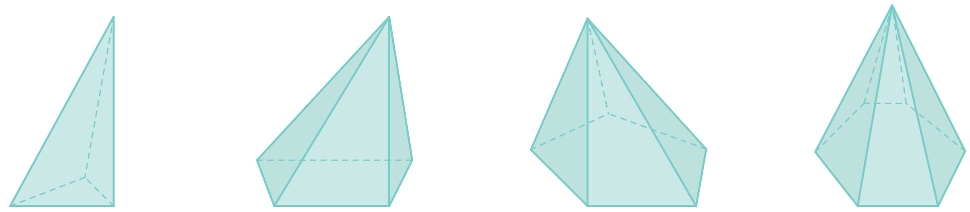
Destacamos que:

A soma das áreas de todas as faces laterais é chamada de **área lateral** da pirâmide.

A soma da área lateral com a área da base é denominada **área total** da pirâmide.

Nomenclatura das pirâmides

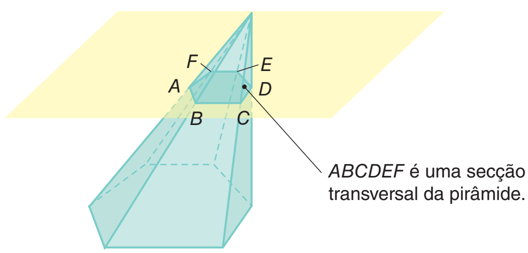
Uma pirâmide é classificada de acordo com o número de arestas da base:



E assim por diante.

Secção transversal de uma pirâmide

Secção transversal de uma pirâmide é qualquer intersecção não vazia e não unitária da pirâmide com um plano paralelo à sua base.



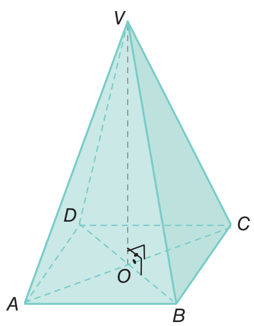
Note que toda secção transversal de uma pirâmide é um polígono semelhante à sua base.

Pirâmide regular

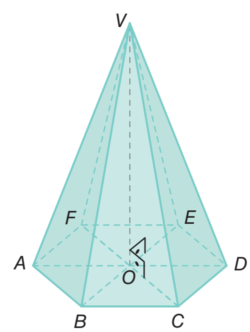
> Uma pirâmide é **regular** se, e somente se, sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base é o centro dessa base.

Lembre-se de que o centro de um polígono regular é o centro da circunferência circunscrita (ou inscrita) nesse polígono.

Exemplos



Pirâmide quadrangular regular (o ponto O é o centro do quadrado $ABCD$).



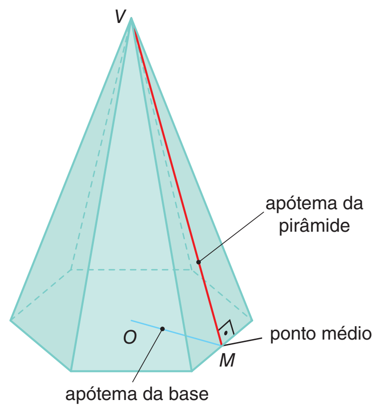
Pirâmide hexagonal regular (o ponto O é o centro do hexágono regular $ABCDEF$).

Apótema de uma pirâmide regular e apótema da base

Considere uma pirâmide regular e o ponto médio M de qualquer um dos lados de sua base.

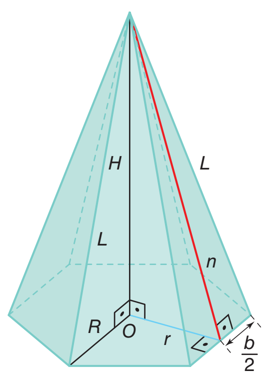
- O segmento de reta que tem um extremo em M e outro no vértice da pirâmide é chamado de **apótema da pirâmide**.
- O segmento de reta que tem um extremo em M e outro no centro da base é chamado de **apótema da base**.

Note, na figura abaixo, que o apótema $\overline{VM}$ é a altura de uma face lateral da pirâmide.



Relações entre os elementos de uma pirâmide regular

Em uma pirâmide regular, sejam: H a altura; n a medida do apótema da pirâmide; r a medida do apótema da base; b a medida de uma aresta da base; L a medida de uma aresta lateral; R o raio da circunferência circunscrita à base. Pelo teorema de Pitágoras, temos:



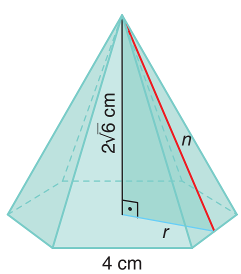
- $H^2 + r^2 = n^2$
- $n^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = L^2$
- $H^2 + R^2 = L^2$

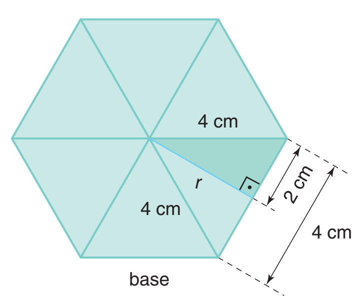
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

24 Em uma pirâmide hexagonal regular de altura $2\sqrt{6}$ cm, cada aresta da base mede 4 cm. Calcular a área lateral A_ℓ e a área total A_T dessa pirâmide.

Resolução

Sejam n a medida do apótema da pirâmide e r a medida do apótema da base.





Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos destacados nas figuras da página anterior, temos:

$(2\sqrt{6})^2 + r^2 = n^2$ (I)

$r^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$ (II)

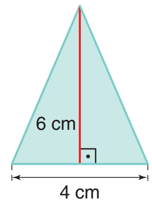
Substituindo (II) em (I), obtemos:

$(2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2 = n^2$

$\therefore 24 + 12 = n^2 \Rightarrow n^2 = 36$

$\therefore n = 6$

Assim, cada face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles de base 4 cm e altura 6 cm:



Sendo A_f a área de uma face lateral, temos:

$A_f = \frac{4 \cdot 6}{2}\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_f = 12\ \text{cm}^2$

A área lateral A_ℓ da pirâmide é seis vezes a área de uma face lateral, portanto:

$A_\ell = 6 \cdot 12\ \text{cm}^2 = 72\ \text{cm}^2$

A área B do hexágono regular que é base da pirâmide é seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 4 cm, ou seja:

$B = 6 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 \Rightarrow B = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

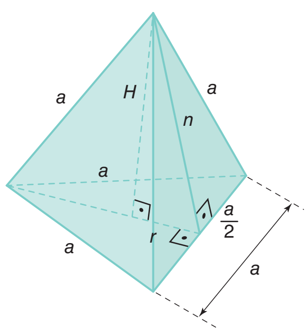
Concluindo, a área total A_T é a soma da área lateral A_ℓ com a área B da base.

$A_T = (72 + 24\sqrt{3})\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_T = 24(3 + \sqrt{3})\ \text{cm}^2$

25 Calcular a altura H de um tetraedro regular cujas arestas têm medida a.

Resolução

Um **tetraedro regular** é uma pirâmide triangular regular cujas arestas são congruentes entre si; logo, as quatro faces do tetraedro regular são triângulos equiláteros. Indicando por n e r as medidas do apótema do tetraedro e do apótema da base, respectivamente, temos:



Pelo teorema de Pitágoras:

$n^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ (I)

$H^2 + r^2 = n^2$ (II)

De (I), temos: $n^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow n = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

O apótema r da base mede $\frac{1}{3}$ da altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ de um triângulo equilátero de lado a, ou seja:

$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

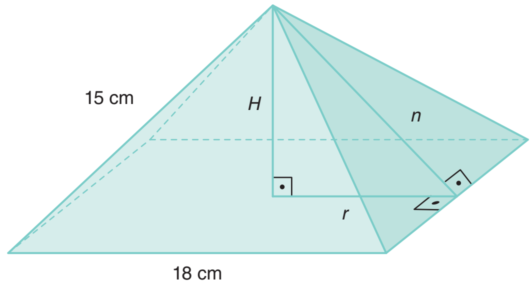
Substituindo $n = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ em (II), concluímos:

$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{24a^2}{36}$

$\therefore H = \frac{2a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

60 Em uma pirâmide quadrangular regular, cada aresta lateral mede 15 cm e cada aresta da base mede 18 cm.



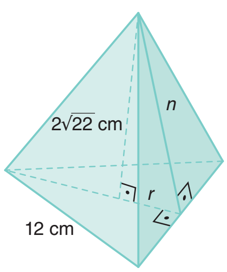
Calcule:

a) a medida n do apótema da pirâmide.
b) a medida r do apótema da base da pirâmide.
c) a altura H da pirâmide.
d) a área lateral A_ℓ da pirâmide.
e) a área B da base da pirâmide.
f) a área total A_T da pirâmide.

61 Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide hexagonal regular cuja altura mede 4 cm e cada aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm.

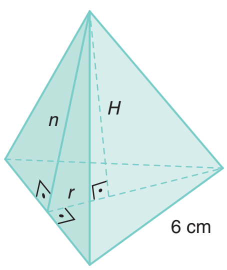
62 A altura de uma pirâmide triangular regular é $2\sqrt{22}$ cm e cada aresta da base mede 12 cm.
Calcule:

a) a medida r do apótema da base da pirâmide.
b) a medida n do apótema da pirâmide.
c) a área lateral A_ℓ da pirâmide.
d) a área B da base da pirâmide.
e) a área total A_T da pirâmide.



63 Cada aresta de um tetraedro regular mede 6 cm.
Calcule:

a) a medida n do apótema do tetraedro.
b) a medida r do apótema da base.
c) a altura H do tetraedro.
d) a área total A_T do tetraedro.



64 Em uma pirâmide hexagonal regular de altura $\sqrt{69}$ cm, cada aresta lateral mede 13 cm. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

65 Calcule a medida do apótema de uma pirâmide regular de altura 12 cm cujo apótema da base mede 9 cm.

66 Em uma pirâmide regular de altura $5\sqrt{3}$ cm, o apótema da base mede 15 cm. Calcule a medida do ângulo agudo que uma face lateral forma com a base.

67 As áreas totais de um cubo e de uma pirâmide quadrangular regular são iguais. Cada aresta do cubo mede $\sqrt{26}$ m e cada aresta da base da pirâmide mede 6 m. Calcule a altura da pirâmide.

Resolva os exercícios complementares 46 a 55 e 102 a 105.

Seção 11.6

Volume e semelhança de pirâmides

Objetivos

- **Calcular** o volume de uma pirâmide.
- **Identificar** pirâmides semelhantes.
- **Identificar** um tronco de pirâmide.
- **Calcular** a área lateral e a área total de um tronco de pirâmide.

Termo e conceito

- **tronco de pirâmide**

Volume de uma pirâmide

Propriedades

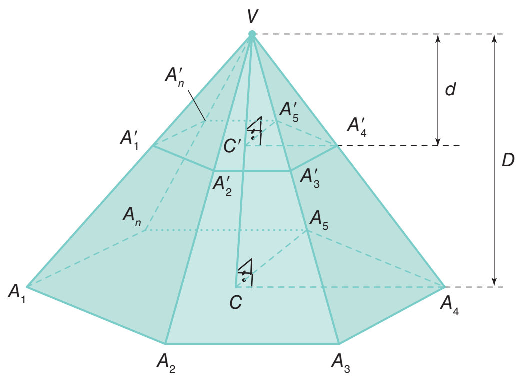
Para a dedução da fórmula do volume de uma pirâmide, devemos conhecer as propriedades apresentadas a seguir.

P1. Se uma pirâmide de altura D e área da base B é seccionada por um plano paralelo à base, a uma distância d do vértice, tal que a secção transversal tenha área b, então:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

Justificativa

Considere a pirâmide $VA_1A_2A_3...A_n$ e a secção transversal $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ abaixo.



Nessa pirâmide, temos:

$$\triangle VC'A'_4 \sim \triangle VCA_4 \Rightarrow \frac{VA'_4}{VA_4} = \frac{d}{D} \quad \text{(I)}$$

$$\triangle VA'_3A'_4 \sim \triangle VA_3A_4 \Rightarrow \frac{A'_3A'_4}{A_3A_4} = \frac{VA'_4}{VA_4} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), obtemos: $\frac{A'_3A'_4}{A_3A_4} = \frac{d}{D}$

Como a secção transversal é semelhante à base, temos que a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim, sendo b a área da secção e B a área da base, concluímos:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{A'_3A'_4}{A_3A_4}\right)^2 = \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

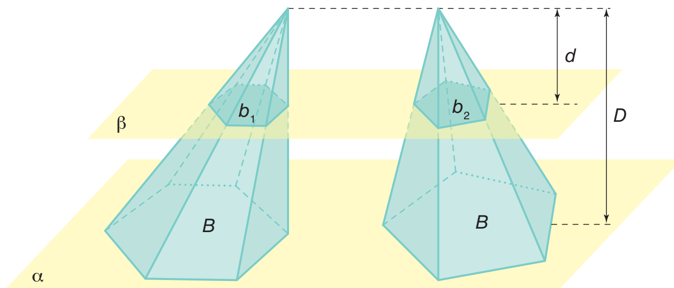
P2. Duas pirâmides de mesma altura e bases equivalentes têm volumes iguais.

Lembre-se de que figuras planas equivalentes são figuras de mesma área.

Justificativa

Consideremos duas pirâmides, de mesma altura D, de bases com a mesma área B e contidas em um mesmo plano α. Suponhamos ainda que essas pirâmides estejam contidas no mesmo semiespaço de origem α.

Todo plano paralelo a α que secciona uma das pirâmides também secciona a outra. Seja β um desses planos, que passa a uma distância d dos vértices e determina nessas pirâmides as secções transversais de áreas b_1 e b_2, conforme mostra a figura:



De acordo com a propriedade P1, temos:

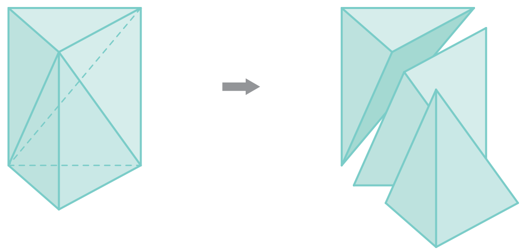
$$\frac{b_1}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \text{ e } \frac{b_2}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

Logo, $\frac{b_1}{B} = \frac{b_2}{B}$ e, portanto, $b_1 = b_2$.

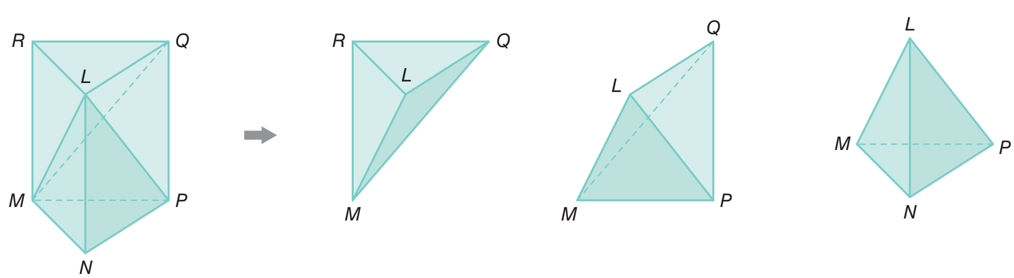
Assim, qualquer plano β, paralelo a α, que intercepta uma das pirâmides, também intercepta a outra, determinando secções de mesma área. Pelo princípio de Cavalieri, concluímos que essas pirâmides têm volumes iguais.

Volume de uma pirâmide triangular

Vamos demonstrar que o volume de uma pirâmide triangular é $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma que tem a mesma base e a mesma altura da pirâmide. Para isso, basta provar que um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares de mesmo volume, conforme mostra a figura a seguir.



Nomeando os vértices do prisma e, consequentemente, os correspondentes vértices das pirâmides obtidas pela decomposição, temos:



Sabemos, pela propriedade P2, que duas pirâmides de mesma altura e bases equivalentes têm volumes iguais. Então:

(1) As pirâmides *LMNP* e *MRLQ* têm volumes iguais, pois:

- $\triangle MNP \cong \triangle RLQ$ (são bases do prisma inicial).
- A altura do prisma é também altura de cada uma dessas pirâmides em relação às bases *MNP* e *RLQ*.

(2) As pirâmides *MRLQ* e *LQMP* têm volumes iguais, pois:

- $\overline{QM}$ é diagonal do paralelogramo *MRQP* e, portanto, $\triangle RQM \cong \triangle PMQ$.
- Suas alturas relativas às bases *RQM* e *PMQ* são iguais à distância do ponto *L* ao plano do paralelogramo *MRQP*.

Por (1) e (2), concluímos que as pirâmides *LMNP*, *MRLQ* e *LQMP* têm o mesmo volume *V*.

Demonstramos, desse modo, que o prisma triangular *MNPLQR* é composto por três pirâmides de volumes iguais. Sendo *H* a altura do prisma e *B* a área de sua base, concluímos que:

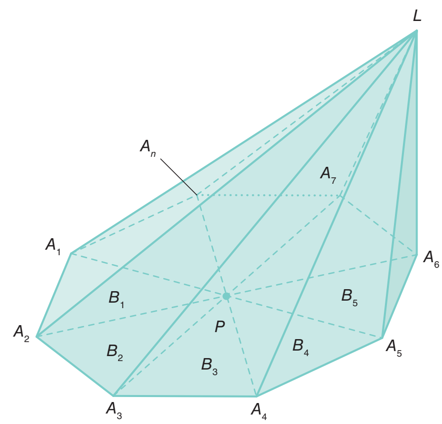
O **volume** *V* de uma pirâmide triangular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura.

$$V = \frac{1}{3} \cdot BH$$

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Volume de uma pirâmide triangular.*

Volume de uma pirâmide qualquer

Consideremos uma pirâmide $LA_1A_2A_3...A_n$ de altura *H* e área da base *B*, e seja *P* um ponto interior à base $A_1A_2A_3...A_n$. Essa pirâmide pode ser decomposta em *n* pirâmides triangulares, LA_1A_2P, LA_2A_3P, LA_3A_4P, ... e LA_nA_1P, cujas áreas da base são B_1, B_2, B_3, ... e B_n, respectivamente.



Note que todas essas pirâmides têm a mesma altura *H* e $B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n = B$. Sendo V_1, V_2, V_3, ... e V_n os volumes dessas pirâmides triangulares, temos:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot B_1H;\ V_2 = \frac{1}{3} \cdot B_2H;\ V_3 = \frac{1}{3} \cdot B_3H;\ ...\ ;\ V_n = \frac{1}{3} \cdot B_nH$$

Portanto:

$$V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = \frac{1}{3} \cdot B_1H + \frac{1}{3} \cdot B_2H + \frac{1}{3} \cdot B_3H + ... + \frac{1}{3} \cdot B_nH =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot H \cdot (B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n) = \frac{1}{3} \cdot HB$$

Como a soma $V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$ é igual ao volume *V* da pirâmide $LA_1A_2A_3...A_n$, concluímos que:

O **volume** de uma pirâmide qualquer é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura.

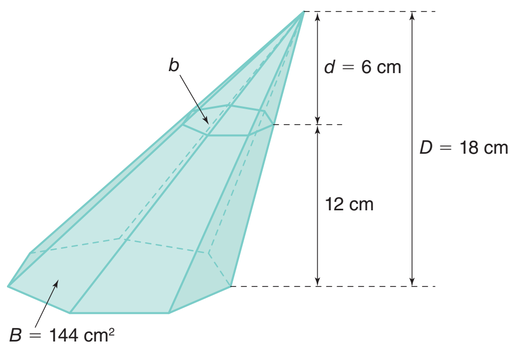
$$V = \frac{1}{3} \cdot BH$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

26 Em uma pirâmide heptagonal de 18 cm de altura, a base tem área de 144 cm^2. Calcular a área da secção transversal determinada nessa pirâmide pelo plano que dista 12 cm de sua base.

Resolução

Fazendo um esquema da situação, temos:



A propriedade P1 assegura que $\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$; logo: $\frac{b}{144} = \left(\frac{6}{18}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{144} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\therefore \frac{b}{144} = \frac{1}{9} \Rightarrow b = 16$

Assim, concluímos que a área da secção transversal é 16 cm^2.

27 Calcular o volume de uma pirâmide de altura 12 cm cuja base é um trapézio isósceles de lados 10 cm, 10 cm, 9 cm e 21 cm.

Resolução

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos a altura h do trapézio da base:

$h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 = 64$

$\therefore h = 8$ cm

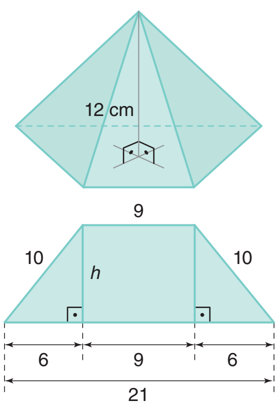
Assim, a área B da base da pirâmide é dada por:

$$B = \frac{(9 + 21) \cdot 8}{2} \text{ cm}^2 = 120 \text{ cm}^2$$

Sendo H a altura da pirâmide, seu volume V é dado por $V = \frac{1}{3} \cdot BH$.

Portanto:

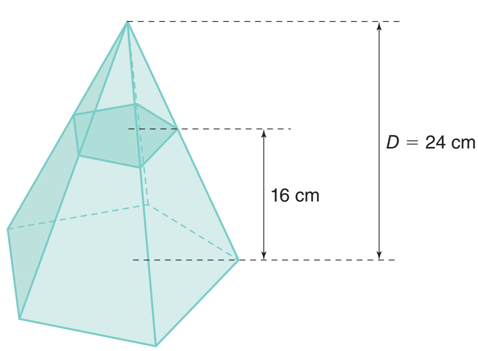
$$V = \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 12 \text{ cm}^3 = 480 \text{ cm}^3$$



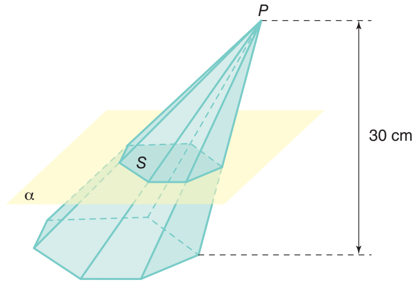
base da pirâmide

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

68 Uma pirâmide tem 24 cm de altura e base pentagonal de área 288 cm^2. Qual é a área b da secção transversal determinada pelo plano que dista 16 cm da base dessa pirâmide?



69 Uma pirâmide de vértice P tem 30 cm de altura e 250 cm^2 de área da base. Um plano α, paralelo à base da pirâmide, intercepta essa pirâmide determinando uma secção S de área 90 cm^2, conforme mostra a figura.
Calcule:
a) a distância entre o vértice P e o plano α.
b) o volume da pirâmide de vértice P e base S.



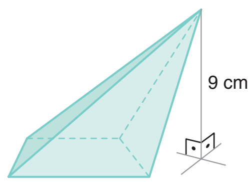
70 O volume de um prisma é 6 m^3. Qual é o volume da pirâmide cuja base coincide com uma base desse prisma e cujo vértice pertence à outra base desse prisma?

71 Uma pirâmide de altura 10 cm tem como base um retângulo de 6 cm de comprimento por 4 cm de largura. Calcule o volume dessa pirâmide.

72 Calcule o volume de uma pirâmide de altura 12 cm cuja base é um losango de diagonais 10 cm e 6 cm.

73 Em uma pirâmide de altura 18 dm, a base é um triângulo isósceles de lados $4\sqrt{5}$ dm, $4\sqrt{5}$ dm e 8 dm. Qual é o volume dessa pirâmide?

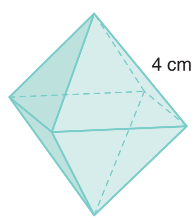
74 Calcule o volume de uma pirâmide de 9 cm de altura cuja base é um trapézio retângulo, cujos lados paralelos medem 6 cm e 8 cm e o lado oblíquo aos lados paralelos mede $3\sqrt{2}$ cm, conforme mostra a figura.



75 Obtenha o volume de uma pirâmide quadrangular regular cuja altura é 8 cm e cada aresta da base mede 3 cm.

76 O apótema e a altura de uma pirâmide quadrangular regular medem 10 cm e 8 cm, respectivamente. Calcule o volume dessa pirâmide.

77 Calcule o volume de um octaedro regular de aresta 4 cm.



78 Em uma pirâmide hexagonal regular de 9 cm de altura, cada aresta da base mede $4\sqrt{3}$ cm. Calcule o volume dessa pirâmide.

79 Cada aresta lateral de uma pirâmide hexagonal regular mede $2\sqrt{34}$ m e cada aresta da base mede 6 m. Calcule o volume dessa pirâmide.

80 A altura de uma pirâmide triangular regular é 12 cm e cada aresta da base mede 6 cm. Calcule o volume dessa pirâmide.

81 Determine o volume de uma pirâmide triangular regular em que a altura é 18 dm e o apótema da base mede $2\sqrt{3}$ dm.

82 Para calcular o volume de um *iceberg*, uma oceanógrafa observou que a parte emersa do bloco de gelo era aproximadamente uma pirâmide de base quadrada com 10 km de aresta da base e 1,5 km de altura. Calculando a densidade do gelo e da água do mar naquela região, a cientista estimou que 80% do *iceberg* estava submerso.
De acordo com esses pressupostos, o volume do *iceberg* era aproximadamente:
a) 250 km^3 **b)** 320 km^3 **c)** 300 km^3 **d)** 290 km^3 **e)** 540 km^3

Resolva os exercícios complementares 56 a 71 e 106 a 108.

Pirâmides semelhantes

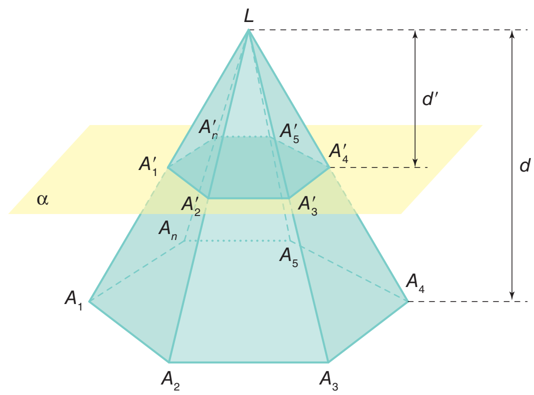
O conceito de semelhança entre figuras pode ser definido também para figuras sólidas, como paralelepípedos, prismas, pirâmides etc. Particularmente para as pirâmides, define-se:

Duas pirâmides $VA_1A_2...A_n$ e $V'A'_1A'_2...A'_n$ são **semelhantes** se, e somente se:

- as bases são polígonos semelhantes $(A_1A_2...A_n \sim A'_1A'_2...A'_n)$;
- as faces laterais VA_1A_2, VA_2A_3, ..., $VA_{n-1}A_n$ e VA_nA_1 são, respectivamente, semelhantes às faces laterais $V'A'_1A'_2$, $V'A'_2A'_3$, ..., $V'A'_{n-1}A'_n$ e $V'A'_nA'_1$.

Exemplo

Se um plano α intercepta uma pirâmide de vértice L e base $A_1A_2A_3...A_n$ determinando uma secção transversal $A'_1A'_2A'_3...A'_n$, então as pirâmides $LA_1A_2A_3...A_n$ e $LA'_1A'_2A'_3...A'_n$ são semelhantes.



A razão de semelhança k, da maior para a menor pirâmide, pode ser obtida por:

$$\frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3} = ... = \frac{A_{n-1}A_n}{A'_{n-1}A'_n} = \frac{A_nA_1}{A'_nA'_1} = \frac{d}{d'} = k$$

ou ainda:

$$\frac{LA_1}{LA'_1} = \frac{LA_2}{LA'_2} = ... = \frac{LA_n}{LA'_n} = \frac{d}{d'} = k$$

Propriedade

A razão entre os volumes de duas pirâmides semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Justificativa

Aproveitando a figura do exemplo anterior, sejam, respectivamente, V e V' os volumes das pirâmides $LA_1A_2A_3...A_n$ e $LA'_1A'_2A'_3...A'_n$, e B e B' as áreas das bases dessas pirâmides.

A razão de semelhança entre as pirâmides é dada por: $\frac{d}{d'} = k$ (I)

A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, assim: $\frac{B}{B'} = k^2$ (II)

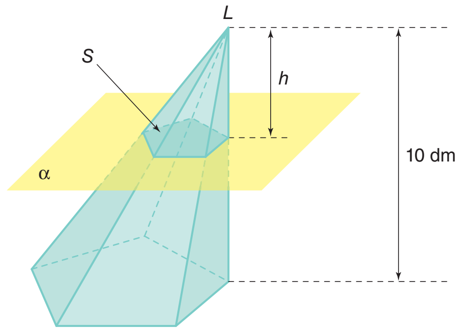
A razão entre os volumes das pirâmides é: $\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} \cdot Bd}{\frac{1}{3} \cdot B'd'} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{d}{d'}$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III), concluímos:

$$\frac{V}{V'} = k^2 \cdot k = k^3$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

28 A figura ao lado representa uma pirâmide de vértice L, com 48 dm^3 de volume e 10 dm de altura. Um plano α, paralelo à base, determina nessa pirâmide uma secção S. Sabendo que o volume da pirâmide de vértice L e base S é 6 dm^3, calcular a altura h dessa pirâmide.



Resolução

A pirâmide original e a pirâmide de vértice L e base S são semelhantes; logo, a razão entre seus volumes é igual ao cubo da razão de semelhança, isto é:

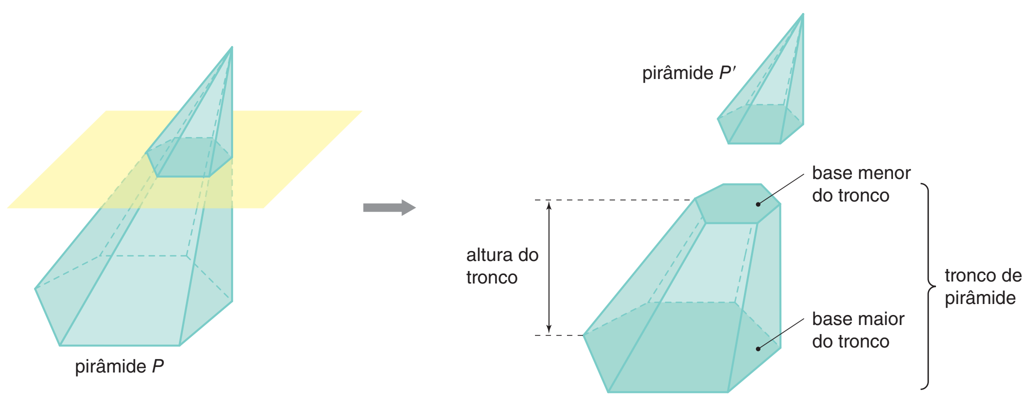
$$\frac{48}{6} = \left(\frac{10}{h}\right)^3 \Rightarrow 8 = \left(\frac{10}{h}\right)^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{8} = \frac{10}{h} \Rightarrow 2 = \frac{10}{h}$$

$$\therefore h = 5 \text{ dm}$$

Tronco de pirâmide de bases paralelas

Toda pirâmide P é separada em dois poliedros por qualquer uma de suas secções transversais, sendo um desses poliedros uma pirâmide P' e o outro um **tronco de pirâmide de bases paralelas**.



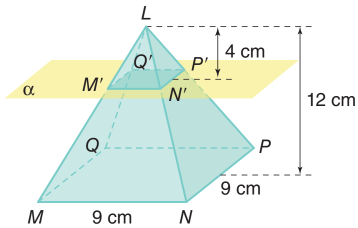
Nesse tronco de pirâmide temos:

- a base da pirâmide original P e a secção transversal divisora são as **bases paralelas** do tronco;
- com exceção das bases, as demais faces são as **faces laterais** do tronco;
- os lados das bases são as **arestas das bases** do tronco;
- com exceção das arestas das bases, as demais arestas são as **arestas laterais** do tronco;
- a distância entre os planos das bases é a **altura** do tronco;
- a **área lateral** do tronco é a soma das áreas de todas as suas faces laterais, essa área lateral é a diferença entre as áreas laterais das pirâmides P e P', nessa ordem;
- a **área total** do tronco é a soma de sua área lateral com as áreas de suas bases;
- o **volume** do tronco é a diferença entre os volumes das pirâmides P e P', nessa ordem:

$$\boxed{V_{tronco} = V_p - V_{p'}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

29 Em uma pirâmide quadrangular regular de altura 12 cm, cada aresta da base mede 9 cm. Um plano α, paralelo à base dessa pirâmide e distante 4 cm de seu vértice, separa-a em dois sólidos, conforme indica a figura. Calcular o volume do tronco de pirâmide assim determinado.



Resolução

As pirâmides $LMNPQ$ e $LM'N'P'Q'$ são semelhantes. Indicando por x a medida do lado do quadrado $M'N'P'Q'$, temos:

$$\frac{12}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = 3$$

Ou seja, a base da pirâmide $LM'N'P'Q'$ é um quadrado de lado 3 cm.

Assim, o volume V do tronco, que é a diferença entre os volumes das pirâmides $LMNPQ$ e $LM'N'P'Q'$, é dado por:

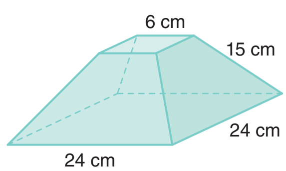
$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 4\right) \text{cm}^3 = 312 \text{ cm}^3$$

30 Um plano secciona uma pirâmide quadrangular regular, paralelamente à sua base, separando-a em dois sólidos, dos quais um é o tronco de bases paralelas representado abaixo, cujas arestas laterais medem 15 cm cada uma e as arestas das bases medem 6 cm e 24 cm.

Calcular, desse tronco:

a) a altura h.

b) o volume V.



Resolução

a) Imagine que esse tronco é seccionado por um plano que passa pelas diagonais $\overline{MP}$ e $\overline{M'P'}$, conforme a figura 1. A intersecção desse plano com o tronco é o trapézio isósceles $MPM'P'$, cuja altura h também é a altura do tronco, conforme a figura 2.

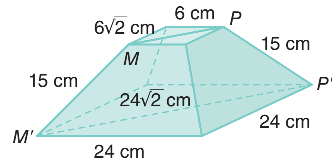


Figura 1

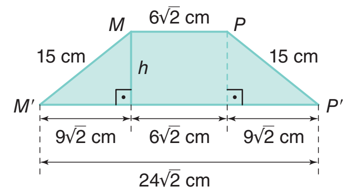


Figura 2

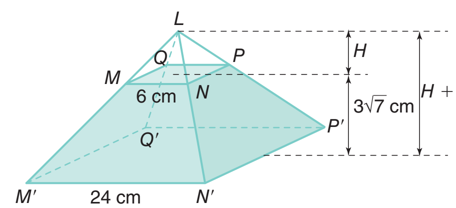
Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$h^2 + (9\sqrt{2})^2 = 15^2 \Rightarrow h^2 = 63$

$\therefore h = 3\sqrt{7}$

Logo, a altura do tronco é $3\sqrt{7}$ cm.

b) Para calcular o volume do tronco, vamos prolongar suas arestas laterais, obtendo duas pirâmides semelhantes $LMNPQ$ e $LM'N'P'Q'$.



A altura H da pirâmide $LMNPQ$ é dada por:

$$\frac{H + 3\sqrt{7}}{H} = \frac{24}{6} \Rightarrow \frac{H + 3\sqrt{7}}{H} = 4$$

$\therefore 4H = H + 3\sqrt{7} \Rightarrow H = \sqrt{7}$

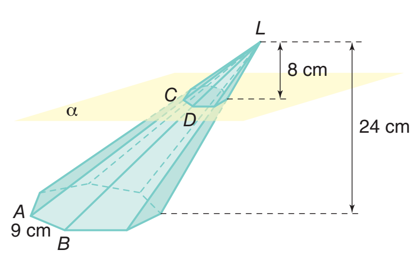
Como o volume V do tronco é a diferença entre os volumes das pirâmides $LM'N'P'Q'$ e $LMNPQ$, concluímos:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 4\sqrt{7} - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot \sqrt{7}\right) \text{cm}^3$$

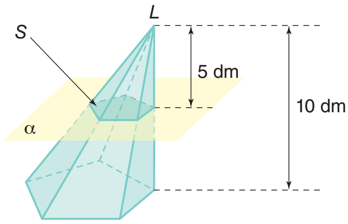
$\therefore V = 756\sqrt{7}$ cm^3

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

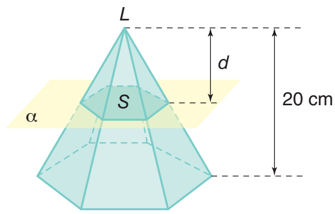
83 Um segmento $\overline{AB}$ de medida 9 cm é aresta da base de uma pirâmide de vértice L e altura 24 cm. Um plano α intercepta essa pirâmide, paralelamente à base, à distância de 8 cm do vértice L. Calcule a medida do segmento $\overline{CD}$ obtido pela intersecção de α com a face LAB dessa pirâmide.



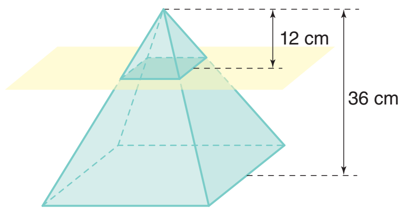
84 Uma pirâmide de vértice L, volume 48 dm^3 e altura 10 dm é dividida em dois sólidos por uma secção transversal S que dista 5 dm do vértice da pirâmide. Calcule o volume da pirâmide de vértice L e base S.



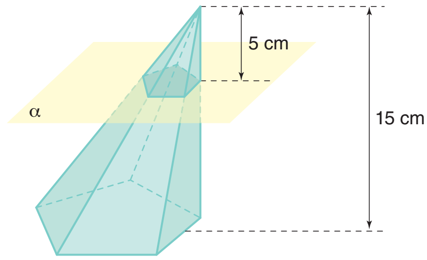
85 Uma pirâmide tem vértice L, volume 125 cm^3 e altura 20 cm. Um plano α determina nessa pirâmide uma secção transversal S. Sabendo que a pirâmide de vértice L e base S tem volume 25 cm^3, calcule a distância entre L e α.



86 Em uma pirâmide quadrangular regular de altura 36 cm, cada aresta da base mede 24 cm. Um plano, paralelo à base dessa pirâmide e distante 12 cm de seu vértice, separa-a em dois sólidos, conforme mostra a figura. Calcule o volume do tronco de pirâmide assim determinado.



87 A figura abaixo representa uma pirâmide de volume 81 cm^3 e altura 15 cm dividida em dois poliedros por um plano α paralelo à base e distante 5 cm do vértice. Calcule o volume do tronco de pirâmide assim determinado.



88 Uma caixa-d'água tem a forma de um tronco de pirâmide quadrangular regular de bases paralelas. Internamente, a base maior tem 6 m de lado, a menor tem 2 m de lado e a altura é de 3 m.
A capacidade dessa caixa-d'água é:

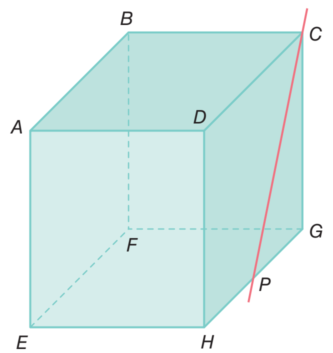
a) 48.000 L
b) 62.000 L
c) 36.000 L
d) 64.000 L
e) 52.000 L

Resolva os exercícios complementares 72 a 78.

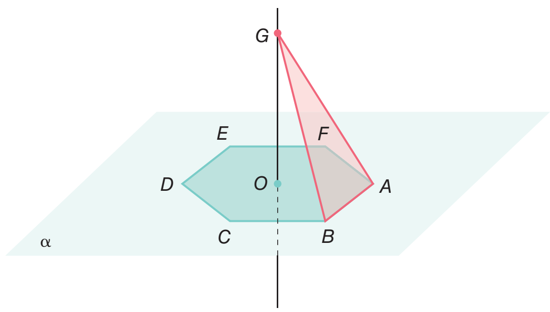
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 No paralelepípedo reto-retângulo abaixo, P é o ponto médio de $\overline{HG}$, um ângulo formado pelas retas reversas $\overleftrightarrow{PC}$, e $\overleftrightarrow{EF}$ mede 60°, $EF = 16$ e $EG = 24$. Calcule a medida de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{EC}$ forma com o plano pl(EFG).



2 Um hexágono regular $ABCDEF$ de lado 10 cm e centro O está contido em um plano α. Um ponto G é tal que a reta $\overleftrightarrow{GO}$ é perpendicular a α e $GO = 20$ cm.



a) Calcule o seno de um ângulo agudo que o plano pl(GAB) forma com o plano α.

b) Calcule o seno de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{GA}$ forma com o plano α.

c) O ângulo $A\hat{G}B$ é reto, agudo ou obtuso?

3 (Fuvest-SP) O ângulo θ formado por dois planos α e β é tal que tg $\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$. O ponto P pertence a α e a distância de P a β vale 1. Então, a distância de P à reta intersecção de α e β é igual a:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5}$

c) $\sqrt{6}$

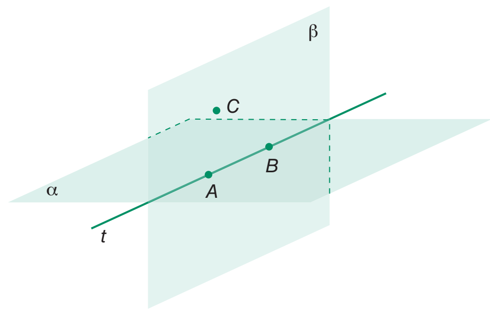
d) $\sqrt{7}$

e) $\sqrt{8}$

4 A distância entre dois planos paralelos distintos, α e β, é 6 cm. Dois pontos A e B são tais que $A \in \alpha$, $B \in \beta$ e $AB = 12$ cm. Calcule a medida de um ângulo obtuso que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma com o plano α.

5 Uma reta r intercepta um plano α em um ponto P. Um ponto A, com $A \in r$, dista 8 cm do plano α e 10 cm do ponto P. Calcule o cosseno de um ângulo agudo formado por r e α.

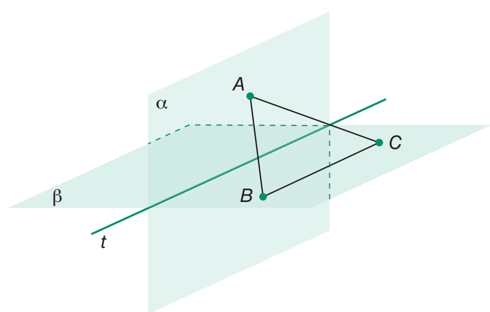
6 Sejam α e β dois planos perpendiculares cuja reta comum é t; e A, B e C três pontos distintos tais que $\{A, B\} \subset t$, $C \in \beta$ e $AB = AC = BC = 6$ cm.



a) Calcule a distância do ponto C ao plano α.

b) Sendo D um ponto do plano α, com $DA = DB = 5$ cm, calcule a distância entre a reta $\overleftrightarrow{CA}$ e a reta r que passa por D e é paralela a t.

7 Dois planos α e β são perpendiculares entre si e a reta comum a ambos é t. Três pontos A, B e C são tais que $A \in \alpha$, $\{B, C\} \subset \beta$, $\overline{AB}$ mede 13 cm, $\overline{AC}$ mede 13 cm, $\overline{BC}$ mede 10 cm e a distância entre o ponto A e o plano β é 6 cm.



a) Calcule a medida de um ângulo agudo formado pelos planos pl(ABC) e β.

b) Sendo M o ponto médio de $\overline{BC}$, calcule a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AM}$ e t.

8 Um icosaedro convexo possui todas as faces triangulares. Quantas arestas possui esse icosaedro?

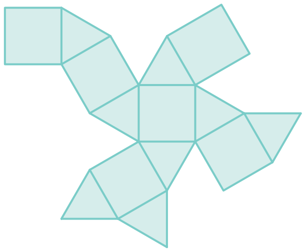
9 Determine o número de arestas de um poliedro convexo constituído por 10 faces quadrangulares e 2 pentagonais.

10 Um poliedro convexo é constituído por 20 ângulos triédricos. Qual é o número de arestas desse poliedro?

11 Dado que um poliedro convexo é constituído por 5 ângulos triédricos, 5 ângulos tetraédricos e um ângulo pentaédrico, calcule o número de arestas desse poliedro.

12 O número de arestas de um octaedro convexo é o dobro do número de vértices. Quantas arestas possui esse poliedro?

13 (UFJF-MG) A figura a seguir representa a planificação de um poliedro convexo.



O número de vértices deste poliedro é:
a) 12 **b)** 14 **c)** 16 **d)** 20 **e)** 22

14 (UFC-CE) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, então, o número de faces triangulares é:
a) 12 **b)** 11 **c)** 10 **d)** 9 **e)** 8

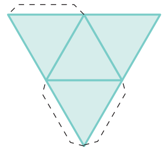
15 Existe poliedro convexo que possua o número de vértices igual ao número de arestas? Por quê?

16 Existe poliedro convexo constituído por V vértices, A arestas e F faces, de modo que $V + A + F = 17$? Por quê?

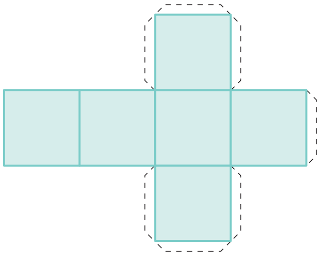
17 Demonstre que: "Se um poliedro convexo possui o número de vértices igual ao número de faces, então o seu número de arestas é par".

18 (Enem) Existe uma incrível e fascinante quantidade de relações geométricas entre formas poliédricas, responsáveis por inúmeras estruturas da natureza. Lembrando os poliedros de Platão, vejam que interessante a correspondência entre as formas de alguns desses poliedros: o dodecaedro possui 12 faces e 20 vértices, enquanto o icosaedro possui 20 faces e 12 vértices. Além disso, ambos possuem 30 arestas e, por isso, dizemos que o dodecaedro é dual (ou conjugado) do icosaedro e, analogamente, o icosaedro é dual do dodecaedro. Com base nessas observações, podemos afirmar que, dentre os poliedros abaixo, o único que é dual ao cubo é:
a) octaedro **b)** tetraedro **c)** hexaedro **d)** dodecaedro **e)** icosaedro

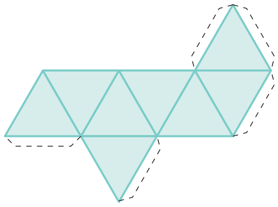
19 Desenhe em cartolina cada uma das figuras seguintes de modo que cada polígono tenha 8 cm de aresta.



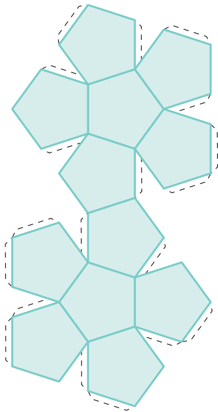
planificação de um tetraedro regular



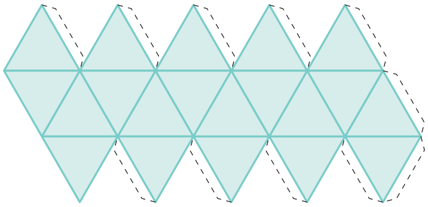
planificação de um hexaedro regular



planificação de um octaedro regular

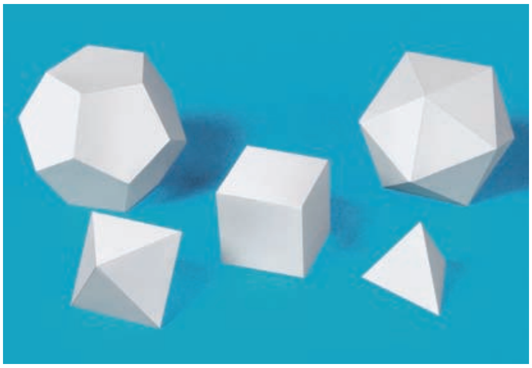


planificação de um dodecaedro regular

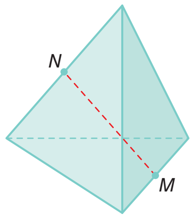


planificação de um icosaedro regular

Recorte-as e construa cada um dos poliedros regulares, colando as faces adjacentes sobre a região tracejada.



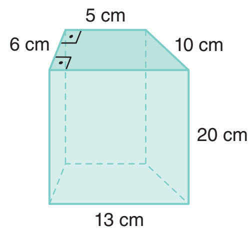
20 Em um tetraedro regular com $6\sqrt{3}$ cm de aresta, M e N são os pontos médios de duas arestas que não têm ponto comum. Calcule a medida do segmento $\overline{MN}$.



21 Um prisma reto tem 20 cm de altura e cada uma das bases é um trapézio retângulo com lados de 5 cm, 10 cm, 13 cm e 6 cm, conforme mostra a figura. Calcule:

a) sua área lateral.

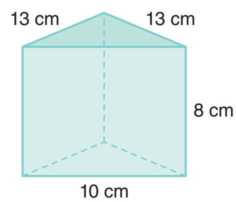
b) sua área total.



22 Em um prisma reto com 8 cm de altura, cada uma das bases é um triângulo isósceles de lados 13 cm, 13 cm e 10 cm.
Calcule desse prisma:

a) sua área lateral.

b) sua área total.

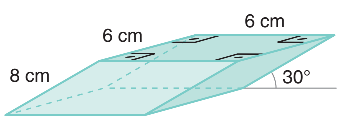


23 As bases de um prisma oblíquo são quadrados com 6 cm de lado e duas faces laterais são retangulares. Sabendo que cada aresta lateral mede 8 cm e forma ângulos de 30° com os planos das bases, calcule:

a) sua altura.

b) sua área lateral.

c) sua área total.

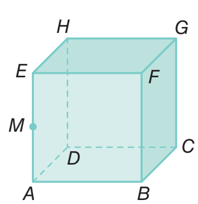


24 Todas as arestas de um prisma triangular regular têm a mesma medida. Calcule a área total desse prisma, sabendo que a área de uma base é $9\sqrt{3}$ m^2.

25 Em um prisma hexagonal regular todas as arestas têm a mesma medida. Calcule a razão entre a área total e a área lateral desse prisma, nessa ordem.

26 O comprimento, a largura e a altura de um paralelepípedo reto-retângulo são 12 cm, 4 cm e 3 cm, respectivamente. Calcule a distância máxima entre dois vértices desse paralelepípedo.

27 (Fuvest-SP) O cubo *ABCDEFGH*, indicado na figura, tem arestas de comprimento *a*.



Sabendo-se que *M* é o ponto médio da aresta $\overline{AE}$, conclui-se que a distância de *M* ao centro do quadrado *ABCD* é:

a) $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$

b) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

c) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

d) $a\sqrt{3}$

e) $2a\sqrt{3}$

28 A medida da diagonal de um cubo é $\sqrt{75}$ cm. Calcule:

a) sua área total.

b) sua área lateral.

29 (ITA-SP) São dados dois cubos, I e II, de áreas totais S_1 e S_2 e de diagonais d_1 e d_2, respectivamente. Sabendo-se que $S_1 - S_2 = 54$ m^2 e que $d_2 = 3$ m, então o valor da razão $\dfrac{d_1}{d_2}$ é:

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{5}{2}$ c) 2 d) $\dfrac{7}{3}$ e) 3

30 (FGV) A soma das medidas das 12 arestas de um paralelepípedo reto-retângulo é igual a 140 cm. Se a distância máxima entre dois vértices do paralelepípedo é 21 cm, sua área total, em cm^2, é:

a) 776 b) 784 c) 798 d) 800 e) 812

31 As dimensões – comprimento, largura e altura – de um paralelepípedo reto-retângulo são inversamente proporcionais aos números $\dfrac{1}{2}$, 3 e $\dfrac{2}{3}$. Sabendo que a área total desse paralelepípedo é 300 cm^2, calcule o seu volume.

32 (UFMS) Na figura, sabe-se que as arestas que se encontram são perpendiculares. Assim, a expressão que dá o volume *V* do sólido de base sombreada é:

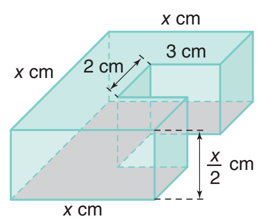
a) $V = \dfrac{x^3 - 6x}{2}$ cm^3

b) $V = \dfrac{x^3}{3}$ cm^3

c) $V = \left(\dfrac{x^3}{2} - 6\right)$ cm^3

d) $V = (x^3 - 6x)$ cm^3

e) $V = (x^3 - 3x)$ cm^3



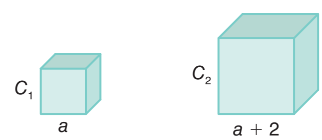
33 O volume de um cubo é 1.000 cm^3. Calcule desse cubo:

a) a medida da diagonal.

b) a área total.

c) a área lateral.

34 (Vunesp) Aumentando em 2 cm a aresta *a* de um cubo C_1, obtemos um cubo C_2, cuja área da superfície total aumenta em 216 cm^2 em relação à do cubo C_1.



Determine:

a) a medida da aresta do cubo C_1.

b) o volume do cubo C_2.

35 (UFPB) A figura ao lado mostra a planificação de um cubo. Sabendo-se que $AB = \sqrt{68}$ cm, pode-se concluir que o volume do cubo em cm^3 é:

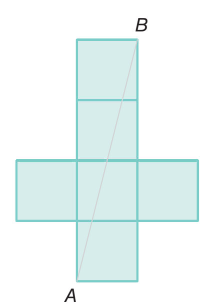
a) 8

b) 27

c) 36

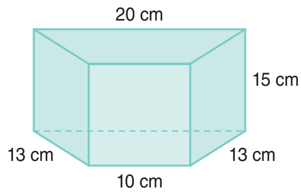
d) 48

e) 64

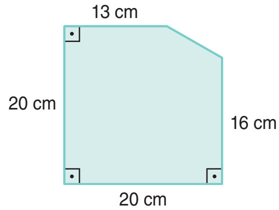


36 Seccionando-se um cubo por um plano paralelo às bases, obtêm-se dois paralelepípedos tal que o volume de um deles é o dobro do volume do outro. Calcule a razão entre as áreas totais dos paralelepípedos menor e maior, nessa ordem.

37 Cada aresta lateral de um prisma reto mede 15 cm e cada base é um trapézio isósceles com lados de 13 cm, 13 cm, 10 cm e 20 cm, conforme mostra a figura. Calcule o volume desse prisma.



38 O pentágono representado ao lado é uma das bases de um prisma de 10 cm de altura. Calcule o volume desse prisma.



39 Em um prisma hexagonal regular de altura $\sqrt{3}$ m, a área lateral é igual à área de uma das bases. Calcule o volume desse prisma.

40 Todas as arestas de um prisma triangular regular têm a mesma medida. Calcule a área lateral desse prisma sabendo que o seu volume é $54\sqrt{3}$ cm^3.

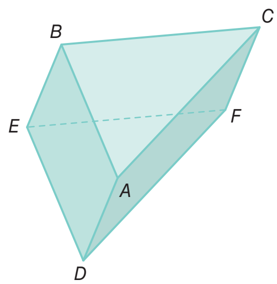
41 Todas as arestas de um prisma triangular regular têm a mesma medida. Calcule o volume desse prisma, sabendo que a sua área total é $8(6 + \sqrt{3})$ m^2.

42 (Uerj) Dois prismas regulares, P_1 e P_2, o primeiro de base triangular e o outro de base hexagonal, têm a mesma área da base e a mesma área lateral.
A razão entre o volume de P_1 e o de P_2, nessa ordem, equivale a:

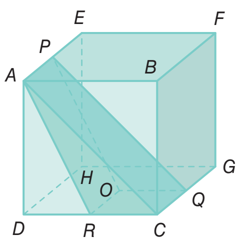
a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **b)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** 1

43 (PUC-SP) Na figura tem-se o prisma reto *ABCDEF*, no qual $DE = 6$ cm, $EF = 8$ cm e $\overline{DE} \perp \overline{EF}$.
Se o volume desse prisma é 120 cm^3, a sua área total, em centímetro quadrado, é:

a) 144
b) 156
c) 160
d) 168
e) 172



44 (UFMG) Nessa figura, estão representados o cubo *ABCDEFGH* e o prisma *ACRPQO*:

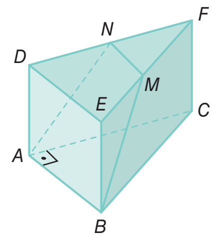


Sabe-se que:
- *P*, *Q* e *R* são, respectivamente, os pontos médios das arestas $\overline{AE}$, $\overline{CG}$ e $\overline{CD}$;
- o ponto *O* é o centro da face *CDHG*; e
- o volume do prisma *ACRPQO* é 24 cm^3.

Então, é correto afirmar que o comprimento de cada aresta desse cubo é:

a) $4\sqrt[3]{2}$ cm **c)** $4\sqrt[3]{3}$ cm
b) $2\sqrt[3]{3}$ cm **d)** $2\sqrt[3]{2}$ cm

45 (UFMG) Nessa figura, está representado o prisma reto *ABCDEF*, cuja base é um triângulo retângulo, em que $B\hat{A}C$ é o ângulo reto:



Sabe-se que:
- as arestas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ medem, respectivamente, 4 cm, 8 cm e 3 cm; e
- *M* e *N* são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{DF}$.

a) Calcule a área do quadrilátero *ABMN*.
b) Calcule o volume do sólido *ABEDMN*.

46 Calcule a altura de uma pirâmide quadrangular regular em que cada aresta lateral mede $6\sqrt{3}$ dm e cada aresta da base mede 12 dm.

47 Em uma pirâmide quadrangular regular de altura $2\sqrt{7}$ cm a área da base é 144 cm^2. Calcule a área total da pirâmide.

48 Em uma pirâmide triangular regular com 3 m de altura, cada aresta lateral mede o dobro da medida de cada aresta da base. Calcule a medida de cada aresta da base dessa pirâmide.

49 (UFC-CE) Um tetraedro regular tem arestas medindo $\sqrt{6}$ cm. Então a medida de cada uma de suas alturas é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ cm **c)** $\frac{3}{2}$ cm **e)** $\frac{5}{2}$ cm
b) 1 cm **d)** 2 cm

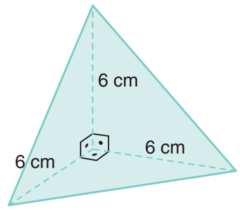
50 Um tetraedro regular tem altura $4\sqrt{6}$ cm. Calcule a área total desse tetraedro.

51 O apótema de uma pirâmide regular e sua altura medem, respectivamente, 13 cm e 5 cm. Calcule a medida do apótema da base dessa pirâmide.

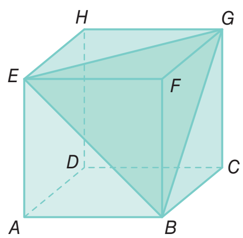
52 Cada aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular tem a mesma medida da altura. Calcule a razão entre a área lateral e a área da base dessa pirâmide, nessa ordem.

53 Em uma pirâmide hexagonal regular, cada aresta lateral tem o dobro da medida de cada aresta da base. Calcule a razão entre a altura e a medida do apótema dessa pirâmide, nessa ordem.

54 Chama-se **tetraedro trirretângulo** toda pirâmide triangular que possui um ângulo triédrico trirretângulo. Calcule a área total de um tetraedro trirretângulo cujas arestas perpendiculares entre si medem 6 cm.



55 A figura ao lado representa um cubo de aresta $6\sqrt{2}$ cm. Retirando-se desse cubo a pirâmide *FBGE*, qual é a área total do poliedro remanescente?



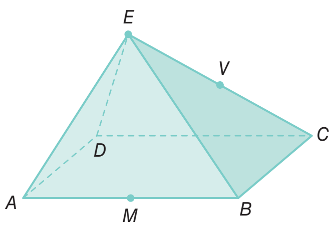
56 Em uma pirâmide de altura 24 cm, a área da base é o quádruplo da área de uma secção transversal. Calcule a distância do vértice da pirâmide ao plano que contém essa secção.

57 A área da base de uma pirâmide de vértice *P* é 80 cm^2 e um plano β determina nessa pirâmide uma secção transversal S. Sabendo que a distância entre *P* e β é o triplo da distância entre β e o plano da base da pirâmide, determine a área da secção S.

58 Em uma pirâmide de altura 30 cm, a base é um trapézio isósceles de lados $5\sqrt{5}$ cm, $5\sqrt{5}$ cm, 20 cm e 40 cm. Calcule o volume dessa pirâmide.

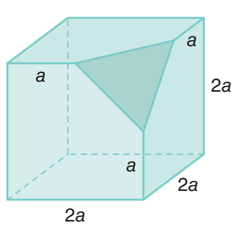
59 (Fuvest-SP) A pirâmide de base retangular *ABCD* e vértice *E*, representada na figura, tem volume 4. Se *M* é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$ e *V* é o ponto médio da aresta $\overline{EC}$, então o volume da pirâmide de base *AMCD* e vértice *V* é:

a) 1
b) 1,5
c) 2
d) 2,5
e) 3



60 (PUC-RS) Um cubo de aresta 2*a* é seccionado por um plano e a parte menor é retirada, restando a parte representada pela figura abaixo. O volume do sólido que foi retirado do cubo é:

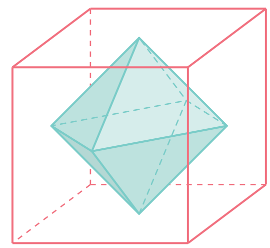
a) $\dfrac{a^3}{6}$
b) $a^3 - 3$
c) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$
d) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$
e) $\dfrac{8a^3}{3}$



61 Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular em que cada aresta lateral mede $4\sqrt{6}$ dm e cada aresta da base mede 8 dm.

62 O volume de uma pirâmide quadrangular regular é 72 cm^3, e a altura dessa pirâmide tem a mesma medida de cada aresta da base. Calcule dessa pirâmide:
a) a medida de cada aresta lateral.
b) a área total.

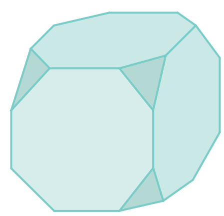
63 (UFRGS) Um octaedro tem seus vértices localizados nos centros das faces de um cubo de aresta 2.



O volume do octaedro é:

a) $\dfrac{2}{3}$ **b)** $\dfrac{4}{3}$ **c)** 2 **d)** $\dfrac{8}{3}$ **e)** $\dfrac{10}{3}$

64 (Unifesp) Um poliedro é construído a partir de um cubo de aresta $a > 0$, cortando-se em cada um de seus cantos uma pirâmide regular de base triangular equilateral (os três lados da base da pirâmide são iguais). Denote por x, $0 < x \leqslant \dfrac{a}{2}$, a aresta lateral das pirâmides cortadas.



face lateral das pirâmides cortadas

a) Dê o número de faces do poliedro construído.

b) Obtenha o valor de x, $0 < x \leqslant \dfrac{a}{2}$, para o qual o volume do poliedro construído fique igual a cinco sextos do volume do cubo original. A altura de cada pirâmide cortada, relativa à base equilateral, é $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

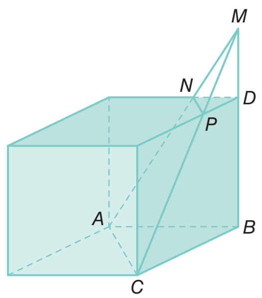
65 Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular de altura 6 cm cujo apótema da base mede $4\sqrt{3}$ cm.

66 O apótema e a altura de uma pirâmide hexagonal regular medem $2\sqrt{43}$ cm e 8 cm, respectivamente. Calcule o volume dessa pirâmide.

67 A área lateral de uma pirâmide hexagonal regular e a medida de cada aresta da base são 432 cm^2 e 12 cm, respectivamente. Calcule o volume dessa pirâmide.

68 O apótema da base de uma pirâmide triangular regular mede metade da medida do apótema da pirâmide. Calcule o volume dessa pirâmide, sabendo que sua altura é 6 cm.

69 (UFMG) Observe esta figura:



Nessa figura, estão representados um cubo, cujas arestas medem, cada uma, 3 cm, e a pirâmide $MABC$, que possui três vértices em comum com o cubo. O ponto M situa-se sobre o prolongamento da aresta $\overline{BD}$ do cubo. Os segmentos $\overline{MA}$ e $\overline{MC}$ interceptam arestas desse cubo, respectivamente, nos pontos N e P e o segmento $\overline{ND}$ mede 1 cm.
Considerando-se essas informações, é correto afirmar que o volume da pirâmide $MNPD$ é, em cm^3:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{8}$

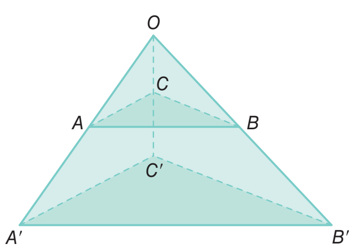
70 Calcule o volume de um tetraedro regular de aresta 12 cm.

71 O apótema de um tetraedro regular mede $2\sqrt{3}$ cm. Calcule o volume desse tetraedro.

72 Em uma pirâmide regular de altura 18 cm, cada aresta da base mede 6 cm. Um plano, distante 12 cm do vértice da pirâmide, determina nela uma secção transversal de lado:

a) 2 cm
b) 2,5 cm
c) 4 cm
d) 4,5 cm
e) 5 cm

73 (UFPB) Na pirâmide $OA'B'C'$ abaixo, o plano que contém o triângulo ABC é paralelo à base $A'B'C'$.



Se o volume da pirâmide $OA'B'C'$ é igual a 9 vezes o volume da pirâmide $OABC$, calcule:

a) a razão $\frac{A'B'}{AB}$.

b) a razão entre a área da face $OA'B'$ e a área da face OAB, nesta ordem.

74 Um plano α, paralelo à base de uma pirâmide de 10 cm de altura, separa-a em dois sólidos de mesmo volume. Calcule a distância entre o vértice da pirâmide e o plano α.

75 (UEL-PR) Considere uma pirâmide regular, de altura 25 m e base quadrada de lado 10 m. Seccionando essa pirâmide por um plano paralelo à base, à distância de 5 m desta, obtém-se um tronco cujo volume, em m^3, é:

a) $\frac{200}{3}$ b) 500 c) $\frac{1.220}{3}$ d) $\frac{1.280}{3}$ e) 1.220

76 Uma pirâmide de altura 30 dm e volume 1.080 dm^3 é separada em dois poliedros por um plano α paralelo à sua base e distante 20 dm dessa base. Calcule o volume do tronco de pirâmide assim determinado.

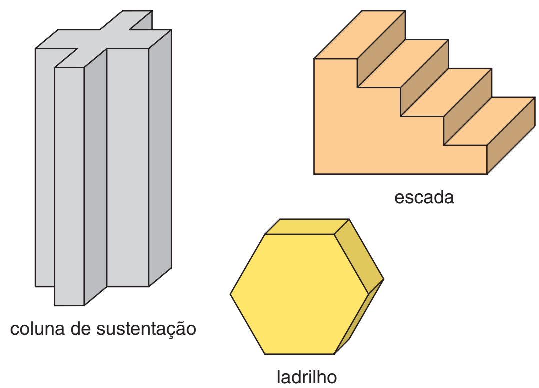
77 Um tronco de uma pirâmide regular tem bases paralelas e quadradas. Cada aresta da base maior mede 20 cm, cada aresta da base menor mede 10 cm e cada aresta lateral mede 13 cm. Calcule desse tronco:

a) a área lateral.
b) a área total.
c) a altura.
d) o volume.

78 Um tronco de uma pirâmide regular tem bases paralelas e quadradas de lados $3\sqrt{2}$ dm e $6\sqrt{2}$ dm. Calcule o volume desse tronco, sabendo que cada uma de suas arestas laterais mede 5 dm.

Exercícios contextualizados

79 As figuras a seguir representam alguns objetos comuns em edificações. Qual desses objetos tem a forma de um poliedro convexo?



80 Uma bola de futebol é formada por 20 faces hexagonais e 12 pentagonais, todas com lados congruentes entre si. Para costurar essas faces lado a lado, formando a superfície de um poliedro convexo, gastam-se 15 cm de linha em cada aresta do poliedro. Quantos metros de linha são necessários para costurar inteiramente cada bola?

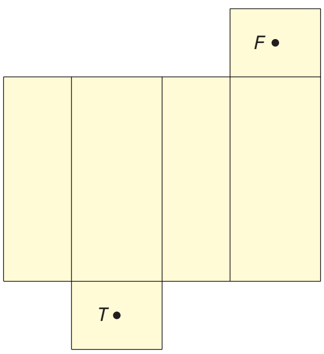
81 Um lapidador planeja dar a forma de um poliedro convexo a uma pedra preciosa, de modo que o poliedro tenha 20 arestas e todas as faces tenham o mesmo número de arestas. Para otimizar a reflexão interna da luz e sua posterior saída pela face plana superior, o profissional concluiu que a pedra, depois de lapidada na forma planejada, deve ter o máximo possível de faces. Quantos vértices terá a pedra lapidada?

82 (Unir-RO) Para construir um prisma hexagonal regular de altura 5 cm e aresta da base 4 cm, um menino pretende recortar as faces laterais e as bases em uma folha de cartolina com 30 cm de comprimento por 20 cm de largura. Considerando a aproximação $\sqrt{3} = 1{,}7$, o percentual da área da folha usado nessa construção será de:

a) 28,6%
b) 29,81%
c) 29,4%
d) 30%
e) 33,6%

83 (UFPA) Um eletricista instalou, em uma sala com dimensões de 3 metros de altura, 4 metros de largura e 9 metros de comprimento, por meio de um cabo elétrico, uma tomada localizada no centro (encontro das diagonais) de uma das paredes de menores dimensões, ficando a fonte de energia na parede oposta.
O eletricista usou a planificação da superfície da sala desenhada abaixo e nela representou o caminho do cabo elétrico por um único segmento de reta de pontos extremos *F* (fonte) e *T* (tomada).

a) Calcule o comprimento do cabo elétrico utilizado pelo eletricista na instalação da tomada.
b) Represente espacialmente a superfície planificada, usada pelo eletricista, e o caminho descrito pelo cabo elétrico.



84 (UFT-TO) Para fabricar-se uma caixa em forma de paralelepípedo, com 8 m de comprimento e com a altura igual à largura, ambas medindo *x* metros, utilizou-se totalmente uma chapa metálica com 322 m^2 de área.
Considerando-se essas informações, é correto afirmar que o volume dessa caixa é de:

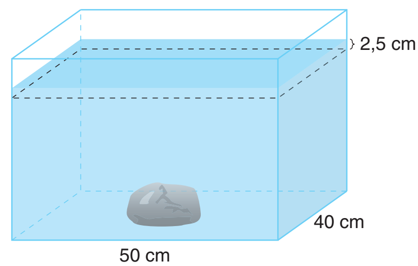
a) 300 m^3
b) 322 m^3
c) 392 m^3
d) 400 m^3

85 Ao projetar um edifício com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, um arquiteto estimou que seu volume será de 22.500 m^3. Se uma maquete desse edifício foi construída na escala 1 : 50, isto é, cada unidade de comprimento na maquete corresponde a 50 unidades iguais no edifício, calcule o volume dessa maquete, em centímetro cúbico.

86 (UFC-CE) Em um reservatório na forma de paralelepípedo foram colocados 18.000 litros de água, correspondendo a $\frac{4}{5}$ de sua capacidade total. Se esse reservatório possui 3 m de largura e 5 m de comprimento, então a medida de sua altura é:

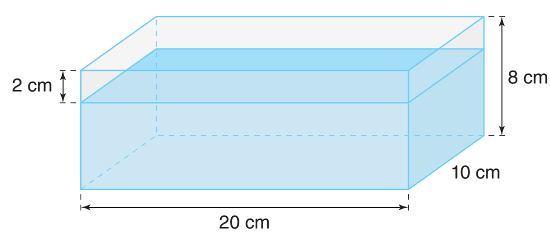
a) 1 m
b) 2 m
c) 1,5 m
d) 2,5 m
e) 3 m

87 Quando uma pedra submerge completamente nas águas de um aquário, cuja forma é de um paralelepípedo reto-retângulo, o nível da superfície da água sobe 2,5 cm. Sabendo que, internamente, o fundo desse aquário tem 50 cm de comprimento por 40 cm de largura, calcule o volume da pedra, em centímetro cúbico.



88 (UFRJ) Uma pedra de massa 25 kg tem a forma de um paralelepípedo com 2 cm de altura. Sua base é um quadrado com 1 m de lado. Qual a massa, em quilograma, de uma outra pedra, do mesmo material, que tem a forma de um paralelepípedo com 2 m de comprimento, 80 cm de largura e 3 cm de altura?

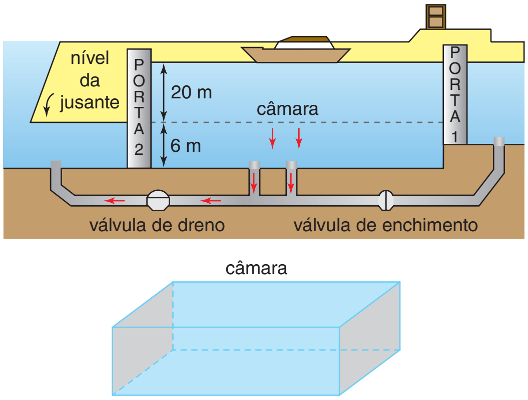
89 Um recipiente de vidro hermeticamente fechado, contendo água, tem, internamente, a forma de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 20 cm, 10 cm e 8 cm. Quando uma face de 20 cm por 10 cm está apoiada sobre o tampo horizontal de uma mesa, a superfície da água dista 2 cm da face superior, conforme mostra a figura. Quando uma face de dimensões 10 cm por 8 cm está apoiada sobre o tampo da mesa, qual será a distância da superfície da água à face superior?



90 Uma piscina tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo com 8 m de comprimento, 4 m de largura e 2 m de profundidade e contém 59.200 L de água. A quantos centímetros a superfície da água está abaixo da borda da piscina?

a) 0,15 cm
b) 15 cm
c) 4,8 cm
d) 48 cm
e) 20 cm

91 (Enem) Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema abaixo, está representada a descida de uma embarcação pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do rio Paraná até o nível da jusante.



Enquanto a válvula de enchimento está fechada e a de dreno, aberta, o fluxo de água ocorre no sentido indicado pelas setas, esvaziando a câmara até o nível da jusante. Quando, no interior da câmara, a água atinge o nível da jusante, a porta 2 é aberta, e a embarcação pode continuar navegando rio abaixo.

A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4.200 m^3 por minuto. Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de:

a) 2 minutos
b) 5 minutos
c) 11 minutos
d) 16 minutos
e) 21 minutos

92 (UFMS) As dimensões de uma piscina olímpica, sob forma de um paralelepípedo reto-retângulo, são 50 metros de comprimento, 25 metros de largura e 3 metros de profundidade. Então, podemos afirmar que:

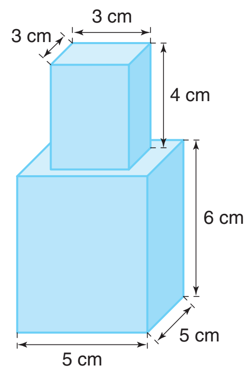
(01) o volume da piscina é 3.750.000 litros.
(02) para elevar o nível da água em 10 cm são necessários 125.000 litros.
(04) se essa piscina tivesse área da base 20% menor e altura 30% maior, então seu volume seria 4% maior.
(08) se essa piscina tivesse área da base 50% menor e altura 50% menor, então seu volume seria 50% menor.
(16) a área total da parte interna da piscina é de 1.600 m^2.

- Qual é a soma dos números que antecedem as alternativas corretas?

93 Uma caixa-d'água completamente cheia tem, internamente, a forma de um paralelepípedo reto-retângulo com 1,2 m de altura e 6 m^2 de área da base. Uma bomba puxa 10 L de água por segundo dessa caixa para regar uma plantação, até esvaziá-la completamente.

a) Dê a lei que expressa a altura $f(x)$, em centímetro, do nível da superfície da água no interior da caixa, em relação à sua base, em função do tempo x, em segundo.
b) Construa o gráfico da função f obtida no item **a**.

94 Em uma indústria de perfume, os frascos vazios, com os fundos apoiados sobre uma esteira rolante plana e horizontal, param sob uma pequena torneira que os enche completamente à razão de 3 mL por segundo. Cada frasco é composto pelo corpo e o gargalo, ambos com o formato de paralelepípedo reto-retângulo. Internamente, o corpo tem 6 cm de altura e base quadrada de lado 5 cm; e o gargalo tem 4 cm de altura e base quadrada de lado 3 cm, conforme mostra a figura:



a) Considerando o tempo x, em segundo, transcorrido no envasamento de um frasco, e a altura $f(x)$, em centímetro, do nível de perfume no interior do frasco, em relação à sua base, dê a lei que expressa a altura $f(x)$ em função do tempo x.
b) Esboce o gráfico da função f do item **a**.

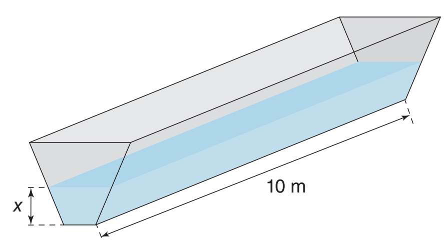
95 (Uespi) Um salão na forma de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 30 m, 72 m e 6 m deve ser preenchido completamente com caixas cúbicas de mesmo volume. Qual é o menor número possível de caixas que podem ser armazenadas?

a) 80
b) 70
c) 60
d) 50
e) 40

96 Um reservatório cúbico de água será substituído por um novo com o mesmo formato e o triplo da capacidade. A razão entre a medida da aresta do novo reservatório e a medida da aresta do atual, nessa ordem, é:

a) 3
b) 6
c) 9
d) $\sqrt[3]{3}$
e) $\sqrt{3}$

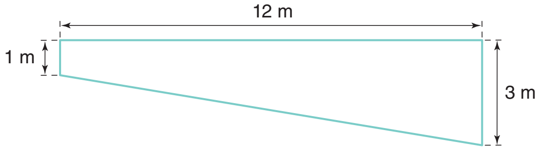
97 (UFMS) Uma calha horizontal com 10 metros de comprimento e 80 cm de profundidade tem a forma de um prisma reto cujas bases são trapézios isósceles com base maior de 80 cm e base menor de 60 cm, como mostra a figura a seguir.



Durante uma forte chuva, o nível da água sobe gradualmente nessa calha.

a) Determine a expressão V(x) que representa o volume de água na calha, em cm^3, em função da profundidade x, em centímetro.
b) Construa o gráfico da função V(x) obtida no item **a**.

98 (UFT-TO) Uma piscina retangular mede 6 m de largura por 12 m de comprimento e sua profundidade varia de 1 m a 3 m. Nesta figura, está representada uma secção dessa piscina ao longo de seu comprimento:

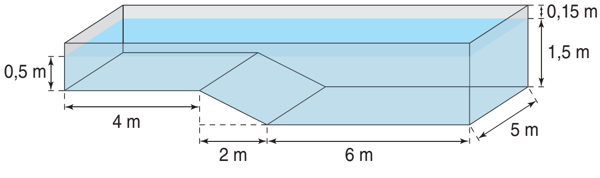


Ela é revestida internamente, tanto nas laterais como no fundo, por azulejos quadrados, cujos lados medem, cada um, 20 cm.
Em um determinado momento, essa piscina continha 133,2 m^3 de água e, para torná-la própria para o uso, adicionou-se à água um produto químico à razão de 20 g para cada 10.000 litros de água.
Com base nessas informações, julgue os itens de **a** a **e**.

a) A área lateral interna dessa piscina é de 72 m^2.
b) Para o revestimento do fundo dessa piscina, foram usados menos de 1.950 azulejos.
c) A profundidade da piscina, em seu ponto mais raso, nessa ocasião, era de 85 cm.
d) Na mesma ocasião, foram adicionados menos de 250 g do produto químico à água contida na piscina.
e) Para essa piscina ficar completamente cheia, será necessária a adição de 9.800 litros de água.

[*Nota*: Julgar os itens significa classificar cada um deles como verdadeiro (V) ou falso (F).]

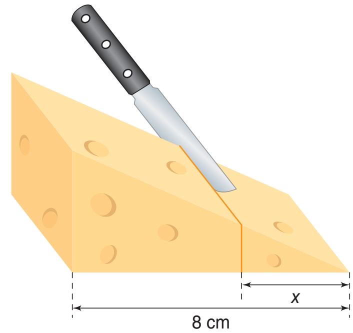
99 (Ufes) A base de uma piscina de paredes verticais é formada por duas plataformas retangulares horizontais, situadas em níveis diferentes, as quais correspondem à parte rasa e à parte funda da piscina, além de uma rampa também retangular, interligando as plataformas, conforme mostra a figura a seguir. A largura da piscina é de 5 m, as duas plataformas têm comprimento de 4 m e 6 m, respectivamente, e o comprimento da piscina é 12 m. A água da piscina está em repouso, o nível de água na parte rasa é 0,5 m e o nível da água na parte funda é 1,5 m.



Determine:
a) o volume da água na piscina, em litro.
b) o volume de água, em litro, que é necessário despejar na piscina para elevar o nível da água em 10 cm.

100 (UFG-GO) Com uma lata de tinta de 3,6 litros pinta-se uma parede de 24 m^2 de área. Considerando que $\frac{1}{3}$ da tinta é constituído por solventes que evaporam durante a secagem e que a tinta aplicada em uma parede lisa de 24 m^2 formará uma película de espessura uniforme, calcule essa espessura.

101 (UFPE) Um pedaço de queijo tem a forma de um prisma triangular reto tendo por base um triângulo com um dos lados medindo 8 cm, como ilustrado a seguir.



O queijo deve ser dividido em dois pedaços de mesmo volume por um plano paralelo a uma das faces, como ilustrado acima. Qual o valor de *x*?

a) $2^{\frac{5}{2}}$ cm **b)** $2^{\frac{3}{8}}$ cm **c)** 4 cm **d)** $2^{\frac{4}{3}}$ cm **e)** 5 cm

102 O pano de um guarda-sol armado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide octogonal regular de aresta lateral 100 cm e aresta da base 56 cm. Calcule a área desse pano.

103 (Mackenzie-SP) Uma barraca de lona tem forma de uma pirâmide regular de base quadrada com 1 metro de lado e altura igual a 1,5 metro. Das alternativas abaixo, a que indica a menor quantidade suficiente de lona, em m^2, para forrar as quatro faces laterais da barraca é:

a) 2 **b)** 2,5 **c)** 4,5 **d)** 3,5 **e)** 4

104 (Fuvest-SP) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide, 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m^2. Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

a) 90 **b)** 100 **c)** 110 **d)** 120 **e)** 130

105 (Enem) Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal.
Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

a) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a intersecção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.

b) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.

c) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a intersecção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa intersecção tem 5 lados.

d) O número de lados de qualquer polígono obtido como intersecção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.

e) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

106 (Uepa) Uma indústria que produz perfumes à base de essências genuínas da Amazônia resolveu inovar nas embalagens de seus produtos para chamar a atenção do consumidor. O *Cheiro do Pará*, por exemplo, foi engarrafado em frascos no formato de uma pirâmide, quadrangular regular que, internamente, tem 15 cm de altura e 20 cm de perímetro da base. O volume interno de um desses frascos é:

a) $125\ cm^3$
b) $150\ cm^3$
c) $250\ cm^3$
d) $300\ cm^3$
e) $375\ cm^3$

107 (UEPB) Uma peça de cristal de rocha tem o formato de um tetraedro regular (poliedro de quatro faces). Se cada aresta da peça mede 2 cm, então o volume desse cristal, em centímetro cúbico, é igual a:

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
b) $\sqrt{2}$
c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) 550
e) 1.500

108 (Fuvest) Dois planos π_1 e π_2 se interceptam ao longo de uma reta r, de maneira que o ângulo entre eles mede α radianos, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Um triângulo equilátero ABC, de lado l, está contido em π_2, de modo que $\overline{AB}$ está em r. Seja D a projeção ortogonal de C sobre o plano π_1, e suponha que a medida θ, em radianos, do ângulo $C\hat{A}D$ satisfaça sen $\theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Nessas condições, determine, em função de l,

a) o valor de α.
b) a área do triângulo ABD.
c) o volume do tetraedro $ABCD$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 (UFPE) Considere 6 pontos numa reta e 8 pontos em outra reta reversa a essa. Escolhendo ao acaso 4 dentre esses 14 pontos, calcule a probabilidade P de estes serem vértices de um tetraedro.

2 (Unirio-RJ) Um agricultor estava perdendo a sua plantação em virtude da ação de uma praga. Ao consultar um especialista, foi orientado para que pulverizasse, uma vez ao dia, uma determinada quantidade de um certo produto, todos os dias, da seguinte maneira: 1 L no primeiro dia; 1,2 L no segundo dia; 1,4 L no terceiro dia e assim sucessivamente, aumentando 0,2 L a cada dia.

Sabendo-se que o total de produto pulverizado foi de 63 litros, o número de dias de duração desse tratamento nessa plantação foi de:

a) 21 b) 22 c) 25 d) 27 e) 30

3 Discuta o sistema linear de incógnitas x, y e z, abaixo, em função do parâmetro real m.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 10 \\ 2x - y + z = 32 \\ 3x + 2y + mz = 5 \end{cases}$$

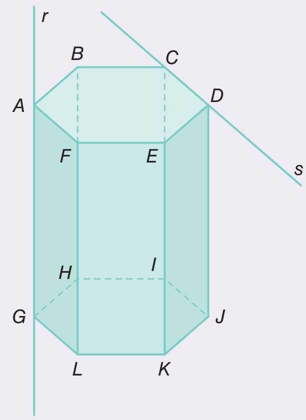
4 Determine, se existir, a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

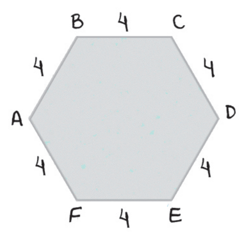
A figura representa um prisma hexagonal regular de altura 10 dm e área lateral 240 dm^2. Calcule a distância entre as retas reversas *r* e *s* que contêm, respectivamente, as arestas $\overline{AG}$ e $\overline{CD}$ desse prisma.



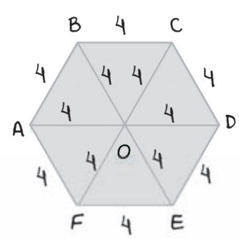
Resolução

Sendo x a medida, em decímetro, de uma aresta da base, temos:

$$6 \cdot x \cdot 10 = 240 \Rightarrow x = 4$$



Dividindo o hexágono regular em triângulos equiláteros:



Logo, a distância AD entre as retas reversas r e s é 8 dm. } ERRADO!

Comentário

Por definição, a distância entre duas retas reversas *r* e *s* é a medida do segmento de reta $\overline{PQ}$, perpendicular a *r* e *s*, com P ∈ *r* e Q ∈ *s*. Como o segmento $\overline{AD}$ não é perpendicular a $\overline{CD}$, pois $m(A\hat{D}C) = 60°$, temos que *AD* não é a distância entre as retas *r* e *s*. Portanto, a resposta do aluno não está correta.

Refaça essa resolução, corrigindo-a.

Capítulo

12 Geometria métrica: corpos redondos

O papel resulta do entrelaçamento de fibras vegetais unidas tanto física como quimicamente por ligações de hidrogênio. O eucalipto, devido ao baixo custo e ao rápido desenvolvimento, é uma das principais matérias-primas para a indústria de papel e celulose.

Em qualquer espécie de eucalipto, a idade, a altura e o diâmetro de uma árvore são grandezas interdependentes e podem ser avaliadas com base em uma forma geométrica estudada neste capítulo: o cilindro.

A forma arredondada está presente, por exemplo, nos planetas, nas árvores, nas frutas etc. Neste capítulo, vamos estudar alguns corpos redondos e suas propriedades.

Para pensar

Um estudo sobre a espécie *Eucalyptus grandis* mostrou que, dentro de determinados limites, o diâmetro y de uma muda, em milímetro, varia em função da altura x, em metro, de acordo com a equação $y = 1,43 + 7,57x$. Adotando $\pi = 3,14$, calcule a altura de uma muda dessa espécie cuja circunferência do tronco mede 15,7 mm.

Cilindro circular

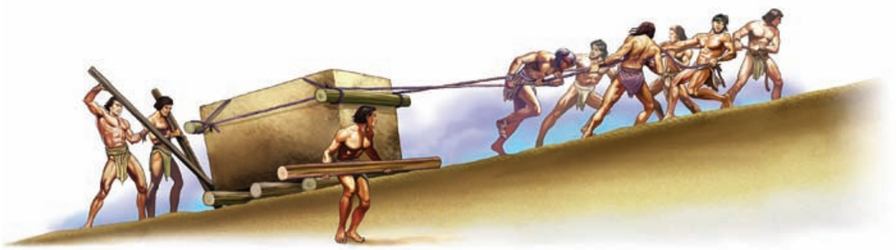
Objetivos

- **Reconhecer** um cilindro circular.
- **Calcular** a área lateral e a área total de um cilindro circular reto.
- **Calcular** o volume de um cilindro circular.

Termos e conceitos

- cilindro
- eixo do cilindro
- geratriz do cilindro
- cilindro circular reto
- cilindro circular oblíquo
- cilindro equilátero
- tronco reto de cilindro circular

Observando as propriedades físicas e geométricas dos objetos da natureza, o homem teve ideias para grandes descobertas e invenções. Por exemplo, a invenção da roda, uma das mais importantes criações humanas, provavelmente teve origem na constatação de que objetos pesados poderiam ser deslocados com facilidade sobre troncos de árvores.

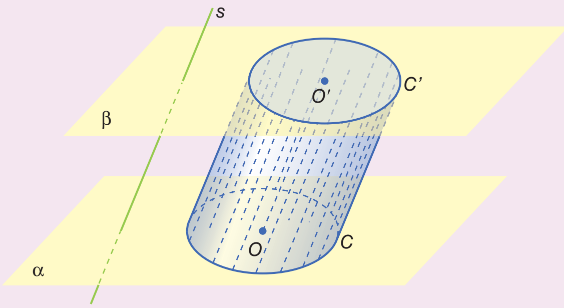


Neste capítulo, estudaremos algumas formas arredondadas, começando pela forma do tronco de árvore, chamada **forma cilíndrica**.

Você provavelmente já observou algo em comum entre a forma de um tipo de vela e dos gizes, como os mostrados nas fotos:

Ambos têm duas bases circulares paralelas e congruentes, e todos os seus pontos formam segmentos de reta paralelos, com cada extremo numa dessas duas bases. Por isso, dizemos que esses objetos têm a forma de **cilindro circular**, figura estudada a seguir.

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta s secante a esses planos e um círculo C de centro O contido em α. Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a s, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao círculo C e o outro extremo pertencente a β.

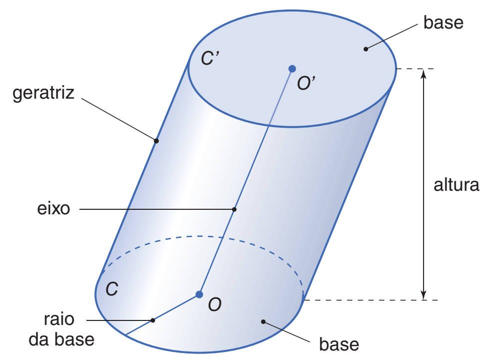


A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado cilindro circular limitado ou, simplesmente, **cilindro**.

Há outros tipos de cilindro (por exemplo, o de bases elípticas), porém vamos estudar somente os cilindros circulares. Por comodidade, às vezes omitiremos a palavra "circulares", adotando apenas **cilindros**.

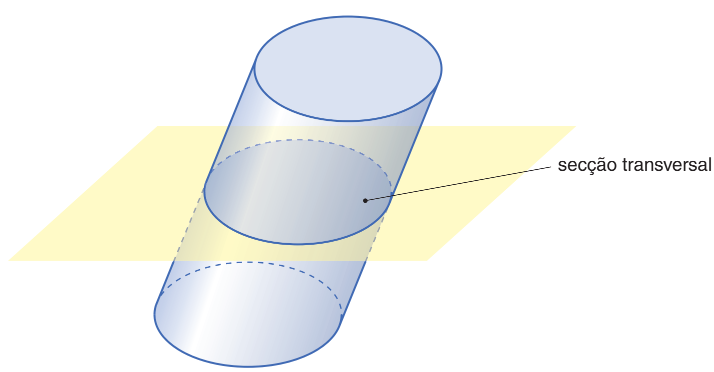
Elementos de um cilindro circular

- Os círculos C e C', de centros O e O', respectivamente, são chamados de **bases** do cilindro.
- A reta $\overleftrightarrow{OO'}$ é chamada de **eixo** do cilindro.
- O raio do círculo C é chamado de **raio** da base do cilindro.
- A distância entre as bases é chamada de **altura** do cilindro.
- Todo segmento de reta, paralelo ao eixo $\overleftrightarrow{OO'}$, que tem extremidades pertencentes às circunferências das bases, é chamado de **geratriz** do cilindro.



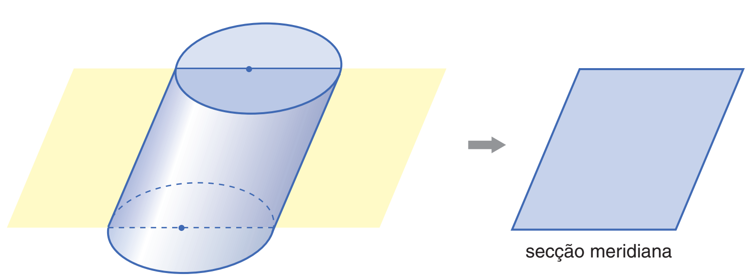
Secções de um cilindro circular

Uma **secção transversal** do cilindro é qualquer intersecção não vazia do cilindro com um plano paralelo às suas bases.



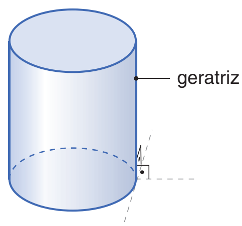
Toda secção transversal de um cilindro circular é um círculo congruente às bases.

Uma **secção meridiana** de um cilindro circular é a intersecção do cilindro com um plano que passa pelos centros das bases desse cilindro.

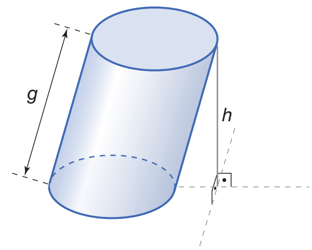


Cilindro circular reto e cilindro circular oblíquo

Cilindro circular **reto** é todo cilindro circular cujas geratrizes são perpendiculares às bases. Um cilindro circular que não é reto é chamado de cilindro circular **oblíquo**.

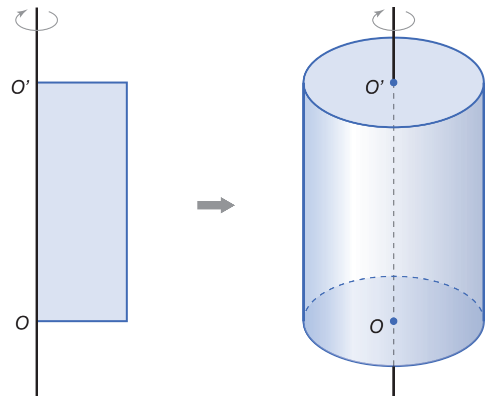


cilindro circular reto



cilindro circular oblíquo

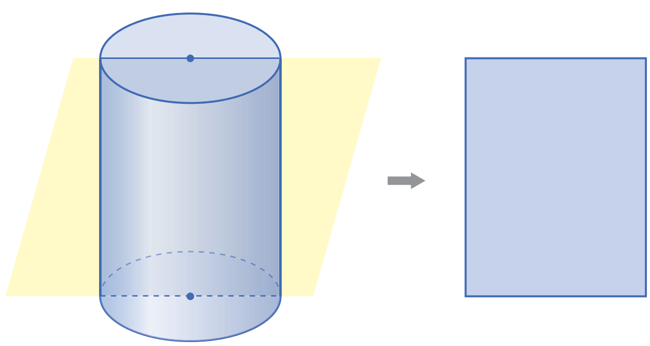
O cilindro circular reto também é conhecido como **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução (rotação) de 360° de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados.



cilindro de revolução

Propriedade

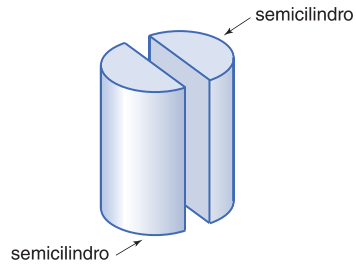
Toda secção meridiana de um cilindro circular reto é um retângulo cuja base é o diâmetro da base do cilindro e cuja altura é a altura do cilindro.



cilindro circular reto

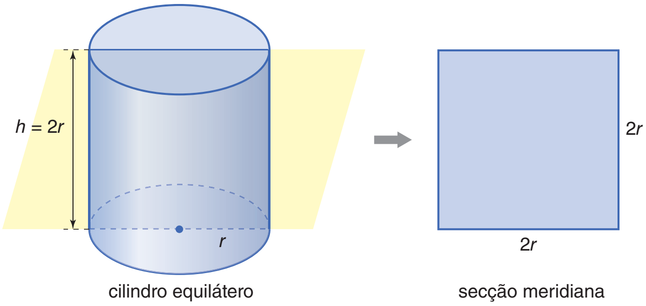
secção meridiana retangular

Qualquer secção meridiana de um cilindro circular reto divide-o em dois sólidos congruentes chamados **semicilindros circulares retos**.



Cilindro equilátero

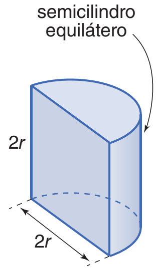
Todo cilindro circular reto cujas secções meridianas são quadradas é chamado de **cilindro equilátero**.



Assim, no cilindro equilátero a altura é igual ao diâmetro da base:

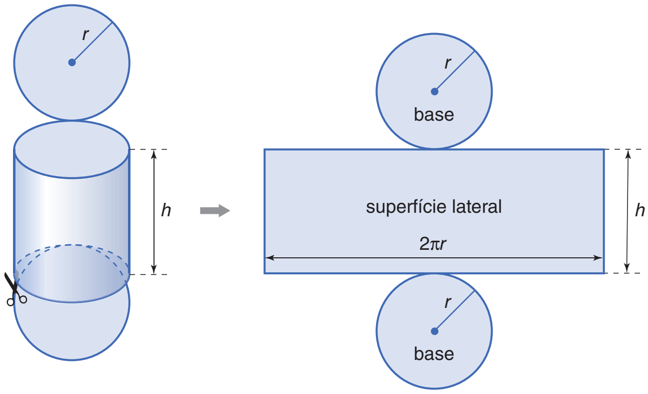
$$\boxed{h = 2r}$$

Qualquer secção meridiana de um cilindro equilátero divide-o em dois sólidos congruentes chamados **semicilindros equiláteros**.



Área lateral e área total de um cilindro circular reto

A superfície de um cilindro circular reto de altura *h* e raio da base *r* é equivalente à reunião de um retângulo, de dimensões $2\pi r$ e *h*, com dois círculos de raio *r*. Para entender essa afirmação, pode-se imaginar a retirada das bases do cilindro, o corte de sua superfície lateral sobre uma geratriz e, por fim, a representação no plano das três regiões obtidas:



Nota:

Figuras planas equivalentes são figuras de mesma área.

Área lateral

A **área lateral** de um cilindro qualquer é a área da superfície formada pela reunião de todas as geratrizes do cilindro. Portanto, no cilindro circular reto de altura h e raio da base r, a área lateral A_ℓ é a área do retângulo obtido na planificação vista na página anterior, em que a base e a altura do retângulo medem $2\pi r$ e h, respectivamente. Logo A_ℓ é dada por:

$$\boxed{A_\ell = 2\pi rh}$$

Área total

A **área total** A_T do cilindro é a soma da área lateral A_ℓ com as áreas das bases, ou seja:

$$A_T = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Portanto:

$$\boxed{A_T = 2\pi r(h + r)}$$

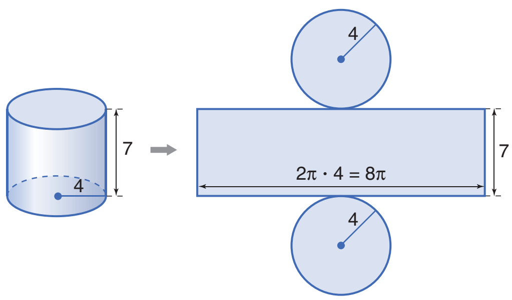
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Em um cilindro circular reto de altura 7 cm, o raio da base mede 4 cm. Calcular, desse cilindro:

a) a área B de uma base.
b) a área lateral A_ℓ.
c) a área total A_T.
d) a área A_{SM} de uma secção meridiana.

Resolução

Veja ao lado a planificação da superfície do cilindro.



a) A área B de cada base é a área de um círculo de raio 4 cm:
$B = \pi \cdot 4^2 \text{ cm}^2 = 16\pi \text{ cm}^2$

b) A área lateral A_ℓ é a área de um retângulo de comprimento 8π cm e altura 7 cm:
$A_\ell = (8\pi \cdot 7) \text{ cm}^2 = 56\pi \text{ cm}^2$

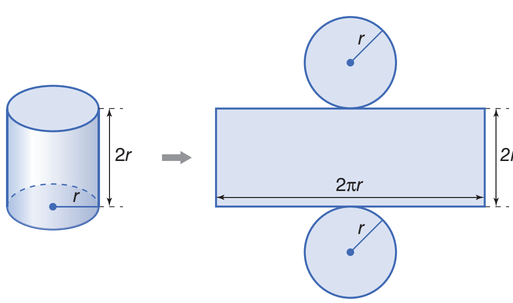
c) A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das duas bases:
$A_T = (56\pi + 2 \cdot 16\pi) \text{ cm}^2 = 88\pi \text{ cm}^2$

d) A área A_{SM} de uma secção meridiana do cilindro é a área de um retângulo de base 8 cm e altura 7 cm:
$A_{SM} = 8 \cdot 7 \text{ cm}^2 = 56 \text{ cm}^2$

2 A área lateral de um cilindro equilátero é $100\pi \text{ cm}^2$. Calcular a área total desse cilindro.

Resolução

No cilindro equilátero, a altura é igual ao diâmetro da base. Indicando por r a medida do raio da base desse cilindro, observamos a planificação ao lado.



A área lateral A_ℓ é a área de um retângulo de dimensões $2\pi r$ e $2r$, ou seja:

$A_\ell = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$

Assim:

$A_\ell = 100\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 100\pi$

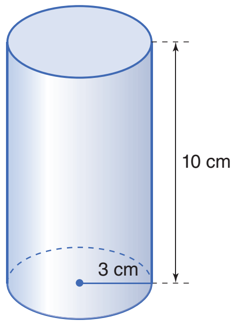
$\therefore r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$

A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das duas bases; logo:

$A_T = (100\pi + 2 \cdot \pi \cdot 5^2) \text{ cm}^2 \Rightarrow A_T = 150\pi \text{ cm}^2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

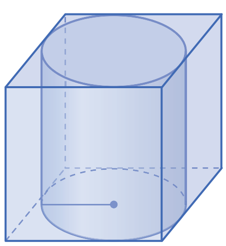
1 Um cilindro circular reto tem 10 cm de altura e 3 cm de raio da base.
Calcule desse cilindro:
a) a área B de uma base.
b) a área lateral A_ℓ.
c) a área total A_T.
d) a área A_{SM} de uma secção meridiana.



2 Um cilindro equilátero tem 6 dm de altura. Calcule, desse cilindro:
a) o raio da base.
b) a área B de uma base.
c) a área lateral A_ℓ.
d) a área total A_T.

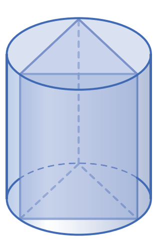
3 Um cilindro circular reto de raio da base 10 cm possui uma secção meridiana equivalente a uma de suas bases. Calcule a área lateral desse cilindro.

4 Considere a definição: “Um cilindro circular está inscrito em um prisma se, e somente se, suas bases são tangentes às arestas das bases do prisma. Nesse caso, dizemos, também, que o prisma está circunscrito ao cilindro”.



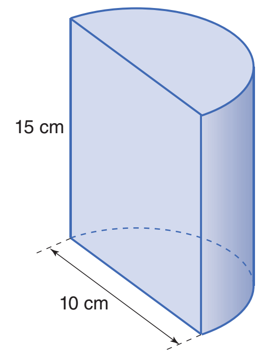
De acordo com essa definição, calcule a área lateral de um cilindro circular inscrito em um prisma quadrangular regular de altura 12 cm e aresta da base 8 cm.

5 Considere a definição: “Um cilindro circular está circunscrito a um prisma se, e somente se, os vértices do prisma pertencem às circunferências das bases do cilindro. Nesse caso, dizemos também que o prisma está inscrito no cilindro”.
De acordo com essa definição, calcule a área total de um cilindro circular circunscrito a um prisma triangular regular de altura 10 cm e aresta da base $4\sqrt{3}$ cm.



6 A área lateral de um cilindro de revolução é a terça parte da área total. Calcule a altura desse cilindro, sabendo que o raio da base mede 3 dm.

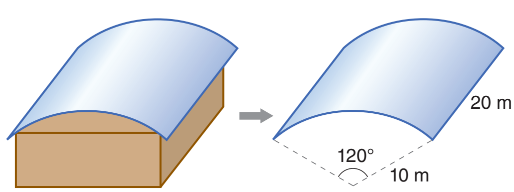
7 Calcule a área lateral e a área total de um semicilindro circular reto de altura 15 cm e diâmetro da base 10 cm.



8 Considere que a altura 8 cm de um cilindro circular reto permaneça constante enquanto o raio da base varia de 5 cm a 10 cm.
a) Dê a lei que expressa a área lateral f, em centímetro quadrado, em função da medida x, em centímetro, do raio da base desse cilindro.
b) Construa o gráfico da função f obtida no item **a**.

9 Para embalar seu produto, um fabricante de tinta encomendou a uma metalúrgica 20.000 latas. Essas latas devem ter a forma de cilindro circular reto com 12 cm de altura e 5 cm de raio da base. Quantos metros quadrados de folhas de metal serão necessários para essa produção? (Adote $\pi = 3{,}14$.)

10 A cobertura de um galpão é parte da superfície de um cilindro circular reto de 10 m de raio e 20 m de geratriz. Uma secção transversal do cilindro determina nessa cobertura um arco de 120°, conforme mostra a figura abaixo.



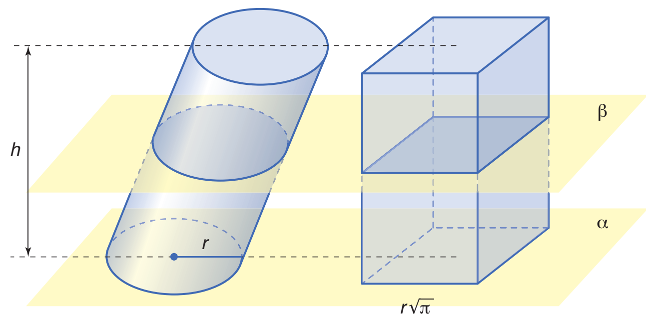
A área dessa cobertura é:

a) $300\pi \text{ m}^2$
b) $400\pi \text{ m}^2$
c) $\dfrac{400\pi}{3} \text{ m}^2$
d) $\dfrac{325\pi}{6} \text{ m}^2$
e) $\dfrac{500\pi}{6} \text{ m}^2$

Resolva os exercícios complementares 1 a 6, 76 e 77.

Volume de um cilindro circular

Considere um cilindro de altura h com raio da base r e um prisma de mesma altura h cuja base é um quadrado de lado $r\sqrt{\pi}$. Suponhamos que esses sólidos estejam em um mesmo semiespaço de origem em um plano α e que suas bases estejam contidas em α.



Note que a área da base do cilindro, πr^2, é igual à área da base do prisma, $\left(r\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi r^2$.

Qualquer plano β, paralelo a α, que intercepta um desses sólidos também intercepta o outro e neles determina secções de mesma área πr^2, pois cada secção é congruente à base do respectivo sólido. Assim, pelo princípio de Cavalieri, esses sólidos têm volumes iguais. Como o volume do prisma é o produto da área da base pela sua altura, concluímos que o volume V do cilindro também é o produto da área da base pela sua altura, ou seja:

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 Calcular o volume de um cilindro circular de altura 20 cm e raio da base 5 cm.

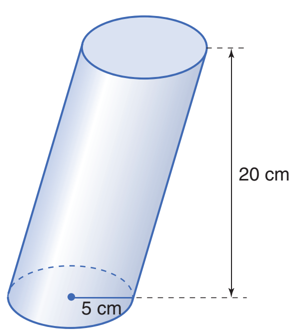
Resolução

A área B da base do cilindro é dada por:

$B = \pi \cdot 5^2\ \text{cm}^2 \Rightarrow B = 25\pi\ \text{cm}^2$

O volume V do cilindro é o produto da área da base por sua altura:

$V = 25\pi \cdot 20\ \text{cm}^3 \Rightarrow V = 500\pi\ \text{cm}^3$

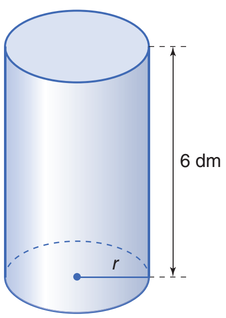


4 Calcular a área lateral de um cilindro circular reto de geratriz 6 dm e volume $54\pi\ \text{dm}^3$.

Resolução

Em um cilindro reto, a medida de cada geratriz é a própria altura do cilindro.

Para calcular a área lateral, precisamos da medida do raio do cilindro. Assim, indicando por r a medida do raio da base desse cilindro, temos a figura ao lado:

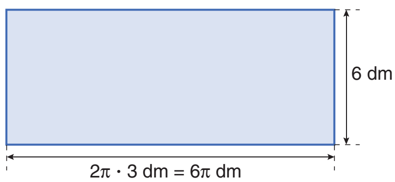


O volume, em decímetro cúbico, desse cilindro é dado por $V = \pi r^2 \cdot 6$, portanto:

$\pi r^2 \cdot 6 = 54\pi \Rightarrow r^2 = 9$

$\therefore r = 3$ dm

A área lateral A_ℓ desse cilindro é a área de um retângulo de dimensões $2\pi \cdot 3$ dm e 6 dm:

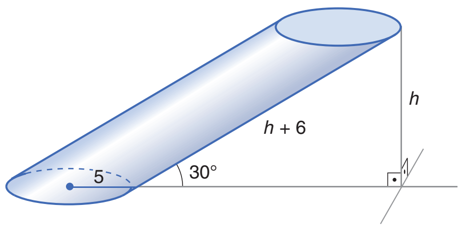


Logo: $A_\ell = 6\pi \cdot 6\ \text{dm}^2 = 36\pi\ \text{dm}^2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11 Um cilindro circular reto tem altura de 2 m e raio da base de 0,8 m. Calcule o volume desse cilindro, em m^3.

12 Em um cilindro circular oblíquo, cada geratriz mede 6 cm a mais que a altura e forma ângulos de 30° com os planos das bases de raio 5 cm, conforme mostra a figura.
Calcule o volume desse cilindro em centímetro cúbico.



13 Um cilindro circular reto de 3 cm de raio da base tem área lateral de 54π dm^2. Calcule o volume desse cilindro.

14 O volume de um cilindro equilátero é 128π cm^3. Calcule a área total desse cilindro.

15 O perímetro da base de um cilindro circular reto é 12π cm. Calcule a altura do cilindro, sabendo que seu volume é 180π cm^3.

16 A área lateral de um cilindro circular reto é 120π cm^2. Dado que a altura desse cilindro é 12 cm, calcule seu volume.

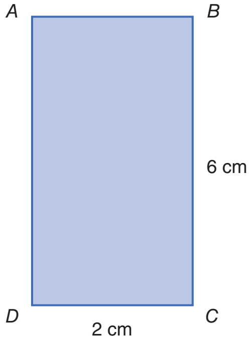
17 Um cilindro circular reto de raio da base 10 cm possui uma secção meridiana equivalente a uma das bases. Calcule o volume desse cilindro.

18 Um cilindro equilátero é equivalente a um cubo de aresta $2\sqrt[3]{2\pi}$. Calcule a área lateral desse cilindro. (*Nota*: Sólidos equivalentes são sólidos de mesmo volume.)

19 Vimos que o cilindro circular reto também é chamado de cilindro de revolução, pois pode ser obtido pela revolução (rotação) de 360° de um retângulo em torno de um de seus lados. Considerando o retângulo abaixo, calcule:

a) o volume do cilindro gerado pela revolução desse retângulo em torno do lado $\overline{AD}$.

b) a área total do cilindro gerado pela revolução desse retângulo em torno do lado $\overline{AB}$.



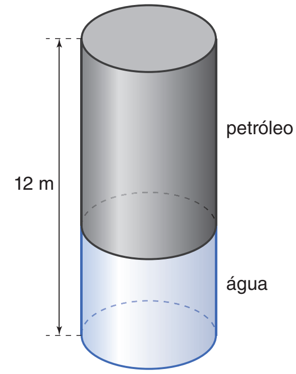
20 Considere que a altura e o raio da base de um cilindro circular variem linearmente, isto é, variem de modo diretamente proporcional. Se a altura varia de 6 cm a 10 cm e a menor medida do raio da base é 4 cm:

a) dê a lei que expressa o volume $f(x)$, em centímetro cúbico, em função da medida x, em centímetro, do raio da base desse cilindro.

b) obtenha a inversa da função f obtida no item **a**.

21 Calcule o volume de um semicilindro circular reto de altura 12 cm e raio da base 4 cm.

22 (Unesp) Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um cilindro circular reto na posição vertical, está completamente cheio com 30 m^3 de água e 42 m^3 de petróleo.



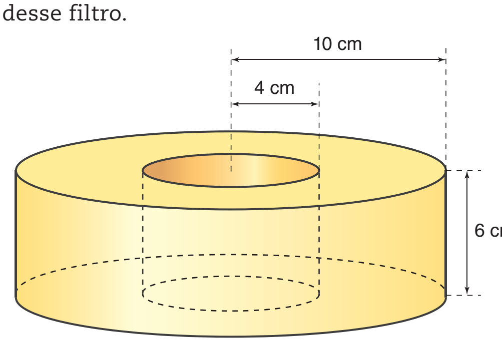
Se a altura do tanque é 12 metros, a altura, em metro, da camada de petróleo é:

a) 2π **b)** 7 **c)** $\frac{7\pi}{3}$ **d)** 8 **e)** $\frac{8\pi}{3}$

23 A 15,5 °C e sob pressão atmosférica, 1 m^3 de ar tem massa igual a 1,22 kg. Sob essas condições, assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo da massa de ar contida em um reservatório cilíndrico de 5 m de altura e 2 m de raio da base.

a) 24,4 kg
b) 36,8 kg
c) 123,6 kg
d) 76,6 kg
e) 90,6 kg

24 O filtro de ar do motor de um automóvel tem o formato de um cilindro circular reto com 6 cm de altura e 10 cm de raio da base, atravessado por um furo central, também cilíndrico, com 4 cm de raio, conforme mostra a figura. Calcule o volume desse filtro.



25 (Fuvest-SP) Um castelo está cercado por uma vala cujas bordas são duas circunferências concêntricas de raios 41 m e 45 m. A profundidade da vala é constante e igual a 3 m.

secção da vala

O proprietário decidiu enchê-la com água e, para este fim, contratou caminhões-pipa, cujos reservatórios são cilindros circulares retos com raio da base de 1,5 m e altura igual a 8 m.
Determine o número mínimo de caminhões-pipa necessário para encher completamente a vala.

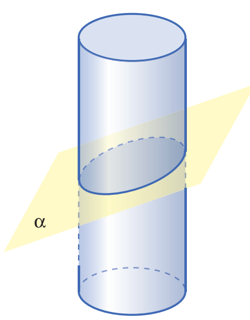
26 Um projeto prevê a construção de um reservatório cilíndrico, fechado, com 3 m de raio da base e capacidade para 90.000 L. Sabendo que as chapas de aço usadas nessa construção custam R$ 100,00 o metro quadrado, assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo do custo das chapas utilizadas nessa construção.

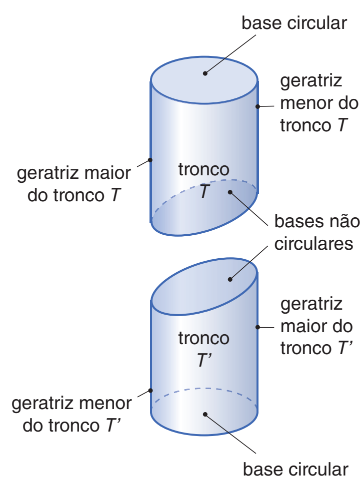
a) R$ 10.474,00
b) R$ 14.824,00
c) R$ 13.040,00
d) R$ 18.965,00
e) R$ 11.652,00

Resolva os exercícios complementares 7 a 10 e 78 a 88.

Tronco reto de um cilindro circular

Um plano α que intercepta obliquamente todas as geratrizes de um cilindro circular reto separa-o em dois sólidos chamados de **troncos retos de cilindro circular**. As partes planas da superfície de cada tronco são as **bases** do tronco e as partes das geratrizes do cilindro original contidas em cada tronco são as **geratrizes** do tronco.

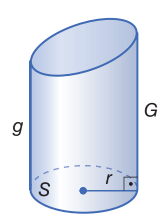




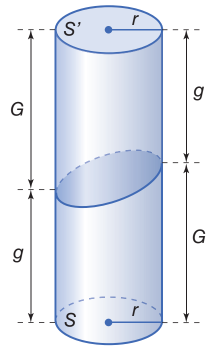
Note, portanto, que uma das bases do tronco reto do cilindro circular é um círculo e as geratrizes do tronco são perpendiculares ao plano desse círculo (daí o nome de tronco reto).

Volume de um tronco reto de cilindro circular

Considere um tronco reto de cilindro circular cujo raio da base circular S mede r, a geratriz maior mede G e a menor mede g:



Prolongando as geratrizes de modo que formem um cilindro circular reto de bases S e S' e altura $G + g$, temos:



Esse cilindro é composto por dois troncos congruentes, cada um com base circular de raio r, geratriz maior medindo G e menor medindo g. Assim, cada um desses troncos possui volume V igual à metade do volume do cilindro, ou seja:

$$V = \frac{\pi r^2 (G + g)}{2}$$

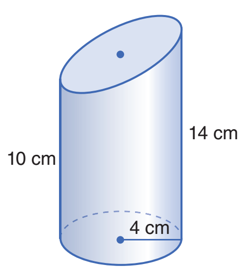
Note, portanto, que cada um desses troncos é equivalente a um cilindro circular reto de raio da base r, cuja altura é a média aritmética entre as medidas das geratrizes maior e menor do tronco.

Nota:

Sólidos equivalentes são sólidos que têm volumes iguais.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

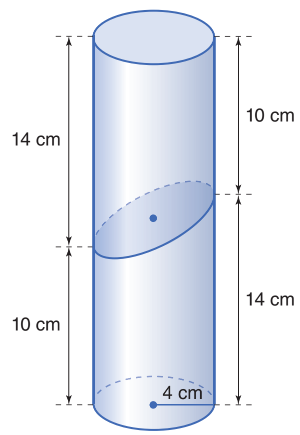
5 Em um tronco reto de cilindro circular, a geratriz maior mede 14 cm e a menor mede 10 cm, sendo 4 cm o raio da base circular. Calcular o volume desse tronco.



Resolução

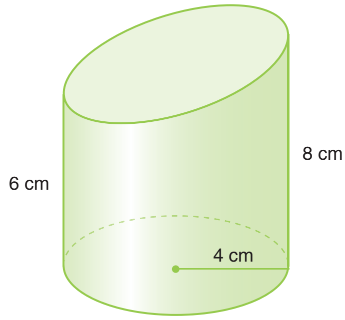
O volume V desse tronco T é a metade do volume do cilindro, representado ao lado, formado por dois troncos congruentes a T, isto é:

$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot (10 + 14)}{2} \text{ cm}^3 = 192\pi \text{ cm}^3$$

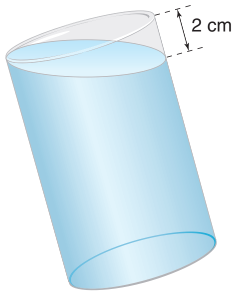


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27 A base circular de um tronco reto de cilindro tem raio 4 cm e as geratrizes maior e menor medem 8 cm e 6 cm. Calcule o volume desse tronco.

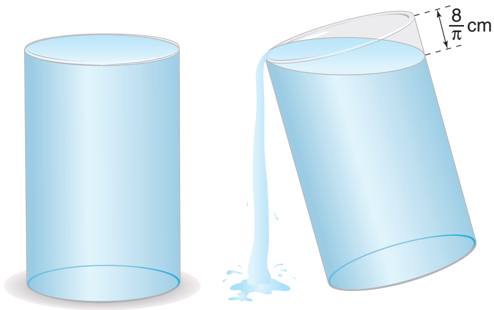


28 Um copo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 6 cm e cuja altura interna é 10 cm, contém certo volume de água. Inclinando o máximo possível esse copo sem derramar a água, obtemos a medida descrita na figura a seguir. Qual é o volume de água do copo?



29 Em uma plantação, os eucaliptos que atingem o diâmetro de 20 cm são cortados em forma de tronco reto de cilindro circular, tendo a geratriz menor 9 dm e a maior, 11 dm. Um caminhão carrega cerca de 150 m^3 dessa madeira. Calcule, aproximadamente, o número de troncos de árvore necessários para encher o caminhão. (Adote $\pi = 3{,}14$.)

30 (Ceeteps-SP) Um tubo de vidro, com formato de cilindro circular reto, é graduado com uma escala e está cheio de água até a borda. O diâmetro interno do tubo é 5 cm. Inclinando-o paulatinamente, despeja-se a água nele contida até que atinja a marca que dista da borda $\frac{8}{\pi}$ cm, conforme mostram as figuras.



O volume de água despejada é:

a) 25 cm^3
b) 50 cm^3
c) 75 cm^3
d) 100 cm^3
e) 125 cm^3

Resolva os exercícios complementares 11 e 89 a 93.

Cone circular

Objetivos

- **Reconhecer** um cone circular.
- **Calcular** a área lateral e a área total de um cone circular reto.
- **Calcular** o volume de um cone circular.

Termos e conceitos

- cone
- cone equilátero
- tronco de cone circular de bases paralelas

Podemos descrever o formato de um tornado e o da concha abaixo como alongados e afunilados. Uma descrição equivalente é que eles têm, aproximadamente, a forma cônica.

Tornado ocorrido no Canadá.

Concha de molusco marinho em forma de cone.

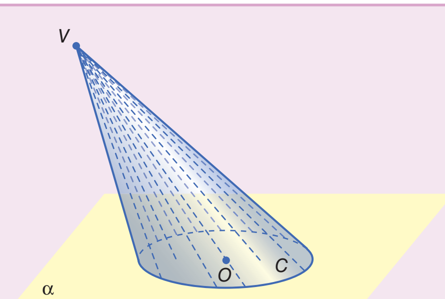
Essa forma, tão frequente na natureza, também está presente nas construções feitas pelo homem, de uma simples casquinha de sorvete até grandes estruturas, como partes de silos de armazenamento de grãos.

Silos de armazenamento de grãos, Estados Unidos.

Esses objetos lembram o **cone circular**, que é caracterizado por uma base circular e por todos os seus pontos formarem segmentos de reta com um extremo nessa base e o outro extremo em um mesmo ponto V, fora da base, conforme definimos a seguir.

Sejam um círculo C de centro O, contido em um plano α, e um ponto V não pertencente a α.

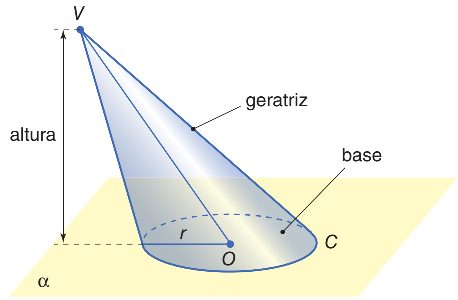
Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao círculo C e o outro no ponto V.



A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado cone circular limitado ou simplesmente **cone**.

Elementos de um cone circular

Observando o cone ao lado, nomeamos alguns elementos:

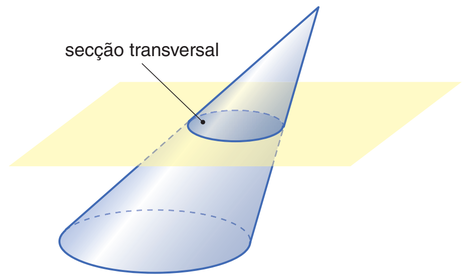


- o círculo C e o ponto V são chamados, respectivamente, de **base** e **vértice** do cone;
- a reta $\overleftrightarrow{OV}$ é chamada de **eixo** do cone;
- o raio do círculo C é chamado de **raio da base** do cone;
- a distância entre o vértice e o plano da base é chamada de **altura** do cone;
- todo segmento de reta cujos extremos são o ponto V e um ponto da circunferência da base é chamado de **geratriz** do cone.

Há outros tipos de cone (por exemplo, o de base elíptica), porém trataremos apenas dos cones circulares. Por comodidade, às vezes omitiremos a palavra "circulares", adotando simplesmente "cones".

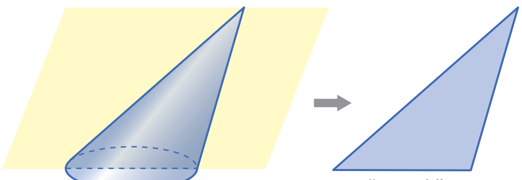
Secções de um cone circular

Uma **secção transversal** do cone é qualquer intersecção não vazia e não unitária do cone com um plano paralelo à sua base.



Note que toda secção transversal de um cone circular é um círculo.

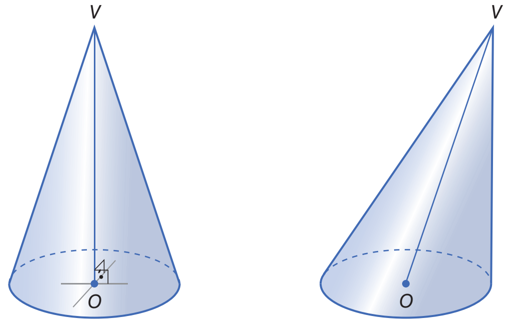
Uma **secção meridiana** de um cone é a intersecção do cone com um plano que passa pelo vértice e pelo centro da base desse cone.



Note que toda secção meridiana de um cone é um triângulo.

Cone circular reto e cone circular oblíquo

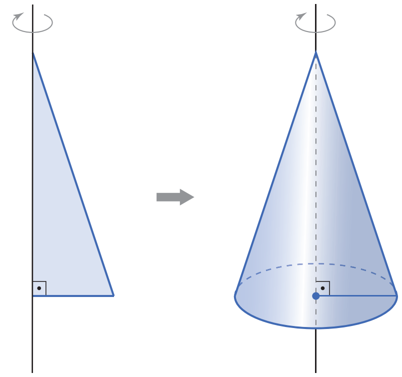
Cone circular **reto** é todo cone circular cujo eixo é perpendicular ao plano da base. Um cone circular que não é reto é chamado de cone circular **oblíquo**.



cone circular reto

cone circular oblíquo

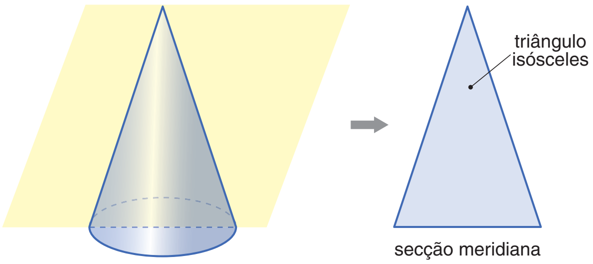
O cone circular reto também é conhecido como **cone de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução (rotação) de 360° de um triângulo retângulo em torno de um dos catetos.



cone de revolução

Propriedade

Toda secção meridiana de um cone circular reto (ou cone de revolução) é um triângulo isósceles cuja base é o diâmetro da base do cone e cuja altura é a altura do cone.

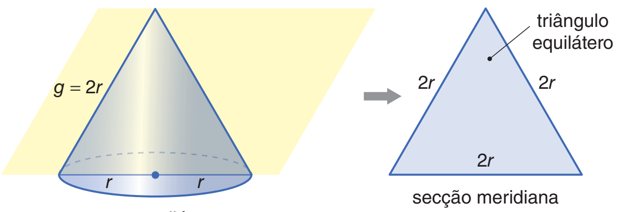


cone circular reto

secção meridiana

Cone equilátero

Todo cone circular reto cujas secções meridianas são triângulos equiláteros é chamado de **cone equilátero**.



cone equilátero

secção meridiana

Em todo cone equilátero, a medida g de cada geratriz é igual ao diâmetro $2r$ da base:

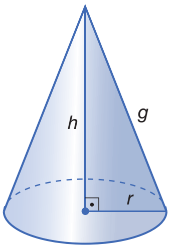
$$\boxed{g = 2r}$$

Relação entre os elementos de um cone circular reto

Observe ao lado o cone circular reto em que o raio da base, a geratriz e a altura medem r, g e h, respectivamente.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\boxed{g^2 = r^2 + h^2}$$



EXERCÍCIO RESOLVIDO

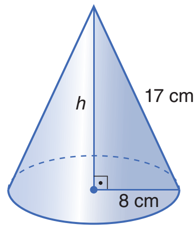
6 Calcular a medida h da altura de um cone circular reto cujo raio da base mede 8 cm e cuja geratriz mede 17 cm.

Resolução

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

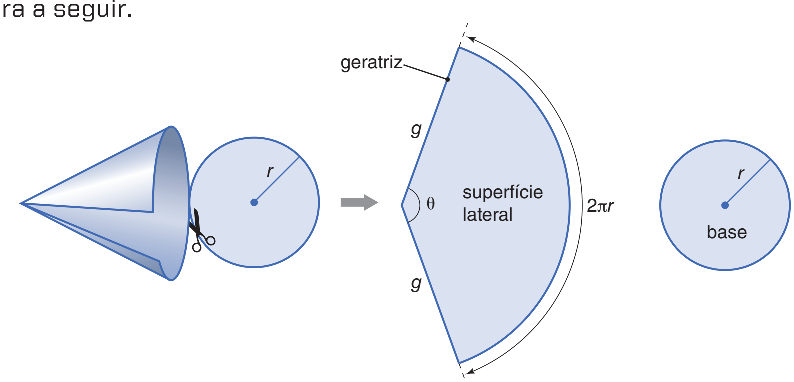
$h^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow h^2 = 225$

Logo: $h = 15$ cm



Área lateral e área total de um cone circular reto

A superfície de um cone circular reto cujo raio da base e cuja geratriz medem r e g, respectivamente, é equivalente à reunião de um círculo de raio r com um setor circular de raio g e arco de comprimento $2\pi r$. Para visualizar essa equivalência, retire a base do cone, corte sua superfície lateral sobre uma geratriz e, por fim, represente no plano as duas regiões obtidas, conforme mostra a figura a seguir.



Área lateral

A **área lateral** de um cone qualquer é a área da superfície formada pela reunião de todas as geratrizes do cone. Portanto, no cone circular reto de geratriz g e raio da base r, a área lateral A_ℓ é a área do setor circular obtido na planificação anterior, em que o raio e o arco do setor circular medem g e $2\pi r$, respectivamente. Logo, A_ℓ pode ser calculada pela regra de três:

Comprimento do arco do setor		Área do setor
$2\pi g$	———	πg^2
$2\pi r$	———	A_ℓ

$$\Rightarrow A_\ell = \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g}$$

Então, concluímos:

$$\boxed{A_\ell = \pi r g}$$

Área total

A **área total** A_T do cone é a soma da área lateral com a área da base:

$$A_T = \pi r g + \pi r^2$$

Portanto:

$$\boxed{A_T = \pi r(g + r)}$$

A medida θ, em radiano, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone é obtida pela regra de três:

Comprimento do arco do setor		Medida do ângulo central em radiano
$2\pi g$	———	2π
$2\pi r$	———	θ

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi r \cdot 2\pi}{2\pi g} \text{ rad}$$

Assim, concluímos:

$$\boxed{\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ rad}}$$

Como 2π rad equivalem a 360°, podemos expressar a medida θ, em grau, por $\theta = \dfrac{360° \cdot r}{g}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

7 Um cone circular reto tem 9 cm de altura e 12 cm de raio da base. Calcular desse cone:

a) a área lateral A_ℓ.

b) a área total A_T.

c) a medida θ, em grau, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral.

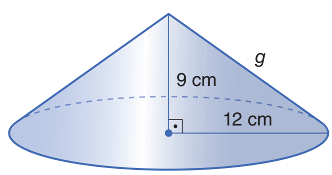
d) a área A_{SM} de uma secção meridiana.

Resolução

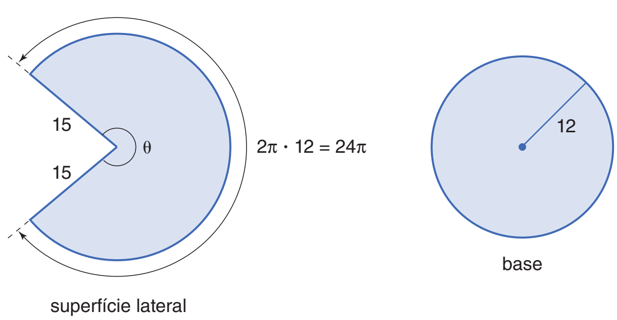
Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow g^2 = 225$

Logo: $g = 15$ cm



Representando no plano a superfície lateral e a base do cone, com as medidas indicadas em centímetro, temos:



a) A área lateral A_ℓ é obtida pela regra de três:

Comprimento do arco do setor (cm)		Área do setor (cm²)
$2\pi \cdot 15$	———	$\pi \cdot 15^2$
24π	———	A_ℓ

Então, concluímos:

$$A_\ell = \frac{24\pi \cdot 225\pi}{30\pi} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_\ell = 180\pi \text{ cm}^2$$

b) A área total A_T é a soma da área lateral A_ℓ com a área B da base:

$$A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = (180\pi + \pi \cdot 12^2) \text{ cm}^2 = 324\pi \text{ cm}^2$$

c) A medida θ, em grau, é dada pela regra de três:

Comprimento do arco do setor (cm)		Medida do ângulo central (grau)
$2\pi \cdot 15$	———	$360°$
24π	———	θ

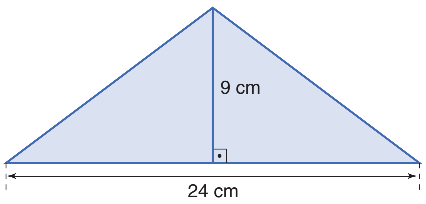
Portanto:

$$\theta = \frac{24\pi \cdot 360°}{30\pi} \Rightarrow \theta = 288°$$

d) Qualquer secção meridiana desse cone é um triângulo isósceles cuja base é o diâmetro da base do cone e cuja altura é a mesma do cone, conforme a figura ao lado.

Logo, a área A_{SM} de uma secção meridiana é dada por:

$$A_{SM} = \frac{24 \cdot 9}{2}\text{ cm}^2 = 108\text{ cm}^2$$



Nota: Para agilizar essa resolução, poderíamos, simplesmente, aplicar as fórmulas. Observe:

a) $A_\ell = \pi rg \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 12 \cdot 15\text{ cm}^2 = 180\pi\text{ cm}^2$

b) $A_T = \pi r(g + r) \Rightarrow A_T = \pi \cdot 12(15 + 12)\text{ cm}^2 = 324\pi\text{ cm}^2$

c) $\theta = \frac{360° \cdot r}{g} \Rightarrow \theta = \frac{360° \cdot 12}{15} = 288°$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

31 Um cone circular reto tem 8 cm de altura e 6 cm de raio da base. Calcule desse cone:

a) a área lateral A_ℓ.

b) a área total A_T.

c) a área A_{SM} de uma secção meridiana.

d) a medida θ, em radiano, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral.

32 A base de um cone equilátero tem raio de 6 cm. Calcule desse cone:

a) a área lateral A_ℓ.

b) a área total A_T.

c) a área A_{SM} de uma secção meridiana.

d) a medida θ, em radiano, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral.

33 Prove que a medida do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral de qualquer cone equilátero é 180°.

34 Em um cone de revolução de altura 5 cm, uma secção meridiana é um triângulo com um ângulo interno de 120°. Calcule a medida de uma geratriz desse cone.

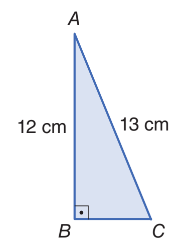
35 Um cone de revolução tem 4 cm de altura e 15π cm² de área lateral. Calcule a área de uma secção meridiana desse cone.

36 Em um cone circular reto, a área total é 10π m² e a altura é $\sqrt{5}$ m. Calcule a medida do raio da base desse cone.

37 Cada geratriz de um cone de revolução mede 6 dm e o ângulo central de um setor circular equivalente à superfície lateral desse cone mede $\frac{2\pi}{3}$ rad. Calcule a área lateral desse cone.

38 Em um cone circular reto de área lateral 27π dm², cada geratriz mede o triplo do raio da base. Calcule a altura desse cone.

39 Considerando o triângulo abaixo.



Calcule a área lateral do cone gerado pela revolução desse triângulo em torno:

a) do lado $\overline{AB}$.

b) do lado $\overline{BC}$.

Resolva os exercícios complementares 12 a 19 e 94 a 97.

Razão entre as áreas de uma secção transversal e da base de um cone circular

Se um cone circular de altura D tem área da base B, e um plano que contém sua secção transversal de área b está a uma distância d do vértice, então:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

Demonstração

Sejam R e r as medidas dos raios da base e da secção transversal do cone, respectivamente.

A área b da secção é $b = \pi r^2$ e a área B da base é $B = \pi R^2$.

Assim:

$$\frac{b}{B} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow \frac{b}{B} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{(I)}$$

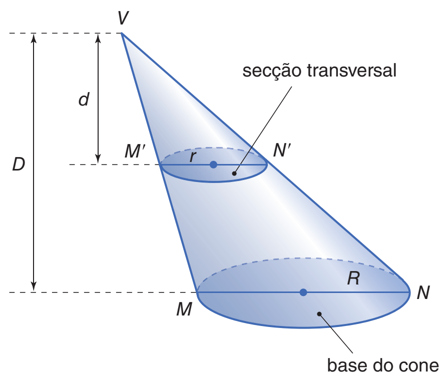
Temos, pelo caso AAA:

$$\triangle VM'N' \sim \triangle VMN \Rightarrow \frac{d}{D} = \frac{2r}{2R}$$

$$\therefore \frac{d}{D} = \frac{r}{R} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

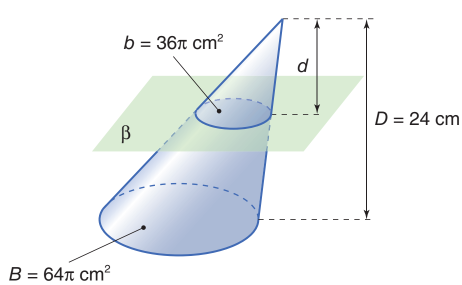


EXERCÍCIO RESOLVIDO

8 Um cone circular reto tem 24 cm de altura e 64π cm^2 de área da base. Um plano β, paralelo à base, determina nesse cone uma secção de área 36π cm^2. Calcular a distância do plano β ao vértice do cone.

Resolução

Sejam: b a área da secção, d a distância do plano β ao vértice, B a área da base e D a altura do cone.



Temos, então:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \Rightarrow \frac{36\pi}{64\pi} = \left(\frac{d}{24}\right)^2$$

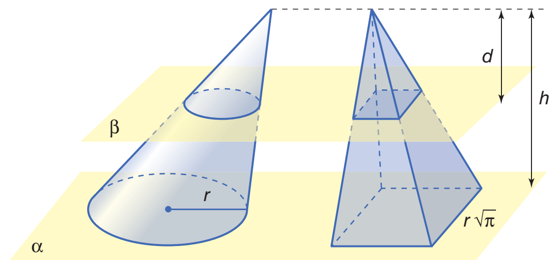
$$\therefore \frac{36}{64} = \left(\frac{d}{24}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{d}{24}$$

$$\therefore \frac{6}{8} = \frac{d}{24} \Rightarrow d = 18$$

Logo, o plano β dista 18 cm do vértice do cone.

Volume de um cone circular

Considere um cone circular de altura h com raio da base r, e uma pirâmide com a mesma altura h, cuja base é um quadrado de lado $r\sqrt{\pi}$. Suponhamos que esses sólidos estejam em um mesmo semiespaço com origem em um plano α e que suas bases estejam contidas em α, conforme mostra a figura ao lado:



A área B da base do cone, $B = \pi r^2$, é igual à área B' da base da pirâmide, $B' = \left(r\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi r^2$.

Todo plano β, paralelo a α, que determina uma secção de área b no cone, determina também uma secção de área b' na pirâmide, tal que:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \quad \text{(I)} \qquad \text{e} \qquad \frac{b'}{B'} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \quad \text{(II)}$$

em que d é a distância de β ao vértice do cone (ou ao vértice da pirâmide).

Por (I) e (II), temos:

$$\frac{b}{B} = \frac{b'}{B'}$$

Como $B = B'$, concluímos que $b = b'$.

Resumindo:

- o cone e a pirâmide têm bases equivalentes;
- todo plano β, paralelo a α, que secciona um dos sólidos também secciona o outro, determinando neles secções equivalentes.

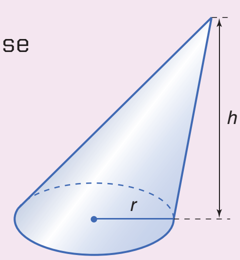
Assim, pelo princípio de Cavalieri, os sólidos têm volumes iguais. O volume V da pirâmide, que é igual ao volume do cone, é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B'h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Assim, concluímos:

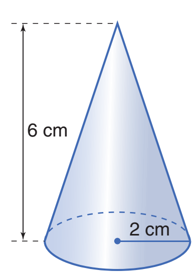
O volume V do cone circular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura.

$$V = \frac{1}{3} \cdot Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9 Calcular o volume de um cone circular reto de altura 6 dm e perímetro da base 4π dm.



Resolução

Indicando por r a medida do raio da base do cone, temos:

$2\pi r = 4\pi \Rightarrow r = 2$

Assim, o volume V do cone, que é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, é:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 6 \text{ dm}^3 \Rightarrow V = 8\pi \text{ dm}^3$

10 Calcular o volume de um cone circular de vértice L e base de centro O e raio 6 cm, tal que o segmento $\overline{LO}$ mede 18 cm e forma com o plano da base um ângulo de 60°.

Resolução

Calculando a medida h da altura do cone, temos:

$\text{sen } 60° = \dfrac{h}{18} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{18}$

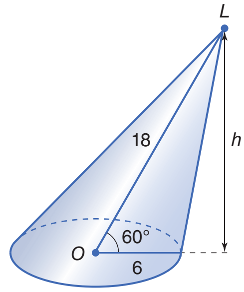
$\therefore h = 9\sqrt{3}$ cm

A área B da base é dada por:

$B = \pi \cdot 6^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 36\pi \text{ cm}^2$

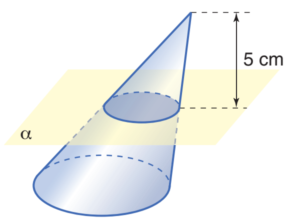
Concluindo, o volume V do cone, $V = \dfrac{1}{3} \cdot Bh$, é:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 36\pi \cdot 9\sqrt{3} \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 108\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

40 Um cone circular é interceptado por um plano α, paralelo à sua base e distante 5 cm de seu vértice, conforme mostra a figura. Sabendo que a razão entre a área da base do cone e sua secção transversal contida em α é $\dfrac{25}{4}$, calcule a distância entre o plano α e a base do cone.



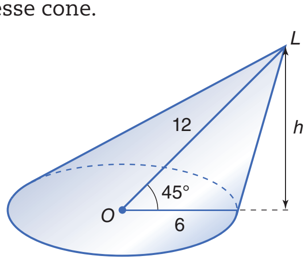
41 Em um cone circular de altura 20 cm, a área da base é o quádruplo da área de uma de suas secções transversais. Calcule a distância entre essa secção e o vértice do cone.

42 Calcule o volume de um cone circular reto cujo raio da base é 2 dm e cada geratriz mede $2\sqrt{5}$ dm.

43 Em um cone de revolução de altura 9 cm, cada geratriz mede $3\sqrt{10}$ cm. Calcule o volume desse cone.

44 Calcule o volume de um cone equilátero de altura $3\sqrt{2}$ cm.

45 Um cone circular de vértice L tem base de centro O e raio 6 dm. O segmento $\overline{LO}$ mede 12 dm e forma com o plano da base um ângulo de 45°. Calcule o volume desse cone.



46 Em um cone circular reto de altura 8 cm, a área de uma secção meridiana é 24 cm². Calcule o volume desse cone.

47 Um cone de revolução tem área lateral de 60π cm² e cada geratriz tem 10 cm de comprimento. Calcule o volume desse cone.

48 O volume de um cone equilátero é $9\pi\sqrt{3}$ dm³. Calcule desse cone:

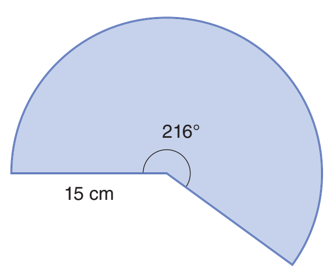
a) a medida do raio da base.

b) a área lateral A_ℓ.

c) a área total A_T.

d) a área A_{SM} de uma secção meridiana.

49 A figura abaixo representa a planificação da superfície lateral de um cone de geratriz 15 cm. Calcule o volume desse cone.



50 Em um tronco reto de cilindro circular o raio da base circular mede r, a geratriz maior mede 9 cm e a menor mede 7 cm. Se esse tronco é equivalente a um cone circular de altura 9 cm e raio da base R, então:

a) $\dfrac{r}{R} = 1$

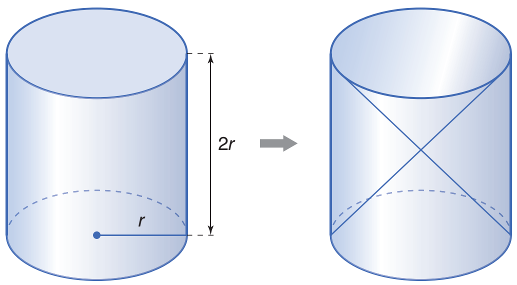
b) $\dfrac{r}{R} = \dfrac{3}{8}$

c) $\dfrac{r}{R} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

d) $\dfrac{r}{R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

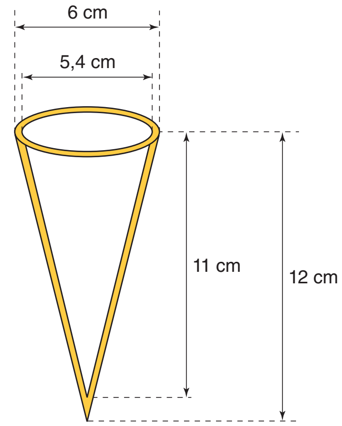
e) $\dfrac{r}{R} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

51 Um cilindro de revolução tem raio da base r e altura $2r$. Retiram-se desse cilindro dois cones circulares, de modo que suas bases coincidam com as bases do cilindro e seus vértices coincidam com o centro do cilindro. Calcule o volume do sólido remanescente em função de r.

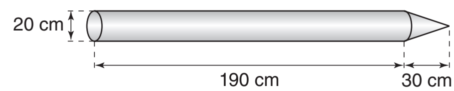


(*Nota*: O centro do cilindro de revolução é o ponto de encontro das duas diagonais de uma secção meridiana.)

52 Uma indústria produz casquinhas para sorvete confeccionadas com biju, na forma de cone circular reto. Externamente, cada cone tem 6 cm de diâmetro da base e 12 cm de altura, e internamente tem 5,4 cm de diâmetro da base e 11 cm de altura. Calcule o volume de biju, em centímetro cúbico, que compõe cada casquinha.



53 Uma indústria produz mourões de concreto formados por um cilindro circular reto e um cone circular reto, com as dimensões indicadas na figura a seguir.

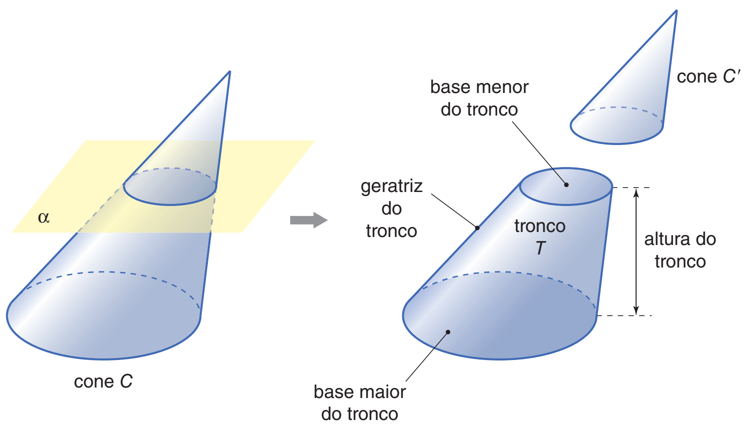


Quantos mourões como esses podem ser fabricados com 471 m^3 de concreto? (Adote $\pi = 3,14$.)

Resolva os exercícios complementares 20 a 27 e 98 a 103.

Tronco de cone circular de bases paralelas

Considere um plano α paralelo à base de um cone circular C separando-o em dois sólidos. Um desses sólidos é um cone C' e o outro é um **tronco de cone circular de bases paralelas**.



Nesse tronco, temos:

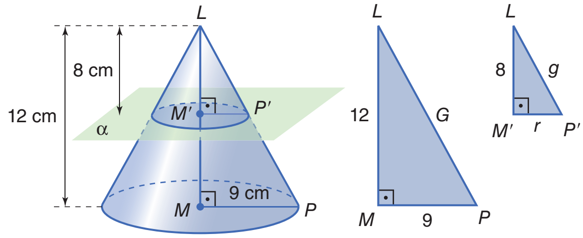
- as partes planas da superfície do tronco (círculos) são as **bases** do tronco;
- a distância entre as bases é a **altura** do tronco;
- as partes das geratrizes do cone original contidas no tronco são as **geratrizes** do tronco;
- o **volume** do tronco é a diferença entre os volumes dos cones C e C', nessa ordem;
- a **área lateral** do tronco é a diferença entre as áreas laterais dos cones C e C', nessa ordem;
- a **área total** do tronco é a soma de sua área lateral com as áreas das suas bases.

11 Seja um cone circular reto de altura 12 cm e raio da base 9 cm. Um plano α paralelo à base e distante 8 cm do vértice separa o cone em dois sólidos. Do tronco de cone assim determinado, calcular:

a) o volume V. **b)** a área lateral A_ℓ. **c)** a área total A_T.

Resolução

Indicando por G a medida da geratriz do cone original C, e por g e r as medidas da geratriz e do raio da base do cone C', contido em C e com base no plano α, temos:



a) Pela semelhança entre os triângulos LMP e $LM'P'$, temos:

$$\frac{12}{8} = \frac{9}{r} \Rightarrow r = 6$$

Assim, já podemos calcular o volume V do tronco, que é dado pela diferença entre os volumes dos cones C e C':

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8\right) \text{cm}^3 = 228\pi \text{ cm}^3$$

b) Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos LMP e $LM'P'$, temos:

$$G^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow G = 15$$

$$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10$$

Assim, já podemos calcular a área lateral A_ℓ do tronco, que é dada pela diferença entre as áreas laterais dos cones C e C':

$$A_\ell = (\pi \cdot 9 \cdot 15 - \pi \cdot 6 \cdot 10) \text{ cm}^2 = 75\pi \text{ cm}^2$$

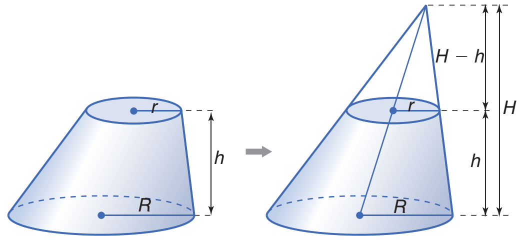
c) A área total A_T do tronco é a soma da área lateral com as áreas das bases:

$$A_T = (75\pi + \pi \cdot 9^2 + \pi \cdot 6^2) \text{ cm}^2 = 192\pi \text{ cm}^2$$

12 Demonstre que o volume V de um tronco de cone de altura h, cujos raios das bases maior e menor medem R e r, respectivamente, é dado por: $V = \dfrac{\pi h(R^2 + Rr + r^2)}{3}$

Resolução

Esquematizando o tronco de cone e prolongando as geratrizes, obtemos o cone de altura H que contém o tronco:



Por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{H-h} \Rightarrow H = \frac{Rh}{R-r}$$

Como o volume V do tronco de cone é dado pela diferença entre os volumes do cone maior e do cone menor, temos:

$$V = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{Rh}{R-r} - \frac{\pi r^2}{3}\left(\frac{Rh}{R-r} - h\right) \Rightarrow V = \frac{\pi h}{3}\left(\frac{R^3 - r^3}{R-r}\right)$$

Fatorando a diferença de cubos, concluímos:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left[\frac{\cancel{(R-r)}(R^2 + Rr + r^2)}{\cancel{R-r}}\right] \Rightarrow V = \frac{\pi h(R^2 + Rr + r^2)}{3}$$

Cones semelhantes

Como já vimos, o conceito de semelhança entre figuras pode ser definido para quaisquer figuras espaciais. No caso dos cones circulares, definimos:

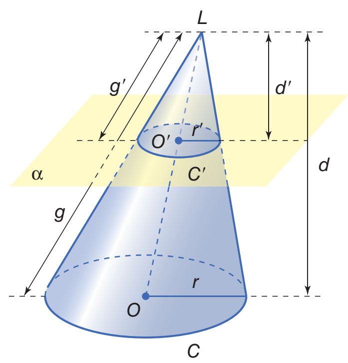
Dois cones circulares são **semelhantes** se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa cada secção meridiana S de um deles a uma secção meridiana S' do outro, tal que S e S' são triângulos semelhantes.

Exemplo

Se um plano α intercepta um cone circular de vértice L paralelamente à base C, determinando uma secção transversal C', então os cones de vértice L e bases C e C' são semelhantes.

A razão de semelhança k, do maior para o menor cone, pode ser obtida por:

$$\frac{g}{g'} = \frac{r}{r'} = \frac{d}{d'} = \frac{LO}{LO'} = k$$



O e *O'* são os centros das bases de raios *r* e *r'*, respectivamente; *g* e *g'* são medidas de geratrizes correspondentes; *d* e *d'* são alturas dos cones maior e menor, respectivamente.

Propriedade

A razão entre os volumes de dois cones semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Demonstração

Considerando a figura anterior, sejam V e V' os volumes do cone maior e do menor, respectivamente. Temos:

(I) $\frac{r}{r'} = \frac{d}{d'} = k$ (razão de semelhança)

(II) $\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot d}{\frac{1}{3} \cdot \pi (r')^2 \cdot d'} = \frac{r^2}{(r')^2} \cdot \frac{d}{d'} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \frac{d}{d'}$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

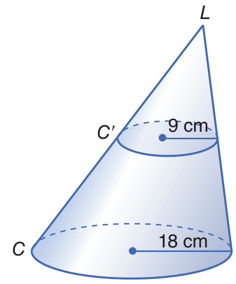
$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \frac{d}{d'} = k^2 \cdot k \Rightarrow \frac{V}{V'} = k^3$$

No capítulo anterior, demonstramos uma propriedade análoga a essa para as pirâmides. Vale a pena destacar que essa propriedade pode ser demonstrada para quaisquer sólidos semelhantes, isto é:

A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

13 Em um cone circular de vértice L, raio da base 18 cm e volume 200 cm^3, o raio de uma secção transversal C' mede 9 cm. Calcular o volume V do cone de vértice L e base C'.



Resolução

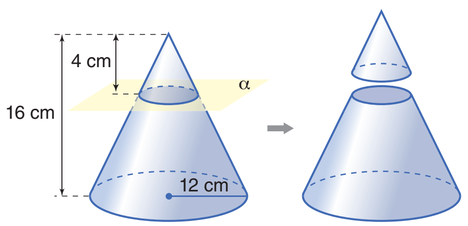
Os cones de vértice L e bases C e C' são semelhantes e, portanto, a razão entre seus volumes é igual ao cubo da razão de semelhança:

$$\frac{200}{V} = \left(\frac{18}{9}\right)^3 \Rightarrow \frac{200}{V} = 2^3$$

Portanto, $V = 25$ cm^3.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

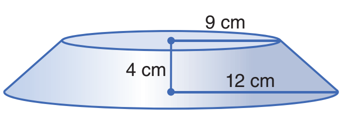
54 Em um cone circular reto de altura 16 cm e raio da base 12 cm, um plano α determina uma secção transversal à distância de 4 cm do vértice.



Do tronco de cone assim determinado, calcule:

a) o volume. **b)** a área lateral. **c)** a área total.

55 Um tronco de cone circular reto tem 4 cm de altura e suas bases paralelas têm raios 9 cm e 12 cm, conforme mostra a figura.

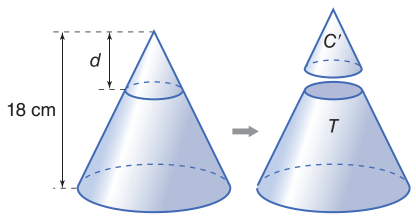


Calcule desse tronco:

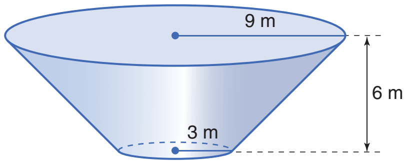
a) o volume. **b)** a área lateral. **c)** a área total.

(*Sugestão*: Prolongue as geratrizes, obtendo o cone que contém esse tronco.)

56 Uma secção transversal separa um cone circular reto C de altura 18 cm em um tronco T e um cone C', conforme mostra a figura. Sabendo que o volume do tronco é igual a sete vezes o volume do cone C', calcule a distância d entre a secção transversal e o vértice do cone.



57 Um reservatório de água tem a forma de um tronco de cone circular reto de bases paralelas. Internamente, esse reservatório tem 6 m de altura e raios de 9 m e 3 m nas bases. Adotando $\pi = 3{,}14$, calcule a capacidade desse reservatório, em litro.



58 A copa de um abajur tem 12 cm de altura e a forma da superfície lateral de um tronco de cone reto de bases circulares paralelas, de raios 10 cm e 15 cm.

A área dessa copa é:

a) 280π cm^2

b) 20π cm^2

c) 180π cm^2

d) 325π cm^2

e) 45π cm^2

59 Um funil é formado por uma peça cilíndrica circular reta de altura 12 cm e raio interno de 2 cm, e uma peça com a forma de um tronco cônico circular reto de bases paralelas com altura de 10 cm e raios internos das bases menor e maior com 2 cm e 6 cm. Qual é a capacidade desse funil em mililitro?

Resolva os exercícios complementares 28 a 32 e 104 a 110.

Seção 12.3

Esfera

Objetivos

- **Reconhecer** esfera e superfície esférica.
- **Calcular** o volume de uma esfera.
- **Calcular** a área de uma superfície esférica.
- **Reconhecer** um fuso esférico e calcular sua área.
- **Reconhecer** esferas tangentes.

Termos e conceitos

- esfera
- corda da esfera
- hemisfério
- ângulo diedro
- cunha esférica
- fuso esférico

Em todas as mitologias, independentemente da cultura da qual fazem parte, os mitos assumem múltiplos papéis, por exemplo, propõem explicações para a criação da vida, têm objetivo religioso, educativo, político etc. Na Grécia antiga, um dos mitos relata que o titã Atlas foi condenado a carregar o mundo em seus ombros, após ter escalado o céu com outros gigantes para destituir Zeus do poder supremo. É por isso que as esculturas de Atlas o representam com ar de sofrimento e a esfera terrestre às costas.

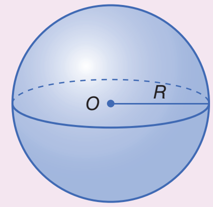
Observe que, mesmo nas representações mais antigas, a Terra é mostrada como uma esfera. Isso ocorre porque os pensadores da Antiguidade, como Aristóteles, já atribuíam à Terra a forma esférica, pois a observação de astros, como a Lua e o Sol, e da sombra do nosso planeta projetada na superfície da Lua durante um eclipse lunar, levou-os a deduzir que a Terra também tinha a forma esférica.

Atlas sustentando o mundo, escultura criada na Antiguidade. Faz parte da Coleção Farnese, reunida pelo papa Paulo III (1543-1549).

Sombra da Terra projetada na superfície da Lua durante eclipse lunar.

Nesta seção, estudaremos a esfera, seus elementos e propriedades. Acompanhe as definições a seguir.

Considere um ponto O e uma medida R, com $R > 0$. Chama-se **esfera** de centro O e raio R o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais a R.



Considerando a definição acima, temos:

- o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **menores** que R é chamado de **interior** da esfera;
- o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **iguais** a R é chamado de **superfície esférica**;
- o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **maiores** que R é chamado de **exterior** da esfera.

Por essas definições, concluímos que a esfera é maciça enquanto a superfície esférica é apenas a “casca” da esfera. Dois modelos adequados para representar esses objetos, respectivamente, são:

Uma bolinha de gude é maciça, sugerindo a ideia de esfera.

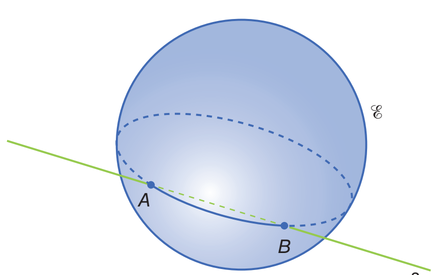
Uma bolinha de pingue-pongue é oca, sugerindo a ideia de superfície esférica.

Posições relativas entre uma reta e uma esfera

São três as posições relativas possíveis entre reta e esfera, como será visto a seguir.

Reta secante a uma esfera

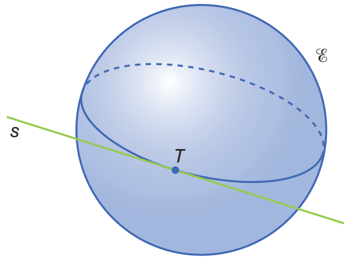
Uma reta s é **secante** a uma esfera $\mathscr{E}$ se, e somente se, ambas têm em comum infinitos pontos. Esses infinitos pontos comuns formam um segmento de reta chamado de **corda da esfera**.



$\mathscr{E} \cap s = \overline{AB} \Leftrightarrow s$ é secante a $\mathscr{E}$.

Reta tangente a uma esfera

Uma reta s é **tangente** a uma esfera $\mathscr{E}$ se, e somente se, ambas têm em comum um único ponto.



$\mathscr{E} \cap s = \{T\} \Leftrightarrow s$ é tangente a $\mathscr{E}$.

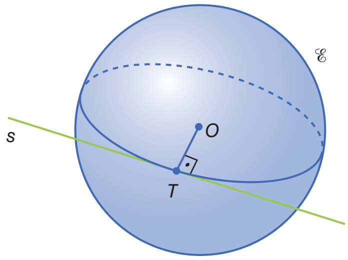
Propriedade

O raio da esfera é perpendicular à reta tangente no ponto de contato.

Demonstração

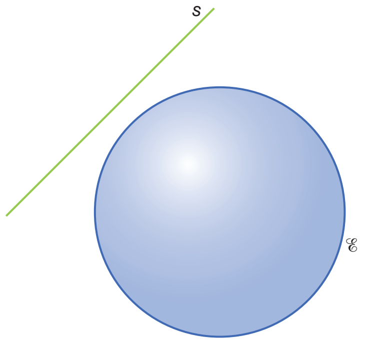
Sejam $\mathscr{E}$ uma esfera de centro O e s uma reta tangente a $\mathscr{E}$ em um ponto T.

A menor distância entre o centro O da esfera e a reta tangente s é a medida do raio $\overline{OT}$. Como a menor distância entre um ponto e uma reta é o comprimento do segmento que liga o ponto à reta, perpendicularmente, concluímos que $\overline{OT} \perp s$.



Reta exterior a uma esfera

Uma reta s é **exterior** a uma esfera $\mathscr{E}$ se, e somente se, não existe ponto comum a ambas.



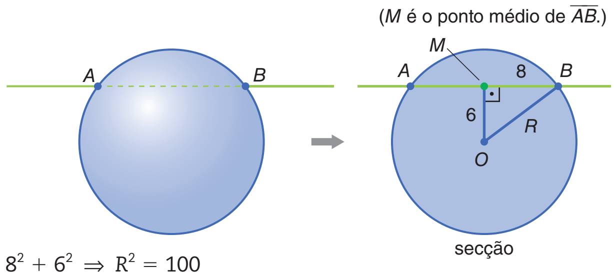
$\mathscr{E} \cap s = \varnothing \Leftrightarrow s$ é exterior a $\mathscr{E}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

14 Uma reta secante a uma esfera de centro O e raio R dista 6 cm de O e determina uma corda $\overline{AB}$ de comprimento 16 cm nessa esfera. Calcular a medida R.

Resolução

A intersecção do plano pl(ABO) com a superfície esférica é uma circunferência cujo raio é o mesmo da esfera. Fazendo um esquema dessa secção, obtemos:



Pelo teorema de Pitágoras, temos: $R^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow R^2 = 100$

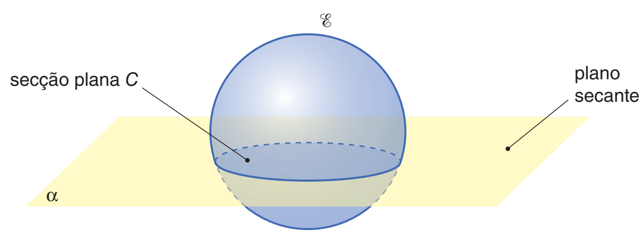
Logo, a esfera tem raio de 10 cm.

Posições relativas entre um plano e uma esfera

São três as posições relativas possíveis entre plano e esfera, como será visto a seguir.

Plano secante a uma esfera

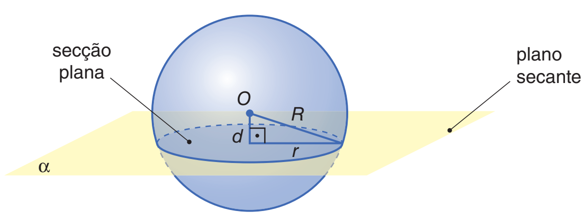
Um plano α é **secante** a uma esfera $\mathscr{E}$ se, e somente se, ambos têm em comum infinitos pontos. Esses infinitos pontos comuns formam um círculo C chamado de **secção plana** da esfera.



$\mathscr{E} \cap \alpha = C \Leftrightarrow \alpha$ é secante a $\mathscr{E}$.

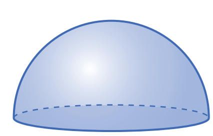
Sendo R a medida do raio da esfera, r a medida do raio de uma secção plana e d, com $d > 0$, a distância do plano α ao centro O da esfera, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$R^2 = d^2 + r^2$$



Notas:

1. Uma secção plana que passa pelo centro de uma esfera tem o mesmo centro e o mesmo raio dessa esfera e é chamada de **círculo máximo da esfera**. A circunferência que limita esse círculo é chamada de **circunferência máxima da esfera**.

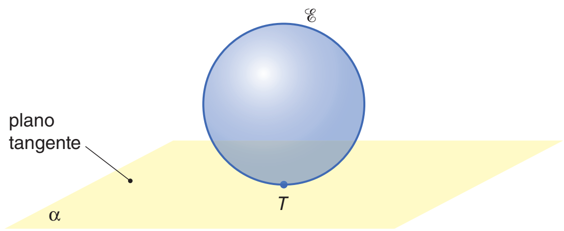


hemisfério

2. O círculo máximo de uma esfera separa-a em dois sólidos chamados de **hemisférios** (ou **semiesferas**). O círculo máximo é chamado de base do hemisfério cujo raio é o próprio raio da esfera.

Plano tangente a uma esfera

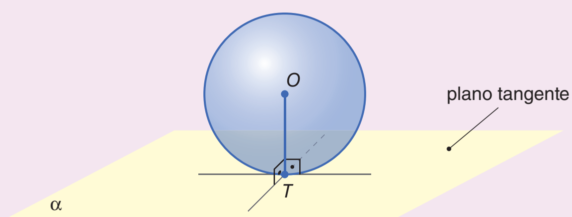
Um plano α é **tangente** a uma esfera $\mathscr{E}$ se, e somente se, ambos têm em comum um único ponto.



$\mathscr{E} \cap \alpha = \{T\} \Leftrightarrow \alpha$ é tangente a $\mathscr{E}$.

Propriedade

O raio da esfera é perpendicular ao plano tangente no ponto de contato.



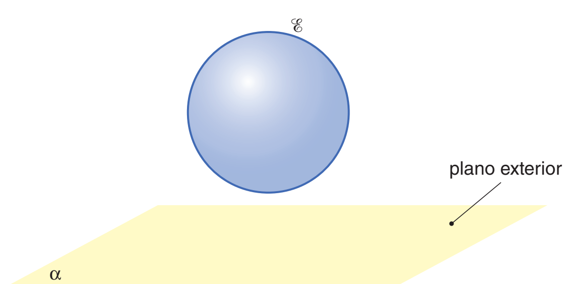
Demonstração

Sejam $\mathscr{E}$ uma esfera de centro O e α um plano tangente a $\mathscr{E}$ em um ponto T.

A menor distância entre o centro O da esfera e o plano tangente α é a medida do raio $\overline{OT}$. Como a menor distância entre um ponto e um plano é o comprimento do segmento que liga o ponto ao plano perpendicularmente, concluímos que $\overline{OT} \perp \alpha$.

Plano exterior a uma esfera

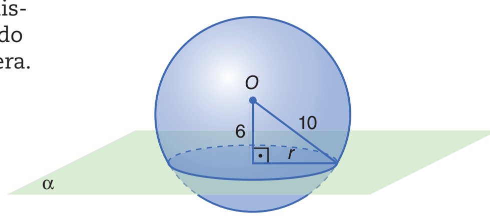
Um plano α é **exterior** a uma esfera $\mathscr{E}$ se, e somente se, não existe ponto comum a ambos.



$\mathscr{E} \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow \alpha$ é exterior a $\mathscr{E}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

15 Um plano α secciona uma esfera de raio 10 cm à distância de 6 cm de seu centro. Calcular a medida r do raio da secção plana determinada por α nessa esfera.



Resolução

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

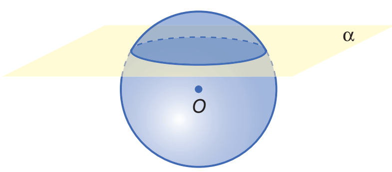
$r^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 64$

Logo, o raio da secção plana mede 8 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

60 Em uma esfera de centro O e raio 6 cm uma corda $\overline{AB}$ mede 8 cm. Calcule a distância entre o centro O e a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

61 Uma esfera de centro O e raio 17 cm é seccionada por um plano α à distância de 8 cm do centro O.

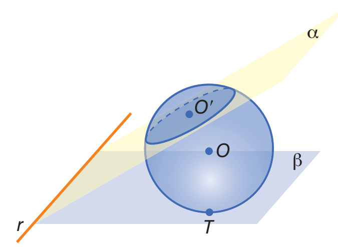


a) Calcule a medida do raio do círculo determinado pela intersecção do plano com a esfera.

b) O círculo mencionado no item **a** é uma secção plana da esfera. Calcule a área dessa secção.

62 Em uma esfera de centro O e raio 15 dm, a área de uma secção plana é 81π dm^2. Calcule a distância entre o centro O e o plano que contém essa secção.

63 Um plano α dista 12 cm do centro O de uma esfera e nela determina uma secção de centro O' e raio 16 cm. Um plano β é tangente a essa esfera em um ponto T e possui uma reta r em comum com α, conforme mostra a figura, sendo 48 cm a distância entre T e r. Calcule a distância entre O e r.



64 Consideremos a Terra como uma esfera de centro C e raio R. Qualquer plano secante à superfície terrestre e perpendicular ao seu eixo de rotação determina nessa superfície uma circunferência chamada de **paralelo terrestre**.

Sejam A e B dois pontos distintos de um paralelo de raio $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. Se um navio, indo de A até B, sobre esse paralelo, percorre 120°, então a medida α do ângulo $A\hat{C}B$ é:

a) 30°
b) 150°
c) 90°
d) 60°
e) 120°

65 Uma bola com 20 cm de raio boia na água de uma piscina, tendo 20% do diâmetro vertical submerso. Calcule a medida do raio da circunferência determinada pela intersecção da superfície da água com a superfície da bola.

Resolva os exercícios complementares 33 a 35 e 111 a 113.

Volume de uma esfera

O volume V de uma esfera de raio R é dado por:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Exemplo

O volume V de uma esfera com 5 cm de raio é dado por:

$$V = \frac{4\pi \cdot 5^3}{3}\ \text{cm}^3 = \frac{500\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Demonstração do volume da esfera.*

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

66 Calcule o volume de uma esfera de raio 2 m.

67 Calcule o volume de um hemisfério cuja base é um círculo de raio 6 cm.

68 Calcule o volume de uma esfera cujo círculo máximo tem área 16π m^2.

69 Um plano α dista 6 dm do centro de uma esfera e nela determina uma secção de área 13π dm^2. Calcule o volume dessa esfera.

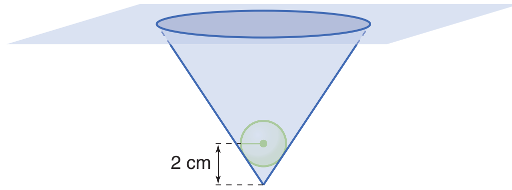
70 Uma esfera de raio 3 cm tem o mesmo volume de um cilindro circular reto de altura 4 cm. Calcule a medida do raio da base do cilindro.

71 Em uma panela em forma de cilindro circular reto, com 8 cm de raio da base interna, foram colocadas seis bolas maciças de chocolate com 4 cm de diâmetro. Qual é a altura atingida pelo chocolate, depois de derretido, em relação ao fundo horizontal da panela?

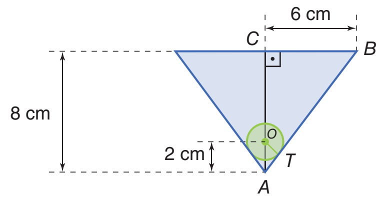
72 Uma esfera maciça de ferro, com 5 cm de raio, será fundida e transformada em um cubo maciço. A medida da aresta do cubo será:

a) $6\sqrt[3]{12\pi}$ cm
b) $\dfrac{\sqrt[3]{60\pi}}{3}$ cm
c) $\dfrac{\sqrt[3]{60\pi}}{6}$ cm
d) $5\sqrt[3]{12\pi}$ cm
e) $\dfrac{5\sqrt[3]{36\pi}}{3}$ cm

73 Ao cair em uma cavidade em forma de cone circular reto de altura 8 cm e raio da base 6 cm, uma esfera estacionou com seu centro a 2 cm do vértice do cone, conforme mostra a figura.



a) A figura abaixo representa uma secção meridiana desse cone, em que a geratriz $\overline{AB}$ tangencia a esfera no ponto T. Prove que os triângulos ABC e AOT são semelhantes.



b) Calcule o volume da esfera.

Resolva os exercícios complementares 36 a 39 e 114 a 120.

Área da superfície esférica

A área A da superfície de uma esfera de raio R é dada por:

$$A = 4\pi R^2$$

Exemplo

A área A de uma superfície esférica de raio 5 cm é dada por:

$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2\ \text{cm}^2 = 100\pi\ \text{cm}^2$

Material complementar Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração da área da superfície esférica.*

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

74 Calcule a área da superfície de uma esfera de raio 6 dm.

75 Qual é a área da superfície de uma esfera cujo volume é $\dfrac{32\pi}{3}$ m^3?

76 Uma circunferência máxima de uma esfera tem perímetro 20π cm. Calcule a área da superfície dessa esfera.

77 Calcule o volume de uma esfera cuja superfície tem área 400π cm^2.

78 Calcule a área de um hemisfério maciço cuja base tem 3 cm de raio.

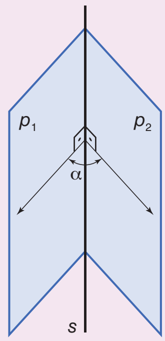
79 Para a confecção de um colar, um joalheiro deve banhar em ouro as superfícies de 60 esferas de 1 cm de diâmetro. Calcule quanto custará esse banho, sabendo que o custo por centímetro quadrado é R$ 4,50.

Resolva os exercícios complementares 40 a 45, 121 e 122.

Fuso esférico e cunha esférica

Para definir fuso esférico e cunha esférica, é necessário o conceito de **ângulo diedro**.

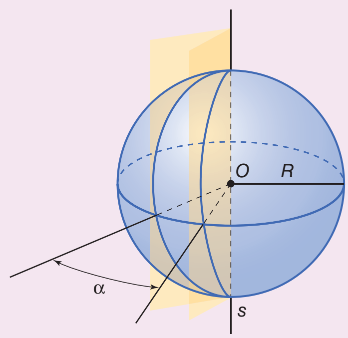
Dois semiplanos, p_1 e p_2, de mesma origem s separam o espaço em duas partes. A reunião desses semiplanos com cada uma dessas partes é chamada de **ângulo diedro** de faces p_1 e p_2 e aresta s. A medida α do ângulo entre as faces é a medida do ângulo diedro.



Notas:

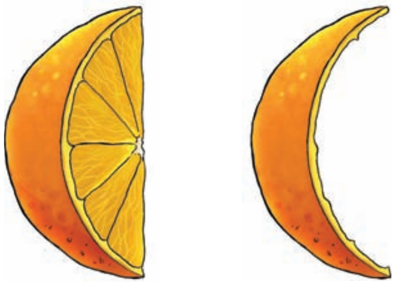
1. Um ângulo diedro pode ser chamado simplesmente de **diedro**.
2. Dois semiplanos, p_1 e p_2, de mesma origem determinam dois ângulos diedros: um de medida α, em grau, e o outro de medida $360° - \alpha$.

Considere um ângulo diedro de medida α, cuja aresta s passa pelo centro O de uma esfera de raio R:



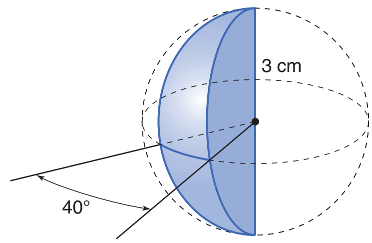
- A parte da esfera contida nesse diedro é chamada de **cunha esférica** de raio R e ângulo diedro de medida α.
- A parte da superfície esférica contida nesse diedro é chamada de **fuso esférico** de raio R e ângulo diedro de medida α.

Para visualizar melhor uma cunha e um fuso esférico, imaginemos dois cortes em uma laranja feitos com uma faca que passou pelo centro da fruta. O pedaço limitado por esses cortes dá ideia de uma cunha esférica, e a casca contida nesse pedaço dá a ideia de fuso esférico.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 Calcular o volume de uma cunha esférica de raio 3 cm cujo ângulo diedro mede 40°.



Resolução

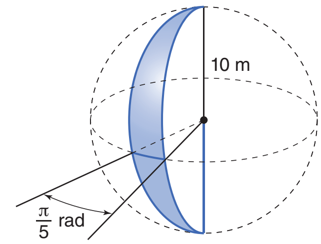
A razão entre o volume de uma esfera e a medida do ângulo diedro de uma volta completa (360° ou 2π rad) é igual à razão entre o volume de uma cunha qualquer dessa esfera e a medida de seu ângulo diedro. Assim, o volume V da cunha em questão pode ser calculado pela regra de três:

Ângulo (grau)		Volume (cm^3)	
360	———	$\frac{4\pi \cdot 3^3}{3}$	$\Rightarrow$
40	———	V	

$$\Rightarrow V = \frac{40 \cdot 36\pi}{360} \, cm^3$$

Logo, o volume da cunha esférica é 4π cm^3.

17 Calcular a área de um fuso esférico de raio 10 m cujo ângulo diedro mede $\frac{\pi}{5}$ rad.



Resolução

A razão entre a área da superfície de uma esfera e a medida do ângulo diedro de uma volta completa (360° ou 2π rad) é igual à razão entre a área de um fuso qualquer dessa superfície e a medida de seu ângulo diedro. Assim, a área A do fuso esférico em questão pode ser calculada pela regra de três:

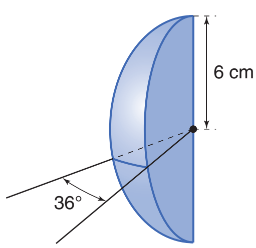
Ângulo (rad)		Área (m^2)	
2π	———	$4\pi \cdot 10^2$	$\Rightarrow$
$\frac{\pi}{5}$	———	A	

$$\Rightarrow A = \left(\frac{\frac{\pi}{5} \cdot 400\pi}{2\pi}\right) m^2$$

Logo, a área do fuso é 40π m^2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

80 Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 6 cm cujo ângulo diedro mede 36°.



81 Um fuso esférico tem 4 cm de raio e $\frac{\pi}{8}$ rad de ângulo diedro. Calcule a área desse fuso.

82 Um fuso esférico de área 20π m^2 está contido em uma esfera de raio 5 m. Calcule a medida, em grau, do ângulo diedro desse fuso.

83 Uma cunha esférica de volume $\frac{36\pi}{5}$ cm^3 está contida em uma esfera de raio 3 cm. Calcule a medida, em rad, do ângulo diedro dessa cunha.

84 (UFPI) Supondo que a circunferência máxima do globo terrestre tenha 40.000 km de comprimento, a área de cada fuso horário, em km^2, é:

a) $\frac{32}{3\pi^2} \cdot 10^{12}$

b) $\frac{4}{9\pi^2} \cdot 10^{12}$

c) $\frac{2}{3\pi} \cdot 10^8$

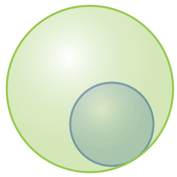
d) $\frac{4\pi}{3} \cdot 10^8$

e) $\frac{4\pi^2}{3} \cdot 10^{12}$

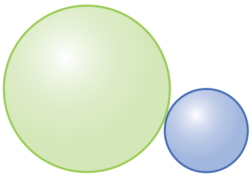
Resolva os exercícios complementares 46 a 49, 123 e 124.

Esferas tangentes

Duas **esferas** são **tangentes** se, e somente se, suas superfícies têm um único ponto comum.



esferas tangentes interiormente



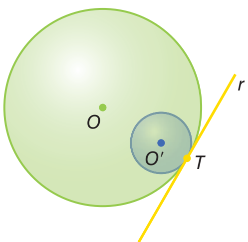
esferas tangentes exteriormente

Propriedade

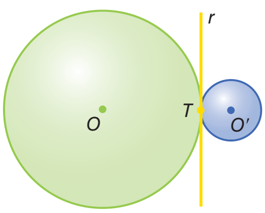
Se duas esferas de centros O e O' são tangentes em um ponto T, então os pontos O, O' e T são colineares.

Demonstração

Considere um plano α que passa pelos pontos O, O' e T. Obtemos, assim, duas secções planas das esferas cujas circunferências são tangentes entre si.



esferas tangentes interiormente

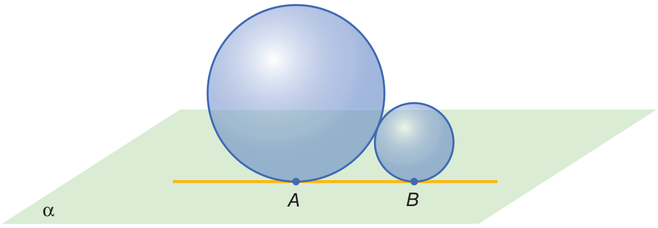


esferas tangentes exteriormente

Sendo r a reta tangente comum às duas circunferências das secções planas, temos que $\overleftrightarrow{OT}$ é perpendicular a r, e a reta $\overleftrightarrow{O'T}$ também é perpendicular a r. Como $\{O, O', T\}$ e r estão contidos no mesmo plano α, concluímos que por T passa uma única reta de α, perpendicular a r. Logo, $\overleftrightarrow{OT} \equiv \overleftrightarrow{O'T}$ e, portanto, O, O' e T são pontos colineares.

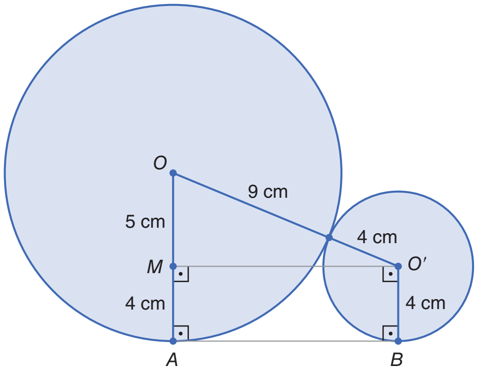
EXERCÍCIO RESOLVIDO

18 Duas esferas tangentes exteriormente e tangentes a um plano α nos pontos A e B têm raios de medidas 9 cm e 4 cm. Calcular a distância entre A e B.



Resolução

Consideramos um plano que passa pelos centros das esferas e pelos pontos A, B. Um esquema da secção obtida pela intersecção desse plano com as esferas é:



No triângulo $OO'M$, temos:

$(MO')^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow (MO')^2 + 25 = 169$

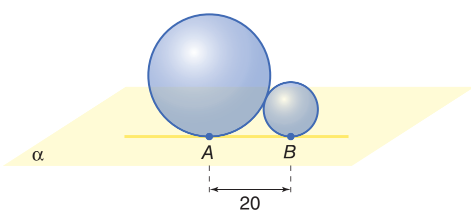
$\therefore (MO')^2 = 144 \Rightarrow (MO') = \sqrt{144}$

$\therefore MO' = 12$

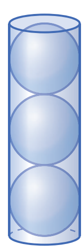
Como $MO' = AB$, concluímos que $AB = 12$ cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

85 Duas esferas são tangentes entre si exteriormente e tangentes a um plano α nos pontos A e B, com $AB = 20$ cm, conforme mostra a figura. O raio de uma das esferas é o dobro do raio da outra. Determine as medidas, em centímetro, desses raios.

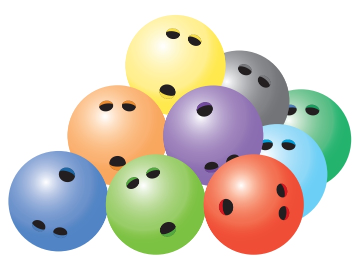


86 Uma embalagem tem a forma de um cilindro circular reto com 162π cm³ de volume interno. No interior dessa embalagem são colocadas 3 bolas que tangenciam a superfície lateral ou a superfície lateral e uma base do cilindro, e cada bola tangencia uma outra. O raio de cada bola mede:



a) 2,8 cm
b) 4 cm
c) 3,5 cm
d) 4,2 cm
e) 3 cm

87 Em uma competição de boliche, 14 bolas, com 20 cm de diâmetro, foram dispostas no formato de uma pirâmide quadrangular regular, conforme a figura. A altura dessa pilha é:



a) $20\sqrt{2}$ cm
b) $20(1 + \sqrt{2})$ cm
c) 40 cm
d) 40,8 cm
e) $12\sqrt{3}$ cm

Resolva o exercício complementar 50.

Inscrição e circunscrição de uma esfera

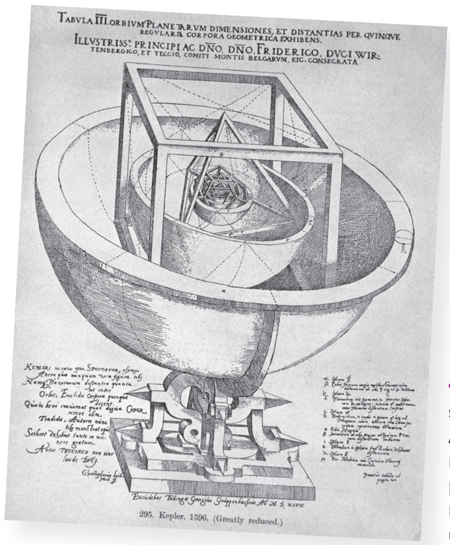
Objetivo

- **Reconhecer** uma inscrição ou circunscrição de uma esfera em um sólido.

Termos e conceitos

- esfera inscrita em um poliedro
- esfera circunscrita a um poliedro

É bastante provável que não tenha existido em outro momento da história da Astronomia tamanha discussão envolvendo inscrição e circunscrição da esfera em poliedros como na última década do século XVI, quando Johannes Kepler (1571-1630) publicou a obra *Mysterium cosmographicum*. Nessa obra, Kepler apresenta o modelo de um sistema solar heliocêntrico, em que superfícies esféricas aparecem inscritas e circunscritas a poliedros regulares.



Modelo do sistema solar criado por Kepler. As superfícies esféricas representam as órbitas planetárias, e os poliedros regulares representam os espaços entre as órbitas.

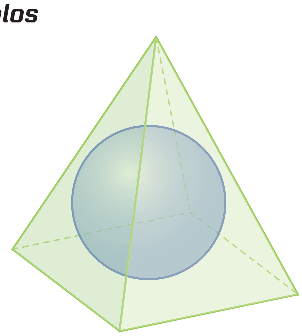
Pesquisas posteriores mostraram que esse modelo não reproduz as distâncias entre o Sol e os planetas. Porém, a construção desse modelo não foi em vão, pois a constatação do erro conduziu Kepler a novos estudos que resultaram em suas famosas leis.

Nesta seção, vamos estudar algumas inscrições e circunscrições da esfera. Veremos que, a partir de algumas secções, podemos fazer esse estudo com os conhecimentos da Geometria plana.

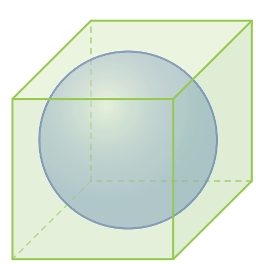
Esfera inscrita em um poliedro

Uma esfera está **inscrita** em um poliedro se, e somente se, tangencia todas as faces do poliedro. Nesse caso, se diz também que o poliedro está circunscrito à esfera.

Exemplos



esfera inscrita em uma pirâmide

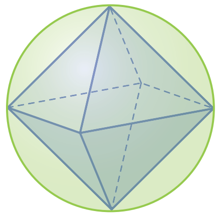


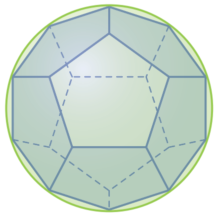
esfera inscrita em um cubo

Esfera circunscrita a um poliedro

Uma esfera está **circunscrita** a um poliedro se, e somente se, todos os vértices do poliedro pertencem à superfície da esfera. Nesse caso, se diz também que o poliedro está inscrito na esfera.

Exemplos

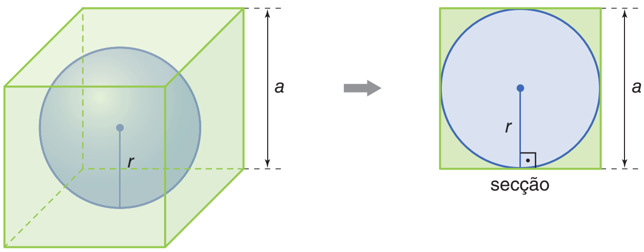

esfera circunscrita a um octaedro


esfera circunscrita a um dodecaedro

Esfera e cubo

Esfera inscrita em um cubo

Considere uma esfera de raio r inscrita em um cubo de aresta a. Uma secção plana perpendicular a quatro arestas paralelas desse cubo e que passa pelo centro da esfera determina um círculo inscrito em um quadrado.



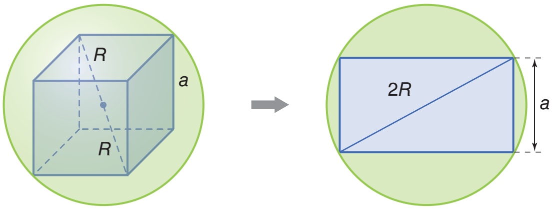
secção

O raio r do círculo é o raio da esfera, e a medida a do lado do quadrado é igual à medida da aresta do cubo. Logo:

$$\boxed{r = \frac{a}{2}}$$

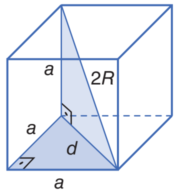
Esfera circunscrita a um cubo

Considere uma esfera de raio R circunscrita a um cubo de aresta a. Uma secção plana que contém uma aresta do cubo e passa pelo centro da esfera determina um círculo circunscrito a um retângulo. A diagonal do retângulo é o diâmetro da esfera e, ao mesmo tempo, é a diagonal do cubo.



secção

Vamos expressar R em função de a. Seja d a medida da diagonal da base do cubo. Pelo teorema de Pitágoras, temos: $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$



Então:

$(2R)^2 = a^2 + d^2 \Rightarrow (2R)^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2$

$\therefore\ (2R)^2 = 3a^2 \Rightarrow 2R = a\sqrt{3}$

Portanto:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

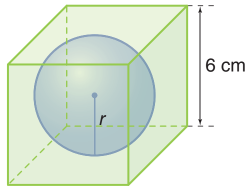
19 Calcular o volume de uma esfera inscrita em um cubo de aresta 6 cm.

Resolução

Sendo r a medida do raio da esfera, temos:

$r = \frac{6}{2}$ cm $= 3$ cm. Logo, o volume da esfera é:

$V = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} \Rightarrow V = 36\pi \text{ cm}^3$



20 Uma esfera está circunscrita a um cubo com 4 dm de aresta. Calcular a área da superfície da esfera.

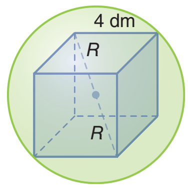
Resolução

A medida da diagonal do cubo, que é $4\sqrt{3}$ dm, é também a medida 2R do diâmetro da esfera:

$2R = 4\sqrt{3} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$

Assim, a área A da superfície da esfera é:

$A = 4\pi(2\sqrt{3})^2 \text{ dm}^2 \Rightarrow A = 48\pi \text{ dm}^2$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

88 Calcule a medida do raio da esfera inscrita em um cubo de volume 1 m^3.

89 A medida da diagonal de um cubo é $\sqrt{48}$ cm. Calcule a medida do raio da esfera inscrita nesse cubo.

90 Um cubo circunscreve uma esfera de raio 2,5 cm. Qual é o volume desse cubo?

91 Considere a definição: "Sendo P um ponto exterior a uma esfera de centro O, e Q o ponto de intersecção do segmento $\overline{PO}$ com a superfície dessa esfera, define-se a distância entre P e essa esfera como a medida do segmento $\overline{PQ}$."
De acordo com essa definição, calcule a distância entre um vértice de um cubo de aresta 5 cm e a esfera nele inscrita.

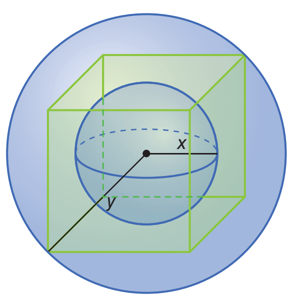
92 Calcule a medida do raio da esfera circunscrita a um cubo de aresta 8 cm.

93 A área de uma face de um cubo é 3 cm^2.
Calcule a área da superfície da esfera circunscrita a esse cubo.

94 O volume da esfera circunscrita a um cubo é 36π dm^3.
Calcule o volume do cubo.

95 Calcule a razão entre o volume de um cubo e o volume da esfera circunscrita a ele, nessa ordem.

96 Calcule a razão entre a medida x do raio da esfera inscrita em um cubo e a medida y do raio da esfera circunscrita, nesta ordem.



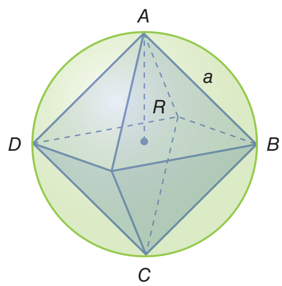
97 Calcule a razão da medida de uma aresta de um cubo inscrito para a medida de uma aresta do cubo circunscrito a uma mesma esfera.

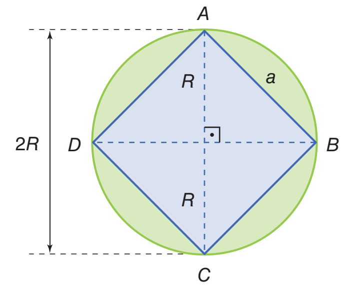
Resolva os exercícios complementares 51 a 58.

Esfera e octaedro regular

Esfera circunscrita a um octaedro regular

Considere uma esfera de raio R circunscrita em um octaedro regular de aresta a. Uma secção plana que contém uma aresta do octaedro e passa pelo centro da esfera determina um círculo circunscrito a um quadrado. A diagonal do quadrado é o diâmetro da esfera.





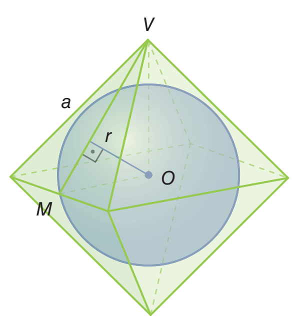
secção

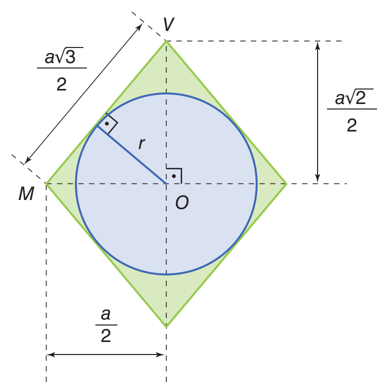
No triângulo retângulo ACD, temos: $(2R)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 2R = a\sqrt{2}$. Logo:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

Esfera inscrita em um octaedro regular

Considere uma esfera de raio r inscrita em um octaedro regular de aresta a. Uma secção plana que passa por um vértice V do octaedro, pelo centro O da esfera e é secante a uma aresta em seu ponto médio M determina um círculo inscrito em um losango:





secção

Obtemos as medidas indicadas nessa figura pelo teorema de Pitágoras. Verifique!

Assim, a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo VOM, que é o raio r da esfera, também é o raio do círculo. Uma relação métrica no triângulo retângulo assegura que o produto das medidas da hipotenusa e de sua altura relativa é igual ao produto das medidas dos catetos:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Portanto:

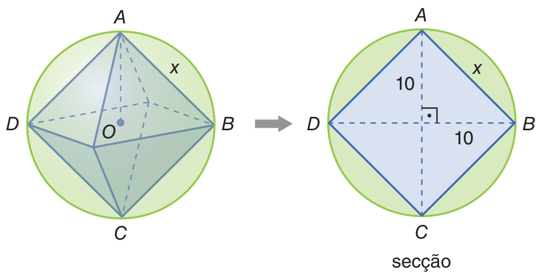
$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

21 Uma esfera de centro O e raio 10 cm está circunscrita a um octaedro regular. Calcular a área total desse octaedro.

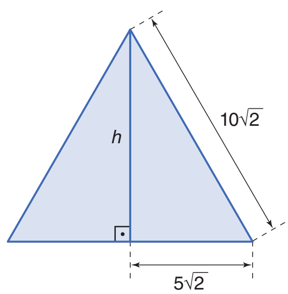
Resolução

Sendo x a medida, em centímetro, de cada aresta do octaedro, temos:



$$x^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow x^2 = 200$$
$$\therefore x = 10\sqrt{2}$$

Assim, cada face do octaedro é um triângulo equilátero com $10\sqrt{2}$ cm de lado. Sendo h a altura desse triângulo, temos:



$$h^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 150$$
$$\therefore h = 5\sqrt{6}$$

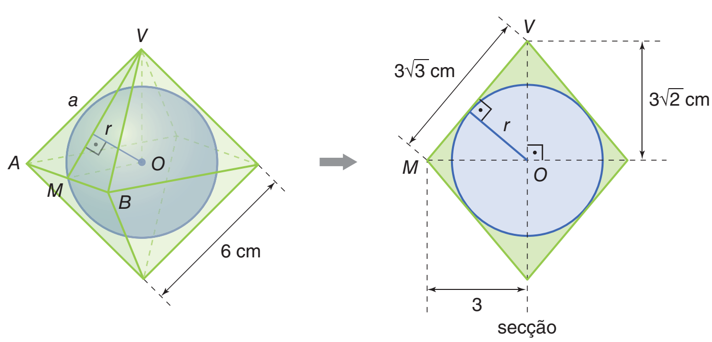
A área total A do octaedro é oito vezes a área de uma face, isto é:

$$A = 8 \cdot \frac{10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{6}}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow A = 400\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

22 Uma esfera de centro O está inscrita em um octaedro regular com 6 cm de aresta. Calcular a medida do raio da esfera.

Resolução

Sendo r a medida, em centímetro, do raio da esfera, temos:



$\overline{VM}$ é a altura de um triângulo equilátero com 6 cm de lado; logo $VM = \frac{6\sqrt{3}}{2}$ cm $= 3\sqrt{3}$ cm.

$\overline{VO}$ é a metade da diagonal do octaedro; logo $VO = \frac{6\sqrt{2}}{2}$ cm $= 3\sqrt{2}$ cm

$\overline{OM}$ é a metade da aresta do octaedro, logo, $OM = 3$ cm.

Assim, no triângulo VOM, temos:

$$3\sqrt{3} \cdot r = 3 \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore r = \frac{3\sqrt{6}}{3} \text{ cm} = \sqrt{6} \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

98 Uma esfera de raio 20 cm está circunscrita a um octaedro regular. Calcule a medida de uma aresta desse octaedro.

99 Calcule o volume de um octaedro regular inscrito em uma esfera de raio 6 dm.

100 Calcule a razão entre a área da superfície de uma esfera e a área total do octaedro regular inscrito nessa esfera, na ordem apresentada.

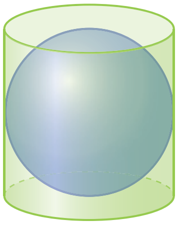
101 Uma esfera está inscrita em um octaedro regular de aresta 8 cm. Calcule o volume dessa esfera.

102 Um octaedro regular está circunscrito a uma esfera de raio $2\sqrt{6}$ m. Calcule a medida de uma aresta desse octaedro.

Resolva os exercícios complementares 59 a 62.

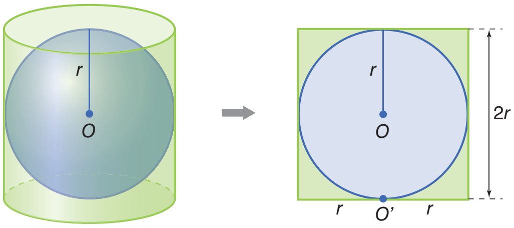
Esfera inscrita em um cilindro circular reto

Uma esfera está **inscrita** em um cilindro circular reto se, e somente se, tangencia todas as geratrizes e as bases do cilindro. Nesse caso, se diz também que o cilindro está circunscrito à esfera.



Esfera inscrita em um cilindro circular reto.

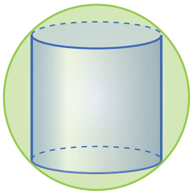
Considere uma esfera de raio r inscrita em um cilindro circular reto. O eixo do cilindro passa pelo centro da esfera. Assim, uma secção plana que contém esse eixo determina um círculo inscrito em um quadrado, sendo que a medida do lado do quadrado é o diâmetro da esfera, isto é, o cilindro é **equilátero**:



secção plana

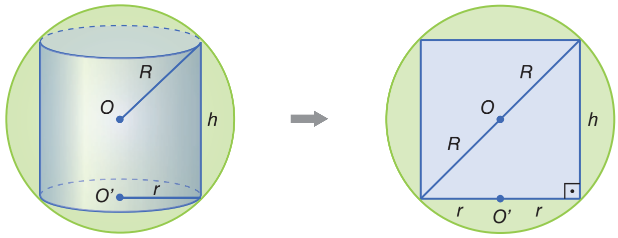
Esfera circunscrita a um cilindro circular reto

Uma esfera está **circunscrita** a um cilindro circular reto se, e somente se, as circunferências das bases do cilindro estão contidas na superfície da esfera. Nesse caso, se diz também que o cilindro está inscrito na esfera.



Esfera circunscrita a um cilindro circular reto.

Considere uma esfera de raio R circunscrita a um cilindro circular reto de raio da base r e altura h. O eixo do cilindro passa pelo centro da esfera. Assim, uma secção plana que contém esse eixo determina um retângulo inscrito em um círculo, sendo que a medida da diagonal do retângulo é o diâmetro da esfera:



secção

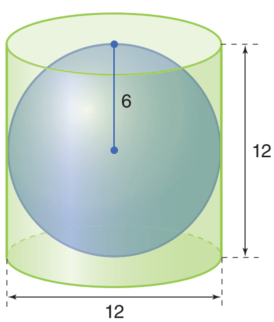
$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

23 Uma esfera com 6 dm de raio está inscrita em um cilindro circular reto. Calcular o volume do cilindro.

Resolução

Um cilindro circular reto circunscrito a uma esfera é equilátero, isto é, a medida da geratriz é igual ao diâmetro da base. Assim, temos:



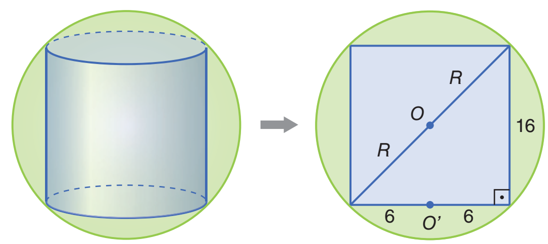
Logo, o volume V do cilindro é:

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 \text{ dm}^3 = 432\pi \text{ dm}^3$$

24 Um cilindro circular reto com 16 cm de altura e 6 cm de raio da base está inscrito em uma esfera. Calcular a medida do raio dessa esfera.

Resolução

Sendo R a medida do raio da esfera, em centímetro, temos:



secção

$$(2R)^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow (2R)^2 = 400$$
$$\therefore 2R = 20$$
$$\therefore R = 10$$

Portanto, a esfera tem raio de 10 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

103 Uma esfera de raio 4 cm está inscrita em um cilindro circular reto. Calcule a área total do cilindro.

104 Um cilindro circular reto de altura 8 cm está circunscrito a uma esfera. Calcule o volume da esfera.

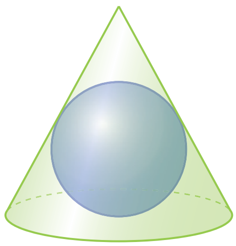
105 Uma esfera está circunscrita a um cilindro circular reto de altura 8 cm e raio da base 3 cm. Calcule o volume dessa esfera.

106 Um cilindro circular reto de altura 3 dm está inscrito em uma esfera cuja superfície tem área 13π dm^2. Calcule a medida do raio da base do cilindro.

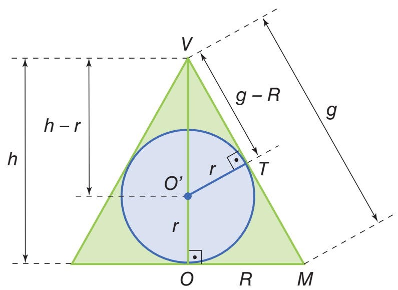
Resolva os exercícios complementares 63 a 67.

Esfera inscrita em um cone circular reto

Uma esfera está **inscrita** em um cone circular reto se, e somente se, tangencia todas as geratrizes e a base do cone. Nesse caso, se diz também que o cone está circunscrito à esfera.



Considere uma esfera de centro O' e raio r inscrita em um cone circular reto de vértice V, altura h e base de centro O e raio R. Uma secção plana que contém o eixo desse cone determina um círculo inscrito em um triângulo isósceles; logo, a medida do raio da esfera pode ser obtida pela semelhança dos triângulos VOM e VTO' (pelo caso AAA), destacados abaixo, em que T é o ponto de tangência da esfera na geratriz $\overline{VM}$.

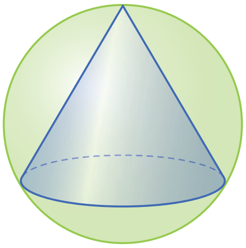


Como $\triangle VOM \sim \triangle VTO'$, temos:

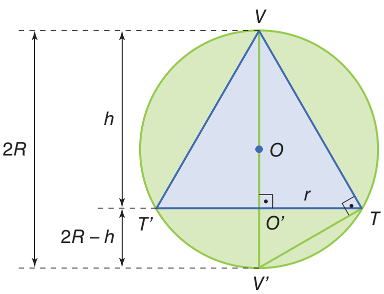
$$\frac{g}{h - r} = \frac{R}{r} = \frac{h}{g - R}$$

Esfera circunscrita a um cone circular reto

Uma esfera está **circunscrita** a um cone circular reto se, e somente se, o vértice e todos os pontos da circunferência da base do cone pertencem à superfície da esfera. Nesse caso, se diz também que o cone está inscrito na esfera.



Considere uma esfera de centro O e raio R circunscrita a um cone circular reto de vértice V, altura h e base de centro O' e raio r. Uma secção plana que contém o eixo desse cone determina um círculo circunscrito a um triângulo isósceles VTT':



Observando que o triângulo TVV' é retângulo em T, pois está inscrito em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{VV'}$, temos que a medida R do raio da esfera e as medidas r e h, do raio da base e da altura do cone, respectivamente, satisfazem a seguinte relação métrica no triângulo retângulo:

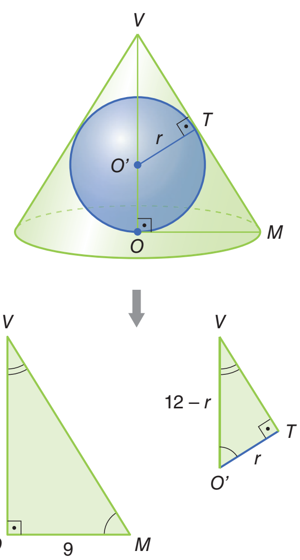
$$\boxed{r^2 = h(2R - h)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

25 Uma esfera está inscrita em um cone circular reto de altura 12 cm e raio da base 9 cm. Calcular a medida do raio da esfera.

Resolução

O centro O' da esfera, o vértice V e o centro O da base do cone são pontos colineares. O raio da esfera com extremo T em uma geratriz $\overline{VM}$ do cone é perpendicular a essa geratriz. Assim, sendo r o raio da esfera, temos:



Temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$(VM)^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow VM = 15$$

Os triângulos VOM e VTO' são semelhantes (pelo caso AAA), logo:

$$\frac{15}{12 - r} = \frac{9}{r} \Rightarrow 15r = 108 - 9r$$

$$\therefore 24r = 108$$

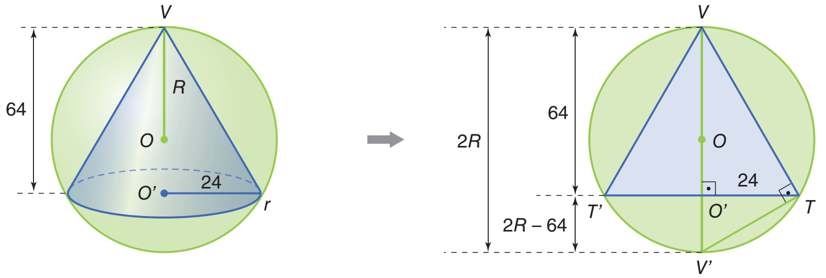
$$\therefore r = 4{,}5$$

Portanto, a esfera tem raio de 4,5 cm.

26 Uma esfera está circunscrita a um cone circular reto com 64 cm de altura e 24 cm de medida do raio da base.
Calcular o raio da esfera.

Resolução

Sendo R o raio da esfera, temos:



No triângulo retângulo TVV', temos:

$24^2 = 64(2R - 64) \Rightarrow 576 = 64(2R - 64)$

$\therefore \dfrac{576}{64} = 2R - 64 \Rightarrow 9 = 2R - 64$

$\therefore 73 = 2R$

$\therefore R = 36{,}5$

Logo, a esfera tem raio de 36,5 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

107 Uma esfera está inscrita em um cone circular reto de altura 24 cm e raio da base 18 cm. Calcule o raio da esfera.

108 Um cone circular reto de geratriz 17 cm e altura 15 cm está circunscrito a uma esfera. Calcule o raio dessa esfera.

109 Uma esfera com 17 cm de raio está circunscrita a um cone circular reto com 25 cm de altura. Calcule o volume desse cone.

110 A medida do raio da base de um cone circular reto é igual a 8 dm. A medida do raio da esfera circunscrita a esse cone é igual a 10 dm e é maior que a altura h do cone.
Determine h.

111 Considere um cone circular reto de altura 10 dm e raio da base 3 dm. Calcule a medida do raio da esfera inscrita nesse cone e a medida do raio da esfera circunscrita a ele.

Resolva os exercícios complementares 68 a 75 e 125.

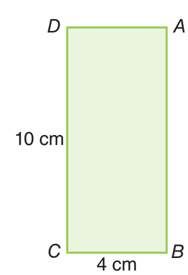
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 A altura e a área de uma base de um cilindro circular reto são 5 m e 4π m^2, respectivamente. Calcule desse cilindro:
a) o raio da base.
b) a área lateral A_ℓ.
c) a área total A_T.
d) a área de uma secção meridiana.

2 A área de uma secção meridiana de um cilindro equilátero é 25 cm^2. Calcule, desse cilindro:
a) o raio da base.
b) a área B de uma base.
c) a área lateral A_ℓ.
d) a área total A_T.

3 Como vimos, um cilindro circular reto também é chamado de cilindro de revolução, pois pode ser obtido pela revolução (rotação) de 360° de um retângulo em torno de um de seus lados. Considere o retângulo ao lado:



Calcule:

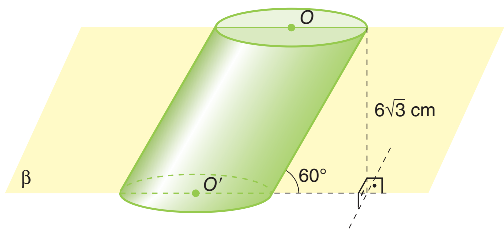
a) a área total do cilindro gerado pela revolução desse retângulo em torno do lado $\overline{AD}$.

b) a área total do cilindro gerado pela revolução desse retângulo em torno do lado $\overline{AB}$.

4 A área total de um cilindro equilátero tem 80π cm² a mais que a área de uma de suas bases. Calcule a medida do raio da base desse cilindro.

5 A área lateral de um semicilindro equilátero é $32(\pi + 2)$ dm². Calcule a medida da altura desse semicilindro.

6 Um cilindro de altura $6\sqrt{3}$ tem 60° de inclinação em relação aos planos das bases, conforme a figura. Um plano β, perpendicular aos planos das bases, determina nesse cilindro uma secção meridiana de área 60 cm². Calcule a distância entre as geratrizes do cilindro, contidas em β.



7 Em um cilindro circular oblíquo o raio da base mede 4 cm e cada geratriz mede 6 cm. Sabendo que o volume desse cilindro é $48\sqrt{3}\pi$ cm³, calcule a medida de um ângulo agudo que cada geratriz forma com os planos das bases.

8 Em um cilindro circular reto, cuja altura é menor que o diâmetro da base, o perímetro de uma secção meridiana é 26 cm e a área lateral é 30π cm². Calcule o volume desse cilindro.

9 (PUC-RS) As medidas dos lados *a* e *b* de um retângulo são respectivamente 4 cm e 5 cm. A razão entre o volume do cilindro obtido da rotação do retângulo em torno do lado *a* e o volume do cilindro obtido pela rotação do mesmo retângulo em torno do lado *b* é:

a) 20
b) 5
c) $\frac{5}{4}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{8}$

10 O volume de um semicilindro equilátero é 27π cm³. Calcule a área lateral desse semicilindro.

11 O volume de um tronco reto de cilindro circular é 81π dm³ e as geratrizes maior e menor medem 10 dm e 8 dm. Calcule a medida do raio da base circular desse tronco.

12 A altura de um cone de revolução é $2\sqrt{21}$ dm e cada geratriz mede 10 dm. Calcule desse cone:

a) a área lateral A_ℓ.

b) a área total A_T.

c) a área A_{SM} de uma secção meridiana.

d) a medida θ, em radiano, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral.

13 (UFSC) A geratriz de um cone equilátero mede $2\sqrt{3}$ cm. Calcule a área da secção meridiana do cone em cm².

14 Em um cone de revolução de altura 6 cm, a área de cada secção meridiana é 48 cm². Calcule a área total desse cone.

15 (Ufam) A geratriz de um cone circular reto mede 10 cm e sua área total é 75π cm². Então o raio da base é igual a:

a) 15 cm
b) 5 cm
c) 10 cm
d) 6 cm
e) 8 cm

16 A altura de um cone circular reto é $\sqrt{55}$ cm e o ângulo central de um setor circular equivalente à superfície lateral desse cone mede 135°. Calcule a área total desse cone.

17 Um cone circular reto tem 3 cm de altura e área lateral de 20π cm². Calcule a área de uma secção meridiana desse cone.

18 A base de um cone circular reto tem 2 cm de raio e é congruente às bases de um cilindro circular reto. Se esses dois sólidos têm a mesma área lateral, então a altura *h* do cone e a altura *H* do cilindro são tais que:

a) $h = 2H$
b) $h = \frac{2\pi H}{3}$
c) $h = \frac{\pi H}{3}$
d) $h = 2\sqrt{H^2 - 1}$
e) $h = \sqrt{H^2 - 4}$

19 Em um cone circular reto de altura $4\sqrt{2}$ cm, a área total é o quádruplo da área da base. Calcule a medida, em grau, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral desse cone.

20 A razão entre a área da base de um cone e a área de uma secção transversal é $\frac{49}{36}$. Sabendo que o plano dessa secção dista 9 cm do vértice do cone, calcule a altura desse cone.

21 Um plano β equidista do vértice e do plano α da base de um cone, com $\beta /\!/ \alpha$. Calcule a razão, nessa ordem, entre a área da base do cone e a área da secção transversal determinada no cone pelo plano β.

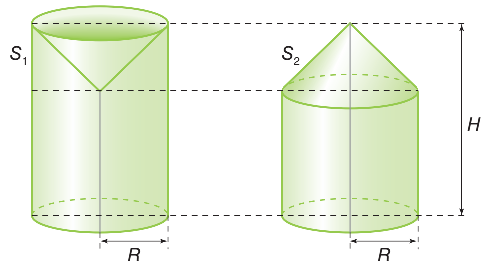
22 Em um cone circular reto de altura 8 cm, a área lateral é o triplo da área da base. Calcule o volume desse cone.

23 (UFMS) Considere um cone circular reto de volume *V*, com área da base igual a 16π cm². Calcule, em cm³, o valor de $\frac{3V}{16\pi}$ sabendo-se que a área de uma secção feita no cone, paralela e distante 4 cm da base, é igual a 9π cm².

24 A base de um cone circular de altura *h* é congruente às bases de um cilindro de altura *H*. Se esses dois sólidos são equivalentes, então:

a) $h = H$
b) $h = 3H$
c) $H = 3h$
d) $h = 2H$
e) $H = 2h$

25 (UFRN) Dois sólidos de formatos cilíndricos têm bases de mesmo raio R. De um deles, foi extraída uma parte cônica, que foi colada no outro, conforme mostra a figura abaixo. Aos dois sólidos resultantes, de mesma altura H, chamaremos de S_1 e S_2.



Se $V(S_1)$ e $V(S_2)$ denotam, respectivamente, os volumes de S_1 e S_2, pode-se afirmar que:

a) $V(S_1) > V(S_2)$

b) $V(S_1) + V(S_2) = 2\pi R^2 H$

c) $V(S_1) < V(S_2)$

d) $V(S_1) + V(S_2) = \dfrac{7\pi R^2 H}{3}$

26 (UFC-CE) Um cone circular reto e uma pirâmide de base quadrada têm a mesma altura e o mesmo volume. Se r é a medida do raio da base do cone, e b é a medida do lado da base da pirâmide, então o quociente $\dfrac{b}{r}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{3}$

b) 1

c) $\sqrt{\pi}$

d) π

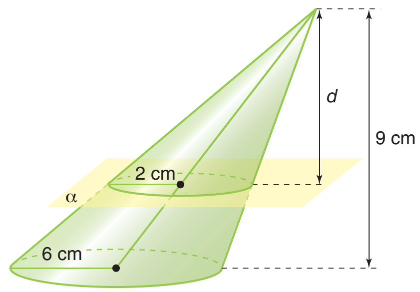
e) 2π

27 Considere que a altura e o raio da base de um cone circular reto variem de modo que as medidas atribuídas à altura sejam diretamente proporcionais às respectivas medidas atribuídas ao raio da base. Se as medidas da altura variam de 6 cm a 15 cm e a menor medida do raio da base é 2 cm:

a) dê a lei que expressa o volume f, em centímetro cúbico, em função da medida x, em centímetro, do raio da base desse cone.

b) considerando a função f do item **a**, obtenha as medidas x do raio para que $f(x) > 27\pi$.

28 Em um cone circular de 9 cm de altura e 6 cm de raio da base, um plano α determina uma secção transversal de raio 2 cm.

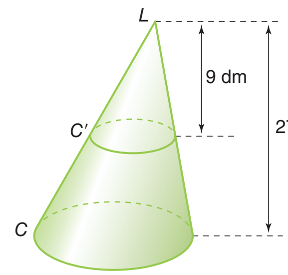


Calcule:

a) a distância d do plano α ao vértice do cone.

b) o volume do tronco de cone assim determinado.

29 Em um cone circular de vértice L, base C e altura 27 dm é feita uma secção transversal C' por um plano distante 9 cm de seu vértice. Calcule o volume do cone de vértice L e base C, dado que o volume do cone de vértice L e base C' é 18 dm^3.



30 (UFPI) Um cone de revolução de altura 6 cm é cortado por um plano paralelo à base, formando um novo cone de volume $\dfrac{1}{27}$ do anterior. A distância do vértice ao plano é:

a) 1 cm

b) $\dfrac{3}{2}$ cm

c) 2 cm

d) $\dfrac{4}{3}$ cm

e) $\dfrac{4}{27}$ cm

31 (UEL-PR) Um cone circular tem volume V. Interceptando-o na metade de sua altura por um plano paralelo à base, obtém-se um novo cone cujo volume é:

a) $\dfrac{V}{2}$

b) $\dfrac{V}{3}$

c) $\dfrac{V}{4}$

d) $\dfrac{V}{8}$

e) $\dfrac{V}{16}$

32 (Fuvest-SP) A altura de um cone circular reto é H. Seja um plano que é paralelo à base e que divide o cone em dois sólidos de mesmo volume. Calcule a distância entre o plano e a base do cone.

33 Um plano α determina em uma esfera de centro O uma secção de perímetro $6\sqrt{3}\pi$ m. Sabendo que a distância entre O e α é metade da medida do raio da esfera, calcule essa distância.

34 (PUC-RS) Dois planos paralelos interceptam uma esfera de raio 4 cm, determinando duas secções tais que a área de uma é o quádruplo da área da outra. Se um desses planos contém o centro da esfera, a distância entre eles, em cm, é:

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) 2

d) 3

e) $2\sqrt{3}$

35 Dois planos paralelos α e β interceptam uma esfera de raio 5 dm determinando nela secções de raios 4 dm e 3 dm. Sabendo que essas secções estão contidas em um mesmo hemisfério de base paralela a elas, determine a distância entre α e β.

36 Uma circunferência máxima de uma esfera tem perímetro 20π cm. Calcule o volume dessa esfera.

37 Um cone circular reto com 36 cm de altura tem o mesmo volume de uma esfera de raio 6 cm. Calcule a medida do raio da base do cone.

38 O raio de uma esfera e a altura de um cilindro circular reto têm a mesma medida R. Se esses dois sólidos têm o mesmo volume, então a medida r do raio da base do cilindro é tal que:

a) $r = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

b) $r = \frac{R}{2}$

c) $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

d) $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

e) $r = R\sqrt{2}$

39 (UFPB) Qual o valor do raio, em mm, de uma esfera cujo volume é igual ao de um cone circular reto de altura 108 mm e raio da base $24\sqrt{3}$ mm?

40 Um círculo máximo de uma esfera tem área 64π dm^2. Calcule a área da superfície dessa esfera.

41 Calcule a área da superfície de uma esfera cujo volume é 36π dm^3.

42 Um plano α dista 8 dm do centro de uma esfera e determina nela uma secção de área 36π dm^2. Calcule a área da superfície dessa esfera.

43 (Unitau-SP) Aumentando em 10% o raio de uma esfera, a área de sua superfície aumentará:

a) 21%

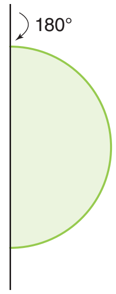
b) 11%

c) 31%

d) 24%

e) 30%

44 Um sólido é gerado pela rotação de 180° de um semicírculo de raio 4 cm em torno de seu diâmetro:



Calcule o volume V e a área A desse sólido.

45 A área da superfície de uma esfera é igual à área lateral de um cone equilátero. Se os raios da esfera e da base do cone medem, respectivamente, r e a, em uma mesma unidade de comprimento, então:

a) $r = a\sqrt{2}$

b) $r = \frac{a}{4}$

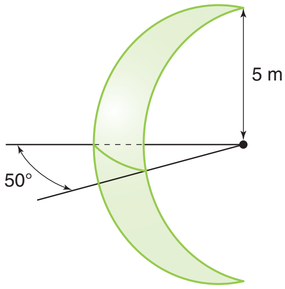
c) $r = 2a$

d) $r = \sqrt{2a}$

e) $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

46 Uma cunha esférica tem 3 m de raio e $\frac{\pi}{3}$ rad de ângulo diedro. Calcule o volume dessa cunha.

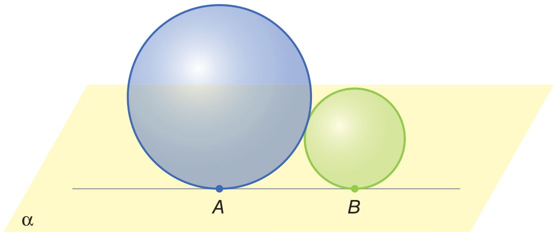
47 Calcule a área de um fuso esférico de raio 5 cm cujo ângulo diedro mede 50°.



48 Calcule a área total de uma cunha esférica com 2 m de raio e 40° de ângulo diedro.
(*Cuidado*! A superfície de uma cunha esférica é formada por um fuso esférico e dois semicírculos.)

49 Um fuso esférico com 54° de ângulo diedro tem 15π dm^2 de área. Calcule a medida do raio desse fuso.

50 Duas esferas tangentes entre si e tangentes a um plano α nos pontos A e B têm raios 8 cm e 2 cm. Calcule a distância entre os pontos A e B.



51 A área total de um cubo é 24 dm^2. Calcule a área da superfície da esfera inscrita nesse cubo.

52 Cada diagonal de uma face de um cubo mede 3 dm. Calcule a área da superfície da esfera inscrita nesse cubo.

53 Duas esferas cujos raios medem p e q estão inscritas em dois cubos C_1 e C_2, respectivamente. Sabendo que a área total de C_2 é o dobro da área total de C_1, conclui-se que:

a) $q = \sqrt{2}p$

b) $q = 2p$

c) $q = 2\sqrt{2}p$

d) $q = 3p$

e) $q = 4p$

54 A medida da diagonal de um cubo C_1 é igual à medida do raio da esfera inscrita em um cubo C_2. Calcule a razão entre os volumes dos cubos C_1 e C_2, nessa ordem.

55 O volume de um cubo é 1 m^3. Calcule a área da superfície da esfera circunscrita a esse cubo.

56 Sendo A_i e A_c as áreas totais dos cubos inscrito e circunscrito a uma mesma esfera, respectivamente, calcule a razão entre A_i e A_c, nessa ordem.

57 Sendo V_i e V_c os volumes das esferas inscrita e circunscrita a um mesmo cubo, respectivamente, calcule a razão entre V_i e V_c, nessa ordem.

58 Calcule a razão entre a área total de um cubo e a área da superfície da esfera circunscrita a ele, nessa ordem.

59 Uma esfera de raio 1 cm está circunscrita a um octaedro regular. Calcule a área total desse octaedro.

60 Calcule o volume da esfera circunscrita a um octaedro regular cuja aresta mede $4\sqrt{3}$ dm.

61 Sendo V_E o volume de uma esfera e V_O o volume do octaedro regular inscrito nessa esfera, calcule a razão $\frac{V_E}{V_O}$.

62 Calcule a medida do raio da esfera inscrita em um octaedro regular de aresta 24 cm.

63 Uma esfera de volume $\frac{4\pi}{3}$ dm^3 está inscrita em um cilindro circular reto. Calcule o volume do cilindro.

64 Uma esfera está inscrita em um cilindro circular reto de área lateral 16π cm^2. Calcule a área da superfície dessa esfera.

65 Obtenha o volume de uma esfera circunscrita a um cilindro equilátero de volume 16π cm^3.

66 Um cilindro circular reto de altura 4 cm está inscrito em uma esfera de volume $\frac{20\pi\sqrt{5}}{3}$ cm^3. Calcule o volume do cilindro.

67 Um cilindro circular reto de raio da base 2 cm está inscrito em uma esfera cuja superfície tem área 320π cm^2. Calcule a área total do cilindro.

68 Calcule a área da superfície de uma esfera inscrita em um cone de revolução de altura 16 cm e raio da base 12 cm.

69 Uma esfera está inscrita em um cone equilátero. Calcule a razão entre o raio da esfera e o raio da base do cone, nessa ordem.

70 Uma esfera cuja superfície tem área 100π cm^2 está inscrita em um cone equilátero. Calcule a medida do raio da base desse cone.

71 Calcule a medida do raio da esfera circunscrita a um cone circular reto de altura 36 cm e raio da base 12 cm.

72 Calcule a área da superfície da esfera circunscrita a um cone circular reto de altura 4 dm e raio da base 2 dm.

73 Uma esfera de raio 10 cm está circunscrita a um cone circular reto de altura 16 cm. Calcule a medida do raio da base do cone.

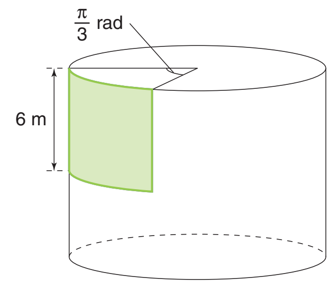
74 Calcule a medida do raio de uma esfera circunscrita a um cone circular reto de altura 18 cm e raio da base 12 cm.

75 Um cone circular reto cuja altura mede o triplo do raio da base está inscrito em uma esfera de raio 15 cm. Calcule a medida do raio da base desse cone.

Exercícios contextualizados

76 Com uma folha retangular de alumínio, de 4 m de comprimento por 1 m de largura, serão confeccionadas embalagens cilíndricas, fechadas, de altura 10 cm e raio das bases de 4 cm. Sabendo que há perda de 12,08% na folha de alumínio durante a fabricação de embalagens, calcule o número de embalagens que serão fabricadas. (Adote $\pi = 3{,}14$.)

77 (UFPB) O Sr. Martins foi encarregado de pintar a lateral de uma caixa-d'água cilíndrica, com 6 m de raio e altura de 10 m. Devido ao mau tempo, conseguiu, apenas, pintar a parte sombreada mostrada na figura abaixo. Assim sendo, desse trabalho ele executou somente:



a) 5%
b) 10%
c) 15%
d) 20%
e) 25%

78 O Departamento Internacional de Pesos e Medidas definiu o quilograma como a massa de um cilindro equilátero maciço de 3,9 cm de diâmetro confeccionado em platina e irídio, mantido no Museu Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, perto de Paris. Lembrando que a densidade de um corpo é a razão entre a massa e o volume, nessa ordem, pode-se afirmar que a densidade desse cilindro é:

a) $\frac{4 \cdot 10^4}{\pi \cdot 23^3}$ g/cm^3

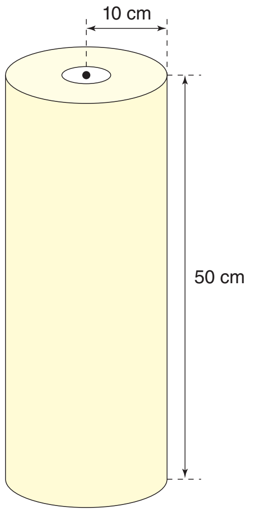
b) $\frac{10^6}{\pi \cdot 3{,}9^5}$ g/cm^3

c) $\frac{4 \cdot 10^6}{\pi \cdot 39^3}$ g/cm^3

d) $\frac{3 \cdot 10^5 \cdot \pi}{39^3}$ g/cm^3

e) $\frac{10^6}{\pi \cdot 39^5}$ g/cm^3

79 Um rolo de papel de embrulho tem o formato de um cilindro circular reto atravessado por um orifício cilíndrico reto. Se o rolo tem altura de 50 cm, raio da base de 10 cm e volume 4.800π cm^3, calcule o diâmetro do orifício.



80 Uma caixa-d'água tem, internamente, a forma de um cilindro equilátero com 100π m^2 de área lateral. Calcule a capacidade dessa caixa em litro. (Adote $\pi = 3{,}14$.)

81 (Fuvest-SP) A uma caixa-d'água de forma cúbica com 1 metro de lado está acoplado um cano cilíndrico com 4 cm de diâmetro e 50 m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano, vazio. Solta-se a água pelo cano até que fique cheio. Qual o valor aproximado da altura da água na caixa no instante em que o cano ficou cheio?

a) 90 cm
b) 92 cm
c) 94 cm
d) 96 cm
e) 98 cm

82 (Enem) A figura abaixo mostra um reservatório de água na forma de um cilindro circular reto, com 6 m de altura. Quando está completamente cheio, o reservatório é suficiente para abastecer, por um dia, 900 casas cujo consumo médio diário é de 500 litros de água.

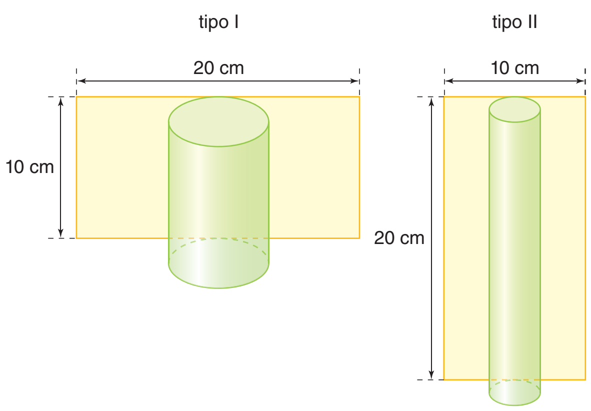
Suponha que, um certo dia, após uma campanha de concientização do uso da água, os moradores das 900 casas abastecidas por esse reservatório tenham feito economia de 10% no consumo de água. Nessa situação:

a) a quantidade de água economizada foi de 4,5 m^3.
b) a altura do nível da água que sobrou no reservatório, no final do dia, foi igual a 60 cm.
c) a quantidade de água economizada seria suficiente para abastecer, no máximo, 90 casas cujo consumo diário fosse de 450 litros.
d) os moradores dessas casas economizariam mais de R$ 200,00, se o custo de 1 m^3 de água para o consumidor fosse igual a R$ 2,50.
e) um reservatório de mesma forma e altura, mas com raio da base 10% menor que o representado, teria água suficiente para abastecer todas as casas.

83 Em uma indústria de artefatos de vidro, um desenhista projetou um copo cilíndrico cuja altura e cujo raio da base externos medem 12 cm e 4 cm, respectivamente; e a espessura da base e a da lateral do copo têm 0,5 cm. Considerando que a base e a lateral desse copo são maciças (sem partes ocas), calcule o volume, em centímetro cúbico, de vidro utilizado na fabricação de cada copo.

84 (UFG-GO) Cilindro equilátero é todo cilindro circular reto em que a altura é igual ao diâmetro da base. Uma importante propriedade que caracteriza esse tipo de cilindro garante que: "entre todos os cilindros de um mesmo volume, o equilátero é o que possui a menor área total".
Uma empresa pretende comercializar o seu produto em embalagens cilíndricas com 400 mL. Calcule as dimensões aproximadas da embalagem para que o custo de sua produção seja o menor possível.

85 (Enem) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm × 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será:

a) o triplo.
b) o dobro.
c) igual.
d) a metade.
e) a terça parte.

86 Um parafuso de ferro maciço é formado por um prisma regular hexagonal com 4 mm de aresta da base e 5 mm de altura e por um cilindro circular reto com 2 mm de raio da base e 25 mm de altura. A rosca feita no parafuso diminui em 1% o volume do cilindro.

O volume do parafuso, em milímetro cúbico, é:

a) $120\sqrt{3} + \pi$

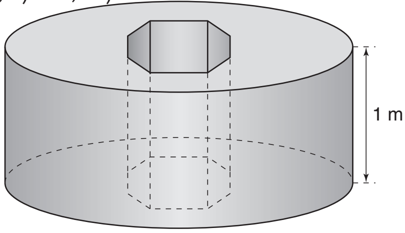
b) $120\sqrt{3} + 99\pi$

c) $150\sqrt{3} - 18\pi$

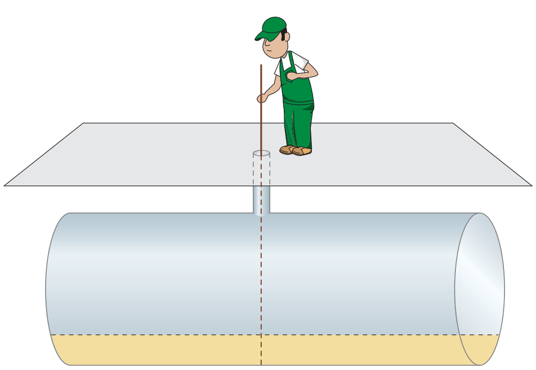
d) $\dfrac{12\sqrt{3}}{5} - 99\pi$

e) $\dfrac{118\pi - 2\sqrt{3}}{9}$

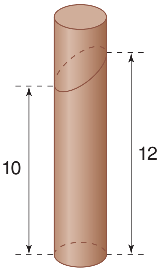
87 (UFG-GO) Uma empresa de engenharia fabrica blocos na forma de um prisma, cuja base é um octógono regular de lado 20 cm e altura 1 m. Para fabricar esses blocos, a empresa utiliza um molde na forma de um cilindro circular reto, cujo raio da base e a altura medem 1 m, conforme a figura a seguir. Calcule o volume do material necessário para fabricar o molde para esses blocos. (Adote tg (67,5°) = 2,41.)



88 O tanque que armazena gasolina em um posto de abastecimento tem a forma de um cilindro circular reto com 12 dm de raio da base e geratrizes horizontais com 50 dm de comprimento. Para medir a quantidade de combustível no tanque, um funcionário colocou uma haste reta no interior do tanque, perpendicularmente à superfície do combustível, até a profundidade máxima, retirando-a a seguir, observando que a marca do nível de combustível atingiu 6 dm de comprimento na haste medidora. Qual o volume de combustível, em litro, contido no tanque?

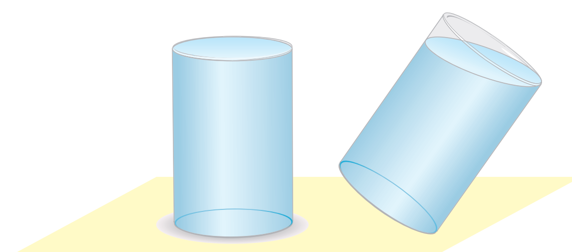


89 (UFPE) Uma barra de chocolate na forma de um cilindro circular reto com raio da base medindo 2 e altura 14 é cortada transversalmente por um plano, de forma que os pontos do corte, situados à menor e à maior distância da base, distam 10 e 12, respectivamente, como ilustrado na figura ao lado. Dentre os sólidos em que fica dividida a barra de chocolate, qual o volume do menor?



90 Em uma indústria uma máquina fabrica salame cilíndrico circular, cortando-o em pedaços de 565,2 cm³ em forma de tronco reto de cilindro cujas geratrizes maior e menor medem 22 cm e 18 cm. Qual é a medida do raio da base circular de cada tronco? (Adote $\pi = 3{,}14$.)

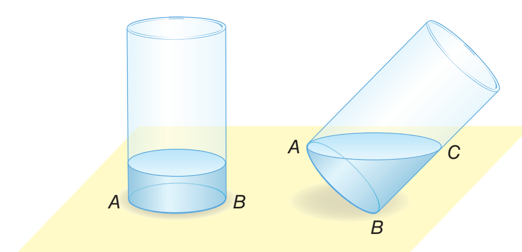
91 (FGV) Inclinando-se em 45° um copo cilíndrico reto de altura 15 cm e raio da base 3,6 cm, derrama-se parte do líquido que completava totalmente o copo, conforme indica a figura.



Admitindo-se que o copo tenha sido inclinado com movimento suave em relação à situação inicial, a menor quantidade de líquido derramada corresponde a um percentual do líquido contido inicialmente no copo de:

a) 48%
b) 36%
c) 28%
d) 24%
e) 18%

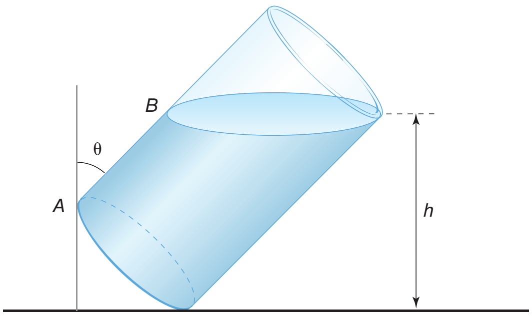
92 (Covest-PE) Na ilustração a seguir, temos um cilindro circular reto, medindo 30 cm de altura, preenchido por um líquido até certa altura e apoiado em uma superfície horizontal. Os pontos *A* e *B* são extremos de um diâmetro da base e *B* e *C* estão em uma mesma geratriz do cilindro. Quando inclinamos o cilindro, mantendo o ponto *B* na superfície, até que o nível de líquido esteja no ponto *A*, o nível em *C* fica a 10 cm do ponto *B*.



Qual a altura do líquido quando o cilindro está na vertical?

a) 4 cm
b) 5 cm
c) 6 cm
d) 7 cm
e) 8 cm

93 (UFG-GO) Um recipiente sem tampa possui a forma de um cilindro circular reto e está parcialmente preenchido com água. O raio da base desse cilindro mede 5 cm, a altura mede 20 cm e a água ocupa $\frac{4}{5}$ do volume do cilindro. A figura abaixo mostra esse recipiente inclinado até a posição em que o nível da água está na altura do ponto mais baixo da borda, de modo que uma inclinação adicional fará a água derramar. Nessa posição, o ângulo que uma geratriz do cilindro faz com a vertical é denotado por θ, e a altura do nível da água em relação ao plano horizontal é denotada por *h*.



Considerando o exposto, julgue os itens a seguir.

a) O volume da região não ocupada pela água no cilindro é 300 cm^3.

b) O ângulo θ mede 45°.

c) A altura *h* mede 15 cm.

d) A medida do segmento $\overline{AB}$, da base do cilindro até o nível da água, é 12 cm.

[*Nota*: Julgar os itens significa classificar cada um deles como verdadeiro (V) ou falso (F).]

94 O bico de um avião tem a forma de um cone circular reto cujo diâmetro da base mede 3 m. Para revestir a superfície lateral desse bico foram necessários $\frac{15\pi}{4}$ m^2 de chapa de aço. Calcule a distância do vértice desse cone ao plano de sua base.

95 Um pedaço de cartolina possui a forma de um semicírculo de raio 14 cm. Essa cartolina é transformada na superfície lateral de um chapéu cônico cuja base é apoiada sobre o tampo plano de uma mesa. Calcule a distância do bico do chapéu à mesa.

96 Para pintar a superfície total de um cubo, gasta-se o dobro de tinta do que se gastaria para pintar a superfície total de um cone equilátero. Sendo *a* e R as medidas, em uma mesma unidade de comprimento, da aresta do cubo e do raio da base do cone, respectivamente, temos:

a) $a = 2R$

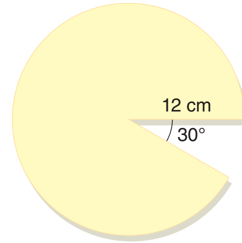
b) $R = 2a$

c) $a = R\sqrt{\pi}$

d) $a = \frac{R\sqrt{\pi}}{3}$

e) $a = \frac{R\sqrt{3\pi}}{3}$

97 Um setor circular, com ângulo central de 30°, é retirado de um círculo de cartolina de raio 12 cm.



Utilizando o restante da cartolina, constrói-se a superfície lateral de um cone circular reto. A altura desse cone é:

a) $\sqrt{33}$ cm

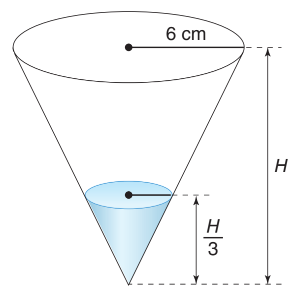
b) $\sqrt{23}$ cm

c) $\sqrt{13}$ cm

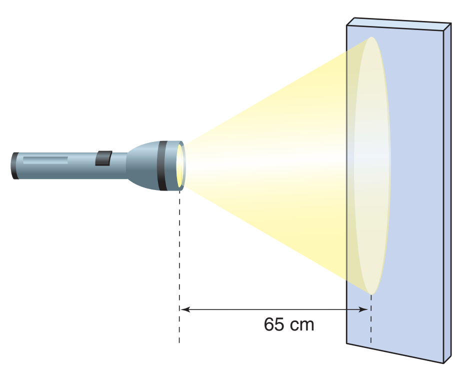
d) 8 cm

e) 10 cm

98 Um tanque cônico, de base circular e horizontal com raio 6 m, tem água até a terça parte de sua altura, conforme mostra a figura. Qual é a área da superfície da água, em metro quadrado?



99 Ao acender uma lanterna, gera-se um facho cônico circular de luz. Quando o eixo desse cone é perpendicular ao plano de uma parede, com a lente circular da lanterna distante 65 cm desse plano, a região iluminada na parede é um círculo de área 2,94 m^2. Sabendo que a área da lente é 150 cm^2, calcule a distância entre a lâmpada da lanterna (vértice do cone) e a lente.



100 (Ufam) Um tanque cônico tem 4 m de profundidade e seu topo circular tem 6 m de diâmetro. Adotando $\pi = 3{,}14$, conclui-se que o volume máximo, em litro, que esse tanque pode conter de líquido é:

a) 24.000

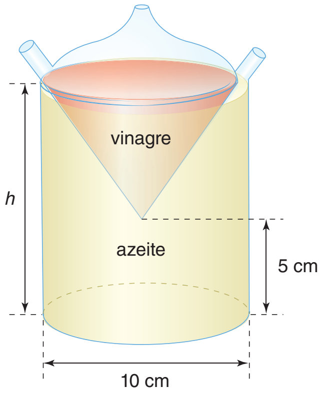
b) 12.000

c) 37.860

d) 14.000

e) 37.680

101 (UFSCar-SP) A figura representa um galheteiro para a colocação de azeite e vinagre em compartimentos diferentes, sendo um cone no interior de um cilindro.



Considerando h como a altura máxima de líquido que o galheteiro comporta e a razão entre a capacidade total de azeite e vinagre igual a 5, o valor de h é:

a) 7 cm
b) 8 cm
c) 10 cm
d) 12 cm
e) 15 cm

102 (Vunesp) Um recipiente, na forma de um cilindro circular reto de raio R e altura 32 cm, está até a metade com água (figura 1). Outro recipiente, na forma de um cone circular reto, contém uma substância química que forma um cone de altura 27 cm e raio r (figura 2).

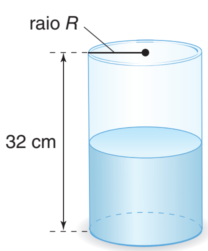


Figura 1
(água)

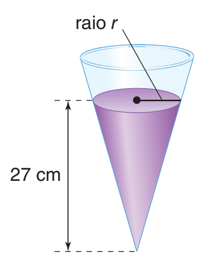


Figura 2
(substância química)

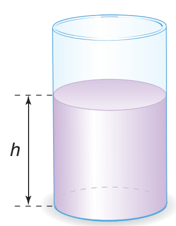


Figura 3
(mistura)

a) Sabendo que $R = \dfrac{3r}{2}$, determine o volume da água no cilindro e o volume da substância química no cone, em função de r. (Para facilitar os cálculos, use a aproximação $\pi = 3$.)
b) A substância química do cone é despejada no cilindro, formando uma mistura homogênea (figura 3). Determine a concentração (porcentagem) da substância química na mistura e a altura h atingida pela mistura no cilindro.

103 Uma taça tem a forma de um cone circular reto com 12 cm de altura e 3 cm de raio da base. Essa taça vazia é colocada sob a torneira de uma máquina de *milk-shake*, de modo que a boca da taça fique na posição horizontal e o *milk-shake* seja despejado no interior do copo à razão de 10 mL por segundo.

a) Dê a lei que expressa a altura f, em centímetro, do nível do *milk-shake* no interior da taça, em relação ao vértice do cone, em função do tempo x, em segundo.
b) Obtenha a inversa da função f do item **a**.

104 Uma indústria fabrica colunas maciças de concreto na forma de tronco de cone circular reto com 10 m de altura e bases paralelas de raios 60 cm e 30 cm. Para a fabricação de 100 dessas colunas, o volume de concreto necessário é:

a) $314\pi\ m^3$
b) $\dfrac{593\pi}{7}\ m^3$
c) $\dfrac{900\pi}{7}\ m^3$
d) $156\pi\ m^3$
e) $210\pi\ m^3$

105 (Vunesp) Um recipiente tampado, na forma de um cone circular reto de altura 18 cm e raio 6 cm, contém um líquido até a altura de 15 cm (figura 1). A seguir, a posição do recipiente é invertida (figura 2).

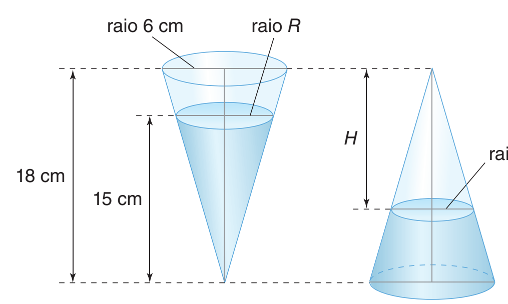


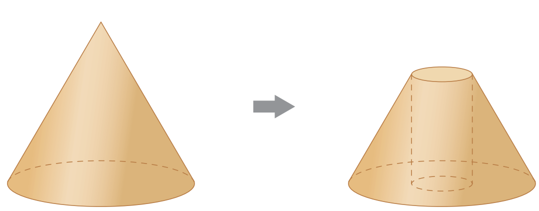
Figura 1 Figura 2

a) Determine R e o volume do líquido no cone em cm^3 (figura 1), como múltiplo de π.
b) Dado que $r = \sqrt[3]{91}$, determine a altura H da parte sem líquido do cone na figura 2.

$\left(\text{Use a aproximação } \sqrt[3]{91} \simeq \dfrac{9}{2}.\right)$

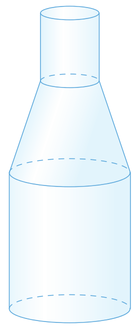
(*Nota*: Alguns autores adotam o símbolo $\simeq$ para indicar "aproximadamente".)

106 Um cone equilátero de madeira maciça, com 6 cm de raio da base, foi atravessado por um furo cilíndrico de 2 cm de raio tal que os eixos do cilindro e do cone coincidissem. Calcule o volume da peça final assim obtida.



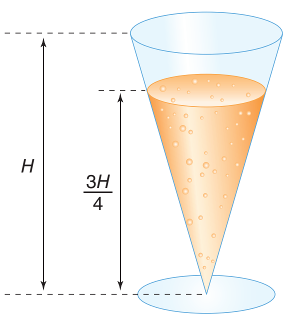
peça final

107 Uma garrafa tem a forma de dois cilindros circulares retos acoplados a um tronco cônico circular reto, conforme a figura. O cilindro maior tem, internamente, altura de 20 cm e raio da base de 6 cm; o cilindro menor é equilátero e tem, internamente, altura de 4 cm; e o tronco de cone tem, internamente, altura de 6 cm e raios das bases menor e maior com 2 cm e 6 cm.



Com a base da garrafa apoiada em um plano horizontal, foram despejados em seu interior 824π cm^3 de água. Determine a altura atingida pela água na garrafa.

108 Um copo com o formato interno de um cone circular reto contém 135 mL de suco, cuja superfície atinge $\frac{3}{4}$ da altura interna do copo, conforme mostra a figura. Calcule a capacidade desse copo em mililitro.



109 (Ufac) Um depósito de água, de 2 m de altura, tem forma de um "pedaço" de um cone. Os segmentos de reta contidos nas laterais com extremidades nas retas de mesma direção que contêm os diâmetros dos círculos da base e superior, quando prolongados, interceptam-se no ponto V, que dista 6 m do centro do círculo da base. Dado que o raio do círculo superior mede 2 m e o do círculo da base mede 1,5 m, o volume do depósito é igual a:

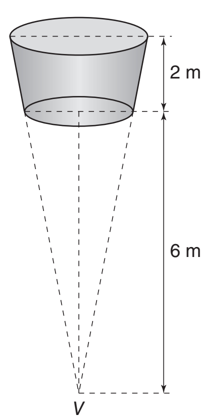
a) 8π m^3

b) $\frac{37\pi}{6}$ m^3

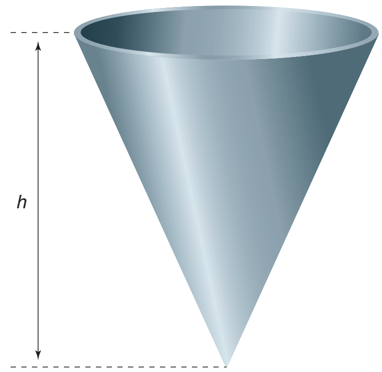
c) $\frac{40\pi}{3}$ m^3

d) 37π m^3

e) 25π m^3

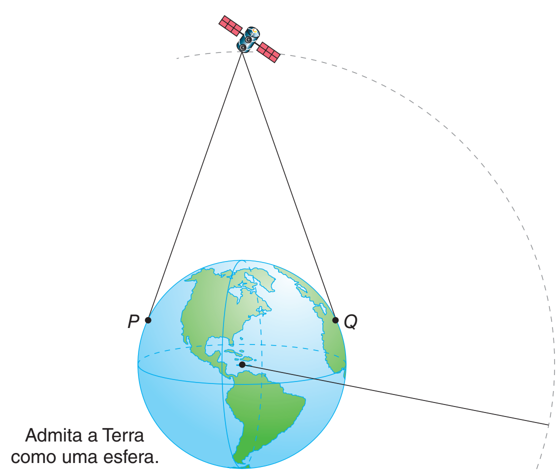


110 (UFRJ) Um recipiente em forma de cone circular reto de altura h é colocado com vértice para baixo e com eixo na vertical, como na figura. O recipiente, quando cheio até a borda, comporta 400 mL.



Determine o volume de líquido quando o nível está em $\frac{h}{2}$.

111 (UFSCar-SP) Os satélites de comunicação são posicionados em sincronismo com a Terra, o que significa dizer que cada satélite fica sempre sobre o mesmo ponto da superfície da Terra. Considere um satélite cujo raio da órbita seja igual a 7 vezes o raio da Terra. Na figura, P e Q representam duas cidades na Terra, separadas pela maior distância possível em que um sinal pode ser enviado e recebido, em linha reta, por esse satélite.



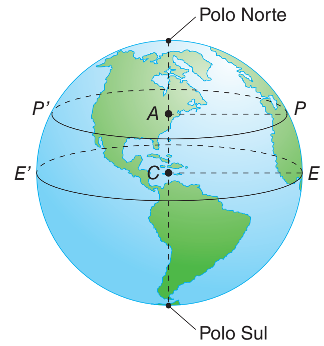
Se R é a medida do raio da Terra, para ir de P até Q, passando pelo satélite, o sinal percorrerá, em linha reta, a distância de:

a) $6\sqrt{3}R$
b) $7\sqrt{3}R$
c) $8\sqrt{3}R$
d) $10\sqrt{2}R$
e) $11\sqrt{2}R$

112 (Enem) Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de 13.824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a:

a) 4
b) 8
c) 16
d) 24
e) 32

113 (Cesgranrio-RJ) Supondo a Terra esférica de centro C, o comprimento (perímetro) do paralelo PP', mostrado na ilustração, é metade do comprimento da linha do equador EE'.



A latitude desse paralelo é:

a) 30°
b) 40°
c) 45°
d) 60°
e) 70°

114 (UFC-CE) Duas esferas de raios iguais a r são colocadas no interior de um tubo de ensaio sob a forma de um cilindro circular reto de raio da base r e altura $4r$. No espaço vazio compreendido entre as esferas, a superfície lateral e as bases superior e inferior do tubo de ensaio, coloca-se um líquido. Então, o volume desse líquido é:

a) $\frac{2\pi r^3}{3}$
b) $\frac{3\pi r^3}{4}$
c) $\frac{4\pi r^3}{3}$
d) $2\pi r^3$
e) $4\pi r^3$

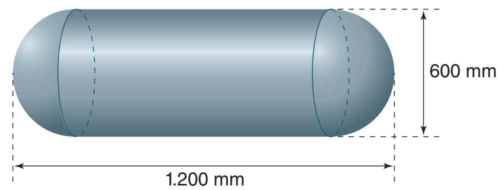
115 Em uma panela cilíndrica, com 15 cm de raio da base interna, havia sopa até a altura de 24 cm, em relação à base. Essa sopa foi servida como entrada em um jantar, utilizando-se uma concha semiesférica de raio interno 3 cm. Sabendo que a cada convidado foram servidas exatamente duas conchas de sopa completamente cheias e que toda a sopa da panela foi consumida, calcule o número de convidados que participaram desse jantar.

116 Dado que a densidade do ferro é 7,8 g/cm^3, calcule a massa, em kg, de uma bola maciça de ferro com 3 dm de diâmetro. (Adote $\pi = 3{,}14$.)

117 (Covest-PE) Derretendo uma peça maciça de ouro de forma esférica, quantas peças maciças da mesma forma se pode confeccionar com este ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da peça original? Admita que não houve perda de ouro durante o derretimento.

a) 3
b) 9
c) 18
d) 21
e) 27

118 Muitos postos de abastecimento comercializam o GNV (gás natural veicular). Quando nos referimos a 1 m^3 desse gás, estamos admitindo determinadas condições de pressão e temperatura, pois, como é sabido, o volume de um gás varia de acordo com essas grandezas. O GNV é armazenado sob alta pressão, em tanques especiais que passam por testes rigorosos para garantir a segurança da sua utilização. Suponha que um desses tanques tenha forma cilíndrica com extremidades semiesféricas e as dimensões internas indicadas na figura a seguir:



Sabendo que esse tanque comporta o máximo de 68,6718 m^3 de GNV comprimido, e adotando a aproximação $\pi = 3{,}14$, concluímos que a quantidade máxima de gás que pode ser comprimido em cada litro de capacidade do tanque é:

a) 0,514 m^3
b) 0,243 m^3
c) 0,354 m^3
d) 0,004 m^3
e) 0,04 m^3

119 (Fuvest-SP) Um fabricante de cristais produz três tipos de taças para servir vinho. Uma delas tem o bojo no formato de uma semiesfera de raio r; a outra, no formato de um cone reto de base circular de raio $2r$ e altura h; e a última, no formato de um cilindro reto de base circular de raio x e altura h. Sabendo-se que as taças dos três tipos, quando completamente cheias, comportam a mesma quantidade de vinho, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{h}$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
d) $\sqrt{3}$
e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

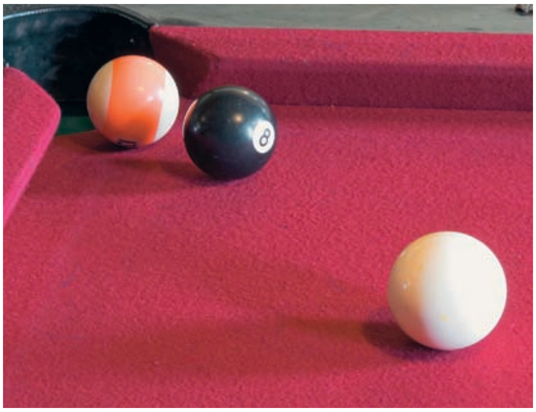
120 (OBM) A Revolução Francesa, em 1789, trouxe muitas mudanças na humanidade. Em 1791, após a Revolução Francesa, a Academia Francesa de Ciências propôs um novo sistema de medidas. Esse sistema era baseado numa medida "natural" de comprimento, chamada *metro*, que foi definida como um décimo de milionésimo da distância do Polo Norte ao Equador, medida em torno da circunferência do meridiano que passa por Paris. Tal sistema foi efetivamente adotado em 1795. A definição atual do metro é diferente, mas o valor é aproximadamente o mesmo.
Considerando os fatos acima, qual é a ordem de grandeza do volume do planeta Terra, em metro cúbico?

a) 10^{16}
b) 10^{21}
c) 10^{26}
d) 10^{31}
e) 10^{36}

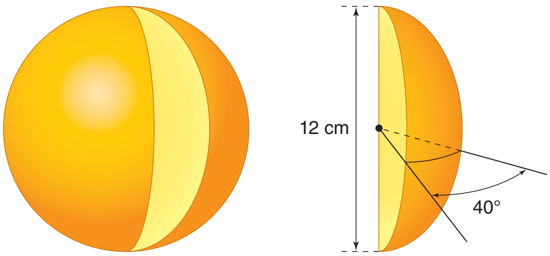
(*Nota*: A ordem de grandeza de um número é a potência inteira de 10 mais próxima desse número.)

121 Uma esfera maciça de ferro, cuja superfície tinha 256π cm^2 de área, foi derretida e transformada em 8 esferas maciças de mesmo raio. Calcule a área da superfície de cada uma dessas oito esferas.

122 Em um jogo de bilhar, uma bola cuja superfície tem 25π cm^2 de área deve passar através de uma abertura de 7,5 cm para cair na caçapa, conforme mostra a foto abaixo. Quanto por cento essa abertura é maior que o diâmetro da bola?



123 De um queijo esférico com 12 cm de diâmetro, retirou-se um pedaço em forma de cunha esférica com ângulo diedro de 40°.



Calcule:

a) a área do fuso esférico referente a esse pedaço.

b) o volume desse pedaço.

c) a área total desse pedaço.

124 (FGV) Um observador colocado no centro de uma esfera de raio 5 m vê o arco $\overset{\frown}{AB}$ sob um ângulo α de 72°, como mostra a figura. Isso significa que a área do fuso esférico determinado por α é:

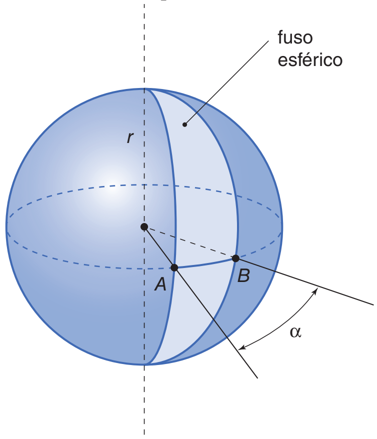
a) 20π m^2

b) 15π m^2

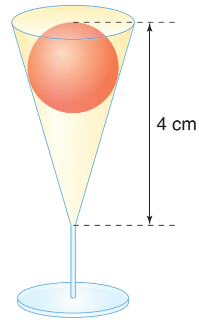
c) 10π m^2

d) 5π m^2

e) π m^2



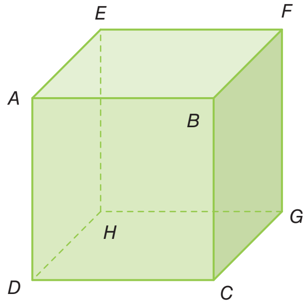
125 (FGV) Um cálice com a forma de cone contém V cm^3 de uma bebida.
Uma cereja de forma esférica, com diâmetro de 2 cm, é colocada dentro do cálice. Supondo-se que a cereja repouse apoiada na parede lateral do cálice e tangencie a superfície do líquido em um ponto a 4 cm de altura em relação ao vértice do cone, determine o valor de V.



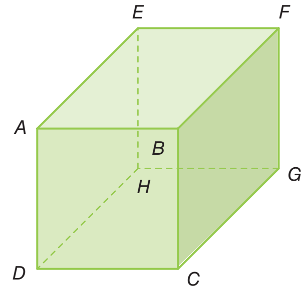
EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 No paralelepípedo reto-retângulo $ABCDEFGH$ representado abaixo, temos $AD = DC = 2\sqrt{6}$ dm e $CG = 4$ dm. Calcule a medida do ângulo $A\hat{G}C$.



2 No paralelepípedo reto-retângulo $ABCDEFGH$ representado abaixo, temos $DC = 5$ cm e $BF = 5\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida de um ângulo agudo formado pelas retas reversas $\overleftrightarrow{DG}$ e $\overleftrightarrow{BE}$.



Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

O centro de uma esfera de raio 10 cm pertence ao eixo de revolução de um cone, e a intersecção das superfícies da esfera e do cone é formada por duas circunferências de raios 6 cm e 8 cm, respectivamente. Calcule a altura do tronco de cone cujas bases são limitadas por essas duas circunferências.

Resolução

Sejam:

O: o centro da esfera

O' e O'': os centros da base do tronco

h: a altura do tronco

Pelo teorema de Pitágoras:

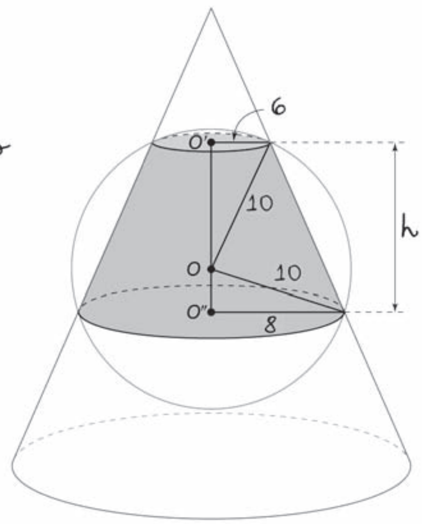
$(OO')^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow OO' = 8$

$(OO'') + 8^2 = 10^2 \Rightarrow OO'' = 6$

$\therefore h = OO' + OO'' = 8 + 6 = 14$

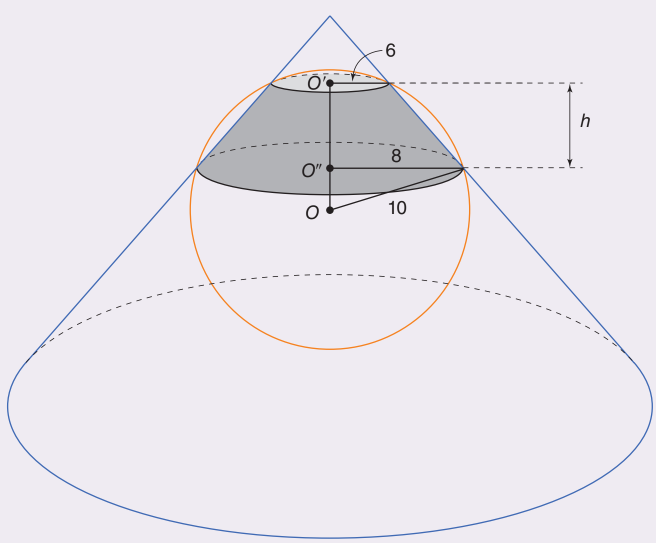
Logo, h = 14 cm.

Incompleto!



Comentário

Essa resolução está incompleta, pois há outra possibilidade que também obedece às condições enunciadas: é aquela que apresenta um cone cujo tronco, determinado conforme o enunciado, está contido em um hemisfério (metade da esfera), como mostra a figura abaixo:



Refaça essa resolução, completando-a.

RESPOSTAS

CAPÍTULO 10 Geometria de posição

Para pensar

1 Resposta pessoal.

2 23,5°

Exercícios propostos

1
a) V
b) F
c) F
d) V
e) V
f) V
g) V
h) F
i) V
j) F
k) V
l) V
m) F
n) V
o) V
p) F
q) V
r) F
s) V
t) F

DICA: Na maioria das vezes, as questões de geometria espacial, do tipo V ou F, podem ser respondidas intuitivamente. Porém, quando a intuição falhar, apoie-se na teoria: conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas.

2
a) V
b) F
c) V
d) F
e) V
f) F
g) V
h) F
i) V
j) F

3
a) convexa
b) convexa
c) não convexa
d) convexa
e) convexa
f) não convexa

4
a) V
b) F
c) V
d) V
e) V
f) V

5
a) V
b) V
c) F
d) V
e) F
f) V
g) V
h) V
i) F
j) V
k) F
l) V

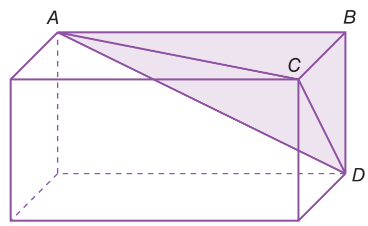
6
a) F
b) V
c) V
d) F
e) V
f) F
g) V
h) V
i) F
j) V
k) F
l) V
m) V

7
a) F
b) F
c) V
d) V
e) V
f) V
g) F
h) F

8
a) F
b) V
c) F
d) V
e) F
f) V
g) F
h) V
i) V
j) V
k) F
l) V
m) F
n) F

9 respostas possíveis:
a) $\triangle ABC$
b) $\triangle DEG$
c) $\triangle BGF$
d) $\triangle ABF$

10 Ficam determinados quatro planos. Uma figura possível, que represente esses quatro planos determinados por quatro pontos não coplanares, pode ser obtida a partir dos vértices A, B, C e D do paralelepípedo abaixo. Os quatro planos são: pl(ABC), pl(ACD), pl(BCD) e pl(ABD).



DICA: Pode-se calcular o número de planos através do número de combinações simples.

11 Três pontos não colineares determinam um plano. Assim, os pontos de apoio do tripé no solo estão em um mesmo plano e, por isso, dão estabilidade ao tripé.

12
a) V
b) V
c) F
d) V
e) V
f) F
g) V
h) F
i) V
j) V
k) F
l) V

13
a) V
b) V
c) F
d) V
e) F
f) V
g) V
h) V
i) F
j) V
k) F
l) F

14 demonstração
DICA: Aplique o teorema T.10.

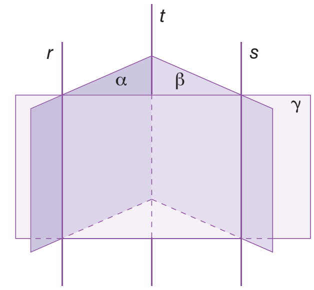
15 demonstração
DICA: Anexe à hipótese a negação da tese e chegue a um absurdo (a negação da tese é: r e α não têm ponto comum ou r e α têm mais de um ponto em comum).

16
a) V
b) F
c) V
d) V
e) V
f) F
g) F
h) V
i) F
j) V
k) V
l) F
m) V
n) F
o) V
p) F
q) V
r) F
s) V
t) V
u) V
v) V

17 Falsa, pois os planos podem ser paralelos coincidentes.

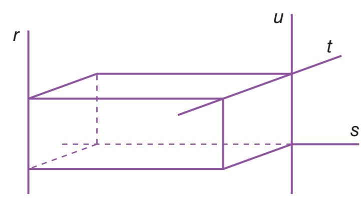
18 É a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

19 Não, pois α e β podem ser secantes na reta t, com $t \,//\, \gamma$, conforme a figura abaixo.



20
a) F
b) V
c) V
d) V
e) F
f) F
g) F
h) F
i) F
j) F
k) F

21 Verdadeira. Temos que qualquer plano paralelo a duas delas é secante à terceira. Uma figura que mostra existência da reta u é o paralelepípedo abaixo:



22 demonstração
DICA: Aplique a definição de retas reversas e o teorema T.10.

23 Duas retas concorrentes determinam um plano.

24
a) V
b) F
c) V
d) V
e) V
f) F
g) F
h) V
i) V
j) V
k) F
l) V
m) V

25
a) V
b) F
c) V
d) F
e) F
f) F
g) V
h) V
i) F
j) V
k) F
l) F
m) V
n) V
o) F
p) V

26 a

27
a) V
b) V
c) V
d) F
e) F
f) V

28 d

29 demonstração
DICA: Aplique o teorema T.29 e o fato de que duas retas paralelas e uma transversal determinam ângulos correspondentes congruentes.

30 Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano α, então r é perpendicular a α (teorema T.29).

31 a) V e) F
b) V f) V
c) F g) V
d) V h) F

32 a) F e) V
b) V f) V
c) V g) V
d) F h) F

33 b

34 A reta s, comum a α e β, deve ser perpendicular a γ. Para que isso ocorra, a reta r deve formar ângulo reto com s.

35 a

36 demonstração
DICA: Aplique a definição de planos perpendiculares e o resultado obtido na demonstração da questão proposta 29.

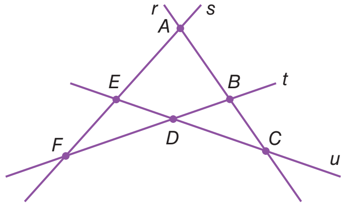
37 a) $\overline{HG}$ g) retângulo *EFGH*
b) $\overline{EG}$ h) $\overline{FG}$
c) E i) $\overline{EG}$
d) E j) G
e) $\overline{FG}$ k) retângulo *EFGH*
f) $\overline{EF}$

38 a) É o ponto de intersecção de r e α.
b) É a reta, concorrente com r, que passa pelas projeções ortogonais de dois pontos distintos de r sobre α.
c) É a reta, paralela a r, que passa pelas projeções ortogonais de dois pontos distintos de r sobre α.
d) É a própria reta r.

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 Sim. Uma figura possível que justifica essa afirmação é:



2 demonstração
DICA: Aplique o postulado P.2.

3 demonstração
DICA: Aplique os postulados P.3 e P.5.

4 15

5 a) F e) F
b) V f) V
c) F g) V
d) V h) V

6 e

7 e

8 Não. Duas figuras, F e G, coincidem se, e somente se, todo ponto de F pertence a G e todo ponto de G pertence a F. Como é impossível que todos os pontos de um plano pertençam a uma reta, concluímos que é impossível um plano coincidir com uma reta.

9 20
DICA: Pode-se calcular o número de planos através do número de combinações simples.

10 descrição de procedimento
DICA: Aplique o postulado P.7.

11 descrição de procedimento
DICA: Aplique os postulados P.4 e P.7.

12 descrição de procedimento
DICA: Aplique o teorema T.7 e o postulado P.10.

13 descrição de procedimento
DICA: Aplique o teorema T.6 e o postulado P.10.

14 demonstração
DICA: Aplique a definição de retas reversas e o postulado P.5.

15 descrição de procedimento
DICA: Aplique os teoremas T.6 e T.12.

16 demonstração
DICA: Aplique o teorema T.10.

17 c

18 c

19 d

20 b

21 b

22 c

23 demonstração
DICA: Aplique as definições de planos secantes, reta contida em plano e reta paralela a plano.

24 coincidentes

25 c

26 c

27 e

28 demonstração
DICA: Esse teorema deve ser demonstrado em três casos: (I) r é perpendicular a α; (II) r é secante a α e não perpendicular a α; (III) r está contida em α. No primeiro caso, aplique a definição de reta perpendicular a plano e os teoremas T.6 e T.8. No segundo caso, aplique a definição de reta perpendicular a plano e o teorema T.6. No terceiro caso, aplique a definição de reta perpendicular a plano e o teorema T.6.

29 d

30 d

31 e

32 b

33 demonstração
DICA: Aplique a definição de reta perpendicular a plano e o teorema T.29.

34 a

35 d

36 demonstração
DICA: Aplique as definições de retas reversas, planos paralelos, reta contida em plano, retas perpendiculares e reta perpendicular a plano, e os teoremas T.6, T.18 e T.20.

37 a

38 c

39 demonstração
DICA: Aplique as definições de reta paralela a plano, reta perpendicular a plano e de planos perpendiculares, e os teoremas T.31 e T.36.

40 b

41 a

42 d

43 demonstração
DICA: Aplique as definições de retas reversas, retas perpendiculares, planos perpendiculares, reta paralela a plano e de reta contida em plano, e os teoremas T.6 e T.31.

44 demonstração
DICA: Supondo que existam duas retas distintas perpendiculares a r e s, chega-se a um absurdo. Aplique o teorema T.35.

45 b

46 d

47 08

48 b

49 a

50 b

51 a

52 c

53 e

54 É a reta comum aos dois planos.

55 um segmento de reta

56 **a)** Se r e s forem perpendiculares a α.
b) Se r e s estiverem contidas em um plano β perpendicular a α e não forem ambas perpendiculares a α.
c) Se r e s forem paralelas e não estiverem contidas em um plano perpendicular a α.

57 Se uma das retas, r ou s for perpendicular a α, então a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α é formada por uma reta t e um ponto P, com $P \notin t$.
Se r e s forem paralelas a α, então a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α é formada por duas retas concorrentes.
Se cada uma das retas, r e s, está em um plano perpendicular a α, tal que nenhuma delas seja perpendicular a α, então a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α é formada por duas retas paralelas distintas.

58 Se o plano que contém o ângulo é paralelo a β.

- **Exercícios contextualizados**

59 demonstração
DICA: Aplique o postulado P.4.

60 d

61 demonstração
DICA: Aplique o postulado P.5.

62 d

63 Não é possível, pois o poste pode ser perpendicular à sua sombra em dado instante e ser oblíquo a sua sombra em outro instante. Para que o poste seja perpendicular ao terreno, ele deve ser perpendicular à sua sombra em qualquer instante.

64 O fio de prumo representa a reta r, a parede representa o plano α, paralelo a r; e um plano horizontal qualquer representa o plano β, que poderá ser o plano do piso, se este for horizontal.

65 O cabo terá o menor comprimento possível se ele for perpendicular à linha r. Traçando, a partir da base do mastro, uma linha perpendicular à linha r, obtemos na linha r o ponto A, cuja distância ao topo T do mastro é a menor possível.

66 **a)** para qualquer posição de c, r e s
b) para $s \subset pl(r, c)$
c) para qualquer posição de c, r e s

67 demonstração
Dica: Inicialmente, prove que A, B e C não são coplanares e, a seguir, aplique o postulado P.10.

68 demonstração
DICA: Aplique as definições de retas paralelas e de retas concorrentes, os teoremas T.6 e T.7 e o postulado P.10.

69 demonstração
DICA: Supondo que A, B, C e D são pontos coplanares, chega-se a um absurdo, com a definição de quadrilátero reverso.

70 demonstração
DICA: Aplique as definições de reta contida em plano, de reta secante a plano e de retas reversas.

Exercícios de revisão cumulativa

1 zero

2 16

3 d

Análise da resolução

descrição de procedimento

CAPÍTULO 11 Geometria métrica: poliedros

Para pensar

1 Resposta pessoal.

2 4.096 cm^3

Exercícios propostos

1 **a)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
b) $\sqrt{3}$
c) 30°
DICA: Os ângulos formados por uma reta e um plano são aqueles formados pela reta e sua projeção ortogonal sobre o plano.

2 **a)** 100°
b) 80°
c) 40°
DICA: Os ângulos formados por dois planos são aqueles formados por duas retas quaisquer, contidas uma em cada plano, e perpendiculares à reta comum a esses planos.

3 45°

4 **a)** 60°
b) $y < x$

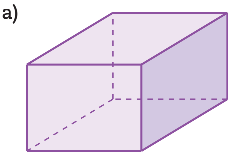
5 13 cm

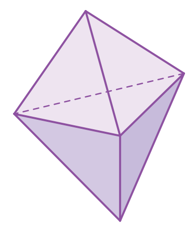
6 5 m

7 **a)** $6\sqrt{3}$ cm
b) $6\sqrt{2}$ cm
c) 6 cm
d) 6 cm
e) $6\sqrt{3}$ cm
f) $6\sqrt{3}$ cm
g) 30°
h) $6\sqrt{3}$ cm
i) 6 cm
j) 6 cm
k) 30°
l) $\sqrt{2}$
m) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

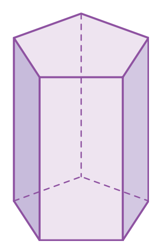
8 $5\sqrt{3}$ cm

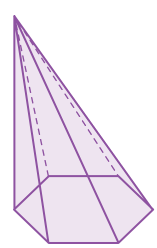
9 respostas possíveis:
a)





b)





10 30

11 16

12 30

13 25

14 8

15 10

16 35

17 Não existe, porque esses números de vértices, arestas e faces não satisfazem a relação de Euler.

18 18

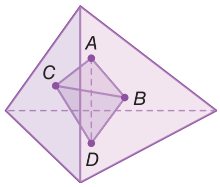
19 20

20 9

21 7

22 10

23 a)



b) É o tetraedro regular.
c) É o icosaedro regular.
d) É o dodecaedro regular.

24 $5\sqrt{2}$ cm

25 $180\sqrt{3}$ cm^2

26 10 cm
DICA: As diagonais que passam pelo centro de um hexágono regular dividem-no em seis triângulos equiláteros.

27 a) 13 cm
b) 30 cm^2
c) 600 cm^2
d) 660 cm^2
DICA: A área de um triângulo retângulo é o semiproduto das medidas dos catetos.

28 $A_\ell = 1.180$ m^2 e

$$A_T = \frac{5\left(616 + 15\sqrt{7}\right)}{2} \text{ m}^2$$

DICA: Em um triângulo isósceles, a altura relativa à base coincide com a mediana.

29 a) $A_\ell = 280$ cm^2
b) $A_T = 352$ cm^2
DICA: A área A de um trapézio de altura h e bases b e B é dada por:

$$A = \frac{(b + B) \cdot h}{2}$$

30 a) 40 cm^2
b) 25 cm^2
c) 160 cm^2
d) 210 cm^2

31 a) 42 cm^2
b) $9\sqrt{3}$ cm^2
c) 126 cm^2
d) $18\left(7 + \sqrt{3}\right)$ cm^2
DICA: A altura h de um triângulo equilátero de lado a é dada por:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

32 a) 96 dm^2
b) $96\sqrt{3}$ dm^2
c) 576 dm^2
d) $192\left(3 + \sqrt{3}\right)$ dm^2
DICA: A área de um hexágono regular de lado a é 6 vezes a área de um triângulo equilátero de lado a.

33 8 dm

34 2 cm, 6 cm e 8 cm

35 a) 13 cm
b) 14 cm
c) $2\left(60 + 51\sqrt{3}\right)$ cm^2

36 b

37 $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

38 a) $5\sqrt{3}$ cm
b) 150 cm^2
c) 100 cm^2

39 a) $4\sqrt{3}$ dm
b) 64 dm^2

40 $2\sqrt{6}$ cm

41 76.800 dm^3

42 136 dm^2
DICA: Dizer que três números a, b e c são diretamente proporcionais a 5, 2 e 1 significa dizer que $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1} = k$, ou seja, $a = 5k$, $b = 2k$ e $c = k$, em que k é uma constante.

43 $3\sqrt{3}$ cm^3

44 2,25

45 1.000.000 L
DICA: Três números em progressão geométrica de razão 2 são números do tipo a, $2a$ e $4a$.

46 a
DICA: 1L = 1 dm^3

47 24 horas

48 Os volumes são iguais, pelo princípio de Cavalieri.

49 a) $10\sqrt{2}$ cm
b) $350\sqrt{2}$ cm^3
DICA: A área de um losango pode ser calculada como o semiproduto das medidas das diagonais.

50 240 cm^3

51 6 cm

52 $81\sqrt{3}$ cm^3

53 6

54 $240\sqrt{3}$ cm^3

55 $120\sqrt{3}$ dm^3

56 $108\left(\sqrt{3} + 2\right)$ cm^2

57 96 dm^3

58 a

59 6,4 L

60 a) 12 cm
b) 9 cm
c) $3\sqrt{7}$ cm
d) 432 cm^2
e) 324 cm^2
f) 756 cm^2

61 $A_\ell = 30\sqrt{3}$ cm^2 e $A_T = 48\sqrt{3}$ cm^2

62 a) $2\sqrt{3}$ cm
b) 10 cm
c) 180 cm^2
d) $36\sqrt{3}$ cm^2
e) $36\left(5 + \sqrt{3}\right)$ cm^2

63 a) $3\sqrt{3}$ cm
b) $\sqrt{3}$ cm
c) $2\sqrt{6}$ cm
d) $36\sqrt{3}$ cm^2

64 360 cm^2

65 15 cm

66 30°

67 $\sqrt{91}$ m

68 32 cm^2

69 a) 18 cm
b) 540 cm^3

70 2 m^3

71 80 cm^3

72 120 cm^3

73 192 dm^3

74 $21\sqrt{14}$ cm^3

75 24 cm^3

76 384 cm^3

77 $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}$ cm^3
DICA: O octaedro regular pode ser decomposto em duas pirâmides quadrangulares regulares.

78 $216\sqrt{3}$ cm^3

79 $180\sqrt{3}$ m^3

80 $36\sqrt{3}$ cm^3

81 $216\sqrt{3}$ dm^3

82 a

83 3 cm

84 6 dm^3

85 $4\sqrt[3]{25}$ cm

86 6.656 cm^3

87 78 cm^3

88 e
DICA: Prolongue as arestas laterais do tronco, formando a pirâmide que o contém.

Exercícios complementares

- **Exercícios técnicos**

1 30°

2 a) $\frac{4\sqrt{19}}{19}$
b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
c) agudo

3 c

4 150°

5 $\frac{3}{5}$

6 a) $3\sqrt{3}$ cm
b) 4 cm
DICA: A distância entre duas retas reversas é a medida do segmento de reta com extremos nessas retas e perpendicular a elas.

7 a) 30°
b) $3\sqrt{3}$ cm

8 30

9 25

10 30

11 20

12 12

13 a

14 e

15 Não existe, porque um poliedro nessas condições não satisfaz a relação de Euler.
DICA: Suponha que exista tal poliedro e aplique a relação de Euler.

16 Não existe, porque um poliedro nessas condições não satisfaz a relação de Euler.
DICA: Suponha que exista tal poliedro e aplique a relação de Euler.

17 demonstração
DICA: Aplique a relação de Euler, fazendo V = F.

18 a

19 planificação/construção de poliedros

20 $3\sqrt{6}$ cm

21 a) 680 cm^2
b) 788 cm^2

22 a) 288 cm^2
b) 408 cm^2

23 a) 4 cm
b) 144 cm^2
c) 216 cm^2

24 $18\left(6 + \sqrt{3}\right)$ m^2

25 $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

26 13 cm

27 c

28 a) 150 cm^2
b) 100 cm^2

29 c

30 b

31 216 cm^3
DICA: Dizer que três números a, b e c são inversamente proporcionais a $\frac{1}{2}$, 3 e $\frac{2}{3}$ significa dizer que a, b e c são diretamente proporcionais aos inversos de $\frac{1}{2}$, 3 e $\frac{2}{3}$, ou seja, $\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{3}{2}} = k$, em que k é uma constante.

32 a

33 a) $10\sqrt{3}$ cm
b) 600 cm^2
c) 400 cm^2

34 a) 8 cm
b) 1.000 cm^3

35 a

36 $\frac{5}{7}$

37 2.700 cm^3

38 3.860 cm^3

39 72 m^3

40 108 cm^2

41 $16\sqrt{3}$ m^3

42 b

43 d

44 c

45 a) 15 cm^2
b) 18 cm^3
DICA: Trace por M e N retas perpendiculares à base ABC.

46 6 dm

47 336 cm^2

48 $\sqrt{\frac{27}{11}}$ m

49 d

50 $144\sqrt{3}$ cm^2

51 12 cm

52 $\sqrt{5}$

53 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

54 $18\left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm^2

55 $36\left(9 + \sqrt{3}\right)$ cm^2

56 12 cm

57 45 cm^2

58 1.500 cm^3

59 b

60 a

61 $\frac{512}{3}$ dm^3

62 a) $3\sqrt{6}$ cm
b) $36\left(1 + \sqrt{5}\right)$ cm^2

63 b
DICA: Una, por segmentos de reta, os centros de duas faces adjacentes do cubo ao ponto médio da aresta comum a essas faces.

64 a) 14
b) $x = \frac{a}{2}$

65 $32\sqrt{3}$ cm^3

66 $96\sqrt{3}$ cm^3

67 $72\sqrt{3}$ cm^3

68 $72\sqrt{3}$ cm^3

69 b

70 $144\sqrt{2}$ cm^3

71 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm^3

72 c

73 a) $\sqrt[3]{9}$
b) $3\sqrt[3]{3}$

74 $5\sqrt[3]{4}$ cm

75 c

76 1.040 dm^3

77 a) 720 cm^2
b) 1.220 cm^2
c) $\sqrt{119}$ cm
d) $\frac{700\sqrt{119}}{3}$ cm^3

78 168 dm^3

- **Exercícios contextualizados**

79 Apenas o ladrilho tem a forma de um poliedro convexo.

80 13,5 m

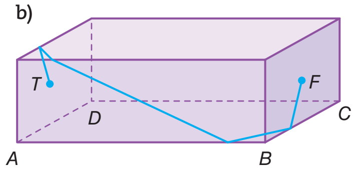
81 12

82 e

83 a) $\sqrt{193}$ m

DICA: Desenhe um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{TF}$.

b)



84 c

85 180.000 cm^3

86 c

87 5.000 cm^3

88 60 kg

89 5 cm

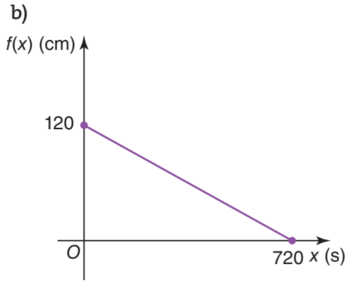
90 b

91 d

92 $1 + 2 + 4 = 7$

93 a) $f(x) = 120 - \frac{x}{6}$, com $0 \leqslant x \leqslant 720$

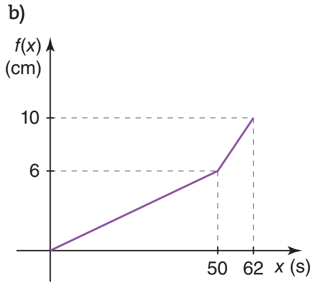
b)



DICA: A velocidade de descida do nível da água pode ser calculada pela razão: $\frac{\text{vazão}}{\text{área}}$.

94 a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{25}, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ \frac{x - 32}{3}, \text{ se } 50 < x \leqslant 62 \end{cases}$

b)



95 c

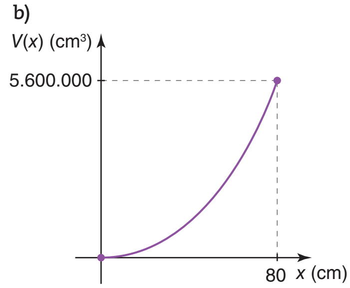
DICA: O menor número de caixas é obtido quando a medida da aresta dos cubos é a maior possível.

96 d

97 a) $V(x) = 60.000x + 125x^2$, com $0 \leqslant x \leqslant 80$

DICA: A água forma um prisma reto cuja base é um trapézio de altura x.

b)



98 a) V

b) V

c) F

d) F

e) F

99 a) 65.000 L

DICA: Considere o plano que contém o fundo da parte rasa da piscina.

b) 6.000 L

100 0,1 mm

101 a

102 21.504 cm^2

103 d

104 a

105 c

106 a

107 a

108 a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\ell^2\sqrt{6}}{8}$ c) $\frac{\ell^3}{16}$

Exercícios de revisão cumulativa

1 $\frac{420}{1.001}$

2 a

3 Se $m \neq -1$, SPD; se $m = -1$, SI

4 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

Análise da resolução

$4\sqrt{3}$ dm

CAPÍTULO 12 Geometria métrica: corpos redondos

Para pensar

$\approx 0{,}47$ mm

Exercícios propostos

1 a) 9π cm^2

b) 60π cm^2

c) 78π cm^2

d) 60 cm^2

2 a) 3 dm

b) 9π dm^2

c) 36π dm^2

d) 54π dm^2

3 $100\pi^2$ cm^2

4 96π cm^2

5 112π cm^2

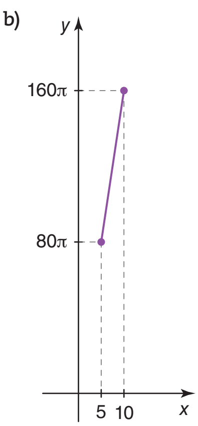
DICA: O baricentro (encontro das medianas) de um triângulo divide cada mediana, a partir do vértice, na razão $\frac{2}{1}$. No triângulo equilátero, o circuncentro (centro da circunferência circunscrita) coincide com o baricentro.

6 1,5 dm

7 $A\ell = 75(2 + \pi)$ cm^2 e $A_T = 50(3 + 2\pi)$ cm^2

8 a) $f(x) = 16\pi x$, com $5 \leqslant x \leqslant 10$

b)



9 1.067,6 m^2

10 c

11 $1{,}28\pi$ m^3

12 150π cm^3

DICA: O volume de qualquer cilindro circular, reto ou oblíquo, é o produto da área da base pela altura.

13 $8{,}1\pi$ dm^3 ou 8.100π cm^3

14 96π cm²

15 5 cm

DICA: O perímetro de uma circunferência de raio r é $2\pi r$.

16 300π cm³

17 $500\pi^2$ cm³

18 16π

19 a) 24π cm³

b) 96π cm²

20 a) $f(x) = \frac{3\pi x^3}{2}$

b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2x}{3\pi}}$

DICA: Dizer que a altura h e o raio r da base variam linearmente equivale a dizer que para qualquer variação Δh da altura, a variação correspondente Δr do raio da base é tal que $\frac{\Delta h}{\Delta r}$ é constante.

21 96π cm³

22 b

23 d

24 504π cm³

25 58

26 e

27 112π cm³

28 81π cm³

29 ≈ 4.777

30 a

DICA: O volume de água despejada é igual ao volume de um tronco de cilindro.

31 a) 60π cm²

b) 96π cm²

c) 48 cm²

d) $\frac{6\pi}{5}$ rad

32 a) 72π cm²

b) 108π cm²

c) $36\sqrt{3}$ cm²

d) π rad

33 demonstração

34 10 cm

DICA: Em um triângulo isósceles a mediana, a bissetriz e a altura relativas à base coincidem.

35 12 cm²

36 2 m

37 12π dm²

38 $6\sqrt{2}$ dm

39 a) 65π cm²

b) 156π cm²

DICA: Revolução é sinônimo de rotação.

40 7,5 cm

DICA: A resolução dessa questão não depende do fato de o cone ser reto ou oblíquo.

41 10 cm

42 $\frac{16\pi}{3}$ dm³

43 27π cm³

44 $6\pi\sqrt{2}$ cm³

45 $72\pi\sqrt{2}$ dm³

DICA: O volume de qualquer cone circular, reto ou oblíquo, é a terça parte do produto da área da base pela altura.

46 24π cm³

47 96π cm³

48 a) 3 dm

b) 18π dm²

c) 27π dm²

d) $9\sqrt{3}$ dm²

49 324π cm³

50 c

DICA: Sólidos equivalentes são sólidos de mesmo volume.

51 $\frac{4\pi r^3}{3}$

52 $9{,}27\pi$ cm³ ou $\approx 29{,}12$ cm³

53 7.500

54 a) 756π cm³

b) 225π cm²

c) 378π cm²

55 a) 444π cm³

b) 105π cm²

c) 330π cm²

56 9 cm

DICA: Prolongue as geratrizes do tronco, obtendo o cone que o contém.

57 734.760 L

58 d

59 $\frac{664\pi}{3}$ mL

60 $2\sqrt{5}$ cm

61 a) 15 cm

b) 225π cm²

62 12 dm

63 52 cm

DICA: Considere um plano perpendicular a r e passando por O e O'.

64 d

DICA: Sendo C' o centro do paralelo, o triângulo $AC'B$ é isósceles.

65 16 cm

66 $\frac{32\pi}{3}$ m³

67 144π cm³

68 $\frac{256\pi}{3}$ m³

69 $\frac{1.372\pi}{3}$ dm³

70 3 cm

71 1 cm

72 e

73 a) demonstração

b) $2{,}304\pi$ cm³

74 144π dm²

75 16π m²

76 400π cm²

77 $\frac{4.000\pi}{3}$ cm³

78 27π cm²

79 R$ 847,80

80 $\frac{144\pi}{5}$ cm³

81 4π cm²

82 72°

83 $\frac{2\pi}{5}$ rad

84 c

DICA: Fuso horário é cada uma das 24 partes congruentes em que fica dividida a superfície terrestre por 24 meridianos (semicircunferências com extremos nos polos) em que um deles passa pela cidade de Greenwich, próxima a Londres.

85 $5\sqrt{2}$ cm e $10\sqrt{2}$ cm

86 e

87 b

DICA: Os centros da bola superior e de quatro bolas da base da pilha determinam uma pirâmide quadrangular regular.

88 0,5 m

89 2 cm

90 125 cm³

91 $\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$ cm

DICA: Relacione a distância pedida com a medida da diagonal do cubo.

92 $4\sqrt{3}$ cm

93 9π cm²

94 $24\sqrt{3}$ dm³

95 $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

96 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

97 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

98 $20\sqrt{2}$ cm

DICA: Cada diagonal do octaedro regular de aresta *a* é diagonal de um quadrado de lado *a*.

99 288 dm³

100 $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

101 $\frac{512\pi\sqrt{6}}{27}$ cm³

102 12 m

103 96π cm²

104 $\frac{256\pi}{3}$ cm³

105 $\frac{500\pi}{3}$ cm³

106 1 dm

107 9 cm

108 4,8 cm

109 1.875π cm³

110 4 dm

DICA: Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

111 Os raios das esferas inscrita e circunscrita medem $\frac{3(\sqrt{109}-3)}{10}$ dm e $\frac{109}{20}$ dm, respectivamente.

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 a) 2 m
b) 20π m²
c) 28π m²
d) 20 m²

2 a) 2,5 cm
b) $6{,}25\pi$ cm²
c) 25π cm²
d) $37{,}5\pi$ cm²

3 a) 280π cm²
b) 112π cm²

4 4 cm

5 8 dm

6 5 cm

DICA: A área de um paralelogramo é o produto das medidas da base e da altura.

7 60°

8 75π cm³

9 c

10 $18(\pi + 2)$ cm²

11 3 dm

12 a) 40π dm²
b) 56π dm²
c) $8\sqrt{21}$ dm²
d) $\frac{4\pi}{5}$ rad

13 $3\sqrt{3}$ cm²

14 144π cm²

15 b

16 33π cm²

17 12 cm²

18 d

19 120°

20 10,5 cm

21 4

22 $\frac{64\pi}{3}$ cm³

23 16 cm³

24 b

25 a

26 c

27 a) $f(x) = \pi x^3$
b) $3 < x \leqslant 5$

28 a) 3 cm
b) 104π cm³

29 486 dm³

30 c

31 d

32 $\frac{H(2-\sqrt[3]{4})}{2}$

33 3 m

34 e

35 1 dm

36 $\frac{4.000\pi}{3}$ cm³

37 $2\sqrt{6}$ cm

38 a

39 36 mm

40 256π dm²

41 36π dm²

42 400π dm²

43 a

44 $V = \frac{128\pi}{3}$ cm³; $A = 48\pi$ cm²

DICA: O sólido gerado é um hemisfério de raio 4 cm.

45 e

46 6π m³

47 $\frac{125\pi}{9}$ cm²

48 $\frac{52\pi}{9}$ m²

49 5 dm

50 8 cm

51 4π dm²

52 $\frac{9\pi}{2}$ dm²

53 a

54 $\frac{\sqrt{3}}{72}$

55 3π m²

56 $\frac{1}{3}$

57 $\frac{\sqrt{3}}{9}$

58 $\frac{2}{\pi}$

59 $4\sqrt{3}$ cm²

60 $64\pi\sqrt{6}$ dm³

61 π

62 $4\sqrt{6}$ cm

63 2π dm³

64 16π cm²

65 $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$ cm³

66 4π cm³

67 $8\pi(2\sqrt{19} + 1)$ cm²

68 144π cm²

69 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

70 $5\sqrt{3}$ cm

71 20 cm

72 25π dm²

73 8 cm

74 13 cm

75 9 cm

- **Exercícios contextualizados**

76 100

77 b
DICA: A área pintada é a sexta parte da área lateral do cilindro.

78 c

79 4 cm

80 785.000 L

81 c
DICA: Após o enchimento do cano, o volume da parte vazia da caixa é igual ao volume do cano.

82 b

83 $51{,}125\pi$ cm^3 ou $\approx 160{,}5$ cm^3
DICA: Considere uma secção meridiana do copo.

84 raio da base: ≈ 4 cm;
altura do cilindro: ≈ 8 cm

85 b

86 b

87 $(1.000.000\pi - 192.800)$ cm^3 ou $\approx 2{,}95$ cm^3

88 $600\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$L ou ≈ 4.422 L
DICA: Considere uma secção transversal desse cilindro e calcule a medida do ângulo cujo vértice é o centro dessa secção e cujos lados passam pelos pontos de intersecção da gasolina com o reservatório.

89 12π

90 3 cm

91 d

92 b

93 a) F
b) F
c) F
d) V

94 2 m

95 $7\sqrt{3}$ cm

96 c

97 b

98 4π m^2

99 5 cm
DICA: Aplique o conceito de cones semelhantes.

100 e

101 c

102 a) $108r^2$ cm^3 e $27r^2$ cm^3
b) 20%; $h = 20$ cm

103 a) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{480x}{\pi}}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{\pi x^3}{480}$

DICA: Indique por r a medida do raio da superfície do *milk-shake* na taça, depois de x segundos de aberta a torneira, e aplique o conceito de semelhança de cones.

104 e

105 a) 5 cm; 125π cm^3
b) $\approx 13{,}5$ cm

106 $\dfrac{160\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3

107 26 cm

108 320 mL

109 b

110 50 mL

111 c
DICA: Indicando por O o centro da Terra e por S o satélite, temos que $\overline{SP}$ e $\overline{SQ}$ são tangentes à esfera e, consequentemente, $SP = SQ$, $\overline{OP} \perp \overline{SP}$ e $\overline{OQ} \perp \overline{SQ}$.

112 b

113 d
DICA: Aplique o conceito de seno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo.

114 c

115 150

116 110,214 kg

117 e

118 b
DICA: A medida do raio de cada semiesfera é igual à medida do raio da base do cilindro.

119 e

120 b

121 64π cm^2

122 50%

123 a) 16π cm^2
b) 32π cm^3
c) 52π cm^2

124 a

125 $\dfrac{4\pi}{3}$ cm^3

Exercícios de revisão cumulativa

1 60°

2 60°

Análise da resolução

14 cm ou 2 cm

TEXTO COMPLEMENTAR

Demonstração dos teoremas T.6, T.7, T.8 e T.9

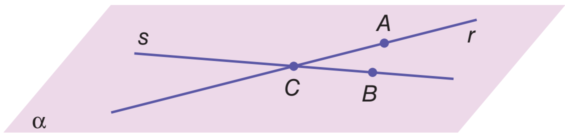
T.6 Duas retas concorrentes, *r* e *s*, determinam um plano.

Demonstração

1ª parte: existência

As retas *r* e *s* têm em comum um único ponto *C*. Sendo os pontos *A*, com $A \in r$, e *B*, com $B \in s$, tais que $A \not\equiv C$ e $B \not\equiv C$, temos que *A*, *B* e *C* não são colineares e, portanto, pelo postulado P.5, esses pontos determinam um plano α.

Pelo postulado P.9, temos ainda que $r \subset \alpha$, pois *A* e *C* são pontos distintos que pertencem a *r* e a α; e $s \subset \alpha$, pois *B* e *C* são pontos distintos que pertencem a *s* e a α.



2ª parte: unicidade

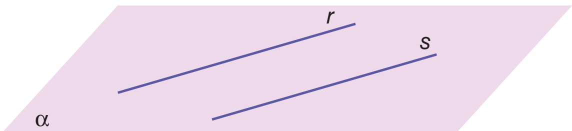
Suponhamos que exista outro plano α' que passe por *r* e *s* simultaneamente. Como *A* e *C* pertencem a *r*, e *B* e *C* pertencem a *s*, temos que α' passa pelos pontos não colineares *A*, *B* e *C*. Pelo postulado P.5, existe um único plano que passa simultaneamente por três pontos não colineares; logo, $\alpha' \equiv \alpha$.

T.7 Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

Demonstração

1ª parte: existência

A própria definição de retas paralelas distintas garante a existência do plano α que passa por ambas simultaneamente; pois, por definição, para que duas retas sejam paralelas distintas elas devem ser coplanares e não ter ponto comum.



2ª parte: unicidade

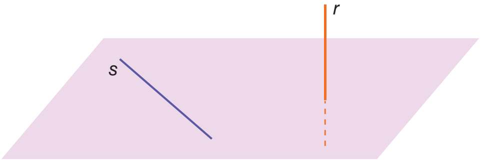
Suponhamos que exista outro plano α', distinto de α, tal que $r \subset \alpha'$ e $s \subset \alpha'$.

Sendo *A* um ponto de *s*, temos, pelo teorema T.5, que existe um único plano que passa simultaneamente por *A* e por *s*; logo, $\alpha' \equiv \alpha$.

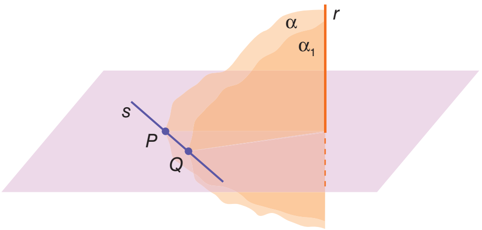
T.8 Por uma reta passam infinitos planos.

Demonstração

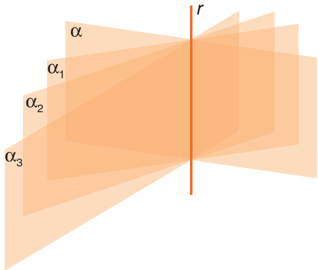
Dada uma reta r qualquer, consideremos uma reta s, reversa a r:



Pelo teorema T.5, a reta r e um ponto P qualquer da reta s determinam um plano α. Note que $s \not\subset \alpha$, pois, sendo r e s reversas, não existe um plano que contenha ambas simultaneamente. Tomemos um ponto Q de s, com $Q \not\equiv P$. De acordo com o teorema T.5, a reta r e o ponto Q determinam um novo plano α_1, com $\alpha_1 \not\equiv \alpha$.



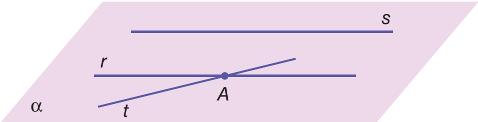
Repetindo esses procedimentos, podemos construir infinitos planos distintos que passam por r.



T.9 Se r, s e t são retas coplanares tais que r e t são concorrentes e r // s, então s e t são concorrentes.

Demonstração

Se r e t são concorrentes, então existe um único ponto A comum a ambas.



Suponhamos que t // s. Por hipótese, temos que r, s e t são coplanares e $r \not\equiv t$ (pois r e t são concorrentes).
Concluímos, então, que pelo ponto A passam duas retas distintas, r e t, paralelas a s, o que é **absurdo**, pois contraria o postulado das paralelas (P.10). Logo, t e s não podem ser paralelas. Como t e s são retas coplanares não paralelas, resta apenas uma possibilidade: t e s são concorrentes.

TEXTO COMPLEMENTAR

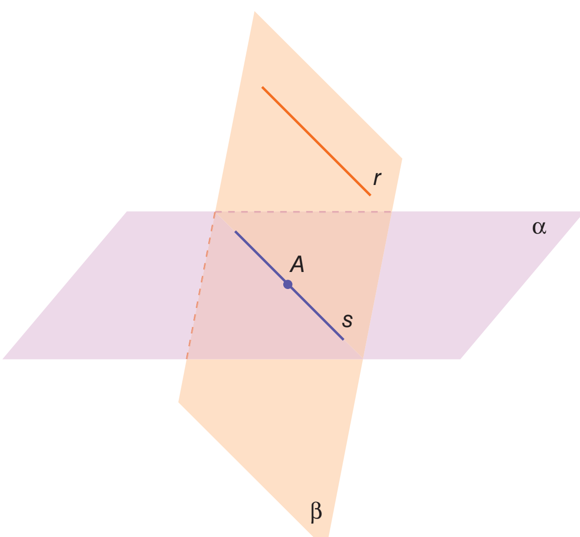
Demonstração dos teoremas T.12, T.13, T.14 e T.15

Vamos demonstrar a afirmação a seguir, que é parte do teorema T.12, enunciado mais adiante.

> Se uma reta r é paralela a um plano α, então r é paralela a uma reta s contida em α.

Demonstração

Seja A um ponto qualquer pertencente a α. Como $A \notin r$, está determinado o plano pl(r, A) pelo teorema T.5.



Os planos α e β são distintos, pois $r \subset \beta$ e $r \not\subset \alpha$, e têm o ponto A em comum; logo, pelo teorema T.10, temos que a intersecção de α e β é uma reta s. As retas r e s são coplanares, pois ambas estão contidas em β, e não têm ponto em comum, pois $s \subset \alpha$ e $r \cap \alpha = \varnothing$; logo, r é paralela a s.

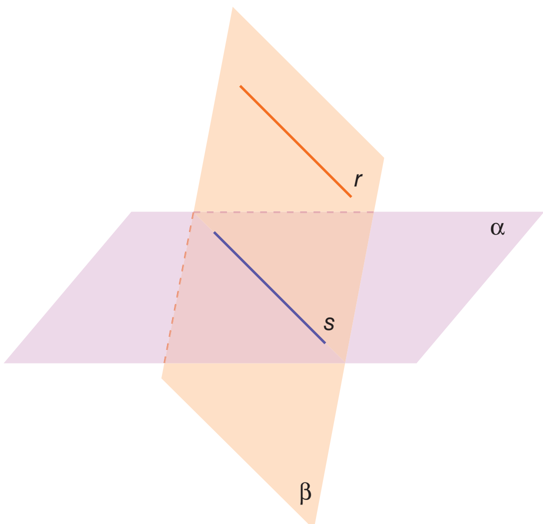
> Como o ponto A é qualquer ponto de α, concluímos que existem infinitas retas contidas em α e paralelas a r.

Agora, vamos demonstrar a afirmação a seguir, que também é parte do teorema T.12, enunciado mais adiante.

> Se uma reta r não está contida em um plano α e é paralela a uma reta s contida em α, então r é paralela a α.

Demonstração

As retas r e s são paralelas distintas, pois $r \,//\, s$, $r \not\subset \alpha$ e $s \subset \alpha$. Logo, pelo teorema T.7, está determinado o plano $\beta \equiv pl(r, s)$.



Os planos α e β são distintos, pois $r \subset \beta$ e $r \not\subset \alpha$, e têm a reta s em comum; portanto, pelo teorema T.10, $\alpha \cap \beta = s$.

A reta r não tem ponto em comum com α, pois, se tivesse, esse ponto pertenceria a s, já que $\alpha \cap \beta = s$. Isso não ocorre porque r e s são paralelas distintas. Logo, $r \,//\, \alpha$.

As proposições demonstradas podem ser enunciadas em uma única proposição, que identificaremos como teorema T.12.

T.12 Uma reta r, não contida em um plano α, é paralela a α se, e somente se, r é paralela a uma reta s contida em α.

Nota:

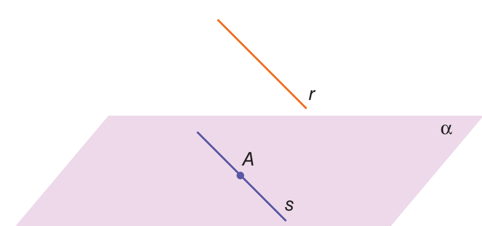
Todo teorema do tipo $p \Leftrightarrow q$ (isto é, p se, e somente se, q) deve ser demonstrado em duas partes: $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$.

Vamos demonstrar a afirmação a seguir, que é parte do teorema T.13, enunciado mais adiante.

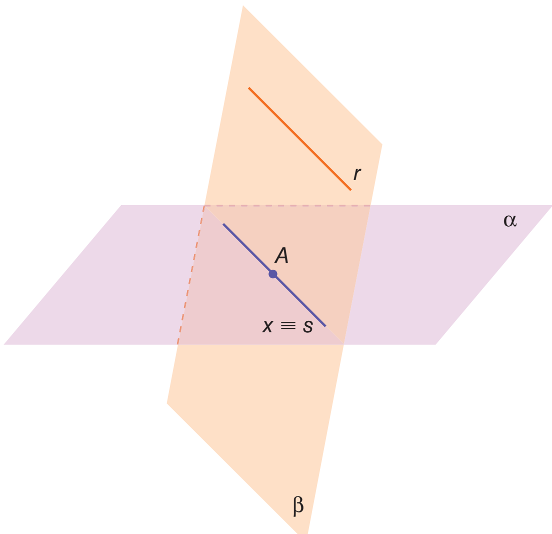
Se uma reta r é paralela a um plano α, e um ponto A pertence a α, então a reta s que passa por A e é paralela a r está contida em α.

Demonstração

Esquematizando as informações da hipótese, temos:



Precisamos mostrar que a reta s está contida em α.
As retas r e s são paralelas distintas, pois $A \in s$ e $A \notin r$; logo, pelo teorema T.7, determinam o plano $\beta \equiv pl(r, s)$. Os planos α e β são distintos, pois $r \subset \beta$ e $r \not\subset \alpha$, e têm o ponto A em comum; logo, pelo teorema T.10, α e β têm uma única reta x em comum. Vamos provar que $x \equiv s$.



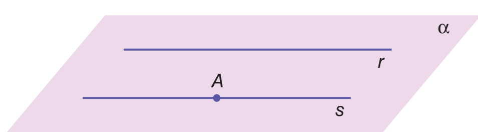
As retas x e r são coplanares ($x \subset \beta$ e $r \subset \beta$) e não têm ponto comum, pois $r \cap \alpha = \varnothing$ e $x \subset \alpha$; logo, $r \mathbin{//} x$. Pelo postulado P.10, existe uma única reta que passa por A e é paralela a r; logo, como as retas x e s passam por A e são paralelas a r, temos que $x \equiv s$. Como $x \subset \alpha$, concluímos que $s \subset \alpha$.

Agora, vamos demonstrar a afirmação a seguir, que também é parte do teorema T.13, enunciado mais adiante.

> Se uma reta r está contida em um plano α, e um ponto A pertence a α, então a reta s que passa por A e é paralela a r está contida em α.

Demonstração

Se $A \in r$, então $s \equiv r$ e, portanto, $s \subset \alpha$.
Se $A \notin r$, temos que r e s são paralelas distintas, pois $A \notin r$ e $A \in s$.



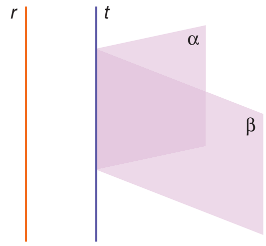
Pelo teorema T.7, as retas r e s determinam o plano $\alpha' \equiv pl(r, s)$; e, pelo teorema T.5, a reta r e o ponto A determinam o plano $\alpha \equiv pl(r, A)$. Como $A \in s$ e o plano que passa por r e A é único, temos que $\alpha' \equiv pl(r, A)$. Logo, $\alpha' \equiv \alpha$ e, portanto, $s \subset \alpha$.
As proposições demonstradas podem ser enunciadas em uma única proposição, que identificaremos como teorema T.13.

> **T.13** Se uma reta r é paralela a um plano α ou está contida em α, e um ponto A pertence a α, então a reta s que passa por A e é paralela a r está contida em α.

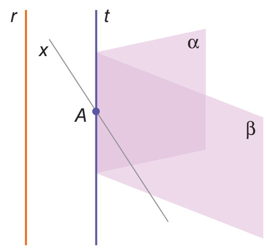
T.14 Se uma reta r é paralela a dois planos secantes α e β, então r é paralela à reta t comum a α e β.

Demonstração

Esquematizando as informações da hipótese, temos a figura abaixo. Precisamos mostrar que $r \,//\, t$.



Seja A um ponto pertencente à reta t e seja x a reta que passa por A e é paralela a r. Vamos provar que $x \equiv t$.



Se $A \in t$ e $t = \alpha \cap \beta$, então $A \in \alpha$ e $A \in \beta$.

Portanto, temos:

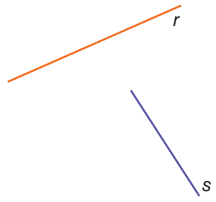
$$\begin{cases} r \,//\, \alpha \\ A \in \alpha \\ A \in x \\ x \,//\, r \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} r \,//\, \beta \\ A \in \beta \\ A \in x \\ x \,//\, r \end{cases}$$

Pelo teorema T.13, concluímos que $x \subset \alpha$ e $x \subset \beta$.
Como α e β são planos secantes, temos que $x = \alpha \cap \beta = t$.
Portanto, $r \,//\, t$.

T.15 Se r e s são retas reversas, então existe um único plano α que contém s e é paralelo a r.

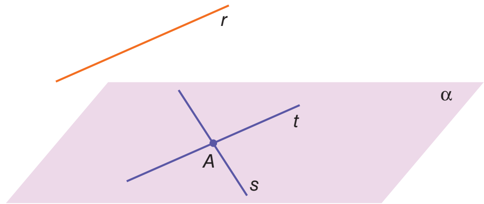
Demonstração

1ª parte: existência
Sejam r e s retas reversas.



Seja A um ponto pertencente à reta s e seja t a reta paralela a r que passa por A.

As retas s e t têm apenas o ponto A em comum, pois, se tivessem mais de um ponto comum, seriam coincidentes e, como t // r, teríamos s // r, o que contraria o fato de r e s serem reversas. Como s e t são concorrentes, fica determinado o plano $\alpha \equiv pl(s, t)$ pelo teorema T.6:

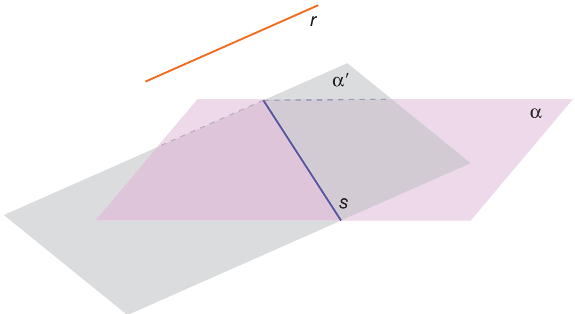


A reta r não está contida em α, pois r e s são reversas e $s \subset \alpha$; r é paralela à reta t contida em α. Logo, pelo teorema T.12, concluímos que r // α.

Portanto, existe um plano α que contém s e é paralelo a r.

2ª parte: unicidade

Suponhamos que existisse outro plano α', com $\alpha' \not\equiv \alpha$, contendo s e paralelo a r.



α' e α seriam secantes com a reta comum s. Como r // α e r // α', teríamos, pelo teorema T.14, que r // s, o que é **absurdo**, pois r e s são reversas. Logo, existe apenas um plano α que passa por s e é paralelo a r.

TEXTO COMPLEMENTAR

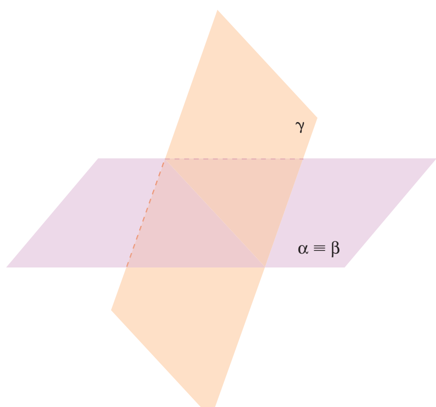
Demonstração dos teoremas T.17, T.18, T.20, T.22 e T.23

T.17 Se dois planos α e β são paralelos e um plano γ é secante a α, então γ é secante a β.

Demonstração

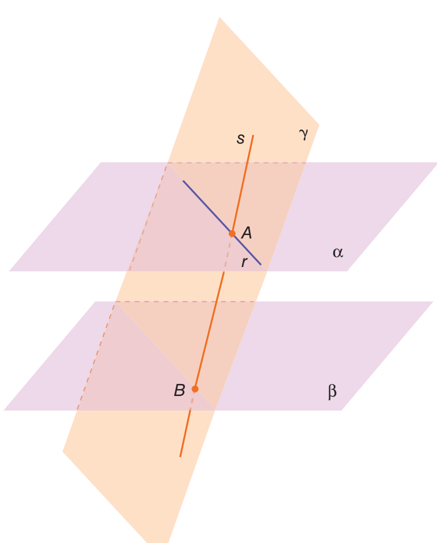
Consideremos dois casos:

1º caso: $\alpha \equiv \beta$, isto é, α e β são planos paralelos coincidentes.



Esse caso é imediato, pois se γ é secante a α e $\alpha \equiv \beta$, então γ é secante a β.

2º caso: α // β e $\alpha \not\equiv \beta$, isto é, α e β são planos paralelos distintos.



Se γ é secante a α, então existe uma única reta r tal que $\gamma \cap \alpha = r$.
Seja uma reta s, com $s \subset \gamma$, concorrente com r no ponto A. A reta s é secante a α, pois: $\gamma \cap \alpha = r$, $s \subset \gamma$ e $s \cap r = \{A\}$. Logo, $s \cap \alpha = \{A\}$.

Assim, pelo teorema T.16, temos que s é secante a β em um ponto B. Os planos γ e β são distintos, pois $A \in \gamma$ e $A \notin \beta$, e têm o ponto B em comum. Logo, pelo teorema T.10, a intersecção de γ e β é uma reta; ou seja, γ é secante a β.

Vamos demonstrar a afirmação a seguir, que é parte do teorema T.18, enunciado mais adiante.

Dados um plano α e um ponto P, existe um plano β que passa por P e é paralelo a α.

Demonstração

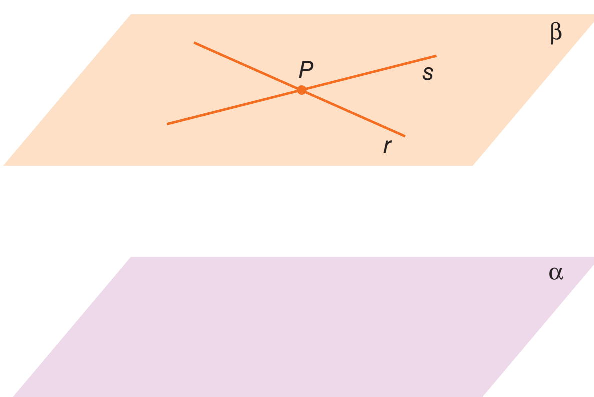
Consideremos dois casos.

1º caso: $P \in \alpha$

Se $P \in \alpha$, basta considerar o plano β coincidente com o plano α. Como β é paralelo coincidente com α, concluímos que existe β que passa por P e é paralelo a α.

2º caso: $P \notin \alpha$

Se $P \notin \alpha$, consideremos duas retas r e s concorrentes em P e paralelas a α. Pelo teorema T.6, essas retas determinam o plano $\beta \equiv \text{pl}(r, s)$. Vamos mostrar que esse plano não tem ponto em comum com α.



Suponhamos que exista um ponto comum a α e β. Como α e β são planos distintos, pois $P \in \beta$ e $P \notin \alpha$, se existir um ponto comum a ambos, então o teorema T.10 nos garante que esses planos terão uma única reta t em comum. As retas r, s e t são coplanares, pois todas estão contidas no plano β. Porém, r e s são paralelas a α, ou seja, não têm ponto em comum com α e, portanto, não podem ter ponto em comum com t. Resumindo: r, s e t são coplanares, $r \cap t = \varnothing$ e $s \cap t = \varnothing$. Assim, pelo ponto P passam duas retas distintas, r e s, paralelas a t, o que é **absurdo**, pois contraria o postulado P.10. Logo, os planos α e β não têm ponto em comum, portanto, são paralelos distintos.

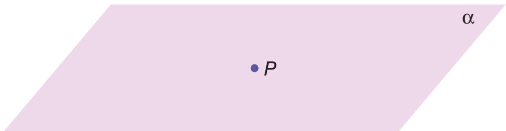
Agora, vamos demonstrar a afirmação a seguir, que também é parte do teorema T.18, enunciado mais adiante.

Dados um plano α e um ponto P, o plano β que passa por P e é paralelo a α é único.

Demonstração

Já provamos a existência do plano β. Agora, vamos provar a unicidade de β. Para isso, separamos a demonstração em dois casos.

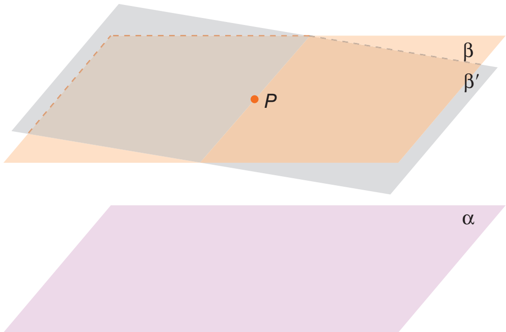
1º caso: $P \in \alpha$



Considerando o plano β coincidente com α, temos que β passa por P e é paralelo a α. Suponhamos que exista outro plano β′, com $\beta' \not\equiv \beta$, que passe por P e seja paralelo a α. Como β e β′ são planos distintos e têm o ponto P em comum, o teorema T.10 nos garante que β e β′ são secantes. Porém, $\beta \equiv \alpha$; logo, α e β′ são secantes, o que é **absurdo**, porque $\beta' \mathbin{/\!/} \alpha$. Concluímos, então, que o plano β é único.

2º caso: $P \notin \alpha$
Seja β um plano que passa por P e é paralelo a α.

Suponhamos que exista outro plano β′, com $\beta' \not\equiv \beta$, que passe por P e seja paralelo a α.



Como β e β′ são planos distintos e têm o ponto P em comum, o teorema T.10 nos garante que β e β′ são secantes. Porém, se $\beta \mathbin{/\!/} \alpha$ e β′ é secante a β, então, pelo teorema T.17, β′ é secante a α, o que é **absurdo**, pois β′ é paralelo a α. Concluímos, então, que existe um único plano β passando por P e paralelo a α.
As proposições demonstradas podem ser enunciadas em uma única proposição, que identificaremos como teorema T.18:

> **T.18** Dados um plano α e um ponto P, existe e é único o plano β que passa por P e é paralelo a α.

T.20 Dois planos distintos, α e β, são paralelos se, e somente se, existem retas concorrentes contidas num deles e paralelas ao outro.

Demonstração

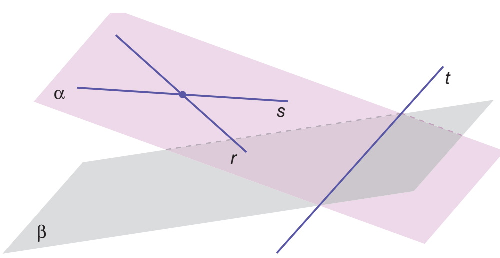
1ª parte: Se α e β são planos paralelos distintos, então existem retas concorrentes *r* e *s* contidas num deles e paralelas ao outro.

De fato, pelo teorema T.19, se α é paralelo a β e $\alpha \not\equiv \beta$, então toda reta contida em α é paralela a β. Assim, duas retas concorrentes quaisquer contidas em α são paralelas a β.

2ª parte: Se um plano α contém retas concorrentes *r* e *s*, paralelas a um plano β, então α // β.

Como α e β são planos distintos, então ocorre uma, e apenas uma, das seguintes alternativas: α é secante a β ou α // β.

Suponhamos que α seja secante a β. Então, α e β têm uma única reta *t* em comum:



Por hipótese existem retas concorrentes *r* e *s* contidas em α e paralelas a β. As retas *r* e *s* não podem ter ponto em comum com *t*, pois $t \subset \beta$, e *r* e *s* não têm ponto em comum com β. Temos, então:

- *r* e *t* são coplanares, pois *r* e *t* estão contidas em α, e não têm ponto comum; logo, *r* // *t*;
- *s* e *t* são coplanares, pois *s* e *t* estão contidas em α, e não têm ponto comum; logo, *s* // *t*.

Essas conclusões são **absurdas**, pois teríamos duas retas distintas, *r* e *s*, passando por um mesmo ponto (concorrentes) e paralelas à reta *t*, o que contraria o postulado P.10.

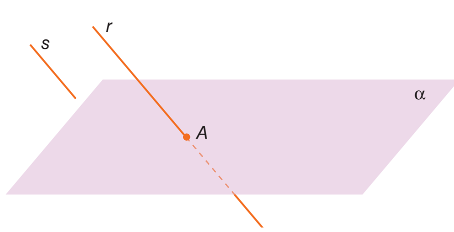
Assim, concluímos que α e β não são secantes e, portanto, α // β.

T.22 Se *r* e *s* são retas paralelas e *r* é secante a um plano α, então *s* é secante a α.

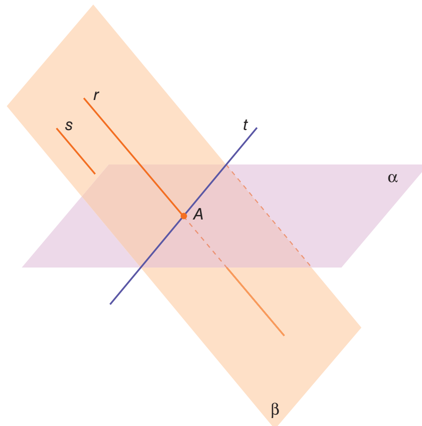
Demonstração

Se *r* e *s* são retas coincidentes, a demonstração é imediata, pois, se *r* é secante a α e $s \equiv r$, então *s* é secante a α.

Consideremos, então, o caso em que *r* e *s* são retas paralelas distintas, com *r* secante ao plano α no ponto *A*:



Pelo teorema T.7 as retas paralelas distintas r e s determinam o plano $\beta \equiv \text{pl}(r, s)$, que é distinto de α, pois $r \subset \beta$ e $r \not\subset \alpha$. Assim, temos os planos distintos α e β que têm o ponto A em comum; logo, esses planos têm em comum uma única reta t, de acordo com o teorema T.10. Como $r \subset \beta$, r tem apenas o ponto A em comum com α e $\beta \cap \alpha = t$, temos que r tem apenas o ponto A em comum com a reta t, ou seja, r e t concorrem em A.



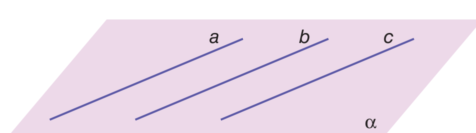
Como s e t são coplanares, pois ambas estão contidas em β, ocorre uma, e apenas uma, das alternativas: s é paralela a t ou s concorre com t.
A primeira alternativa (s // t) é **absurda**, pois teríamos as retas concorrentes r e t paralelas à reta s, o que contraria o postulado P.10. Logo, resta apenas a segunda alternativa: s concorre com t em um ponto P. Como s não está contida em α e tem o ponto P em comum com α, concluímos que s é secante a α.

Vamos demonstrar a afirmação a seguir, que é parte do teorema T.23, enunciado mais adiante.

Se três retas coplanares, a, b e c, são tais que a // b e b // c, então a // c.

Demonstração

Se pelo menos duas dessas retas forem coincidentes, então a demonstração é imediata. Analisemos, então, o caso em que a, b e c são distintas entre si.



Como as retas a e c são coplanares, ocorre uma, e apenas uma, das seguintes alternativas: a e c são concorrentes ou a e c são paralelas.
A primeira alternativa é **absurda**, pois teríamos duas retas distintas a e c passando por um mesmo ponto (concorrentes) e paralelas à reta b, o que contraria o postulado P.10. Resta, então, apenas uma alternativa: a // c.

Agora, vamos demonstrar a afirmação a seguir, que também é parte do teorema T.23, enunciado mais adiante.

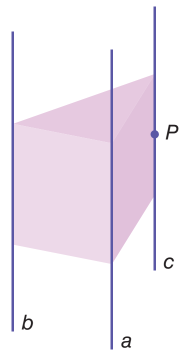
Se três retas não coplanares, a, b e c, são tais que a // b e b // c, então a // c.

Demonstração

As retas *a* e *c* não têm ponto comum, pois, se isso ocorresse, teríamos retas concorrentes *a* e *c*, ambas paralelas a *b*, o que contraria o postulado P.10.

Vamos provar que *a* e *c* são coplanares.

De fato, seja um ponto *P*, com $P \in c$. Temos $P \notin a$, pois *a* e *c* não têm ponto comum; logo, pelo teorema T.5, fica determinado o plano $\gamma \equiv \text{pl}(a, P)$.



O ponto *P* pertence a γ e também pertence a *c*. Logo, ocorre uma, e apenas uma, das alternativas: *c* é secante a γ em *P* ou *c* está contida em γ.

A primeira alternativa (*c* é secante a γ em *P*) é **absurda**, pois, pelo teorema T.22, se *c* fosse secante a γ, então *b* também seria secante a γ, pois $b \mathbin{//} c$, e também *a* seria secante a γ, pois $a \mathbin{//} b$, mas isso contraria o fato $a \subset \gamma$. Resta, portanto, a segunda alternativa, ou seja, *c* está contida em γ.

Provamos, então, que *a* e *c* não têm ponto comum e são coplanares. Logo, $a \mathbin{//} c$.

As proposições demonstradas podem ser enunciadas por meio de uma única proposição, que identificaremos como teorema T.23:

> **T.23** Se três retas, *a*, *b* e *c*, são tais que $a \mathbin{//} b$ e $b \mathbin{//} c$, então $a \mathbin{//} c$.

TEXTO COMPLEMENTAR

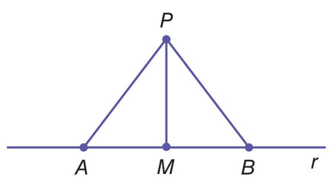
Demonstração dos teoremas T.24 e T.27

T.24 Dados um ponto *P* e uma reta *r*, com $P \notin r$, existe uma única reta *s* que passa por *P* e é perpendicular a *r*.

Demonstração

1ª parte: existência

Sejam *A* e *B* pontos distintos da reta *r*, com $\overline{PA}$ congruente a $\overline{PB}$, e seja *M* o ponto médio de $\overline{AB}$.



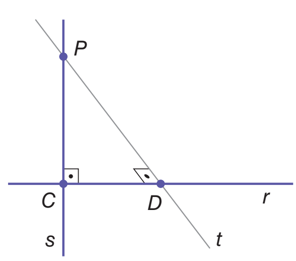
Os triângulos *PMA* e *PMB* são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, $\overline{MA} \cong \overline{MB}$ e $\overline{PM}$ é lado comum aos dois triângulos. Consequentemente, os ângulos $P\widehat{M}A$ e $P\widehat{M}B$ são congruentes. Além disso, esses ângulos são suplementares e, portanto, cada um deles é reto. Concluímos, então, que existe a reta $\overleftrightarrow{PM}$ perpendicular a *r*.

Nota:

Os pontos *A* e *B* podem ser obtidos pela intersecção da reta *r* com uma circunferência de centro *P* e secante a *r*.

2ª parte: unicidade

Suponhamos que por *P* passem duas retas distintas, *s* e *t*, perpendiculares a *r* nos pontos distintos *C* e *D*, respectivamente.



Os pontos *P*, *C* e *D* não são colineares, pois $\{P, C\} \subset s$ e $D \notin s$. Logo, os pontos *P*, *C* e *D* são vértices de um triângulo cujos ângulos internos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ são retos, o que é um **absurdo**, pois a soma de dois ângulos internos de um triângulo deve ser menor do que dois ângulos retos. Assim, concluímos que $s \equiv t$, ou seja, pelo ponto *P* passa uma única perpendicular à reta *r*.

T.27 Se duas retas, r e s, são paralelas e t é ortogonal a r, então t é perpendicular ou ortogonal a s.

Demonstração

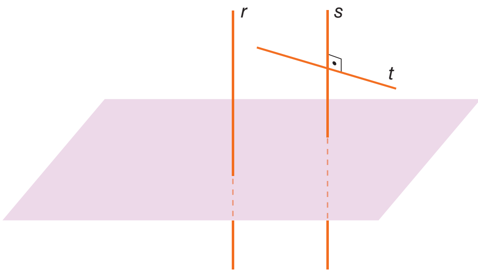
Se $r \equiv s$, então $t \perp s$, pois $t \perp r$.

Suponhamos agora que $r \not\equiv s$. A reta t não pode ser paralela a s, pois, se assim fosse, teríamos $s \mathbin{//} r \mathbin{//} t$, o que contraria a hipótese de t ser ortogonal a r. Restam, portanto, duas possibilidades:

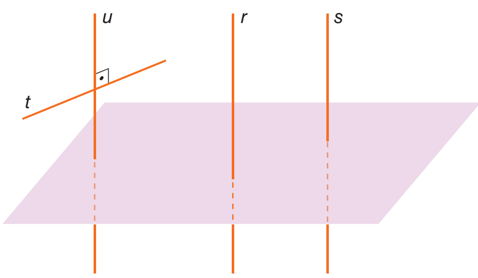
(1) t é concorrente com s; ou

(2) t é reversa a s.

Ocorrendo a possibilidade (1), temos $r \mathbin{//} s$, $r \not\equiv s$ e $t \perp r$; logo, pela definição de retas ortogonais, concluímos que $t \perp s$:



Ocorrendo a possibilidade (2), existe uma reta u concorrente com t e paralela a s. Temos $u \mathbin{//} s$ e $s \mathbin{//} r$, assim, $u \mathbin{//} r$. Concluímos, então, que $t \perp u$, pois $u \mathbin{//} r$, $u \not\equiv r$ e $t \perp r$.



Assim, $u \mathbin{//} s$, $u \not\equiv s$ e $u \perp t$. Logo, $t \perp s$, pela definição de retas ortogonais.

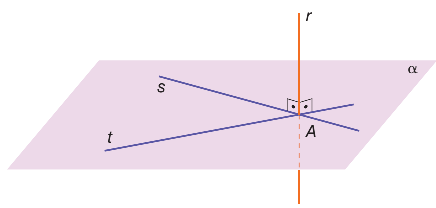
TEXTO COMPLEMENTAR

Demonstração dos teoremas T.29, T.30, T.32 e T.33

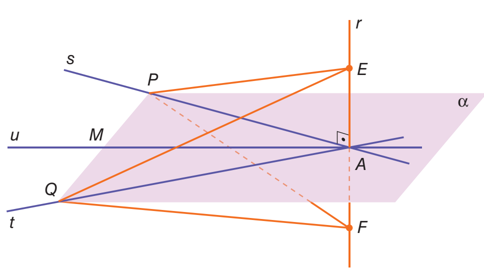
T.29 Se uma reta *r* é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano α, então *r* é perpendicular a α.

Demonstração

Sejam *s* e *t* duas retas concorrentes contidas no plano α e perpendiculares à reta *r* no ponto *A*:

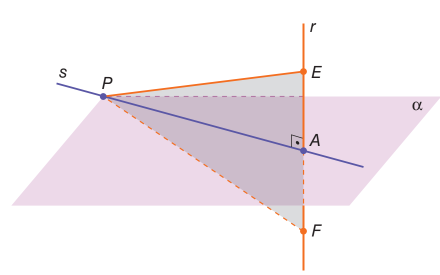


Devemos provar que qualquer outra reta contida em α e concorrente com *r* é perpendicular a *r*.
Seja *u* uma reta contida em α e distinta de *s* e *t* tal que $A \in u$. Sejam *P* e *Q*, com $P \in s$ e $Q \in t$, pontos situados em semiplanos opostos em relação a *u* tais que $\overleftrightarrow{PQ} \cap u = \{M\}$. Consideremos ainda os pontos *E* e *F*, distintos entre si e distintos de *A*, pertencentes a *r* tais que $\overline{AE} \cong \overline{AF}$, conforme mostra a figura:



Nota:
Lembre-se de que o símbolo $\cong$ significa congruência.

- Os triângulos *APE* e *APF* são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{AE} \cong \overline{AF}$, $E\hat{A}P \cong F\hat{A}P$ (ambos retos) e $\overline{AP}$ é lado comum aos dois triângulos.



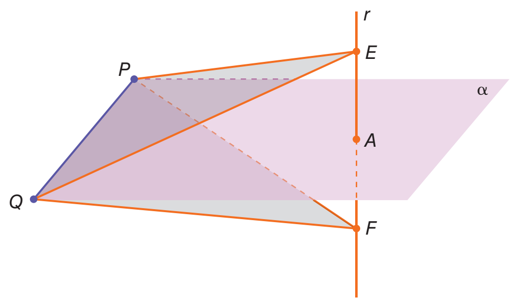
Dessa congruência, temos:

$$\overline{PE} \cong \overline{PF} \qquad \text{(I)}$$

Analogamente, da congruência entre os triângulos *AQE* e *AQF*, temos:

$$\overline{QE} \cong \overline{QF} \qquad \text{(II)}$$

- Os triângulos *PEQ* e *PFQ* são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{PE} \cong \overline{PF}$ por (I); $\overline{QE} \cong \overline{QF}$ por (II); e $\overline{PQ}$ é lado comum aos dois triângulos.



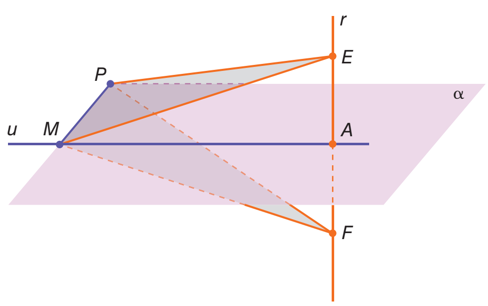
Dessa congruência, temos:

$$E\hat{P}Q \cong F\hat{P}Q \qquad \text{(III)}$$

e

$$E\hat{Q}P \cong F\hat{Q}P \qquad \text{(IV)}$$

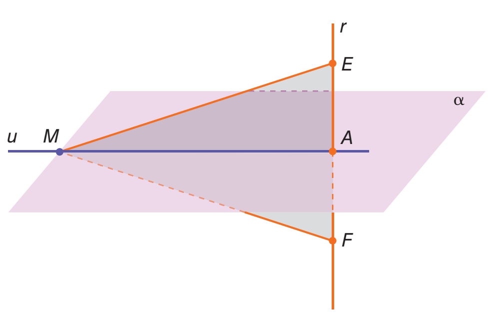
- Os triângulos *EPM* e *FPM* são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{PE} \cong \overline{PF}$ por (I); $E\hat{P}M \cong F\hat{P}M$ por (III); e $\overline{PM}$ é lado comum aos dois triângulos.



Dessa congruência, temos:

$$\overline{ME} \cong \overline{MF} \qquad \text{(V)}$$

- Os triângulos *EMA* e *FMA* são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{AE} \cong \overline{AF}$ por construção; $\overline{ME} \cong \overline{MF}$ por (V); e $\overline{AM}$ é lado comum.



Dessa congruência temos:

$$E\hat{A}M \cong F\hat{A}M$$

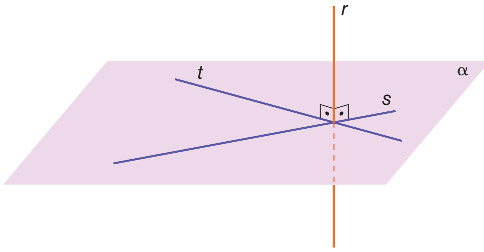
Como $E\hat{A}M$ e $F\hat{A}M$ são ângulos adjacentes suplementares e congruentes, cada um deles é reto. Logo, concluímos que a reta *r* é perpendicular ao plano α.

T.30 Se uma reta r forma ângulo reto com duas retas concorrentes, s e t, de um plano α, então r é perpendicular a α.

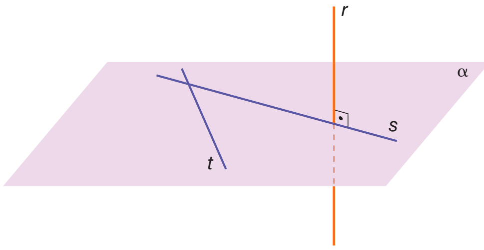
Demonstração

Temos três casos possíveis:

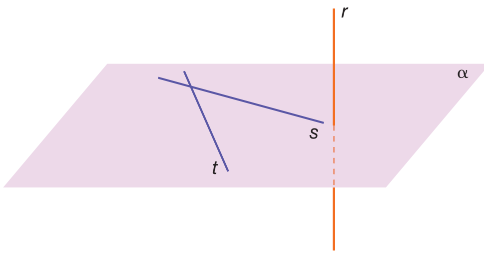
(1) r é perpendicular a s e t.



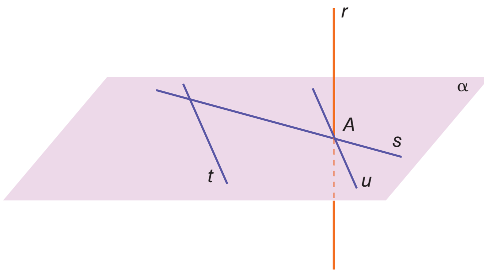
(2) r é perpendicular a uma das retas, s ou t, e ortogonal à outra.



(3) r é ortogonal a s e t.

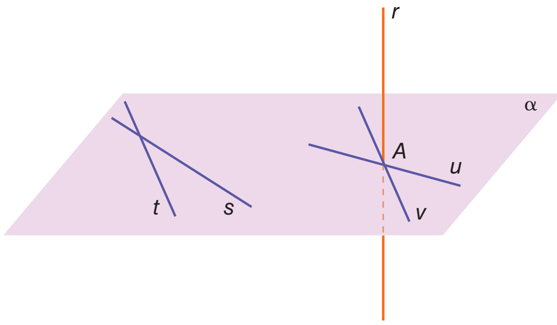


- Em (1), o teorema T.29 garante que $r \perp \alpha$.
- No caso (2), seja u, com $u \subset \alpha$, a reta paralela a t passando por A, em que $\{A\} = r \cap \alpha$.



Como r é ortogonal a t, u é concorrente com r, e u // t, temos $r \perp u$. Logo, de $r \perp u$, $r \perp s$, $u \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$ e u concorrente com s, concluímos, pelo teorema T.29, que $r \perp \alpha$.

- No caso (3), sejam u e v, com $u \subset \alpha$ e $v \subset \alpha$, retas respectivamente paralelas a s e t, passando pelo ponto A, em que $\{A\} = r \cap \alpha$.



Como r é ortogonal a s, u é concorrente com r, e $u \,//\, s$, temos $r \perp u$. Analogamente, $r \perp v$. Assim, r é perpendicular a duas retas concorrentes, u e v, contidas em α; logo, pelo teorema T.29, concluímos que $r \perp \alpha$.

T.32 Dados um ponto P e um plano α, existe uma única reta que passa por P e é perpendicular a α.

Demonstração

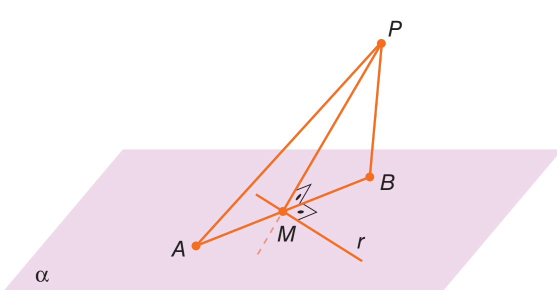
Precisamos considerar dois casos: $P \notin \alpha$ ou $P \in \alpha$.

1º caso: $P \notin \alpha$

Primeira parte: existência

Sejam A e B pontos distintos do plano α, com $\overline{PA}$ congruente a $\overline{PB}$, e seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Considere a reta r contida em α e perpendicular a $\overline{AB}$ no ponto M.

Assim, temos que o triângulo ABP é isósceles, pois $\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Logo, a mediana $\overline{PM}$ coincide com a altura relativa à base do triângulo isósceles APB e, portanto, $\overline{PM} \perp \overline{AB}$.



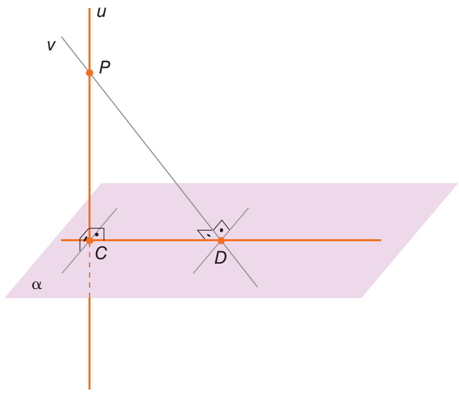
Como $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ e $r \perp \overline{AB}$, temos que o plano β determinado por r e $\overleftrightarrow{PM}$ é perpendicular ao plano α. Logo, existe em β uma reta s perpendicular a α. Concluímos, então, pelo teorema T.31, que a reta que passa por P e é paralela a s é perpendicular ao plano α. Portanto, existe uma reta que passa por P e é perpendicular a α.

Nota:

Os pontos A e B podem ser obtidos pela intersecção do plano α com uma circunferência de centro P e secante a α.

Segunda parte: unicidade

Suponhamos que por P passem duas retas distintas, u e v, perpendiculares a α nos pontos C e D, respectivamente.

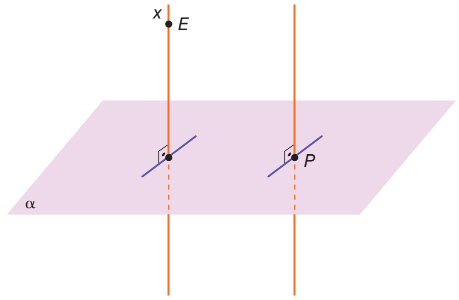


Os pontos P, C e D não são colineares, pois $\{P, C\} \subset u$ e $D \notin u$. Logo, os pontos P, C e D são vértices de um triângulo cujos ângulos internos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ são retos, o que é **absurdo**, pois a soma de dois ângulos internos de um triângulo deve ser menor do que dois ângulos retos. Assim, concluímos que $u \equiv v$, ou seja, pelo ponto P passa uma única reta perpendicular a α.

2º caso: $P \in \alpha$

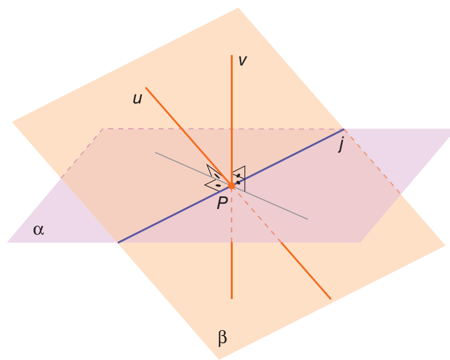
Primeira parte: existência

Seja E um ponto qualquer que não pertença a α. Pelo 1º caso, existe uma reta x que passa por E e é perpendicular a α. Logo, pelo teorema T.31, a reta que passa por P e é paralela a x é perpendicular a α.

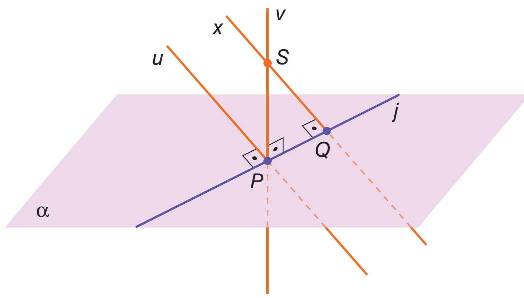


Segunda parte: unicidade

Suponhamos que por P passem duas retas distintas, u e v, perpendiculares a α. Como u e v são concorrentes, elas determinam um plano β, pelo teorema T.6. Esse plano tem o ponto P em comum com α e é distinto de α, pois $u \subset \beta$ e $u \not\subset \alpha$. Assim, o plano β tem uma única reta j em comum com α.



Na reta j, consideremos um ponto Q, distinto de P, e a reta x que passa por Q e é paralela a u. Como x, u e v são coplanares e v concorre com u, concluímos que v concorre com x em um ponto S. Como j é transversal às paralelas u e x, os ângulos correspondentes determinados por elas são congruentes e, portanto, como j é perpendicular a u, temos que j é perpendicular a x.



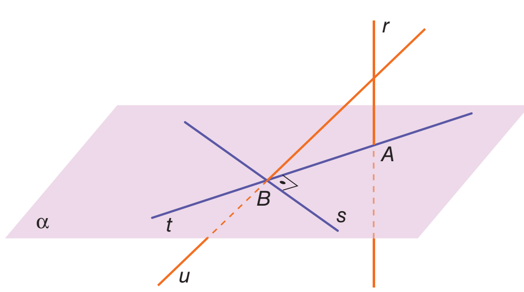
Os pontos P, Q e S não são colineares, pois $\{S, P\} \subset v$ e $Q \notin v$. Logo, os pontos S, P e Q são vértices de um triângulo cujos ângulos internos $\widehat{P}$ e $\widehat{Q}$ são retos, o que é **absurdo**, pois a soma de dois ângulos internos de um triângulo deve ser menor do que dois ângulos retos. Assim, concluímos que $u \equiv v$, ou seja, pelo ponto P passa uma única reta perpendicular ao plano α.

Vamos demonstrar o teorema a seguir, conhecido como "teorema das três perpendiculares":

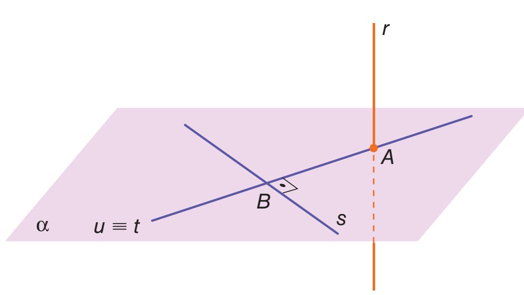
T.33 Se r é uma reta perpendicular a um plano α em um ponto A, s é uma reta contida em α e não passa por A, e t é uma reta que passa por A e t é perpendicular a s no ponto B, então toda reta u que passa por B e concorre com r é perpendicular a s.

Demonstração

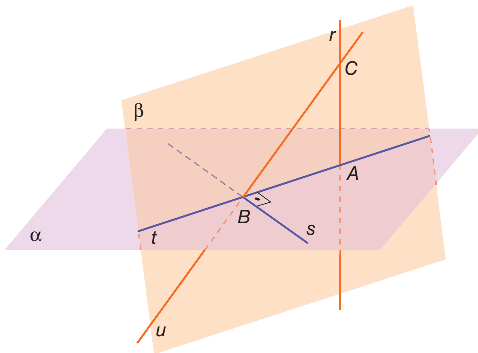
Esquematizando as informações da hipótese, temos:



- Se $u \equiv t$, então $u \perp s$, pois, por hipótese, $t \perp s$.



• Suponhamos, agora, que $u \not\equiv t$ e que u concorra com r no ponto C.
Os pontos não colineares A, B e C, conforme o postulado P.5, determinam o plano β, que contém as retas u, r e t:



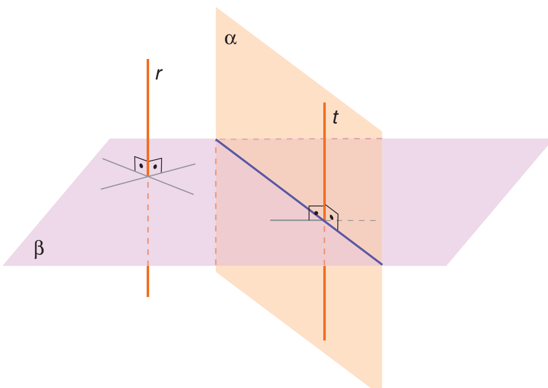
Por hipótese, a reta s é perpendicular a t; e, pelo teorema T.28, s forma um ângulo reto com r. Logo, s forma ângulo reto com duas retas concorrentes, t e r, contidas no plano β; portanto, pelo teorema T.30, temos $s \perp \beta$.
Sendo s perpendicular a β no ponto B, temos, pela definição de perpendicularidade entre reta e plano, que s é perpendicular a qualquer reta contida em β e que passa por B. Como u está contida em β e passa por B, concluímos que $u \perp s$.

TEXTO COMPLEMENTAR

Demonstração dos teoremas T.35 e T.36

T.35 Se α e β são planos perpendiculares e uma reta r é perpendicular a β, então $r \parallel \alpha$ ou $r \subset \alpha$.

Demonstração



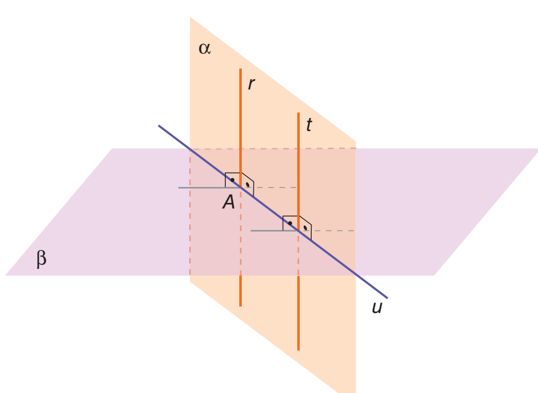
- Se $\alpha \perp \beta$, então, por definição de planos perpendiculares, existe uma reta t, contida em α, tal que $t \perp \beta$.
- Como $r \perp \beta$ e $t \perp \beta$, temos que $r \parallel t$.

Assim, deve ocorrer uma entre duas possibilidades:

(1) r é perpendicular a β num ponto A pertencente à reta u, com $u = \alpha \cap \beta$; ou

(2) r é perpendicular a β num ponto P de β, com $P \notin \alpha$.

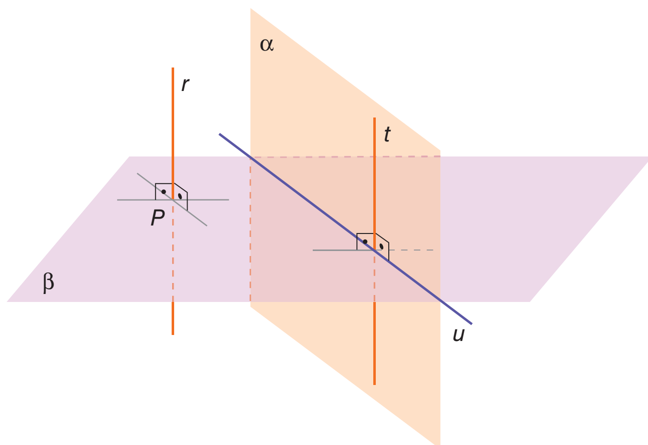
Examinemos a possibilidade (1).



Temos: $\begin{cases} \alpha \perp \beta \\ t \perp \beta \\ r \parallel t \\ t \subset \alpha \\ A \in \alpha \\ A \in r \end{cases}$

Consideremos a reta r', contida em α, com $A \in r'$ e $r' // t$. Como $t \perp \beta$, temos, pelo teorema T.31, que $r' \perp \beta$. Pelo postulado P.10, existe uma única reta que passa por A e é paralela a t; logo, $r' \equiv r$ e, portanto, $r \subset \alpha$.

Vejamos, agora, a possibilidade (2).



$$\text{Temos: } \begin{cases} \alpha \perp \beta \\ t \perp \beta \\ r // t \\ P \in \beta \\ P \notin \alpha \\ P \notin r \end{cases}$$

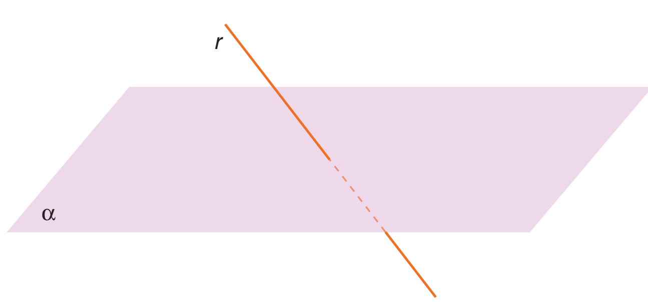
A reta r não está contida em α, pois $P \in r$ e P (α. Se uma reta r, não contida em α, é paralela a uma reta t, contida em α, temos, pelo teorema T.12, que $r // \alpha$.

> **T.36** Se uma reta r não é perpendicular a um plano α, então existe um único plano β que contém r e é perpendicular a α.

Demonstração

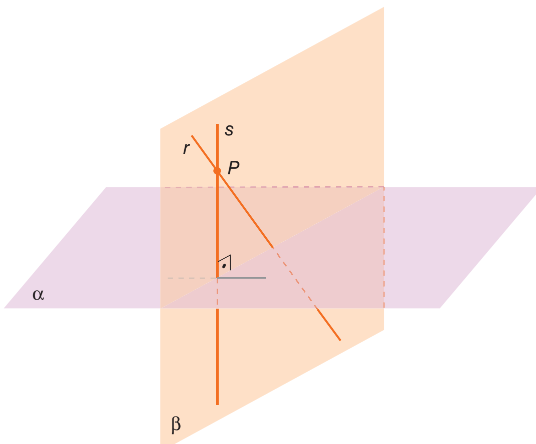
Devemos analisar três casos: r secante a α, $r // \alpha$ ou $r \subset \alpha$, e em cada caso provar a existência e a unicidade do plano β.

1º caso: r é secante a α



Primeira parte: existência

Seja P um ponto pertencente à reta r e seja s a reta que passa por P e é perpendicular a α. A reta s não coincide com r, pois, se s coincidisse com r, teríamos que r seria perpendicular a α, o que contraria a hipótese. Por isso, s é concorrente com r e, portanto, pelo teorema T.6, ambas determinam o plano $\beta \equiv \text{pl}(r, s)$. Esse plano β contém a reta s perpendicular a α; logo $\beta \perp \alpha$.



Segunda parte: unicidade

Suponhamos que exista outro plano β' tal que β' contenha r e seja perpendicular a α. Temos:

$$\left.\begin{array}{l}\beta' \perp \alpha \\ s \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow s \,//\, \beta' \text{ ou } s \subset \beta'\text{, pelo teorema T.35.}$$

Como $P \in r$ e $r \subset \beta'$, concluímos que $P \in \beta'$. Além disso, $P \in s$. Então:

$$\left.\begin{array}{l}P \in \beta' \\ P \in s\end{array}\right\} \Rightarrow s \subset \beta'$$

Assim, pelo teorema T.6, β' é o plano determinado por r e s, ou seja, $\beta' \equiv \text{pl}(r, s)$.
Portanto:

$$\left\{\begin{array}{l}\beta' = \text{pl}(r, s) \\ \beta = \text{pl}(r, s)\end{array}\right. \Rightarrow \beta' \equiv \beta$$

Logo, o plano β é único.

O segundo e o terceiro casos são demonstrados de maneira análoga.

TEXTO COMPLEMENTAR

Poliedros de Platão

O filósofo grego Platão viveu de c. 428 a 347 a.C. Dedicou-se a vários temas como Ética, Política, Metafísica, Teoria do conhecimento e Matemática, particularmente à Geometria, pela qual teve verdadeira paixão. Platão entendia que todos os alunos da Academia de Atenas, fundada por ele, deveriam conhecer Geometria e, por isso, mandou inscrever no portal:

"Que ninguém que ignore a geometria entre aqui."

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed.
São Paulo: Edgard Blücher, 2001. p. 58.

THE BRIDGEMAN ART LIBRARY/GETTY IMAGES

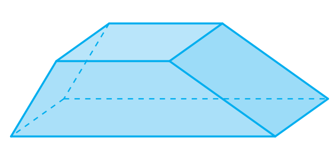
Platão (à esquerda), em detalhe da obra *Scuola di Atenas*, do pintor renascentista italiano Rafael Sanzio.

Dentre suas várias pesquisas em Geometria, Platão estudou certas classes de poliedros, conhecidos hoje como "poliedros de Platão", cuja definição, adaptada para uma linguagem atual, é apresentada a seguir.

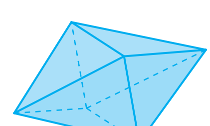
> Um poliedro é denominado **poliedro de Platão** se, e somente se, forem obedecidas as três condições:
> - todas as faces têm o mesmo número de arestas;
> - todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas;
> - vale para o poliedro a relação de Euler: $V - A + F = 2$.

Exemplos

a) O hexaedro convexo ao lado é de Platão, pois satisfaz as três condições acima: todas as faces têm quatro arestas; todos os ângulos poliédricos têm três arestas; e vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$, pois o poliedro é convexo.



b) O octaedro convexo ao lado é de Platão, pois: todas as faces têm três arestas; todos os ângulos poliédricos têm quatro arestas; e vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$, pois o poliedro é convexo.



Exercícios resolvidos

1 Existe poliedro de Platão com faces pentagonais e ângulos tetraédricos (4 arestas)?

Resolução

Se existir esse poliedro de Platão, com os números V, A e F de vértices, arestas e faces, respectivamente, então devemos ter:

$$\begin{cases} 5F = 2A \\ 4V = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = \dfrac{2A}{5} & \text{(I)} \\ V = \dfrac{A}{2} & \text{(II)} \\ V - A + F = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III), obtendo:

$$\frac{A}{2} - A + \frac{2A}{5} = 2 \Rightarrow \frac{5A - 10A + 4A}{\cancel{10}} = \frac{20}{\cancel{10}}$$

$\therefore\ A = -20$

Essa última igualdade é **absurda**, pois A é o número de arestas do poliedro e, portanto, deveríamos ter $A \in \mathbb{N}$ e $A \geqslant 6$.

Logo, concluímos que não existe poliedro de Platão com faces pentagonais e ângulos tetraédricos.

2 Existe poliedro de Platão com faces hexagonais?

Resolução

Se existir esse poliedro de Platão, com os números V, A e F de vértices, arestas e faces, respectivamente, e com m arestas em cada ângulo poliédrico, então devemos ter:

$$\begin{cases} mV = 2A \\ 6F = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{m} & \text{(I)} \\ F = \dfrac{A}{3} & \text{(II)} \\ V - A + F = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III), obtendo:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{A}{3} = 2 \Rightarrow \frac{2A}{m} - \frac{2A}{3} = 2$$

Dividimos ambos os membros dessa igualdade por $2A$, obtendo:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \qquad \text{(IV)}$$

Como m é o número de arestas de cada ângulo poliédrico, devemos ter $m \geqslant 3$ e, portanto:

$$\frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{3} \leqslant 0 \qquad \text{(V)}$$

Substituindo (IV) em (V), obtemos:

$$\frac{1}{A} \leqslant 0 \Rightarrow A < 0$$

Essa última desigualdade é **absurda**, pois A é o número de arestas do poliedro e, portanto, deveríamos ter $A \in \mathbb{N}$ e $A \geqslant 6$.

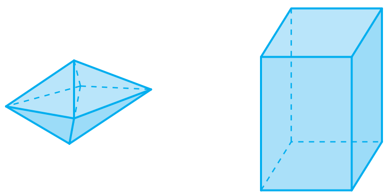
Logo, concluímos que não existe poliedro de Platão com faces hexagonais.

3 Demonstrar que: "se um poliedro é de Platão tal que cada uma de suas F faces possui n arestas ($n \geqslant 3$) e cada um de seus V ângulos poliédricos possui m arestas ($m \geqslant 3$), então $n = 3$ ou $m = 3$".

Resolução

Observemos, inicialmente, que existe poliedro de Platão que possui 3 arestas por face ($n = 3$) ou 3 arestas em cada ângulo poliédrico ($m = 3$); por exemplo, o octaedro e o hexaedro convexos abaixo.

Portanto a nossa hipótese é possível.



Passemos, então, à demonstração.

Vamos demonstrar que, em um poliedro de Platão, n e m não são simultaneamente maiores que 3.

De fato:

Sendo A o número de arestas do poliedro, temos:

$$\begin{cases} nF = 2A \\ mV = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = \dfrac{2A}{n} & \text{(I)} \\ V = \dfrac{2A}{m} & \text{(II)} \\ V - A + F = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III), obtendo:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

Dividimos por $2A$ ambos os membros dessa igualdade:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \qquad \text{(IV)}$$

Cada face tem no mínimo três arestas ($n \geqslant 3$) e cada ângulo poliédrico tem no mínimo três arestas ($m \geqslant 3$). Suponhamos que n e m assumissem, simultaneamente, valores maiores que 3, ou seja:

$$\begin{cases} n \geqslant 4 \\ m \geqslant 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{m} \leqslant \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, essas desigualdades, obtemos:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \leqslant 0 \qquad \text{(V)}$$

Substituímos (IV) em (V):

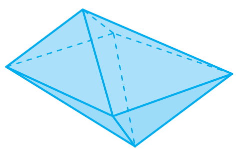
$$\frac{1}{A} \leqslant 0 \Rightarrow A < 0$$

Essa última desigualdade é **absurda**, pois A é o número de arestas do poliedro e, portanto, deveríamos ter $A \in \mathbb{N}$ e $A \geqslant 6$. Assim, m e n não podem ser simultaneamente maiores que 3. Logo, $n = 3$ ou $m = 3$. Ou seja, todo poliedro de Platão ou tem faces triangulares ou tem ângulos triédricos.

4 Demonstrar que: "se um poliedro de Platão possui faces triangulares, então seus ângulos poliédricos são triédricos (3 arestas) ou tetraédricos (4 arestas) ou pentaédricos (5 arestas)".

Resolução

Observemos inicialmente que existe poliedro de Platão com faces triangulares, por exemplo, o octaedro convexo abaixo. Portanto a nossa hipótese é possível.



Passemos então à demonstração.
Sejam V, A e F os números de vértices, arestas e faces de um poliedro de Platão de faces triangulares, respectivamente, e seja m o número de arestas de cada ângulo poliédrico. Assim, temos:

$$\begin{cases} mV = 2A \\ 3F = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{m} & \text{(I)} \\ F = \dfrac{2A}{3} & \text{(II)} \\ V - A + F = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III), obtendo:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{3} = 2 \Rightarrow \frac{2A}{m} - \frac{A}{3} = 2$$

Dividimos por 2A ambos os membros dessa igualdade:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

Como A é positivo, $\frac{1}{A}$ também é. Logo, m só pode assumir valores de modo que:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0$$

De onde se conclui que:

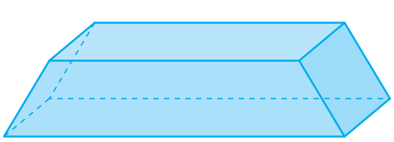
$\frac{1}{m} > \frac{1}{6}$ e, portanto, $m < 6$

Logo, $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$, ou seja, um poliedro de Platão com faces triangulares tem os ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos.

5 Demonstrar que: "se um poliedro de Platão possui ângulos triédricos, então suas faces são triangulares ou quadrangulares ou pentagonais".

Resolução

Observemos inicialmente que existe poliedro de Platão com ângulos triédricos, por exemplo, o hexaedro convexo abaixo. Portanto a nossa hipótese é possível.



Passemos então à demonstração.
Sejam V, A e F os números de vértices, arestas e faces de um poliedro de Platão de ângulos triédricos, respectivamente, e seja n o número de arestas de cada face. Assim, temos:

$$\begin{cases} 3V = 2A \\ nF = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{3} & \text{(I)} \\ F = \dfrac{2A}{n} & \text{(II)} \\ V - A + F = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III), obtendo:

$$\frac{2A}{3} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{2A}{n} - \frac{A}{3} = 2$$

Dividimos por 2A ambos os membros dessa igualdade:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

Como A é positivo, $\frac{1}{A}$ também é. Logo, n só pode assumir valores de modo que:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} > 0$$

De onde se conclui que:

$\frac{1}{n} > \frac{1}{6}$ e, portanto, $n < 6$

Logo, $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$, ou seja, um poliedro de Platão com ângulos triédricos tem as faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais.

6 De acordo com as propriedades demonstradas nos exercícios resolvidos 3, 4 e 5, calcular o número de arestas, de vértices e de faces para cada tipo de poliedro de Platão.

Resolução

Em um poliedro de Platão, sejam:
A o número de arestas;
V o número de vértices;
F o número de faces;
n o número de arestas de cada face;
m o número de arestas de cada ângulo poliédrico.
Temos:

$$\begin{cases} mV = 2A \\ nF = 2A \\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2A}{m} & \text{(I)} \\ F = \dfrac{2A}{n} & \text{(II)} \\ V - A + F = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III):

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

Dividimos por 2A ambos os membros dessa igualdade, obtendo:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \qquad \text{(IV)}$$

No exercício resolvido 3, concluímos que $n = 3$ ou $m = 3$.
Se $n = 3$, pelo exercício resolvido 4, concluímos que $m = 3$, ou $m = 4$, ou $m = 5$.
Façamos todas as combinações possíveis com esses valores:

- $n = 3$ e $m = 3$

  De (IV), temos: $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 6$

De (I), temos: $V = \dfrac{2 \cdot 6}{3} \Rightarrow V = 4$

De (II), temos: $F = \dfrac{2 \cdot 6}{3} \Rightarrow F = 4$ (tetraedro)

- $n = 3$ e $m = 4$

De (IV), temos: $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{A} \Rightarrow A = 12$

De (I), temos: $V = \dfrac{2 \cdot 12}{4} \Rightarrow V = 6$

De (II), temos: $F = \dfrac{2 \cdot 12}{3} \Rightarrow F = 8$ (octaedro)

- $n = 3$ e $m = 5$

De (IV), temos: $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{A} \Rightarrow A = 30$

De (I), temos: $V = \dfrac{2 \cdot 30}{5} \Rightarrow V = 12$

De (II), temos: $F = \dfrac{2 \cdot 30}{3} \Rightarrow F = 20$ (icosaedro)

Se $m = 3$, pelo exercício resolvido 5, concluímos que $n = 3$, ou $n = 4$, ou $n = 5$.
Façamos todas as combinações possíveis com esses valores:

- $m = 3$ e $n = 3$
  Como já visto: $A = 6$, $V = 4$ e $F = 4$ (tetraedro)
- $m = 3$ e $n = 4$

De (IV), temos: $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{A} \Rightarrow A = 12$

De (I), temos: $V = \dfrac{2 \cdot 12}{3} \Rightarrow V = 8$

De (II), temos: $F = \dfrac{2 \cdot 12}{4} \Rightarrow F = 6$ (hexaedro)

- $m = 3$ e $n = 5$

De (IV), temos: $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{A} \Rightarrow A = 30$

De (I), temos: $V = \dfrac{2 \cdot 30}{3} \Rightarrow V = 20$

De (II), temos: $F = \dfrac{2 \cdot 30}{5} \Rightarrow F = 12$ (dodecaedro)

As classes de poliedros de Platão

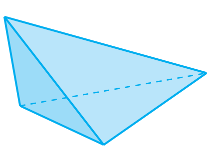
Os exercícios resolvidos 3, 4, 5 e 6 demonstraram que:

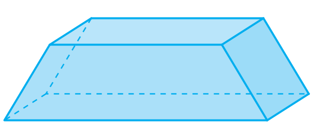
> Existem exatamente cinco classes de poliedros de Platão.

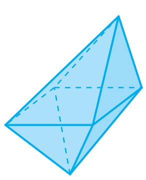
Essas classes estão resumidas na tabela a seguir.

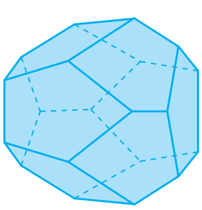
Poliedros de Platão					
Nome	Número de faces (F)	Número de vértices (V)	Número de arestas (A)	Número de arestas por face (n)	Número de arestas por vértice (m)
tetraedro	4	4	6	3	3
hexaedro	6	8	12	4	3
octaedro	8	6	12	3	4
dodecaedro	12	20	30	5	3
icosaedro	20	12	30	3	5

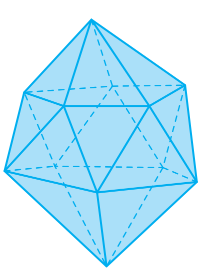
Exemplos


tetraedro


hexaedro


octaedro


dodecaedro


icosaedro

Exercícios propostos

1 Desenhe um exemplar de cada poliedro de Platão.

2 Demonstre que: "não existe poliedro de Platão com faces triangulares e ângulos hexaédricos". (*Sugestão*: Ver exercício resolvido 1.)

3 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações.

a) Existe hexaedro convexo que não é poliedro de Platão.

b) Todo octaedro convexo é poliedro de Platão.

c) Existe poliedro de Platão com algumas faces triangulares e as outras pentagonais.

d) Se um poliedro é de Platão, então seus ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas.

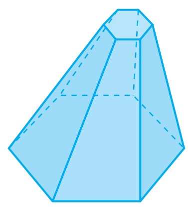
e) Se um poliedro é de Platão, então seus ângulos poliédricos são congruentes entre si.

Soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo

No estudo da Geometria plana, você aprendeu que a soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

A partir dessa soma podemos calcular a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo. Por exemplo, consideremos o poliedro representado a seguir, com duas faces hexagonais e seis faces quadrangulares:



A soma dos ângulos internos de cada face hexagonal é $(6 - 2) \cdot 180°$, ou seja, 720°, e a soma dos ângulos internos de cada face quadrangular é $(4 - 2) \cdot 180°$, ou seja, 360°; logo, a soma S dos ângulos das faces desse poliedro é dada por:

$$S = 2 \cdot 720° + 6 \cdot 360°$$

$$\therefore\ S = 3.600°$$

Efetuando-se, genericamente, esses cálculos para um poliedro convexo cujo número de vértices é V, chega-se ao resultado apresentado no teorema a seguir.

Em todo poliedro convexo cujo número de vértices é V, a soma S dos ângulos das faces é dada por:

$$S = (V - 2) \cdot 360°$$

Demonstração

Sejam V, A e F os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente. Enumerando as faces de 1 a F, sejam $n_1, n_2, n_3, \ldots$ e n_F os números de lados das faces 1, 2, 3, ... e F, respectivamente. Assim, a soma S dos ângulos das faces é dada por:

$S = (n_1 - 2)180° + (n_2 - 2)180° + (n_3 - 2)180° + \ldots + (n_F - 2)180° =$

$= n_1 \cdot 180° - 360° + n_2 \cdot 180° - 360° + n_3 \cdot 180° - 360° + \ldots + n_F \cdot 180° - 360° =$

$= (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_F) \cdot 180° - \underbrace{360° + 360° + 360° + \ldots + 360°}_{F \text{ parcelas}}$

A soma dos números de lados das faces, $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_F$, é o dobro do número de arestas do poliedro, ou seja, $2A$, pois cada lado de uma face é lado de duas, e apenas duas, faces ao mesmo tempo e, portanto, nessa soma cada aresta é contada duas vezes. Assim, temos:

$S = 180° \cdot 2A - 360° \cdot F \Rightarrow S = 360° \cdot A - 360° \cdot F$

$\therefore\ S = (A - F) \cdot 360°$ (I)

Como o poliedro é convexo, a relação de Euler garante que $V - A + F = 2$ e, portanto:

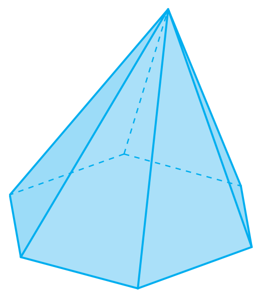
$A - F = V - 2$ (II)

Por (I) e (II), concluímos:

$S = (V - 2) \cdot 360°$

Exercícios resolvidos

1 Calcular a soma dos ângulos das faces do poliedro convexo representado abaixo.



Resolução

A soma S dos ângulos das faces de um poliedro convexo é dada por $S = (V - 2) \cdot 360°$, em que V é o número de vértices do poliedro. Como o poliedro considerado nesta questão possui 7 vértices, a soma S dos ângulos de suas faces é:

$S = (7 - 2) \cdot 360° \Rightarrow S = 1.800°$

2 Um poliedro convexo é constituído por 11 faces e 20 arestas. Calcular a soma dos ângulos das faces desse poliedro.

Resolução

Aplicando a relação de Euler, $V - A + F = 2$, para $A = 20$ e $F = 11$, temos:

$V - 20 + 11 = 2 \Rightarrow V = 11$

Logo, a soma S dos ângulos das faces, $S = (V - 2) \cdot 360°$, é:

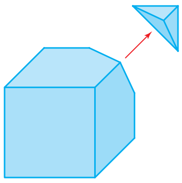
$S = (11 - 2) \cdot 360° \Rightarrow S = 3.240°$

Exercícios propostos

1 Calcule a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo constituído por:

a) 5 vértices. **b)** 6 vértices. **c)** 12 vértices.

2 Uma secção (corte) passando pelos pontos médios de três arestas concorrentes de um cubo (hexaedro regular) separa-o em dois sólidos, conforme mostra a figura. Calcule a soma dos ângulos das faces do maior dos dois poliedros assim determinados.



3 Calcule a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo constituído por 11 faces e 27 arestas.

Justificativa da relação de Euler

Uma possível justificativa da relação de Euler ($V - A + F = 2$), sugerida por George Gamow em seu livro *Um, dois, três ... infinito* (Rio de Janeiro: Zahar, 1962), é apresentada a seguir.

Considerando apenas a superfície de um poliedro convexo, vamos imaginá-la como se fosse uma película de borracha (figura 1)[I].

Se eliminarmos[II] uma das faces dessa superfície, podemos deformar a parte restante, tornando-a plana, de modo que o contorno dessa figura plana seja o contorno alongado[III] do polígono que foi removido (figura 2). Essa parte restante tem um polígono a menos que a superfície original, pois uma face foi removida, mas mantém o mesmo número de arestas e de vértices da superfície original.

Os algarismos romanos vermelhos indicam explicações detalhadas que estão no final da demonstração.

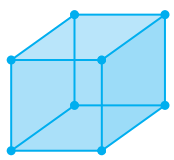


figura 1

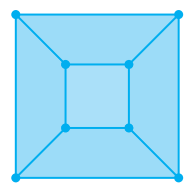


figura 2

Mostraremos agora que, ao planificar a superfície do poliedro sem uma face, a rede plana[IV] obedece à relação $V - A + F = 1$ e, portanto, ao colocarmos de volta a face retirada, a superfície fechada obedece à relação $V - A + F = 2$.

Primeiro, triangulamos a rede plana (figura 2) da seguinte maneira: nos polígonos (não triangulares) da rede, traçamos uma diagonal, com a qual aumentamos uma face e uma aresta e não alteramos o número de vértices. Continuamos traçando diagonais até que a figura consista inteiramente de triângulos (figura 3)[V].

Nessa rede triangulada, a expressão $V - A + F$ tem o mesmo valor que antes da triangulação, já que cada diagonal traçada aumenta uma face e uma aresta e, portanto, $-A + F$ não se altera.

Alguns dos triângulos têm aresta no contorno da rede, como a aresta $\overline{MN}$ do triângulo MNP. Em cada um desses triângulos, removemos a parte que não seja parte de outro triângulo. Dessa forma, de MNP removemos a aresta $\overline{MN}$ e a face, deixando os vértices M, N e P e as duas arestas, $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$ (figura 4).

A remoção de um triângulo do tipo MNP reduz A e F em 1, ao passo que V continua inalterado, de forma que $V - A + F$ continua o mesmo.

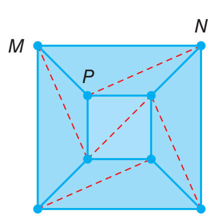


figura 3

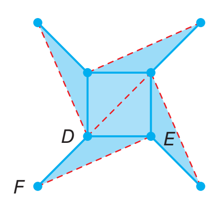


figura 4

Repetimos a operação para a rede restante; por exemplo, do triângulo DEF retiramos a face, as duas arestas $\overline{DF}$ e $\overline{EF}$ e o vértice F (figura 5).

A remoção de um triângulo do tipo DEF reduz V em 1, A em 2 e F em 1, de forma que $V - A + F$ continua inalterado. Por meio de uma sequência convenientemente escolhida dessas operações, podemos retirar triângulos com aresta(s) no contorno da rede até que finalmente reste apenas um triângulo, com suas três arestas, três vértices e uma face e, portanto, $V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$ (figura 6).

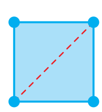


figura 5

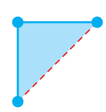


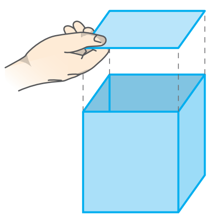
figura 6

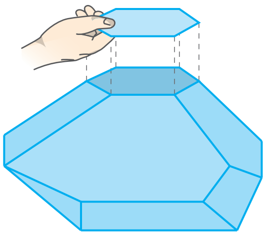
Já vimos, pela eliminação constante de triângulos, que a expressão $V - A + F$ não sofreu alteração, portanto na rede plana original $V - A + F$ também é igual a 1 e, dessa forma, $V - A + F = 1$ para a superfície poliédrica cuja face foi removida. Acrescentando a face que está faltando, concluímos $V - A + F = 2$.

Algumas explicações necessárias:

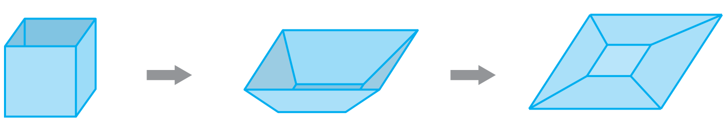
I. Ilustramos a superfície de um cubo, mas poderíamos ter usado qualquer superfície poliédrica convexa como exemplo. Essa demonstração é geral, isto é, vale para qualquer superfície poliédrica convexa.

II. Ao eliminar uma face da superfície poliédrica, ficamos com uma caixa sem tampa [figura (a)]. Pense também em outras superfícies poliédricas, por exemplo, a da figura (b).


(a)

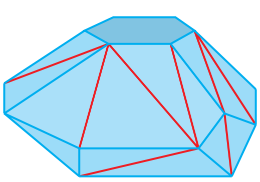

(b)

III. Pense nesse alongamento como se esticássemos as diagonais da linha de contorno da face retirada até que todas as faces remanescentes ficassem no mesmo plano.



IV. Rede plana é o conjunto de vértices e arestas da superfície poliédrica planificada.

V. É importante pensar também em superfícies cujas faces não sejam quadriláteros. Por exemplo, nas faces visíveis na segunda superfície que ilustra o item II anterior, observamos quatro tipos de polígono: triângulo, quadrilátero, pentágono e hexágono. Observe, abaixo, como poderia ficar a triangulação das faces dessa superfície:

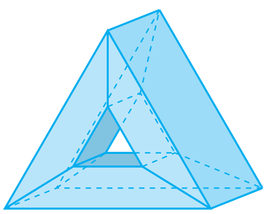


Nota:

Para poliedros não convexos, a relação de Euler pode valer ou não. O poliedro não convexo ao lado é um exemplo para o qual não vale a relação de Euler.

Nesse poliedro, temos $V = 12$, $A = 24$ e $F = 12$. Logo:

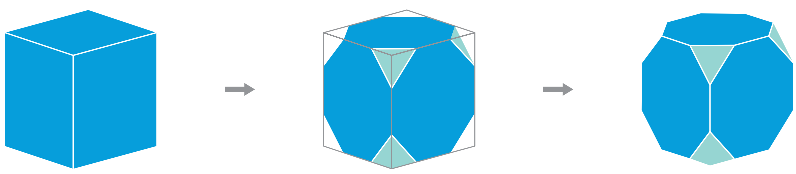
$V - A + F = 12 - 24 + 12 = 0$



Os poliedros de Arquimedes

Dentre seus incontáveis trabalhos, Arquimedes de Siracusa (cerca de 287 a.C.--212 a.C.) estudou os poliedros convexos, não regulares, que possuem todas as faces regulares e todos os ângulos poliédricos congruentes; esses poliedros são chamados de **poliedros arquimedianos**.

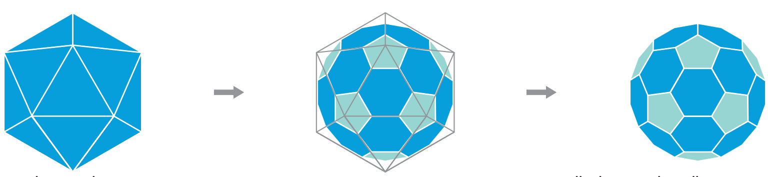
Existem 13 tipos de poliedros arquimedianos. Um deles é obtido a partir de um cubo, retirando de cada vértice uma pirâmide triangular regular, de modo que todas as arestas do sólido remanescente tenham a mesma medida, conforme mostram as figuras a seguir.



cubo

poliedro arquimediano com 14 faces: 6 octogonais e 8 triangulares

Outro desses poliedros é obtido a partir de um icosaedro regular, retirando de cada vértice uma pirâmide regular pentagonal cujas arestas laterais medem $\frac{1}{3}$ da aresta do icosaedro:

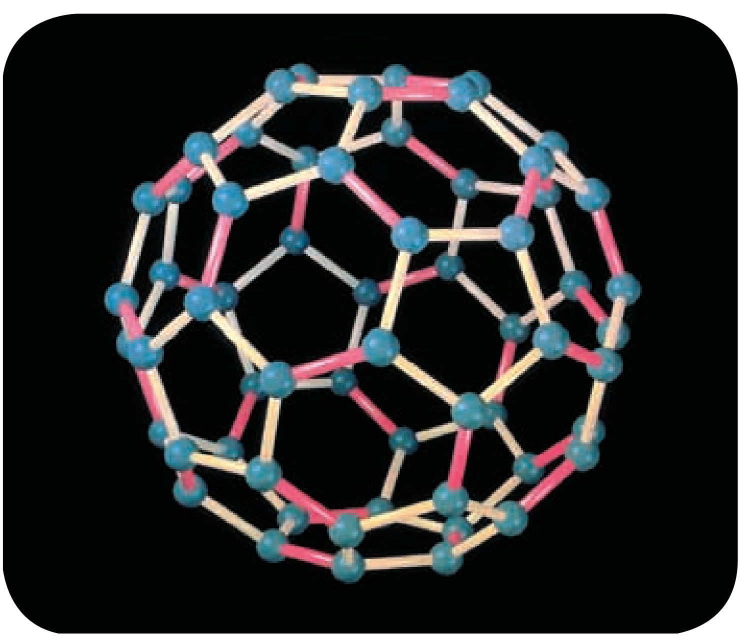


icosaedro

poliedro arquimediano com 32 faces: 12 pentagonais e 20 hexagonais.

Esse poliedro arquimediano teve destaques importantes no século XX: em 1970, no Campeonato Mundial de Futebol, usou-se pela primeira vez uma bola de futebol construída com base nesse poliedro; e em 1985, foi descoberta uma nova forma de carbono, o *buckminsterfullereno*, cujos 60 átomos localizam-se nos vértices desse poliedro arquimediano e as arestas representam as ligações químicas, conforme a figura a seguir.

DREAM STOCK/MASTERFILE/OTHER IMAGES

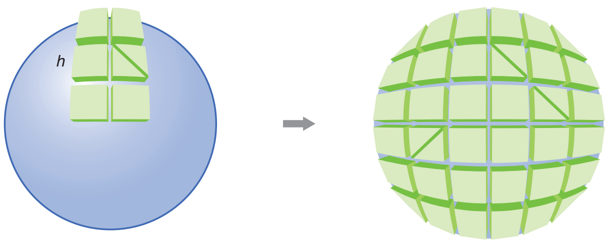


J. BERNHOLC ET AL/SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

TEXTO COMPLEMENTAR

Demonstração da superfície esférica

Suponha que sobre a superfície de uma esfera sejam construídos n pequenos prismas de mesma altura h com bases tangentes à esfera tal que cada aresta dessas bases seja aresta de duas, e somente duas, bases desses prismas, conforme sugere a figura:

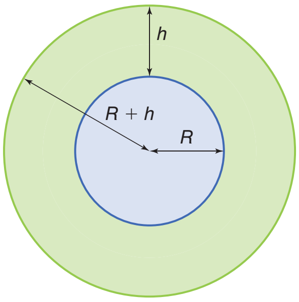


Sendo A_1, A_2, A_3, ..., A_n as áreas das bases desses prismas, a soma V' de seus volumes é:

$V' = A_1h + A_2h + A_3h + ... + A_nh = (A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n)h$

A soma $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n$ das áreas das bases é **aproximadamente** a área A da superfície esférica (quanto maior o valor de n, mais próxima de A estará essa soma). Assim, o volume V' é **aproximadamente** igual ao volume V'', dado pelo produto da área da superfície esférica pela altura h, ou seja, $V' \approx V''$, em que $V'' = Ah$.

Raciocinando de maneira análoga, consideremos duas superfícies esféricas de mesmo centro e raios R e $R + h$, com $h > 0$.



Sendo A a área da superfície esférica de raio R, o volume V limitado pelas duas superfícies esféricas é aproximadamente igual ao volume V'' dado por:

$$V'' = Ah \qquad \text{(I)}$$

Podemos calcular precisamente o volume V do seguinte modo:

$$V = \frac{4\pi(R + h)^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi(R^3 + 3R^2h + 3Rh^2 + h^3)}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\therefore\ V = \frac{4\pi h^3}{3}(3R^2 + 3Rh + h^2) \qquad \text{(II)}$$

Para h "tendendo" a zero, as expressões (I) e (II) "tendem" a se igualar, ou seja:

$$V = V'' \Rightarrow \frac{4\pi h}{3}(3R^2 + 3Rh + h^2) = Ah$$

$$\therefore\ \frac{4\pi}{3}(3R^2 + 3Rh + h^2) = A$$

Como h "tende" a zero, a soma $3Rh + h^2$ também "tende" a zero e, portanto, a área A "tende" a:

$$A = \frac{4\pi}{3} \cdot 3R^2, \text{ ou seja, } A = 4\pi R^2$$

Desse modo, justificamos que:

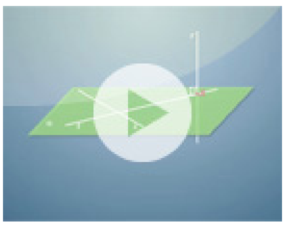
> A área A da superfície de uma esfera de raio R é dada por:
> $A = 4\pi R^2$

Nota:

Dizer que a variável h tende a zero significa dizer que ela se aproxima indefinidamente de zero, sem se igualar a ele.

CONTEÚDO DIGITAL - PARTE 3

Animações



Teorema das três perpendiculares

Matemática 2 > Parte 3 > Cap. 10 > Seção 10.3

Esta animação faz uma representação da posição relativa das retas no teorema das três perpendiculares.

Relação de Euler

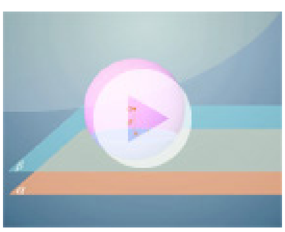
Matemática 2 > Parte 3 > Cap. 11 > Seção 11.2

A animação demonstra a validade da relação de Euler para poliedros convexos.

Volume de uma pirâmide triangular

Matemática 2 > Parte 3 > Cap. 11 > Seção 11.6

Demonstração da fórmula do volume de uma pirâmide triangular com base em um prisma de base triangular.



Demonstração do volume da esfera

Matemática 2 > Parte 3 > Cap. 12 > Seção 12.3

Demonstração da fórmula do volume da esfera por meio de um sólido conhecido como anticlepsidra, construído a partir de um cilindro equilátero.

SIGLAS DE VESTIBULARES

Ceeteps-SP	Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Cefet-PR	Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
Cefet-SP	Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo
Cesgranrio-RJ	Fundação Cesgranrio
Covest-PE	Comissão de Processos Seletivos e Treinamentos
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
ESPM-SP	Escola Superior de Propaganda e Marketing
Faap-SP	Fundação Armando Álvares Penteado
FCC	Fundação Carlos Chagas
FCMSC-SP	Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa
FEI-SP	Faculdade de Engenharia Industrial
FGV	Fundação Getúlio Vargas
FMABC-SP	Faculdade de Medicina do ABC
Furg-RS	Fundação Universidade Federal do Rio Grande
Fuvest-SP	Fundação Universitária para o Vestibular
Ibmec	Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais
IME-RJ	Instituto Militar de Engenharia
ITA-SP	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Mackenzie-SP	Universidade Presbiteriana Mackenzie
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
PUC-MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR	Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Uece	Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO	Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR	Universidade Estadual de Londrina
UEMG	Universidade do Estado de Minas Gerais
UEMS	Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Uenf-RJ	Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Uepa	Universidade do Estado do Pará
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
Uerj	Universidade Estadual do Rio de Janeiro
Uespi	Universidade Estadual do Piauí
Ufac	Universidade Federal do Acre
Ufal	Universidade Federal de Alagoas
Ufam	Universidade Federal do Amazonas
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFC-CE	Universidade Federal do Ceará
Ufes	Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ	Universidade Federal Fluminense

UFG-GO	Universidade Federal de Goiás
UFJF-MG	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMA	Universidade Federal do Maranhão
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso
Ufop-MG	Universidade Federal de Ouro Preto
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFPI	Universidade Federal do Piauí
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRR	Universidade Federal de Roraima
UFS-SE	Universidade Federal de Sergipe
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UFSCar-SP	Universidade Federal de São Carlos
UFSM-RS	Universidade Federal de Santa Maria
UFT-TO	Universidade Federal do Tocantins
UFV-MG	Universidade Federal de Viçosa
UGF	Universidade Gama Filho
Ulbra-RS	Universidade Luterana do Brasil
UMC-SP	Universidade de Mogi das Cruzes
Unemat-MT	Universidade do Estado do Mato Grosso
Unicamp-SP	Universidade Estadual de Campinas
Unifal-MG	Universidade Federal de Alfenas
Unifesp	Universidade Federal de São Paulo
Unifor-CE	Universidade de Fortaleza
Unir-RO	Universidade Federal de Rondônia
Unirio-RJ	Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Unitau-SP	Universidade de Taubaté
Unopar-PR	Universidade Norte do Paraná
Vunesp	Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

BIBLIOGRAFIA

ADAS, M. *Geografia*. São Paulo, Moderna, 1999, v. 3.

AGUIAR, A. F. A. et al. *Cálculo para ciências médicas e biológicas.* São Paulo, Harbra, 1988.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana.* Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

BERLOQUIN, P. *Cem jogos lógicos*. Lisboa, Gradiva, 1991.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

CÂNDIDO, S. L. *Formas num mundo de formas.* São Paulo, Moderna, 1997.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais de Matemática.* Lisboa, Brás Monteiro, 1951.

CARVALHO, T. M. *Matemática para os cursos clássico e científico.* São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1946, v. 1, v. 2 e v. 3.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação:* reflexões sobre Educação e Matemática. Campinas, Editora da Unicamp, 1986.

DAVIS, P. J. & HERSH, R. *A experiência matemática.* São Paulo, Francisco Alves, 1986.

ENCICLOPÉDIA ENCARTA 2000. Microsoft.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, Editora da Unicamp, 1997.

GAMOW, G. *Um, dois, três... infinito*. Rio de Janeiro, Zahar, 1962.

GRANDE ENCICLOPÉDIA LAROUSSE CULTURAL. São Paulo, Nova Cultural, 1995.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre, Globo, 1952.

IEZZI, G. et al. *Fundamentos da Matemática elementar.* São Paulo, Atual, 1977, v. 2 e v. 4.

IFRAH, G. *História universal dos algarismos*. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1997.

JOHNSON, D. A. et al. *Matemática sem problemas.* São Paulo, José Olympio, 1972.

KAPLAN, W. & LEWIS, D. J. *Cálculo e Álgebra linear.* Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos & Editora da Universidade de Brasília, 1973, v. 3.

KARSON, P. *A magia dos números*. Porto Alegre, Globo, 1961.

KASNER, E. & NEWMAN, J. *Matemática e imaginação.* Rio de Janeiro, Zahar, 1968.

LEME, R. A. da S. *Curso de Estatística.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1969.

LESH, R. & LANDAU, M. *Aquisition of mathematics concepts and process.* London, Academic Press, 1983.

MIORIN, M. Â. *O ensino de Matemática:* evolução e modernização. Faculdade de Educação da Unicamp, 1995. (Tese, Doutorado)

NOVA ENCICLOPÉDIA BARSA. São Paulo, Encyclopaedia Britannica do Brasil, 2000.

PENROSE, R. *A mente nova do rei*. Rio de Janeiro, Campus, 1991.

PERUZZO, T. M. & CANTO, E. L. do. *Química:* na abordagem do cotidiano. São Paulo, Moderna, 1993.

RAMALHO JUNIOR, F. et al. *Os fundamentos da Física.* São Paulo, Moderna, 1993.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática. Publicação quadrimestral.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. *Matemática*: curso colegial. São Paulo, Edart, 1966.

SPIEGEL, M. R. *Estatística.* São Paulo, McGraw-Hill, 1961.

VERAS, L. L. *Matemática aplicada à Economia.* São Paulo, Atlas, 1995.

CRÉDITOS DAS FOTOS

(da esquerda para a direita, de cima para baixo)
As imagens identificadas com a sigla CID foram fornecidas pelo Centro de Informação e Documentação da Editora Moderna.

PARTE 1

Pág. 11 - Chad Baker/Stone/Getty Images

CAPÍTULO 1

Pág. 12/13 - John Lund/Corbis/Latinstock
Pág. 14 - Ednilson Aguiar/Secom-MT
Pág. 17 – Marcos Tristão/Agência O Globo
Pág. 18 – Ale Vianna/Futura Press
Pág. 29 – Pedro H. Bernardo/Folhapress; Moodboard/Alamy/Image Plus
Pág. 30 – Jasper James/Getty Images
Pág. 41 – Fotos: Reprodução
Pág. 45 – Scanpix/Other Images; Imac/Alamy/ Image Plus

CAPÍTULO 2

Pág. 55 – AGE RM/Other Images
Pág. 56 – Gay Robbins & Charles Shute – British Museum
Pág. 61 – Paul Souders/Corbis/Latinstock
Pág. 68 – Sara Maria Peeters/Shutterstock; DEA/C Scappa/Image Plus
Pág. 72 – Stephan Klein/Image Broker/Other Images

CAPÍTULO 3

Pág. 77 – Paul Rapson/Alamy/Other Images
Pág. 109 – Nasa Images
Pág. 121 – Nasa Images

CAPÍTULO 4

Pág. 123 – Nasa Images

CAPÍTULO 5

Pág. 123 – Nasa Images
Pág. 168 – Reuter/Latinstock
Pág. 170 – Zorylee Diaz-Lupitou/Shutterstock; Tony Cordoza/Getty Images
Pág. 172 – Stephen Dorey ABIPP/Alamy/Other Images
Pág. 190 – Photostock1/Alamy/ImagePlus

PARTE 2

Pág. 225 - Ignacio Gonzalez Prad/Panther Media/ Keystone; John Gillmoure/Corbis/Latinstock

CAPÍTULO 6

Pág. 226/227 - Jose Fuste Raga/Corbis/Latinstock
Pág. 228 - Reprodução
Pág. 229 – Image Broker/Other Images
Pág. 233 – Digital Vision/Getty Images
Pág. 235 – Gerson Sobreira/Terrastock; Gerson Sobreira/Terrastock
Pág. 236 – Rubens Chaves/Pulsar Imagens
Pág. 244 – Michael Rosenfeld/Photographer's Choice/Other Images

CAPÍTULO 7

Pág. 247 – Guang Niu/Getty Images
Pág. 248 – Dobroslawa Szulc/Shutterstock
Pág. 298 – Eduardo Santaliestra/CID
Pág. 299 – Jacek/Kino

CAPÍTULO 8

Pág. 306 – Jacek/Kino; Iara Venanzi/Kino; Reprodução; Losevsky Pavel/Shutterstock
Pág. 307 – Christoph Wilhelm/Getty Images
Pág. 310 – Eduardo Santaliestra/CID; View Stock/ Photoshot/Other Images
Pág. 311 – Cleo Velleda/Folhapress
Pág. 314 – Yoav Levy/Science Faction/Corbis/ Latinstock; Thomas Del Brase/Photographer's Choice/Getty Images
Pág. 318 – Reprodução
Pág. 321 – Peter Baxter/Shuttestock
Pág. 322 – Doug Mills/The New York Times/ Latinstock
Pág. 323 – Beto Celli
Pág. 325 – Guy Reynolds/Dallas Morning News/ Corbis/Latinstock
Pág. 326 – J. Y./Shutterstock
Pág. 334 – Kasia/Shutterstock; Ivosar/ Shutterstock
Pág. 344 – Denis Nata/Shutterstock
Pág. 345 – LAL/Getty Images; Dorling Kindersley/ Getty Images

CAPÍTULO 9

Pág. 351 – Marinko Tarlac/Shutterstock
Pág. 352 – R T Images/Shutterstock
Pág. 353 – Zentilla/Shutterstock; Eduardo Santaliestra/CID
Pág. 356 – Vuk Nenezic/Shutterstock
Pág. 357 – Burger/Phanie/ImagePlus
Pág. 359 – Imagebroker/Alamy/Other Images
Pág. 360 – Jacek/Kino; André Chaco/FotoArena/ Folhapress
Pág. 362 – Pincasso/Shutterstock
Pág. 364 – Harrison Eastwood/Getty Images
Pág. 370 – Shkind/Shutterstock

PARTE 3

Pág. 393 - Klaus Hackenberg/Corbis/Latinstock

CAPÍTULO 10

Pág. 396 – Reprodução
Pág. 403 – PictureIndia/Keystone; Artur Moszczak/Shutterstock
Pág. 411 – Santiago Cornejo/Shutterstock
Pág. 418 – Jacek/Kino; Christopher Dodge / Shutterstock
Pág. 423 – Fernando Favoreto/CID
Pág. 428 – AGE RM/Other Images
Pág. 428 – David Papazian/Corbis/Latinstock
Pág. 444 – Fernando Favoreto/Criar Imagem

CAPÍTULO 11

Pág. 448 - Robert Holmes/Corbis/Latinstock; Rubens Chaves/Pulsar Imagens
Pág. 455 - Alexander Fediachov/Shutterstock; GC Minerals/Alamy/Other Images; 3DClinic/Getty Images
Pág. 464 - Theowulf Maehl/Corbis/Latinstock; Firstlight/Other Images; Martin Child/Getty Images
Pág. 469 - Zoran Milich/Masterfile/Other Images; CooIR/Shutterstock; Monsoon/Latinstock
Pág. 476 – Beto Celli
Pág. 480 – Sculpies/Shutterstock
Pág. 495 – Paulo Manzi/CID
Pág. 499 – Olivier Polet/Corbis/Latinstock
Pág. 500 – Jeff Greenberg/Alamy/Other Images
Pág. 502 – Imagebroker Dp/Other Images

CAPÍTULO 12

Pág. 505 – Thais Brandão/Folhapress
Pág. 506 – Lasse Kristensen/Shutterstock; Andre Bonn/Shutterstock
Pág. 517 – Ardea/Other Images; Matthew Ward/ Dorling Kindersley/Getty Images; Mike Tan C.T./ Shutterstock; Sue Smith/Shutterstock
Pág. 529 – Steve Shott/Dorling Kindersley/Getty Images; Anna K./Shutterstock
Pág. 530 – Scala, Florence/Fotografica Foglia/ Other Images; NASA Kennedy Center Media Archive Collection
Pág. 531 – Diomedia; Michael J. Thompson/ Shutterstock
Pág. 541 – Bettmann/Corbis/Latinstock
Pág. 555 – Paulo Fridman/SambaPhoto
Pág. 556 – Jerry Bernard/Alamy/Other Images
Pág. 561 – Michael DeFreitas/Alamy/Other Images

CRÉDITOS DE INFOGRAFIA

Cap. 3 - *Ilustração*: Kako
Cap. 5 - *Ilustração*: Luciano Veronezi
Cap. 8 - *Ilustração*: Ciro MacCord
Cap. 10 - *Ilustração*: Gil Tokio
Cap. 11 - *Ilustração*: Carlos Fonseca

Moderna PLUS
Tablet 2.0

TECNOLOGIA EDUCACIONAL

Direção editorial: Sônia Cunha de S. Danelli

Direção de operações editoriais: Ricardo Seballos

Coordenação de produção gráfica: André da Silva Monteiro

Coordenação de *design* e projetos visuais: Sandra Botelho de Carvalho Homma

Projeto gráfico: Everson de Paula

Projeto: Argeu Pereira da Ivenção, Kerly Kazumi Tanaka

Publicação: Ana Carolina Donegá, Carolina Figueiredo, Daniel Favalli, Rodrigo Luis de Andrade

Aplicativo homologado e recomendado para:

- Dispositivos SAMSUNG TAB 2 10.1 e SAMSUNG TAB NOTE 10.1com Android 4.0.3 ou 4.04
- Dispositivos APPLE com IOS 6.1

Moderna PLUS

MANOEL PAIVA

MATEMÁTICA
PAIVA

2

RESOLUÇÕES

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

Os doze primeiros números da sequência de Fibonacci são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Exercícios propostos

1 Na sequência dada, os termos são:

$a_1 = 5$ $\quad$ $a_5 = 6$

$a_2 = -4$ $\quad$ $a_6 = 6$

$a_3 = 8$ $\quad$ $a_7 = 6$

$a_4 = \sqrt{3}$

2 **a)** De acordo com o enunciado, temos:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 + 5 = 9$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 + 5 = 11$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$

Portanto, a sequência é (7, 9, 11, 13, ...).

b) De acordo com o enunciado, temos:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 1 = 2$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 + 2 = 6$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 + 3 = 12$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 + 4 = 20$

Portanto, a sequência é (2, 6, 12, 20, ...).

c) Do enunciado, temos:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = \dfrac{2}{2 + 1} = \dfrac{2}{3}$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = \dfrac{3}{3 + 1} = \dfrac{3}{4}$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = \dfrac{4}{4 + 1} = \dfrac{4}{5}$

Portanto, a sequência é $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, ...\right)$.

d) Dadas as informações da sequência, temos:

$a_1 = 4$

$n = 1 \Rightarrow a_2 = 5 + a_1 = 5 + 4 = 9$

$n = 2 \Rightarrow a_3 = 5 + a_2 = 5 + 9 = 14$

$n = 3 \Rightarrow a_4 = 5 + a_3 = 5 + 14 = 19$

Portanto, a sequência é (4, 9, 14, 19, ...).

e) Do enunciado, temos:

$a_1 = 3$

$a_2 = 7$

$n = 1 \Rightarrow a_3 = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$

$n = 2 \Rightarrow a_4 = a_3 - a_2 = 4 - 7 = -3$

Portanto, a sequência é (3, 7, 4, −3, ...).

3 **a)** Indicando a soma dos dez primeiros termos da sequência dada por S_{10}, temos:

$n = 10 \Rightarrow S_{10} = 10^2 + 10 = 110$

b) O primeiro termo pode ser encontrado atribuindo-se o valor 1 à variável n:

$n = 1 \Rightarrow S_1 = 1^2 + 1 = 2$

$\therefore a_1 = 2$

c) $a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 5) - (4^2 + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_5 = 10$

d) $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - [(n - 1)^2 + (n - 1)] \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = 2n$

4 **a)** Dividindo 23 por 4, obtém-se quociente 5 e resto 3. Isso significa que na primeira troca o cliente ficará com 5 livros novos e 3 já lidos.

Para a segunda troca, o cliente possui 8 livros. Dividindo 8 por 4, obtém-se quociente 2 e resto zero. Isso significa que na segunda troca o cliente ficará com 2 livros novos.

Assim, o cliente poderá ler 7 livros novos dessa livraria, sem nenhum custo.

b) Repetindo o raciocínio do item **a**, temos:

Divisão	Quociente	Resto	Total de livros do cliente após a troca
505 por 4	126	1	126 novos e 1 já lido
127 por 4	31	3	31 novos e 3 já lidos
34 por 4	8	2	8 novos e 2 já lidos
10 por 4	2	2	2 novos e 2 já lidos
4 por 4	1	0	1 novo

Assim, a sequência pedida é (126, 31, 8, 2, 1).

5 **a)** Como os mosaicos são formados por quadrados, no 15º mosaico teremos um quadrado de 15 × 15 azulejos brancos.

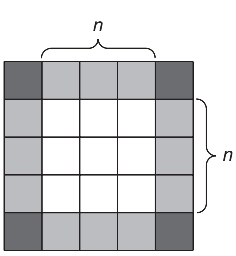
Logo, sendo a_{15} o número de azulejos brancos no 15º mosaico, temos:

$a_{15} = 15^2 = 225$

Portanto, o 15º mosaico terá 225 azulejos brancos.

b) Raciocinando como no item **a**, temos: $a_n = n^2$

c) Como o quadrado branco é composto de $n \times n$ azulejos brancos, o número de azulejos pretos varia de acordo com os n azulejos brancos. Como o quadrado é formado por 4 lados, teremos $4n + 4$ azulejos pretos, de acordo com o esquema:



Somamos 4 azulejos, referentes aos vértices do quadrado preto.
Logo, para $n = 20$ temos que o total p_n azulejos pretos é dado por:
$p_{20} = 20 \cdot 4 + 4 = 84$
Portanto, o 20º mosaico dessa sequência terá 84 azulejos pretos.

d) Raciocinando como no item **c**, temos: $p_n = 4n + 4$

6 **a)** Os doze primeiros termos da sequência de Fibonacci são:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

b) Temos:
$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 3$
Logo, a lei de formação é:
$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

7 Como $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \geqslant 1.024$, temos:
$\dfrac{4^n}{2^n} \geqslant 1.024 \Rightarrow 2^n \geqslant 1.024$
$\therefore \ 2^n \geqslant 2^{10} \Rightarrow n \geqslant 10$
Alternativa **a**.

8 **a)** Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, a sequência é uma PA.
b) Como a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, a sequência não é PA.
c) Como a diferença entre dois termos consecutivos é uma constante, a sequência é uma PA.
d) Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, a sequência é uma PA.
e) Como a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, a sequência não é PA.
f) Como a diferença entre dois termos consecutivos é uma constante, a sequência é uma PA.
g) Como a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, a sequência não é PA.

9 **a)** Temos $a_2 = 2$ e $a_1 = 0$; então:
$r = a_2 - a_1 = 2 - 0 = 2$
Logo, a razão é 2.
b) Temos $a_2 = 7$ e $a_1 = 10$; então:
$r = a_2 - a_1 = 7 - 10 = -3$
Logo, a razão é -3.
c) Temos $a_2 = \dfrac{17}{12}$ e $a_1 = \dfrac{13}{6}$; então:
$$r = a_2 - a_1 = \frac{17}{12} - \frac{13}{6} = \frac{17 - 26}{12} = -\frac{3}{4}$$
Logo, a razão é $-\dfrac{3}{4}$.
d) Como $(-7, -7, -7, -7, ...)$ é uma PA constante, sua razão é nula.
e) Temos que $a_3 = 4$ e $a_2 = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$; então:
$$r = a_3 - a_2 = 4 - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} =$$
$$= 2 - \sqrt{3}$$

10 Nessa PA de razão $r = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$, temos:
$a_6 + r = a_7$
Então:
$$1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = a_7 \Rightarrow a_7 = \frac{2\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\sqrt{2} - 1}$$
$\therefore \ a_7 = 2$

11 Os números a, b e c estão em PA de razão 2; logo:
$b = a + 2$
$c = a + 4$
Temos, do enunciado:
$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow a^2 + (a + 2)^2 - (a + 4)^2 = 0$
$\therefore a^2 - 4a - 12 = 0$
$\Delta = 16 + 48 = 64$
$$\therefore a = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \Rightarrow a = 6 \text{ ou } a = -2$$
Como a, b e c são naturais, temos $a = 6$.
Como a, b e c estão em PA de razão 2, concluímos:
$a = 6$, $b = 8$ e $c = 10$
Então:
$a + b + c = 6 + 8 + 10 = 24$
Alternativa **c**.

12 Dado $a_n = 3n + 5$, temos:
$a_{n+1} - a_n = 3(n + 1) + 5 - (3n + 5) = 3$
Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, essa sequência é uma PA.

13 **a)** Temos $a_1 = 4$ e $a_2 = 7$; então:
$r = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$
Como a razão r é positiva, a PA é crescente.
b) Temos $a_1 = -14$ e $a_2 = -10$; assim:
$r = a_2 - a_1 = -10 - (-14) = 4$
Como a razão r é positiva, PA é crescente.
c) Temos $a_1 = 28$ e $a_2 = 20$; então:
$r = a_2 - a_1 = 20 - 28 = -8$
Como a razão r é negativa, a PA é decrescente.
d) Temos $a_1 = -30$ e $a_2 = -35$; então:
$r = a_2 - a_1 = -35 + 30 = -5$
Como a razão r é negativa, a PA é decrescente.
e) Temos que os termos da PA são iguais; logo, a razão é nula.
Portanto, a PA é constante.
f) Temos $a_1 = 2 - \sqrt{2}$ e $a_2 = 1$; então:
$r = a_2 - a_1 = 1 - \left(2 - \sqrt{2}\right) = -1 + \sqrt{2}$
Como a razão r é positiva, a PA é crescente.

14 **a)** $(5, 2, -1, -4, ...)$: PA decrescente
b) $(-3, -3, -3, -3, ...)$: PA constante
c) $(10, 18, 26, 34, ...)$: PA crescente

15 $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - 1 - (x - 2) = x - 2 - (1 - x)$
$\therefore x + 1 = 2x - 3 \Rightarrow x = 4$

16 Observando que o coeficiente de r tem uma unidade a menos que o índice do termo (número da posição do termo), concluímos que
$a_n = a_1 + (n - 1)r$.

17 Representando a PA por $(x - r, x, x + r)$, temos:

$$\begin{cases}(x - r) + x + (x + r) = 6 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = -10\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x = 2 & \text{(I)} \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = -10 & \text{(II)}\end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$4 - r^2 = -5 \Rightarrow r = \pm 3$

Como a PA é crescente, deduzimos que $r = 3$.

Portanto, a PA é $(-1, 2, 5)$.

18 Vamos representar a PA de quatro termos por:

$(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$

Assim, temos:

$$\begin{cases}x - 3r + x - r + x + r + x + 3r = 4 \\ (x + r)(x + 3r) = 40\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x = 1 & \text{(I)} \\ (x + r)(x + 3r) = 40 & \text{(II)}\end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$(1 + r)(1 + 3r) = 40 \Rightarrow 3r^2 + 4r - 39 = 0$

$\therefore r = 3$ ou $r = -\dfrac{13}{3}$

Como a PA é crescente, deduzimos que $r = 3$.

Logo, a PA é $(-8, -2, 4, 10)$.

19 Indicando por $(x - r, x, x + r)$ a PA crescente formada pelas medidas dos ângulos internos do triângulo, temos:

$$\begin{cases}x - r + x + x + r = 180° \\ x + r = 2(x - r)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 60° \\ x = 3r\end{cases}$$

Logo, $x = 60°$ e $r = 20°$ e, portanto, o maior ângulo interno do triângulo mede 80°.

Alternativa **d**.

20 Representando a PA por $(x - r, x, x + r)$, temos:

$x - r + x + x + r = 2.790 \Rightarrow x = 930$

Logo, o valor aplicado no segundo mês foi R$ 930,00.

21 Dada a PA (2, 13, 24, 35, ...), temos:

$a_1 = 2$ e $a_2 = 13$

Assim, a razão r é dada por:

$r = a_2 - a_1 = 13 - 2 = 11$

Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 40$, concluímos:

$a_{40} = 2 + (40 - 1)11 = 431$

Portanto, o 40º termo da PA é $a_{40} = 431$.

22 Sabendo que a PA é $(2k + 1, 3k, 4k - 1, ...)$, temos:

$a_1 = 2k + 1$ e $a_2 = 3k$

Sendo r a razão da PA, temos:

$r = a_2 - a_1 = 3k - (2k + 1) = k - 1$

Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 21$, concluímos:

$a_{21} = 2k + 1 + (21 - 1)(k - 1) = 2k + 1 + 20k - 20$

$\therefore a_{21} = 22k - 19$

23 Temos a PA (2, 8, 14, 20, ...). Então:

$a_1 = 2$ e $a_2 = 8$

Assim, a razão r da PA é dada por:

$r = a_2 - a_1 = 8 - 2 = 6$

Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, concluímos:

$a_n = 2 + (n - 1)6 = 6n - 4$

24 Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 20$, temos:

$a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow 131 = a_1 + (20 - 1)7$

$\therefore 131 = a_1 + 133 \Rightarrow a_1 = -2$

Logo, o 1º termo da PA é $a_1 = -2$.

25 Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 11$, temos:

$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow 29k - 18 = a_1 + (11 - 1)(2 - k)$

$\therefore 29k - 18 = a_1 + 20 - 10k$

$\therefore a_1 = 39k - 38$

Logo, o 1º termo da PA é $a_1 = 39k - 38$.

26 Sabemos que $a_n = a_k + (n - k)r$ é a fórmula do termo geral, então:

$$\begin{cases}a_8 = 3a_5 \\ a_8 = a_5 + 3r\end{cases}$$

Logo:

$a_8 = 3(a_8 - 3r) \Rightarrow a_8 = \dfrac{9}{2}r$

Então:

$\dfrac{9}{2}(-5) = a_1 + (8 - 1)(-5) \Rightarrow a_1 = \dfrac{25}{2}$

$a_2 = a_1 + r = \dfrac{25}{2} - 5 = \dfrac{15}{2}$

$a_3 = a_2 + r = \dfrac{15}{2} - 5 = \dfrac{5}{2}$

$a_4 = a_3 + r = \dfrac{5}{2} - 5 = -\dfrac{5}{2}$

Logo, temos a PA:

$\left(\dfrac{25}{2}, \dfrac{15}{2}, \dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{2}, ...\right)$

27 Dada a PA (3, 7, 11, ..., 99), temos que a razão r é:

$r = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$

Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $a_n = 99$, temos:

$99 = 3 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 25$

Logo, a PA tem 25 termos.

28 Temos:

$a_1 = 15b - 47$, $a_2 = 14b - 43$ e

$r = a_2 - a_1 = 14b - 43 - (15b - 47) = -b + 4$

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, concluímos:

$13 = 15b - 47 + (n - 1)(-b + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \dfrac{16(b - 4)}{(b - 4)}$, para $b \neq 4$

$\therefore n = 16$

Logo, a PA tem 16 termos.

29 Sendo r a razão da PA, temos:

$a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow \dfrac{17}{3} = \dfrac{1}{6} + 11r$

$\therefore 34 = 1 + 66r \Rightarrow r = \dfrac{1}{2}$

30 Queremos interpolar 6 meios aritméticos entre 2 e 10, nessa ordem. Então teremos uma PA com 8 termos, sendo $a_1 = 2$ e $a_8 = 10$.
Logo:
$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow 10 = 2 + 7r$
$\therefore r = \frac{8}{7}$
Logo, PA é $\left(2, \frac{22}{7}, \frac{30}{7}, \frac{38}{7}, \frac{46}{7}, \frac{54}{7}, \frac{62}{7}, 10\right)$.

31 Do enunciado, temos:
$a_2 + a_3 = 11 \Rightarrow a_1 + r + a_1 + 2r = 11$
$a_4 + a_7 = 21 \Rightarrow a_1 + 3r + a_1 + 6r = 21$
Temos, então, o sistema:
$$\begin{cases} 2a_1 + 3r = 11 & \text{(I)} \\ 2a_1 + 9r = 21 & \text{(II)} \end{cases}$$
Subtraímos, membro a membro, (I) e (II), obtendo:
$-6r = -10 \Rightarrow r = \frac{5}{3}$
Portanto, a razão da PA é $r = \frac{5}{3}$.

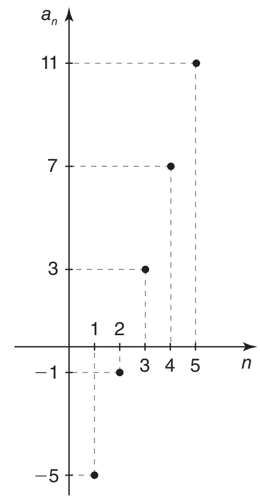
32 Sabemos que:
$a_{23} = a_{15} + 8r \Rightarrow a_{23} = 18 + 8 \cdot 6$
$\therefore a_{23} = 66$
Logo, o 23º termo é 66.

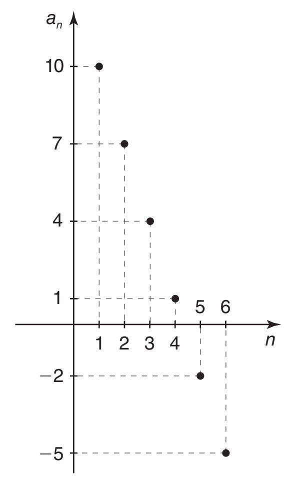
33 Temos:
$a_{32} = a_{20} + 12r \Rightarrow 8 = 5 + 12r$
$\therefore r = \frac{1}{4}$
Logo, a razão da PA é $r = \frac{1}{4}$.

34 Observando a evolução nos 4 primeiros minutos, notamos que os números de vírus 1, 5, 9 e 13 formam uma PA de razão 4.
Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, para $n = 60$, temos:
$a_{60} = 1 + (60 - 1) \cdot 4 \Rightarrow a_{60} = 237$
Logo, no 60º minuto haverá 237 vírus.
Alternativa **c**.

35 Temos que o 1º cone está no quilômetro 0 (zero) e o 261º cone está no quilômetro 13. Como os cones estão igualmente espaçados, as distâncias entre cada cone e o início da serra formam uma PA de razão r, em que r é a distância, em quilômetro, entre dois cones consecutivos quaisquer. Sabendo que o termo geral da PA é $a_m = a_n + (m - n)r$, temos:
$a_{261} = a_1 + (261 - 1)r \Rightarrow 13 = 0 + 260r$
$\therefore r = 0{,}05$
Logo, a distância entre dois cones consecutivos é 0,05 km ou 50 m.

36 Como a diferença entre as frequências de duas emissoras consecutivas deve ser 0,2 MHz, temos que todas as frequências de uma determinada região formam uma PA de razão $r = 0{,}2$, com $a_1 = 87{,}9$ e $a_n = 107{,}9$.
Para saber o número máximo de emissoras, basta determinar o número de elementos dessa PA, ou seja, determinar n tal que $a_n = 107{,}9$.
A fórmula do termo geral é dada por
$a_n = a_1 + (n - 1)r$; assim:
$107{,}9 = 87{,}9 + (n - 1) \cdot 0{,}2 \Rightarrow n = 101$
Alternativa **c**.

37 a)


b)


38 A representação gráfica da PA está contida no gráfico de uma função afim $y = px + q$.
Como (1, 8) e (2, 13) são pontos dessa representação gráfica, temos:
$$\begin{cases} 8 = p + q \\ 13 = 2p + q \end{cases} \Rightarrow p = 5 \text{ e } q = 3$$
Logo, $y = 3 + 5x$.
Alternativa **a**.

39 A reta s é o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$.
Como os pontos $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ pertencem a s, temos:
$$\begin{cases} 4 = -\frac{a}{2} + b \\ 6 = \frac{a}{2} + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 5$$
Logo, $f(x) = 2x + 5$
Para $x = 40$, temos:
$f(40) = 2 \cdot 40 + 5 = 85$
Portanto: $a_{40} = 85$
Como $a_{40} = 85$, temos:
$a_{41} = f(41) = 2 \cdot 41 + 5 = 82 + 5 = 87$
$r = a_{41} - a_{40} = 87 - 85 = 2$
Portanto, $r = 2$.

40 Sabemos que a soma dos extremos de uma PA é igual à soma dos termos equidistantes dos extremos.
Logo, como a soma de dois termos equidistantes é $3a_1$, sendo a_1 o primeiro termo, temos:
$a_1 + a_n = 3a_1 \Rightarrow a_1 + 36 = 3a_1$
$\therefore\ a_1 = 18$
Logo, o primeiro termo dessa PA é 18.

41 O termo médio a_i é tal que:
$i = \dfrac{1 + 49}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$
Portanto, o termo médio é a_{25}.
Alternativa **c**.

42 Como os termos a_i e a_j são equidistantes dos extremos, o termo médio a_m da PA é a média aritmética de a_i e a_j, isto é:
$a_m = \dfrac{a_i + a_j}{2} = \dfrac{8 + 12}{2} = 10$

43 A sequência é PA se, e somente se:
$3x - 1 = \dfrac{(2x - 2) + (2x + 6)}{2} \Rightarrow x = 3$
Portanto, para que a sequência seja PA, devemos ter $x = 3$.

44 Sabendo que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ é a fórmula do termo geral da PA, temos:
$a_{51} = 2 + (51 - 1) \cdot 7 = 352$
Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 51$, temos:
$S_{51} = \dfrac{(2 + 352) \cdot 51}{2} = 9.027$

45 Sabendo que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos que o 30º termo a_{30} é:
$a_{30} = -15 + (30 - 1) \cdot 4 = 101$
Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 30$, temos:
$S_{30} = \dfrac{(-15 + 101) \cdot 30}{2} = 1.290$

46 Os múltiplos positivos de 9 menores que 100 formam uma PA de 1º termo 9 e razão $r = 9$.
Sabemos que essa PA tem 11 termos e é dada por: (9, 18, 27, ..., 90, 99)
Como $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA, concluímos:
$S_{11} = \dfrac{(9 + 99) \cdot 11}{2} = 594$
Portanto, a soma dos múltiplos positivos de 9 menores que 100 é 594.

47 Os múltiplos de 2 e 3 são, simultaneamente, todos os múltiplos de 6.
Esses múltiplos, compreendidos entre 100 e 700, formam uma PA cuja razão é 6, o 1º termo é $a_1 = 102$ e o último termo é $a_n = 696$.
Temos então a PA:
(102, 108, 114, ..., 696)
O número n de termos dessa PA pode ser calculado por:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow 696 = 102 + (n - 1) \cdot 6$
$\therefore\ n = 100$
Pela fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, com $n = 100$, concluímos:
$S_{100} = \dfrac{(102 + 696) \cdot 100}{2} = 39.900$

48 a) $\sum_{j=1}^{50} 2j = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + 2 \cdot 50 =$
$= 2 + 4 + 6 + ... + 100$
Essa soma é a soma dos 50 primeiros termos de uma PA tal que $a_1 = 2$, $a_{50} = 100$ e $r = 2$.
Usando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, obtemos:
$S_{50} = \dfrac{(2 + 100) \cdot 50}{2} = 2.550$

b) $\sum_{j=1}^{40} (3j - 1) = (3 \cdot 1 - 1) + (3 \cdot 2 - 1) +$
$+ (3 \cdot 3 - 1) + ... + (3 \cdot 40 - 1) = 2 + 5 + 8 +$
$+ ... + 119$
Essa soma é a soma dos 40 primeiros termos de uma PA em que $a_1 = 2$, $a_{40} = 119$ e $r = 3$.
Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, obtemos:
$S_{40} = \dfrac{(2 + 119) \cdot 40}{2} = 2.420$

49 a) Sendo $a_1 = 2$ e $a_2 = 7$, a razão r da PA é dada por:
$r = a_2 - a_1 = 7 - 2 = 5$
Logo, o n-ésimo termo é:
$a_n = 2 + (n - 1)5 \Rightarrow a_n = 5n - 3$

b) Sabemos que a soma dos n primeiros termos da PA é $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Logo:
$S_n = \dfrac{(2 + a_n)n}{2} = \dfrac{(2 + 5n - 3)n}{2} = \dfrac{5n^2 - n}{2}$

50 Os n primeiros números naturais ímpares formam a PA $(1, 3, 5, ..., 2n - 1)$.
Sabemos que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA, logo:
$S_n = \dfrac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \dfrac{2n^2}{2} = n^2$
Logo, a soma dos n primeiros números ímpares naturais é n^2.

51 Sabemos que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ é a soma dos termos da PA.
Do enunciado, temos $S_n = 33$, $a_1 = -7$ e $r = 2$.
Assim:
$a_n = a_1 + (n - 1)r = -7 + (n - 1)2 = 2n - 9$
Então:
$33 = \dfrac{(-7 + 2n - 9)n}{2} \Rightarrow 66 = -16n + 2n^2$
$\therefore n^2 - 8n - 33 = 0$
$\Delta = 64 + 132 = 196$
$\therefore n = \dfrac{8 \pm \sqrt{196}}{2} = \dfrac{8 \pm 14}{2} \Rightarrow$
$n = 11$ ou $n = -3$
Como n representa o número de termos da PA, temos $n = 11$.
Logo, essa PA tem 11 termos.

52 Os números de tijolos da fileira superior para a inferior formam uma PA tal que $a_1 = 1$ e $r = 1$. Logo:
$(1, 2, 3, ..., a_n)$
Temos:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 1 + (n - 1) \cdot 1 = r$
Pela fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$:
$820 = \frac{(1 + n)n}{2} \Rightarrow 1.640 = n + n^2$
$\therefore\ n^2 + n - 1.640 = 0$
$\Delta = 1 + 6.560 = 6.561$
$\therefore\ n = \frac{-1 \pm \sqrt{6.561}}{2} = \frac{-1 \pm 81}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 40$ ou $n = -41$
Temos $n = 40$, pois n representa a quantidade de tijolos.
Como $a_n = n$, a primeira fileira deverá ser composta de 40 tijolos.
Alternativa **c**.

53 As áreas desmatadas nos dias desse mês formam uma PA em que o primeiro termo é $a_1 = 50$ e a razão é $r = 4$.

a) Para $n = 20$, temos:
$a_{20} = 50 + (20 - 1)4 = 126$
Logo, no 20º dia do mês foram desmatadas 126 ha.

b) Sabendo que $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, temos:
$S_{20} = \frac{(50 + 126) \cdot 20}{2} = 1.760$
Logo, nos primeiros 20 dias desse mês foram desmatados 1.760 ha.

54 Os números de poltronas das fileiras formam uma PA tal que o termo inicial é $a_1 = 20$, a razão é $r = 2$ e o número de termos é $n = 16$.
Para calcular quantas poltronas teremos na última fileira, aplicamos a fórmula do termo geral:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{16} = 20 + (16 - 1)2$
$\therefore\ a_{16} = 50$
Como $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n termos da PA, temos:
$S_{16} = \frac{(20 + 50) \cdot 16}{2} = 560$
Então, esse cinema terá 560 poltronas.

55 **a)** A sequência é uma PG, pois a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, é constante, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 4$.

b) Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, não é constante, a sequência não é uma PG.

c) Essa sequência é uma PG, pois $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{3}$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 4$.

d) Temos do enunciado:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 2^{1-1} = 3$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \cdot 2^{2-1} = 6$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 2^{3-1} = 12$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 2^{4-1} = 24$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 48$
$n = 6 \Rightarrow a_6 = 3 \cdot 2^{6-1} = 96$
Então, a sequência é:
$(3, 6, 12, 24, 48, 96)$
Essa sequência é uma PG, pois $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 2$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 6$.

e) Do enunciado:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = (1 - 1)^2 = 0$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = (2 - 1)^2 = 1$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = (3 - 1)^2 = 4$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = (4 - 1)^2 = 9$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = (5 - 1)^2 = 16$
Logo, a sequência é:
$(0, 1, 4, 9, 16)$
Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, não é constante, a sequência não é uma PG.

f) Temos:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = 5^{2-1} = 5$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5^{2-2} = 1$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 5^{2-3} = \frac{1}{5}$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 5^{2-4} = \frac{1}{25}$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = 5^{2-5} = \frac{1}{125}$
$n = 6 \Rightarrow a_6 = 5^{2-6} = \frac{1}{625}$
Então, a sequência é dada por:
$\left(5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}\right)$
Assim:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{5}$
Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante, a sequência é uma PG.

g) Temos:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = (-1)^1 \cdot 2^{1-4} = -\frac{1}{8}$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = (-1)^2 \cdot 2^{2-4} = \frac{1}{4}$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = (-1)^3 \cdot 2^{3-4} = -\frac{1}{2}$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = (-1)^4 \cdot 2^{4-4} = 1$
Então, a sequência é:
$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1\right)$
Assim:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = -2$
Logo, essa sequência é uma PG, pois a razão entre dois termos consecutivos quaisquer é constante, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 4$.

56 **a)** Da sequência, temos: $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$
Como a razão da PG é dada por
$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, temos:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$

b) Da sequência, temos: $a_1 = -3$ e $a_2 = 9$. A razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; assim:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{-3} = -3$

c) Da sequência, temos: $a_1 = \frac{4}{3}$ e $a_2 = 2$
A razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; assim:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$

d) Da sequência, temos: $a_1 = \frac{5}{3\sqrt{2}}$ e $a_2 = \frac{5}{9}$
Como a razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, temos:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{3\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

e) Da sequência, temos:
$a_1 = \frac{3}{\sqrt{5} - 2}$ e $a_2 = \frac{6}{5 - 2\sqrt{5}}$
Sabendo que a razão da PG é dada por
$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, temos:
$q = \frac{\frac{6}{5 - 2\sqrt{5}}}{\frac{3}{\sqrt{5} - 2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

57 $q = \frac{a_{39}}{a_{38}} \Rightarrow q = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

58 $a_{11} = a_{10} \cdot q \Rightarrow a_{11} = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$
$\therefore a_{11} = 2$

59 $q = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$
Sendo $a_n = 1$, queremos achar a_{n-1}. Logo:
$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{1}{a_{n-1}}$
$\therefore a_{n-1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$
Portanto, o termo que precede imediatamente o 1 é $\sqrt{3} + 1$.
Alternativa **e**.

60 Temos: $a = \frac{b}{3}$ e $c = 3b$
Logo:
$b = ac \Rightarrow b = \frac{b}{3} \cdot 3b$
$\therefore b^2 - b = 0 \Rightarrow b(b - 1) = 0$
Então, $b = 0$ ou $b = 1$.
Como a, b e c são reais não nulos, obtemos:
$a = \frac{1}{3}$, $b = 1$ e $c = 3$
Portanto:
$a + b + c = \frac{1}{3} + 1 + 3 = \frac{13}{3}$

61 Temos que $a_n = 5 \cdot 2^n$ e $a_{n+1} = 5 \cdot 2^{n+1}$; logo:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{5 \cdot 2^n} = 2$
Como a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ entre dois termos consecutivos quaisquer é constante, a sequência é uma PG.

62 a) A razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, logo:
$q = \frac{6}{3} = 2$
Como $a_1 > 0$ e $q > 1$, a PG é crescente.
b) $q = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$
Como $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, a PG é crescente.
c) $q = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Como $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, a PG é decrescente.
d) $q = \frac{10}{-5} = -2$
Como $a_1 \neq 0$ e $q < 0$, a PG é oscilante.
e) Como todos os termos são nulos, a PG é constante com razão indeterminada.
f) Como todos os termos são iguais e não nulos, a PG é constante com $q = 1$.
g) Como o primeiro termo é não nulo e os demais são nulos, temos $q = 0$, então a PG é quase nula.
h) Temos $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; assim:
$q = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$
Como $a_1 > 0$ e $q > 1$, a PG é crescente.
i) $q = \frac{2 + \sqrt{3}}{\frac{1}{2 - \sqrt{3}}} = 1$
Como $q = 1$, a PG é crescente.

63 Sendo x o termo a_1 dessa progressão, temos:
$a_2 = x + 0{,}1x = 1{,}1x$
$a_3 = 1{,}1x + 0{,}1 \cdot 1{,}1x = 1{,}1x(1 + 0{,}1) = (1{,}1)^2x$
$a_4 = (1{,}1)^2x + 0{,}1 \cdot (1{,}1)^2x = (1{,}1)^2x \cdot (1 + 0{,}1) = (1{,}1)^3x$
⋮
Assim, temos que cada termo da sequência (a_n), a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por 1,1. Trata-se, portanto, de uma PG de razão 1,1 ou, ainda, $\frac{11}{10}$.
Alternativa **b**.

64 Sendo $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ a PG, temos:
$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 64 \\ \frac{x}{q} + x + xq = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 64 \\ \frac{x}{q} + x + xq = 14 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} x = 4 & \text{(I)} \\ \frac{x}{q} + x + xq = 14 & \text{(II)} \end{cases}$$
Substituindo (I) em (II), temos:
$\frac{4}{q} + 4 + 4q = 14 \Rightarrow 4q^2 - 10q + 4 = 0$
$\Delta = 100 - 64 = 36$
$\therefore q = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{8} = \frac{10 \pm 6}{8} \Rightarrow q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$
Como a PG deve ser crescente, deduzimos que $q = 2$. Logo, a PG é (2, 4, 8).

65 Sendo $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$ a PG, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q^3} \cdot \frac{x}{q} \cdot xq \cdot xq^3 = 81 \\ \frac{x}{q} + xq = \frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 81 \\ \frac{x}{q} + xq = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \pm 3 & \text{(I)} \\ \frac{x}{q} + xq = \frac{15}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

- Substituindo x por 3 em (II), temos:
  $\frac{3}{q} + 3q = \frac{15}{2} \Rightarrow 6q^2 - 15q + 6 = 0$
  $\Delta = 225 - 144 = 81$
  $\therefore q = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{12} = \frac{15 \pm 9}{12} \Rightarrow q = 2 \text{ ou } q = \frac{1}{2}$
  Como a PG deve ser crescente, deduzimos que $q = 2$.
  Portanto, nesse caso, a PG é $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$.
- Substituindo x por -3 em (II), temos:
  $\frac{-3}{q} - 3q = \frac{15}{2} \Rightarrow 6q^2 + 15q + 6 = 0$
  $\Delta = 225 - 144 = 81$
  $\therefore q = \frac{-15 \pm 9}{12} \Rightarrow q = -\frac{1}{2} \text{ ou } q = -2$
  Para $q = -\frac{1}{2}$, temos a PG $\left(24, 6, \frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$, que não convém, pois é decrescente.
  Para $q = -2$, temos a PG $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$.
  Logo, a única PG que satisfaz as condições enunciadas é $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$.

66 Sendo x, xq, xq^2 as medidas do cateto menor, do cateto maior e da hipotenusa, respectivamente, temos, pelo teorema de Pitágoras:
$(xq^2)^2 = x^2 + (xq)^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$
Resolvendo essa equação para $q > 0$, obtemos:
$q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}2$
$\therefore 1 < q < 2$
Alternativa **c**.

67 Sendo q a razão da PG, temos:
$q = \frac{768}{1.536} = \frac{1}{2}$
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para $n = 14$, temos:
$a_{14} = 1.536 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1.536}{8.192} = \frac{3}{16}$
Portanto, o 14º termo da sequência é $\frac{3}{16}$.

68 Sendo q a razão da PG, temos:
$q = \frac{k-1}{\frac{k-1}{k+1}} = k + 1$
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para $n = 30$, temos:
$a_{30} = \left(\frac{k-1}{k+1}\right) \cdot (k+1)^{29} = (k-1)(k+1)^{28}$
Alternativa **c**.

69 Temos que a razão da PG é $q = 2$.
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obtemos:
$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

70 $a_{15} = a_1 \cdot q^{14} \Rightarrow 5 = a_1 \cdot (\sqrt[7]{3})^{14}$
$\therefore a_1 = \frac{5}{9}$

71 Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:
$a_6 = a_1 \cdot q^5$ e $a_4 = a_1 \cdot q^3$
Assim:
$a_6 = a_1 \cdot a_4 \Rightarrow a_1 \cdot q^5 = a_1 \cdot a_1 \cdot q^3$
$\therefore a_1 = q^2$
Como $q = \frac{2}{3}$, obtemos:
$a_1 = \frac{4}{9}$
Portanto, a PG é:
$\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \ldots\right)$

72 A razão q da PG é dada por:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{81}{243} = \frac{1}{3}$
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obtemos:
$\frac{1}{3^{10}} = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3^{10}} = \frac{3^5}{3^{n-1}}$
$\therefore 3^{n-1} = 3^{15} \Rightarrow n - 1 = 15$
$\therefore n = 16$
Logo, essa PG tem 16 termos.

73 Temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é fórmula do termo geral da PG. Então:
$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$
$\therefore 81 = \frac{1}{243} \cdot q^9 \Rightarrow 3^4 \cdot 3^5 = q^9$
$\therefore q^9 = 3^9 \Rightarrow q = 3$
Logo, a razão da PG é 3.

74 Queremos interpolar 4 meios geométricos entre 1 e 7, nessa ordem. Teremos, assim, uma PG com 6 termos, sendo $a_1 = 1$ e $a_6 = 7$.
Usando a fórmula do termo geral da PG, temos:
$a_6 = a_1 \cdot q^5$
$7 = 1 \cdot q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{7}$
Assim, interpolando 4 meios geométricos entre 1 e 7, obtemos a sequência:
$(1, \sqrt[5]{7}, \sqrt[5]{7^2}, \sqrt[5]{7^3}, \sqrt[5]{7^4}, 7)$

75 Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$\begin{cases} a_5 + a_8 = 9 \\ a_7 + a_{10} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^7 = 9 \\ a_1 \cdot q^6 + a_1 \cdot q^9 = 1 \end{cases}$$

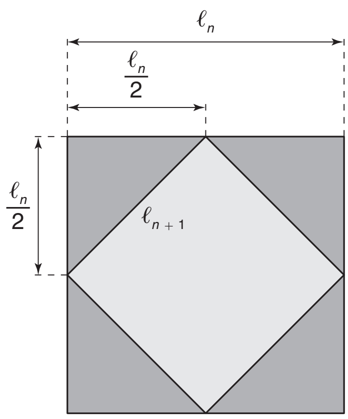
$$\therefore \begin{cases} a_1 \cdot q^4(1 + q^3) = 9 & \text{(I)} \\ a_1 \cdot q^6(1 + q^3) = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo membro a membro (II) por (I), obtemos:
$q^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{3}$
Como a PG é oscilante, concluímos que $q = -\frac{1}{3}$.

76 Sabemos que $a_m = a_n \cdot q^{m-n}$; logo:
$a_{19} = a_7 \cdot q^{12} \Rightarrow a_{19} = 10 \cdot (\sqrt[6]{2})^{12} = 10 \cdot 4 = 40$

77 Sabendo que $a_m = a_n \cdot q^{m-n}$, temos:
$a_{22} = a_{16} \cdot q^{22-16} \Rightarrow 4 = q^6$
$\therefore\ q = \pm\sqrt[3]{2}$
Logo, a razão dessa PG é $\sqrt[3]{2}$ ou $-\sqrt[3]{2}$.

78 Sendo ℓ_n a medida do lado do quadrado n, a medida ℓ_{n+1} do lado do quadrado $(n+1)$, imediatamente interior, é dada por:
$$\left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 = (\ell_{n+1})^2 \Rightarrow \ell_{n+1} = \frac{\ell_n\sqrt{2}}{2}$$

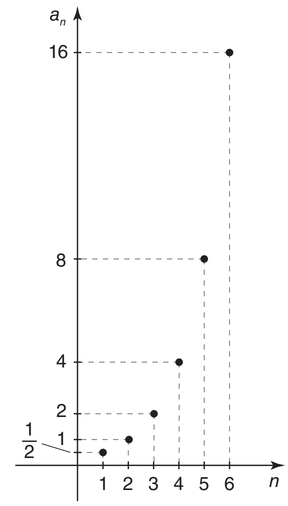


O 1º quadrado tem 24 cm de perímetro e, portanto, 6 cm de lado.
As medidas dos lados dos quadrados formam uma PG em que o 1º termo é $\ell_1 = 6$ e a razão é $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Assim, a medida do lado do décimo quadrado é:
$$\ell_{10} = \ell_1 \cdot q^9 \Rightarrow \ell_{10} = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = 3 \cdot \frac{\sqrt{2^9}}{2^8}$$
Portanto, a área A desse quadrado, em centímetro quadrado, é:
$$A = \left(3 \cdot \frac{\sqrt{2^9}}{2^8}\right)^2 = \frac{9 \cdot 2^9}{2^{16}} = \frac{9}{2^7} = \frac{9}{128}$$
Alternativa **e**.

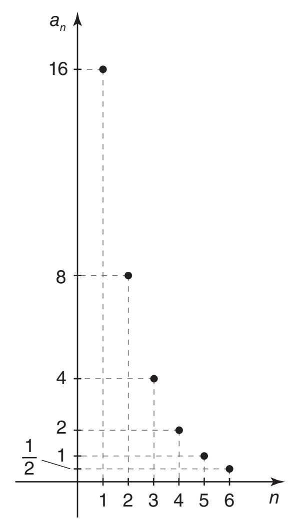
79 Os números da 2ª coluna da tabela formam a PG com $a_1 = 100$ e $q = 2$.
Como 4 h = 240 min e equivalem a 12 períodos de 20 min, temos que o número n de bactérias após 4 horas do início do experimento é dado por:
$n = 100 \cdot 2^{12} = 409.600$
Alternativa **c**.

80 Os números de pessoas que receberam os e-mails a cada geração formam uma PG de razão $q = 10$.
Considerando a 1ª geração de destinatários como termo inicial, temos $a_1 = 50$.
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, obtemos:
$a_6 = 50 \cdot 10^{6-1} = 50 \cdot 10^5 = 5.000.000$
Logo, na 6ª geração serão 5 milhões de destinatários.

81 **a)** Sendo (n, a_n) as coordenadas no plano cartesiano, temos:



b) Sendo (n, a_n) as coordenadas no plano cartesiano, temos:



82 Pela fórmula do termo geral da PG, temos:
$a_n = 7 \cdot 3^{n-1} = 7 \cdot \frac{3^n}{3}$
Logo, os pontos (n, a_n) pertencem ao gráfico da função $y = 7 \cdot \frac{3^x}{3}$.
Alternativa **e**.

83 O ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ pertence ao gráfico de f; logo:
$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = K^{\frac{1}{2}}$$
Elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos:
$K = \frac{4}{3}$
Assim: $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$
Para $x = 30$, temos:
$f(30) = \left(\frac{4}{3}\right)^{30}$
Concluímos, então, que $a_{30} = \left(\frac{4}{3}\right)^{30}$

Para x = 31, temos:

$f(31) = \left(\frac{4}{3}\right)^{31}$

Logo:

$\frac{f(31)}{f(30)} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{31}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{30}} = \frac{4}{3}$

$\therefore\ q = \frac{4}{3}$

84 Sabemos que o produto dos extremos a_1 e a_{10} da PG é igual ao produto de dois termos equidistantes dos extremos.
Logo:
$3 \cdot a_{10} = 4 \cdot 3 \Rightarrow a_{10} = 4$
Como $a_{10} = a_1 q^9$, concluímos:

$3q^9 = 4 \Rightarrow q = \sqrt[9]{\frac{4}{3}}$

Portanto, a razão da PG é $q = \sqrt[9]{\frac{4}{3}}$.

85 Em uma PG de número ímpar de termos, temos que o produto dos extremos e dos termos equidistantes dos extremos é igual ao quadrado do termo médio.
Sendo a_k o termo médio, temos:
$a_i \cdot a_j = (a_k)^2 \Rightarrow 2 \cdot 72 = (a_k)^2$
$\therefore\ a_k = \pm 12$
Logo, o termo médio dessa PG é 12 ou −12.

86 Uma sequência de três termos consecutivos com o primeiro não nulo será PG se o quadrado do termo médio for igual ao produto dos outros dois. Então:
$(x - 1)^2 = (-1) \cdot (4x - 1) \Rightarrow x^2 + 2x = 0$
Assim, para que a sequência seja uma PG, devemos ter: x = 0 ou x = −2.

87 Devemos ter:
$(3x - 2)^2 = 5x(x + 1)$
$\therefore\ 9x^2 - 12x + 4 = 5x^2 + 5x \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0$
$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 225$

$\therefore\ x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm 15}{8} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = \frac{1}{4}$

- Para x = 4, temos a PG (5, 10, 20), que é uma PG crescente.
- Para $x = \frac{1}{4}$, temos a PG $\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$, que é uma PG oscilante da razão −1.

Logo, para a sequência apresentada ser uma PG crescente devemos ter x = 4.

88 Para que uma sequência de três números seja PA, o termo médio deve ser a média aritmética dos outros dois; para ser PG, o termo médio ao quadrado deve ser igual ao produto dos outros dois. Então:

$\begin{cases} \frac{a + c}{2} = 4 \\ (c + 2)a = 4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ ac + 2a = 16 \end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases} c = 8 - a & \text{(I)} \\ ac + 2a = 16 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), temos:
$a(8 - a) + 2a = 16$
$\therefore\ 8a - a^2 + 2a = 16$
$\therefore\ a^2 - 10a + 16 = 0$
$\Delta = 100 - 64 = 36$

$\therefore\ a = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$

Logo, $a = 8$ ou $a = 2$.
Substituindo a em (I), temos:
$c = 0$ ou $c = 6$
Como, por hipótese, c é positivo, temos $c = 6$. Substituindo c por 6 em (I), concluímos que $a = 2$.
Portanto, $a = 2$ e $c = 6$.

89 Sabendo que o primeiro termo é a_1, o termo médio é $a_n = \sqrt{a_1}$ e o último termo é x, temos:
$(a_n)^2 = a_1 \cdot x \Rightarrow (\sqrt{a_1})^2 = a_1 \cdot x$
$\therefore\ x = 1$
Logo, o último termo dessa PG é 1.

90 A sequência de valores do imóvel forma a PG:
$(100, x + 30, 2x - 39)$
Então:
$(x + 30)^2 = 100(2x - 39) \Rightarrow x^2 + 60x + 900 =$
$= 200x - 3.900$
$\therefore\ x^2 - 140x + 4.800 = 0$
$\Delta = (140)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4.800 = 400$

$\therefore\ x = \frac{140 \pm \sqrt{400}}{2} \Rightarrow x = 80 \text{ ou } x = 60$

Para essa PG ser crescente, pois o imóvel se valorizou, devemos ter: x = 80
Logo, ao final desse período o apartamento valia R$ 121.000,00.

91 Sejam os números em PA:
$(x - r, x, x + r)$
Como a soma é 30, temos:
$x - r + x + x + r = 30 \Rightarrow x = 10$
Os números em PG são:
$(10 - r + 4, 10 - 4, 10 + r - 9) = (14 - r, 6, 1 + r)$
Sabemos que numa PG de três termos, o produto dos extremos é igual ao quadrado do termo médio. Logo:
$(14 - r)(1 + r) = 36$
$\therefore\ r^2 - 13r + 22 = 0$
$\Delta = 169 - 88 = 81$

$\therefore\ r = \frac{13 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{13 \pm 9}{2} \Rightarrow r = 2 \text{ ou } r = 11$

Como os números que formam a PA são positivos, $r = 2$. Logo, a PA é:
$(10 - 2, 10, 10 + 2) = (8, 10, 12)$
Alternativa **c**.

92 Temos que a razão da PG é:

$q = \frac{2}{1} = 2$

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, da soma dos n primeiros termos da PG temos, para $n = 10$:

$S_{10} = \frac{1(1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{-1.023}{-1} = 1.023$

93 Temos que é a razão da PG é:

$q = \frac{1}{2}$.

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, temos, para $n = 11$:

$$S_{11} = \frac{2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{2.047}{2.048}}{\frac{1}{2}} = \frac{2.047}{1.024} \cdot 2 =$$
$$= \frac{2.047}{512}$$

94 a) Temos $q = -1$ e $a_1 = 1$.
Como a soma dos n primeiros termos da PG é dada por $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)}$, temos, para $n = 50$:

$$S_{50} = \frac{1[1 - (-1)^{50}]}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

b) Baseado no item **a**, para $n = 51$, temos:

$$S_{51} = \frac{1[1 - (-1)^{51}]}{1 - (-1)} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

95 Pela fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, temos:

$$765 = \frac{a_1(1 - 2^8)}{1 - 2} \Rightarrow -765 = a_1(-255)$$

$\therefore a_1 = 3$
Logo, o primeiro termo dessa PG é 3.

96 Nessa PG, a razão é $q = k$ e o primeiro termo é $a_1 = 1$.
Como $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ é a soma dos n primeiros termos da PG, temos:

$$S_{30} = \frac{1(1 - k^{30})}{1 - k} = \frac{1 - k^{30}}{1 - k}$$

97 Temos $a_1 = 5$ e $q = 2$.
Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, temos:

$$S_n = \frac{5(1 - 2^n)}{1 - 2} = -5(1 - 2^n) = 5(2^n - 1)$$

Alternativa **c**.

98 Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, temos:

$$12.285 = \frac{3(1 - 2^n)}{1 - 2} \Rightarrow -4.095 = 1 - 2^n$$

$\therefore 2^n = 4.096 \Rightarrow 2^n = 2^{12}$
$\therefore n = 12$

99 Os números de pessoas das gerações anteriores à minha formam uma PG em que a 1ª geração é o primeiro termo, ou seja, $a_1 = 2$, e a razão é $q = 2$.
Assim:

$$S_{20} = \frac{2(1 - 2^{20})}{1 - 2} = -2(1 - 2^{20}) =$$
$$= -2(1 - 1.048.576) = 2.097.150$$

Portanto, o número de meus antepassados até a 20ª geração anterior à minha é maior que 2.000.000.
Alternativa **a**.

100 a) Como a cada semana as vendas devem dobrar, temos que os números de cópias vendidas formam uma PG com $q = 2$ e $a_1 = 20$.
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para $a_n = 10.240$, temos:
$10.240 = 20 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 512 = 2^{n-1}$
$\therefore 2^9 = 2^{n-1} \Rightarrow 9 = n - 1$
$\therefore n = 10$
Logo, na 10ª semana o CD venderá 10.240 cópias.

b) Aplicando a fórmula $S_n = \frac{a^1(1 - q^n)}{1 - q}$, da soma dos n primeiros termos da PG, temos, para $n = 10$:

$$S_{10} = \frac{20 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = -20 \cdot (1 - 1.024) =$$
$$= 20.460$$

Logo, até a 10ª semana terão sido vendidas 20.460 cópias.

101 Da PG, temos $q = 2$ e $a_1 = \frac{1}{256}$. Aplicando $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, temos, para $n = 18$:

$$P_{18} = \left(\frac{1}{256}\right)^{18} \cdot 2^{\frac{17 \cdot 18}{2}} = \frac{1}{(2^8)^{18}} \cdot 2^{153} = \frac{2^{153}}{2^{144}} =$$
$$= 2^9 = 512$$

Portanto, o produto dos 18 primeiros termos da PG é 512.

102 Da PG, temos $q = 7^2$ e $a_1 = \frac{1}{7^{12}}$. Aplicando $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, temos, para $n = 14$:

$$P_{14} = \left(\frac{1}{7^{12}}\right)^{14} \cdot (7^2)^{\frac{13 \cdot 14}{2}} = \frac{(7^2)^{91}}{(7^{12})^{14}} = \frac{7^{182}}{7^{168}} =$$
$$= 7^{182 - 168} = 7^{14}$$

Portanto, o produto dos 14 primeiros termos da PG é 7^{14}.

103 Aplicando a fórmula $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, para $a_1 = 1$ e $P_8 = 81$, temos:

$$81 = 1^8 \cdot q^{\frac{7 \cdot 8}{2}} \Rightarrow 81 = q^{28}$$

$\therefore q = \pm\sqrt[28]{3^4} = \pm\sqrt[7]{3}$
Como a PG é crescente, deduzimos que $q = \sqrt[7]{3}$; logo, a PG é $(1, \sqrt[7]{3}, \sqrt[7]{3^2}, \sqrt[7]{3^3}, \sqrt[7]{3^4}, \sqrt[7]{3^5}, \sqrt[7]{3^6}, 3)$.

104 a) Temos $a_1 = 63$ e $q = \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$.
Aplicando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{63}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow S_\infty = \frac{189}{2}$$

Portanto, a soma dos infinitos termos da PG é $\frac{189}{2}$.

b) Temos $a_1 = 40$ e $q = \frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$.
Aplicando $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{40}{1 + \frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = \frac{80}{3}$$

Assim, a soma dos infinitos termos da PG é $\frac{80}{3}$.

c) Temos $a_1 = 0{,}4$ e $q = \dfrac{0{,}04}{0{,}4} = 0{,}1$.

Aplicando $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}1} \Rightarrow S_\infty = \frac{4}{9}$$

Logo, nessa PG, a soma dos infinitos termos é $\dfrac{4}{9}$.

105 $a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow \dfrac{16}{27} = 3 \cdot q^4$

$\therefore\ q = \pm\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \pm\dfrac{2}{3}$

Como a PG é oscilante, deduzimos que $q = -\dfrac{2}{3}$.

Aplicando a fórmula $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$, concluímos:

$$S_\infty = \frac{3}{1 + \frac{2}{3}} \Rightarrow S_\infty = \frac{9}{5}$$

106 a) Temos:

$$5{,}222... = 5 + \underbrace{0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + ...}_{\text{PG de razão } q\,=\,0{,}1}$$

Aplicando a fórmula $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{0{,}2}{1 - 0{,}1} = \frac{2}{9}$$

Logo:

$$5{,}222... = 5 + \frac{2}{9} = \frac{47}{9}$$

b) Temos:

$$4{,}5333... = 4{,}5 + \underbrace{0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + ...}_{\text{PG de razão } 0{,}1}$$

Aplicando a fórmula $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{0{,}03}{1 - 0{,}1} = \frac{1}{30}$$

Logo:

$$4{,}5333... = 4{,}5 + \frac{1}{30} = \frac{45}{10} + \frac{1}{30} = \frac{68}{15}$$

107 Da PG, temos $q = \dfrac{2}{5}$.

Sabendo que $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$ é a soma dos infinitos termos da PG, temos:

$$\frac{25}{3} = \frac{a_1}{1 - \frac{2}{5}} \Rightarrow a_1 = 5$$

Como $a_1 = x$, temos que $x = 5$.

108 As distâncias, em metro, percorridas em alguns segundos após a freada são os primeiros termos da PG $\left(20, 5, \dfrac{5}{4}, ...\right)$. Como a soma dos infinitos termos dessa PG é $\dfrac{80}{3} \approx 26{,}66$, que é menor que 100, concluímos que não haverá o choque do caminhão com a pedra.

109 Nessa sequência, cada lado de um triângulo qualquer, a partir do segundo, é base média do triângulo precedente e, portanto, o perímetro de cada triângulo, a partir do segundo, é metade do perímetro do triângulo precedente. Assim, os perímetros, em centímetro, formam a PG infinita, com $a_1 = 20$ e $q = \dfrac{1}{2}$:

$$\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, ...\right)$$

A soma dos infinitos termos dessa PG é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S_\infty = \frac{20}{1 - \frac{1}{2}} = 40$$

Logo, a soma dos perímetros dos infinitos triângulos é 40 cm.

110 a) Indicando por ℓ o comprimento do lado do quadrado $ABCD$, temos que a cada divisão do quadrado o comprimento dos lados dos novos quadrados é metade do quadrado anterior.

Logo, temos que a soma das áreas das infinitas figuras é:

$$3\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{\ell}{8}\right)^2 + ... = 3\underbrace{\left(\frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{16} + \frac{\ell^2}{64} + ...\right)}_{\text{Soma de PG de razão } \frac{1}{4}}$$

Aplicando $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{\frac{\ell^2}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\ell^2}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\ell^2}{3}$$

Assim, a soma S_A das áreas das infinitas figuras é dada por:

$$S_A = 3 \cdot \frac{\ell^2}{3} = \ell^2$$

Como a área do quadrado $ABCD$ é ℓ^2, demonstramos a proposição.

b) De modo análogo, temos que a soma dos perímetros das infinitas figuras é dada por:

$$8 \cdot \frac{\ell}{2} + 8 \cdot \frac{\ell}{4} + 8 \cdot \frac{\ell}{8} + ... = 8\underbrace{\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4} + \frac{\ell}{8} + ...\right)}_{\text{PG}}$$

Aplicando $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$ na PG, em que $q = \dfrac{1}{2}$ e $a_1 = \dfrac{\ell}{2}$, temos:

$$S_\infty = \frac{\frac{\ell}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \ell$$

Assim, a soma S_p dos perímetros das infinitas figuras é dada por:

$$S_p = 8 \cdot \ell$$

Como o perímetro do quadrado $ABCD$ é 4ℓ, demonstramos a proposição.

111 **1º modo**

Sabemos que o barco dos contrabandistas está a 10 km do barco dos policiais.

Como os policiais desenvolvem o dobro da velocidade dos contrabandistas, eles percorrem o dobro da distância percorrida pelos contrabandistas em um intervalo de tempo.

Então, quando os contrabandistas percorrerem 10 km, os policiais percorrerão o dobro, ou seja, 20 km, alcançando assim o barco dos contrabandistas.

Portanto, o barco da polícia deverá percorrer 20 km para alcançar os contrabandistas.

2º modo

Quando o barco da polícia percorrer a distância inicial $d_1 = 10$ km, o barco dos criminosos terá percorrido 5 km; assim, a distância entre os barcos será $d_2 = 5$ km. Quando o barco da polícia percorrer mais a distância $d_2 = 5$ km, o barco dos criminosos terá percorrido mais 2,5 km; assim, a distância entre os barcos será $d_3 = 2{,}5$ km. Quando o barco da polícia percorrer mais a distância $d_3 = 2{,}5$ km, o barco dos criminosos terá percorrido mais 1,25 km; assim, a distância entre os barcos será $d_4 = 1{,}25$ km. E assim, sucessivamente, temos a PG (10; 5; 2,5; 1,25; ...) formada pelas distâncias $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$, em que $a_1 = 10$ e $q = 0{,}5$.

Aplicando a fórmula $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{10}{1 - 0{,}5} = 20.$$

Concluímos, então, que o barco da polícia percorrerá 20 km até alcançar o barco dos criminosos.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 Se o número 2 estiver no visor, teremos:

$$2 \xrightarrow{T} \frac{1}{2} \xrightarrow{V} 1 \xrightarrow{T} 1 \xrightarrow{V} 2 \xrightarrow{T} \frac{1}{2} \xrightarrow{V} 1 \xrightarrow{T} 1$$

Ou seja, a cada 4 digitações, T, V, T e V, o número 2 volta ao visor.

Dividindo as 1.999 digitações por 4, temos:

$1.999 = 4 \cdot 499 + 3$

Assim, depois de 1.996 digitações aparecerá o número 2 no visor e ainda teremos de digitar 3 teclas:

$$2 \xrightarrow{T} \frac{1}{2} \xrightarrow{V} 1 \xrightarrow{T} 1.$$

Logo, após 1.999 digitações, aparecerá o número 1 no visor.

Alternativa **b**.

2 Indicando por A a área da figura 1, temos a seguinte sequência de áreas:

$$\left\{A, \frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}, \ldots, \frac{A}{n}, \ldots\right\}$$

Logo, a área da figura 100 é:

$$\frac{A}{100} = \frac{20^2}{100} = 4$$

Alternativa **c**.

3 Temos:

$a_1 = 1$

$a_2 = f(1) = 1 + 1 = 2$	$a_7 = f(1) = 2$	etc.
$a_3 = f(2) = 2 + 1 = 3$	$a_8 = f(2) = 3$	
$a_4 = f(3) = 3 + 1 = 4$	$a_9 = f(3) = 4$	
$a_5 = f(4) = 4 + 1 = 5$	$a_{10} = f(4) = 5$	
$a_6 = f(5) = \frac{5}{5} = 1$	$a_{11} = f(5) = 1$	

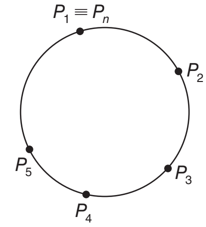
Observamos que a sequência (a_n) é formada apenas pelos números 1, 2, 3, 4 e 5 repetidos seguidamente nessa ordem. Assim, dividindo 123 por 5, temos:

$123 = 24 \cdot 5 + 3$

Portanto:

$a_{123} = a_3 = 3$

4



Para P_n, a circunferência é dividida em $(n - 1)$ arcos.

a) Para $\alpha = 30°$, temos $\dfrac{360°}{30°} = 12$ arcos.

Logo, $n = 13$.

b) $n - 1 = \dfrac{360°}{\alpha} \Rightarrow n = \dfrac{360° + \alpha}{\alpha}$

5 Pelo enunciado:

$a_1 = 7$
$a_2 = (4 + 9) + 1 = 14$
$a_3 = (1 + 9 + 6) + 1 = 17$
$a_4 = (2 + 8 + 9) + 1 = 20$
$a_5 = (4 + 0 + 0) + 1 = 5$
$a_6 = (2 + 5) + 1 = 8$
$a_7 = (6 + 4) + 1 = 11$
$a_8 = (1 + 2 + 1) + 1 = 5$
$a_9 = (2 + 5) + 1 = 8$
$\vdots$

Assim, temos a seguinte sequência:
(7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, ...)

A partir do 5º termo, temos uma repetição de 3 em três.

Observamos que, para $n \geq 6$, com n divisível por 3, temos $a_n = 8$.

Então:

$a_6 = a_9 = a_{12} = a_{15} = \ldots = a_{1.998} = a_{2.001} = 8$

Logo, o 2.002º termo $a_{2.002}$ é 11.

6 Temos que, para uma sequência de n termos, a_i e a_j são equidistantes dos extremos se:

$i = 1 + m$ e $j = n - m$ para qualquer número natural m, com $m \leq n$.

Logo:

$i + j = (1 + m) + (n - m) \Rightarrow i + j = 1 + n$

Alternativa **a**.

7 Como a_k e a_{k+7} são equidistantes dos extremos de uma sequência de 20 termos, temos pela questão 6:

$k + k + 7 = 1 + 20 \Rightarrow k = 7$

8 Sabemos que a razão r de uma PA é a diferença entre um termo e seu precedente. Logo:

a) $r = a_{10} - a_9 = 15 - 6 = 9$

b) $r = b_{k+1} - b_k = 5 - 8 = -3$

c) $r = c_2 - c_1 = \dfrac{2k^2}{k^2 - 1} - \dfrac{k}{k - 1} =$

$$= \frac{2k^2 - k(k + 1)}{k^2 - 1} = \frac{2k^2 - k^2 - k}{k^2 - 1} =$$

$$= \frac{k^2 - k}{k^2 - 1} = \frac{k \cdot (k - 1)}{(k + 1)(k - 1)} = \frac{k}{k + 1}$$

9 $a_9 = a_8 + r \Rightarrow a_8 = a_9 - r$

$$\therefore a_8 = 5\sqrt{3} - 1 - \frac{5}{2 - \sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3} - 22}{2 - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{-11(-\sqrt{3} + 2)}{2 - \sqrt{3}}$$

$\therefore a_8 = -11$

10 Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, temos:
$a_{n+1} - a_n = (n + 1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = 2n + 1$
Como essa diferença não é constante, concluímos que a sequência não é PA.

11 Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, temos:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+7}{3} - \frac{2n+7}{3} = \frac{2}{3}$$
Como essa diferença é constante, concluímos que a sequência é PA.

12 a) Sendo $r = a_{n+1} - a_n$ a razão da PA, temos:
$r = 2 - (1 - k^2) = 1 + k^2$
Como $1 + k^2 > 0$, temos que a razão é positiva e, portanto, a PA é crescente.
b) Sendo r a razão da PA, temos:
$$r = \frac{h^2 - 1}{h - 1} - (h + 1) = \frac{(h^2 - 1) - (h^2 - 1)}{h - 1} = 0$$
Logo, a PA é constante.
c) Sendo r a razão da PA, temos:
$r = 5 - (5 + a^2) = -a^2$
Como a razão é negativa, a PA é decrescente.

13 Sendo a PA $(x - r, x, x + r)$, temos:
$$\begin{cases} (x - r) + (x + r) = 10 \\ x \cdot (x + r) = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x^2 + xr = -40 \end{cases}$$
Substituindo x por 5 na segunda equação:
$25 + 5r = -40 \Rightarrow r = -13$
Portanto, temos a PA:
$(5 - (-13), 5, 5 - 13) = (18, 5, -8)$

14 Representando a PA por $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$, temos:
$$\begin{cases} x - 3r + x + 3r = 10 \\ (x - 3r)(x - r) = -3 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 & \text{(I)} \\ x^2 - 4rx + 3r^2 = -3 & \text{(II)} \end{cases}$$
Substituindo (I) em (II), obtemos:
$5^2 - 4r \cdot 5 + 3r^2 = -3 \Rightarrow 3r^2 - 20r + 28 = 0$
$\therefore r = 2$ ou $r = \frac{14}{3}$
Assim:
- para $x = 5$ e $r = 2$, temos a PA $(-1, 3, 7, 11)$;
- para $x = 5$ e $r = \frac{14}{3}$, temos a PA:
$\left(-9, \frac{1}{3}, \frac{29}{3}, 19\right)$

15 Sabemos que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.
Da PA dada, temos $r = \frac{1}{4}$ e $a_1 = \frac{3}{2}$; então:
$$a_n = \frac{3}{2} + (n - 1)\frac{1}{4} = \frac{6 + n - 1}{4} = \frac{n + 5}{4}$$
Alternativa **b**.

16 Observamos que $f(n + 1) = f(n) + \frac{2}{5}$; e concluímos que a sequência $(f(1), f(2), f(3), ...)$ é uma PA de razão $\frac{2}{5}$.
Como $f(1) = 5$, temos:
$\left(5, \frac{27}{5}, \frac{29}{5}, ...\right)$
Logo:
$f(101) = a_{101} = a_1 + 100r \Rightarrow a_{101} = 5 + \frac{200}{5} =$
$= \frac{225}{5} = 45$
Alternativa **a**.

17 Temos que $r = 3$, $a_1 = -10$ e $a_n = 47$.
Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, concluímos:
$47 = -10 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow 3n = 60$
$\therefore n = 20$
Logo, a PA tem 20 termos.

18 Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$$\frac{164}{3} = 2 + (n - 1) \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow 164 = 6 + 2n - 2$$
$\therefore n = 80$
Logo, a PA tem 80 termos.

19 Os números n, com $3 \leq n < 1.000$, que resultam da soma de três números inteiros consecutivos são:
$a_1 = 0 + 1 + 2 = 3$
$a_2 = 1 + 2 + 3 = 6$
$a_3 = 2 + 3 + 4 = 9$
$\vdots$
$a_n = 332 + 333 + 334 = 999$
Logo, esses números formam uma PA de razão 3.
Sendo $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$999 = 3 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow 3n = 999$
$\therefore n = 333$
Alternativa **a**.

20 Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$8 = 5 + (20 - 1) \cdot r \Rightarrow r = \frac{3}{19}$
Logo, a razão da PA é $\frac{3}{19}$.

21 Ao inserir 5 meios aritméticos, formamos uma PA de 7 termos, com $a_1 = 1$ e $a_7 = 20$.
Logo
$20 = 1 + 6 \cdot r \Rightarrow r = \frac{19}{6}$
Então, a PA é $\left(1, \frac{25}{6}, \frac{44}{6}, \frac{63}{6}, \frac{82}{6}, \frac{101}{6}, 20\right)$.

22 Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$$\begin{cases} a_5 + a_7 = -20 \\ a_3 - a_6 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4r + a_1 + 6r = -20 \\ a_1 + 2r - a_1 - 5r = 12 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} 2a_1 + 10r = -20 & \text{(I)} \\ -3r = 12 & \text{(II)} \end{cases}$$
De (II): $r = -4$.
Substituindo r por -4 em (I), temos:
$2a_1 - 40 = -20 \Rightarrow a_1 = 10$
Logo, o primeiro termo é 10.

23 $$\begin{cases} a_{10} = -51 \\ a_{18} = -91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 9r = -51 & \text{(I)} \\ a_1 + 17r = -91 & \text{(II)} \end{cases}$$
Subtraindo membro a membro (I) e (II), temos:
$8r = -40 \Rightarrow r = -5$
Substituindo r por -5 em (I), concluímos:
$a_1 + 9 \cdot (-5) = -51 \Rightarrow a_1 = -6$
Logo, o primeiro termo é -6.

24 Sabemos que $a_m = a_k + (m - k) \cdot r$; então:
$a_{18} = a_7 + (18 - 7) \cdot r \Rightarrow k - 1 = 2k - 6 + 11 \cdot r$
$\therefore r = \frac{5 - k}{11}$

25 Pela fórmula do term geral da PA, temos $a_k = 37 + (k - 1) \cdot 2$, em que k é um número natural não nulo. Para que a_k seja um múltiplo de k, deve existir um número natural n tal que $a_k = nk$, ou seja:
$37 + (k - 1) \cdot 2 = nk \Rightarrow 35 + 2k = nk$
$\therefore n = \frac{35}{k} + 2$

O maior número natural k tal que n também seja natural é 35.
Assim, concluímos que o maior valor possível de a_k é:
$a_{35} = 37 + 34 \cdot 2 \Rightarrow a_{35} = 105$

26 Sabemos que, se n é ímpar, o índice k do termo médio a_k é a média aritmética de 1 e n, isto é:
$$k = \frac{n + 1}{2}$$
Alternativa **a**.

27 Sabemos que o termo médio a_k é a média aritmética entre o primeiro termo a_1 e o último, a_n. Então:
$$a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow 4a_1 = \frac{a_1 + 42}{2}$$
$\therefore\ a_1 = 6$

28 Sabemos que em três termos consecutivos de uma PA o termo médio é a média aritmética dos outros dois. Logo:
$$x^2 - 4 = \frac{(x - 1) + (3x - 1)}{2} \Rightarrow 2x^2 - 8 = 4x - 2$$
$\therefore\ 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$
- Para $x = -1$, temos:
  $(-2, -3, -4)$
- Para $x = 3$, temos:
  $(2, 5, 8)$

Como a PA deve ser crescente, concluímos que $x = 3$.

29 Para ser PA, o termo médio é média aritmética dos outros dois. Então:
$$3x - 1 = \frac{(2x + 5) + (4x - 7)}{2} \Rightarrow 6x - 2 = 6x - 2$$
$\therefore\ 0x = 0$
Portanto, para qualquer x, a sequência é uma PA.

30 Para ser PA, o termo médio é média aritmética dos outros dois. Então:
$$2x + 1 = \frac{3x + 6 + x + 4}{2} \Rightarrow 4x + 2 = 4x + 10$$
$\therefore 0x = 8$
Logo, não existe valor real de x para que a sequência seja uma PA

31 Sendo $r = a_{n+1} - a_n$, temos:
$$r = \frac{11}{4} - 2 = \frac{3}{4}$$
Sabendo que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$$a_{20} = 2 + 19 \cdot \frac{3}{4} = \frac{65}{4}$$
Sabemos que a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.
Logo:
$$S_{20} = \frac{\left(2 + \frac{65}{4}\right) \cdot 20}{2} = \frac{365}{2}$$

32 Observando que a sequência é uma PA, temos:
$a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$
$a_{18} = 2 \cdot 18 + 5 = 41$
Sabendo que $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma da PA de n termos, obtemos:
$$S_{18} = \frac{(7 + 41) \cdot 18}{2} = 432$$

33 Temos:
$a_{30} = 12 + 29 \cdot 7 = 215$ e $a_{42} = 12 + 41 \cdot 7 = 299$
Assim, a soma S pedida é a soma dos 13 termos da PA (215, 222, 229, ..., 299), ou seja:
$$S = \frac{(215 + 299) \cdot 13}{2} = 3.341$$

34 Os múltiplos de 13 entre 100 e 1.000 formam uma PA de razão 13, com termo inicial $a_1 = 13 \cdot 8 = 104$ e último termo $a_n = 13 \cdot 76 = 988$.
Como $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$988 = 104 + (n - 1) \cdot 13 \Rightarrow n = 69$
Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PA, concluímos:
$$S_{69} = \frac{(104 + 988) \cdot 69}{2} = 37.674$$

35 Vamos separar duas sequências:
(I) Os múltiplos positivos de 2 menores que 300 formam uma PA, em que $a_1 = 2 \cdot 1 = 2$ e o último termo é $a_{149} = 2 \cdot 149 = 298$. A soma dos termos dessa PA é:
$$\frac{(2 + 298) \cdot 149}{2} = 22.350$$
(II) Os múltiplos ímpares positivos de 3 menores que 300 formam uma PA, em que $b_1 = 3 \cdot 1 = 3$, $b_2 = 3 \cdot 3 = 9, ..., b_{50} = 3 \cdot 99 = 297$. A soma dos termos dessa PA, é:
$$\frac{(3 + 297) \cdot 50}{2} = 7.500$$
A soma S dos múltiplos de 2 ou 3 menores que 300 é dada pela soma dos resultados obtidos em (I) e (II).
Assim:
$S = 22.350 + 7.500 = 29.850$

36 A lei de formação $a_j = 2j + 1$, com $j \in \mathbb{N}^*$ e $j \leqslant n$, determina a PA:
$(3, 5, 7, ..., 2n + 1)$
Sabendo que $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA, temos:
$$143 = \frac{(3 + 2n + 1) \cdot n}{2} \Rightarrow 286 = 4n + 2n^2$$
$\therefore\ n^2 + 2n - 143 = 0 \Rightarrow n = 11$ ou $n = -13$
Como n deve ser positivo, concluímos que $n = 11$.

37 Sabemos que a sequência dos n primeiros números naturais pares é a PA:
$(0, 2, 4, 6, 8, ..., 2n - 2)$
Sabendo que $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, temos:
$$S_n = \frac{(0 + 2n - 2) \cdot n}{2} = \frac{2n^2 - 2n}{2} = n^2 - n$$
Portanto, a soma dos n primeiros números pares é $S_n = n^2 - n$.

38 A sequência dos n primeiros números naturais pares diferentes de zero é a PA $(2, 4, 6, ..., 2n)$.
Como $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos de uma PA, concluímos:
$$S_n = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} = n^2 + n$$

39 Os números inteiros, entre 50 e 350, que possuem o algarismo das unidades igual a 1 formam a PA (51, 61, 71, ..., 341).
O número n de termos dessa PA é dado por:
$341 = 51 + (n - 1) \cdot 10 \Rightarrow n = 30$
Assim, sendo S_{30} a soma dos 30 termos dessa PA, concluímos:
$$S_{30} = \frac{(51 + 341) \cdot 30}{2} = 5.880$$
Alternativa **e**.

40 Temos que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA. Então:
$$150 = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} \Rightarrow a_1 + a_{15} = 20$$
Como a_8 é o termo médio, concluímos
$$a_8 = \frac{a_1 + a_{15}}{2}.$$
$$\therefore\ a_8 = \frac{20}{2} = 10$$
Alternativa **a**.

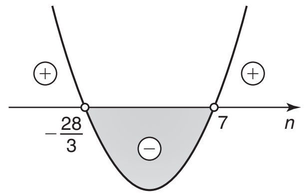
41 Sendo $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{10})$ a PA formada pelas medidas dos ângulos obtidos pelas divisões de um ângulo de medida 60°, temos:
$$S_{10} = 60° \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 60°$$
$\therefore\ a_1 + a_{10} = 12°$
Alternativa **d**.

42 **a)** Para $n \geqslant 2$, temos:
$a_n = S_n - S_{n-1} = bn^2 + n - [b(n - 1)^2 + (n - 1)]$
$\therefore\ a_n = 2bn - b + 1$
Como $a_3 = 7$, temos:
$a_3 = 2b \cdot 3 - b + 1 \Rightarrow 7 = 6b - b + 1$
$\therefore\ b = \dfrac{6}{5}$
Temos que a razão da PA é dada por:
$r = a_n - a_{n-1}$; logo:
$r = 2bn - b + 1 - [2b(n - 1) - b + 1] = 2b$
$\therefore\ r = \dfrac{12}{5}$

b) Sendo $a_n = 2bn - b + 1$, temos:
$$a_{20} = 2 \cdot \frac{6}{5} \cdot 20 - \frac{6}{5} + 1 \Rightarrow a_{20} = \frac{239}{5}$$
c) Como $S_n = bn^2 + n$, temos:
$$S_{20} = \frac{6}{5} \cdot 20^2 + 20 = 500$$

43 **a)** Temos $r = 3$ e $a_1 = 5$.
Sabemos que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$; logo:
$a_n = 5 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 2 + 3n$
Como $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA, temos:
$$185 = \frac{(5 + 2 + 3n) \cdot n}{2} \Rightarrow 3n^2 + 7n - 370 = 0$$
$\therefore\ n = 10$ ou $n = -\dfrac{37}{3}$
Como n deve ser natural não nulo, concluímos que $n = 10$.

b) Pelo item anterior, a soma dos n primeiros termos da PA é dada por $S_n = \dfrac{(7 + 3n)n}{2}$. Assim, devemos ter:
$$\frac{(7 + 3n)n}{2} > 98 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 196 > 0$$
O gráfico da função $f(n) = 3n^2 + 7n - 196$ está contido na parábola representada abaixo:



Como n deve ser inteiro positivo, concluímos que $f(n) > 0$ para qualquer n inteiro positivo maior que 7.

44 Como $T_n = T_{n-1} + n$, temos que $T_n - T_{n-1} = n$.
Assim:
$T_1 = 1$
$T_2 - T_1 = 2$
$T_3 - T_2 = 3$
$T_4 - T_3 = 4$
$\vdots$
$T_{100} - T_{99} = 100$
Adicionando, membro a membro, essas igualdades, obtemos:
$T_1 + (T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + (T_4 - T_3) + ... +$
$+ (T_{100} - T_{99}) = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow T_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100$
$$T_{100} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5.050$$
Alternativa **a**.

45 **a)** Temos que $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é razão da PG; então:
$$q = \frac{4}{\frac{8}{3}} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$
b) Sendo $q = \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$, obtemos:
$$q = \frac{\frac{2}{5}}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{15}$$
c) Sendo $q = \dfrac{c_{k+1}}{c_k}$, obtemos:
$$q = \frac{k^2 - 1}{k - 1} \Rightarrow q = k + 1 \text{ para } k \neq 1$$

46 $a_{15} = a_{14} \cdot q \Rightarrow a_{14} = \dfrac{a_{15}}{q} = \dfrac{k^3 + 1}{k + 1}$
$$\therefore\ a_{14} = \frac{(k + 1)(k^2 - k + 1)}{(k + 1)} \Rightarrow a_{14} = k^2 - k + 1$$

47 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{3^{a_{n+1}}}{3^{a_n}} = 3^{a_{n+1} - a_n} = 3^{a_{n+1} - a_n}$
Como $a_{n+1} - a_n$ é uma constante positiva, pois a sequência (a_n) é PA crescente, temos que $3^{a_{n+1} - a_n}$ é uma constante maior que 1. Portanto, a sequência (b_n) é uma PG crescente.
Alternativa **a**.

48 Calculando a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5(n+1)}{5n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Como essa razão não é constante, concluímos que a sequência não é PG.

49 Calculando a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1+3}}{27 \cdot 3^{n+1}}}{\frac{2^{n+3}}{27 \cdot 3^n}} = \frac{2^{n+4}}{27 \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{27 \cdot 3^n}{2^{n+3}} = \frac{2}{3}$$

Como essa razão é constante, concluímos que a sequência é uma PG.

50 a) Temos que $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ é razão da PG. Então:

$$q = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{k}} \Rightarrow q = \frac{k}{3}$$

Como $k > 3$, temos que $q > 1$ e $a_1 > 0$. Logo, a PG é crescente.

b) Sendo $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$, temos:

$$q = \frac{a^2}{a} = a$$

Como $a > 1$, temos que o primeiro termo da PG é positivo e a razão é maior que 1. Logo, a PG é crescente.

c) Sendo $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$, temos:

$$q = \frac{\frac{t^2 - 9}{t + 3}}{t - 3} = 1$$

Como $q = 1$, temos que a PG é constante.

d) Temos que $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$; então:

$$q = \frac{5a^5}{5a^2} = a^3$$

Como $a < 0$, temos que $q < 0$. Logo, a PG é oscilante.

51 Indicando a PG por $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x = 15 \\ \frac{x}{q} \cdot xq = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{q} + x = 15 & \text{(I)} \\ x = \pm 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

- Substituímos $x = 3$ em (I), obtendo:

  $\frac{3}{q} + 3 = 15 \Rightarrow q = \frac{1}{4}$

  Assim, temos a PG $\left(12, 3, \frac{3}{4}\right)$.

- Substituímos $x = -3$ em (I), obtendo:

  $-\frac{3}{q} - 3 = 15 \Rightarrow q = -\frac{1}{6}$

  Assim, temos a PG $\left(18, -3, \frac{1}{2}\right)$.

Como a PG deve ser decrescente, temos como resposta: $\left(12, 3, \frac{3}{4}\right)$

52 Indicando a PG por: $\left(\frac{a_1}{q^3}, \frac{a_1}{q}, a_1q, a_1q^3\right)$, temos:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{q^3} \cdot \frac{a_1}{q} \cdot a_1q \cdot a_1q^3 = 256 \\ \frac{a_1}{q} + a_1q = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1)^4 = 256 & \text{(I)} \\ \frac{a_1}{q} + a_1q = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), obtemos:

$a_1 = \pm 4$

- Para $a_1 = 4$, temos:

  $\frac{4}{q} + 4q = 10 \Rightarrow 4q^2 - 10q + 4 = 0$

  $\therefore q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$

- Para $a_1 = -4$, temos:

  $-\frac{4}{q} - 4q = 10 \Rightarrow 4q^2 + 10q + 4 = 0$

  $\therefore q = -2$ ou $q = -\frac{1}{2}$

Como a PG deve ser crescente, concluímos que $a_1 = 4$ e $q = 2$. Portanto, a PG é:

$\left(\frac{1}{2}, 2, 8, 32\right)$

53 Temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é a fórmula do termo geral da PG. Então:

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow (k + 2)^7 = a_1 \cdot (k + 2)^9$

$\therefore a_1 = \frac{1}{(k+2)^2}$ para $k \neq -2$

54 Sendo $q = \frac{a_{k+1}}{a_k} = 2$ a razão da PG e $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:

$256 = \frac{1}{2^{15}} \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^8 = \frac{2^n}{2^{16}}$

$2^n = 2^{24} \Rightarrow n = 24$

Logo, a PG tem 24 termos.

55 Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral da PG, temos:

$\frac{1}{5^{20}} = 625 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{5^{20}} = 5^4 \cdot \frac{1}{5^{n-1}}$

$\therefore 5^{-20} = 5^4 \cdot 5^{-n+1} \Rightarrow -20 = 4 - n + 1$

$\therefore n = 25$

Logo, a PG tem 25 termos.

56 Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:

$\frac{1}{1.024} = 512 \cdot q^{19} \Rightarrow \frac{1}{2^{10}} = 2^9 \cdot q^{19}$

$\therefore q^{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Portanto, a razão da PG é $\frac{1}{2}$.

57 Ao inserir 5 meios geométricos entre 10 e 20, formamos uma PG com 7 termos, em que $a_1 = 10$ e $a_7 = 20$.

Assim, temos:

$a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow 20 = 10 \cdot q^6$

$\therefore q = \pm\sqrt[6]{2}$

Logo, temos duas interpolações possíveis:

$\left(10, 10\sqrt[6]{2}, 10\sqrt[6]{2^2}, 10\sqrt[6]{2^3}, 10\sqrt[6]{2^4}, 10\sqrt[6]{2^5}, 20\right)$ e

$\left(10, -10\sqrt[6]{2}, 10\sqrt[6]{2^2}, -10\sqrt[6]{2^3}, 10\sqrt[6]{2^4}, -10\sqrt[6]{2^5}, 20\right)$

58 Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$\begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 3 \\ a_5 \cdot a_6 = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^3 = 3 \\ a_1 \cdot q^4 \cdot a_1 \cdot q^5 = 96 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (a_1)^2 \cdot q^4 = 3 & \text{(I)} \\ (a_1)^2 \cdot q^9 = 96 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo membro a membro, (II) por (I), obtemos:
$q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$
Substituindo q por 2 na equação (I), temos:
$(a_1)^2 \cdot 2^4 = 3 \Rightarrow (a_1)^2 = \frac{3}{16}$
$\therefore a_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$
Como a PG é crescente, concluímos que o primeiro termo é $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

59 Temos que $a_m = a_k \cdot q^{m-k}$; então:
$a_{11} = a_6 \cdot q^5 \Rightarrow 4 = 2 \cdot q^5$
$\therefore q = \sqrt[5]{2}$
Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:
$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 2 = a_1 \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^5$
$\therefore a_1 = 1$
Logo, o primeiro termo é 1.

60 Sendo $a_m = a_k \cdot q^{m-k}$, temos:
$a_{12} = a_5 \cdot q^7 \Rightarrow k^2 = 3k \cdot q^7$
$\therefore q = \sqrt[7]{\frac{k}{3}}$ para $k \neq 0$
Portanto, a razão da PG é $\sqrt[7]{\frac{k}{3}}$.

61 Como o 25º termo está na posição ímpar, ele pertence à PA.
Sabemos que as posições ímpares da PA têm a forma $2n - 1$. Logo:
$25 = 2n - 1 \Rightarrow n = 13$
Então, queremos o 13º termo da PA.
Sabemos que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ e, do enunciado, obtemos $r = 3$. Então:
$a_{13} = 2 + 12 \cdot 3 = 38$
Alternativa **b**.

62 Considere r a razão da PA e q a razão da PG.
Do enunciado, temos:
- $a_1 = b_1 = 2$ (I)
- $a_2 = b_7 \Rightarrow a_1 \cdot q = b_1 + 6r$ (II)

Substituindo (I) em (II):
$2 \cdot q = 2 + 6r$
Mas sabemos que $r = \frac{3}{10} \cdot q$; então:
$2q = 2 + 6 \cdot \frac{3}{10} \cdot q \Rightarrow q = 10$
Assim: $r = \frac{3}{10} \cdot 10 = 3$
Temos:
$b_7 = b_1 + 6 \cdot r = 2 + 6 \cdot 3 = 20$
Sendo $S_n = \frac{(b_1 + b_n) \cdot n}{2}$ a soma dos n primeiros termos da PA, concluímos:
$S_7 = \frac{(2 + 20) \cdot 7}{2} = 77$
Logo, $b_1 + ... + b_7 = 77$.

63 Temos que $a_n = 4 \cdot 3^n$; logo:
$a_n > 36 \Rightarrow 4 \cdot 3^n > 36$
$\therefore 3^n > 3^2 \Rightarrow n > 2$
Como n representa um número natural, concluímos que o menor valor possível de n é 3.

64 Sendo a_2, $\sqrt{a_2}$ e a_{n-1} o segundo, o termo médio e o penúltimo termo da PG, respectivamente, temos:
$\left(\sqrt{a_2}\right)^2 = a_2 \cdot a_{n-1} \Rightarrow a_2 = a_2 \cdot a_{n-1}$
$\therefore a_{n-1} = 1$
Logo, o penúltimo termo da PG é 1.

65 Observamos que para $x - 1 = 0$, ou seja, $x = 1$, a sequência não é PG.
Assim, devemos ter $x - 1 \neq 0$. Sob essa condição, a sequência é PG se, e somente se,
$$(x + 1)^2 = (x - 1)(3x - 1)$$
ou seja,
$x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - x - 3x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0$
$\therefore x = 0$ ou $x = 3$
- Para $x = 0$, temos a PG oscilante: $(-1, 1, -1)$
- Para $x = 3$, temos a PG crescente: $(2, 4, 8)$

Logo, a sequência é uma PG crescente para $x = 3$.

66 Para que três termos consecutivos com o primeiro não nulo formem uma PG, basta que o produto dos extremos seja igual ao quadrado do termo médio. Então:
$(x - 2) \cdot \frac{25}{(x - 2)} = 5^2 \Rightarrow 25 = 25$
Portanto, para qualquer valor de x, com $x \neq 2$, a sequência $\left(x - 2, 5, \frac{25}{x - 2}\right)$ é uma PG.

67 A sequência só será uma PG se o quadrado do termo médio for o produto dos extremos. Então:
$(x - 1)^2 = -4 \cdot (x + 1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -4x - 4$
$x^2 + 2x + 5 = 0$
Como $\Delta = -16 < 0$, então não existe x real que satisfaça a equação.
Portanto, não existe valor real de x para que a sequência seja uma PG.

68 Pelo enunciado, temos que a PG é dada por:
$(1, 2, 4, 8)$
Logo, a soma dos termos da PG é $S_4 = 15$.
Sabemos que a soma dos termos da PA, $S_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2}$, é igual à soma dos termos da PG. Então:
$15 = \frac{(1 + a_4) \cdot 4}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{13}{2}$
Porém, sabemos que $a_4 = a_1 + 3r$; então:
$\frac{13}{2} = 1 + 3r \Rightarrow \frac{11}{2} = 3r$
$\therefore r = \frac{11}{6}$
Alternativa **e**.

69 Temos que (x, y, z) é a PG (x, xq, xq^2); portanto, a PA é:
$(x, 2xq, 3xq^2)$

Sabendo que numa PA a média aritmética dos extremos é igual ao termo médio, temos:

$2xq = \dfrac{x + 3xq^2}{2} \Rightarrow 4xq = x + 3xq^2$

$\therefore 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow q = 1$ ou $q = \dfrac{1}{3}$

- Para $q = 1$, a PG é:
  (x, x, x)
- Para $q = \dfrac{1}{3}$, a PG é:
  $\left(x, \dfrac{x}{3}, \dfrac{x}{9}\right)$

Como, pelo enunciado, o 1º termo deve ser diferente do 2º, concluímos que $q = \dfrac{1}{3}$.

Alternativa **b**.

70 Como $(a, b, a + b)$ é uma PA, temos que a média aritmética dos extremos é igual ao termo médio. Logo:

$\dfrac{a + a + b}{2} = b \Rightarrow 2a - b = 0 \quad \text{(I)}$

Temos que $(2^a, 16, 2^b) = (2^a, 2^4, 2^b)$ é uma PG. Logo, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos. Então:

$(2^4)^2 = 2^a \cdot 2^b \Rightarrow 2^8 = 2^{a+b}$

$\therefore a + b = 8 \quad \text{(II)}$

Formamos, assim, o sistema com as equações (I) e (II):

$$\begin{cases} 2a - b = 0 & \text{(I)} \\ a + b = 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, (I) e (II), obtemos:

$3a = 8 \Rightarrow a = \dfrac{8}{3}$

Alternativa **e**.

71 Sendo x, y e z as três parcelas em que dividimos o número 38, temos a PA $(x, y + 1, z)$ e a PG (x, y, z).

Do enunciado:

$x + y + 1 + z = 39 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y + 1) - r + (y + 1) + (y + 1) + r = 39$

$\therefore 3y = 36 \Rightarrow y = 12$

Sabemos que numa PG o produto dos extremos é igual ao quadrado do termo médio; então:

$12^2 = [(y + 1) - r][(y + 1) + r] \Rightarrow 144 = (13)^2 - r^2$

$r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$

Assim, determinamos as progressões aritméticas (8, 13, 18) e (18, 13, 8). Concluímos, assim, que a maior das parcelas é 18.

Alternativa **c**.

72 Como os três primeiros termos formam uma PG e o último termo é igual ao primeiro, temos:

(a, aq, aq^2, a)

Sabemos que a soma dos três primeiros termos é 6 e que, como os três últimos formam uma PA, o termo médio, entre eles, é a média aritmética entre os outros dois.

Então:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 6 \\ 2aq^2 = a + aq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1 + q + q^2) = 6 & \text{(I)} \\ a(2q^2 - q - 1) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos:

- $a = 0$ (não convém, pois não satisfaz (I); ou
- $2q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow q = 1$ ou $q = -\dfrac{1}{2}$

Substituindo $q = 1$ em (I), temos:

$a \cdot (1 + 1 + 1) = 6 \Rightarrow a = 2$

Substituindo $q = -\dfrac{1}{2}$ em (I), temos:

$a \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = 6 \Rightarrow a = 8$

Então, a sequência é (2, 2, 2, 2) ou (8, −4, 2, 8).

Logo, a soma de seus termos é 8 ou 14.

Alternativa **d**.

73 A soma dos termos de uma PG de n termos, com $q \neq 1$, é

$S_n = \dfrac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$

Sendo $a_1 = 3$ e $q = 3$, temos:

$S_{15} = \dfrac{3 \cdot (1 - 3^{15})}{1 - 3} = \dfrac{3 - 3^{16}}{-2} = \dfrac{3^{16} - 3}{2}$

Alternativa **c**.

74 Sabendo que $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é razão da PG, temos $q = \sqrt{2}$.

Sendo $S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ a soma dos n primeiros termos de uma PG, temos:

$S_{18} = \dfrac{3\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{2}^{18}\right)}{1 - \sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}\left(1 - 2^9\right)}{1 - \sqrt{2}} =$

$= \dfrac{3\sqrt{2}\left(2^9 - 1\right)}{\left(\sqrt{2} - 1\right)} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{2} + 1\right)} = 3 \cdot 511 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) =$

$= 1.533\left(2 + \sqrt{2}\right)$

Logo, a soma dos 18 primeiros termos é $1.533\left(2 + \sqrt{2}\right)$.

75 a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{40} 5^j = 5^1 + 5^2 + ... + 5^{40}$

Temos assim a soma dos termos de uma PG de 40 termos, com $a_1 = 5$ e $q = 5$.

Logo,

$S_{40} = \dfrac{5(1 - 5^{40})}{1 - 5} = \dfrac{5 - 5^{41}}{-4} = \dfrac{5^{41} - 5}{4}$

$\therefore \displaystyle\sum_{j=1}^{40} 5^j = \dfrac{5^{41} - 5}{4}$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 2 \cdot 3^j = 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + ... + 2 \cdot 3^n =$

$= 6 + 18 + 54 + ... + 2 \cdot 3^n$

Temos assim a soma dos termos de uma PG de n termos, com $a_1 = 6$ e $q = 3$. Então:

$S_n = \dfrac{6(1 - 3^n)}{1 - 3} = \dfrac{6(1 - 3^n)}{-2} = -3(1 - 3^n) =$

$= 3^{n+1} - 3$

$\therefore \displaystyle\sum_{j=1}^{n} 2 \cdot 3^j = 3^{n+1} - 3$

76 Temos:

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 2^j = 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 4.094$

Pela fórmula $S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, temos:

$4.094 = \dfrac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} \Rightarrow 4.094 = 2^{n+1} - 2$

$2^{n+1} = 4.096 \Rightarrow 2^{n+1} = 2^{12}$

$\therefore n = 11$

77 Temos:

$\sum_{j=1}^{15}(j + 2^j) =$

$= (1 + 2^1) + (2 + 2^2) + (3 + 2^3) + ... + (15 + 2^{15}) =$

$= (1 + 2 + 3 + ... + 15) + (2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{15})$

- $1 + 2 + 3 + ... + 15$ é a soma dos 15 primeiros termos da PA de razão $r = 1$ e $a_1 = 1$. Logo:

  $1 + 2 + 3 + ... + 15 = \dfrac{(1 + 15) \cdot 15}{2} = 120$

- $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{15}$ é a soma dos 15 primeiros termos da PG de razão $q = 2$ e $a_1 = 2$. Logo:

  $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{15} = \dfrac{2(1 - 2^{15})}{1 - 2} = 2^{16} - 2 =$

  $= 65.536 - 2 = 65.534$

$\therefore \sum_{j=1}^{15}(j + 2^j) = 120 + 65.534 = 65.654.$

78 $S_n > \dfrac{8.191}{4.096} \Rightarrow \dfrac{1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} > \dfrac{8.191}{4.096}$

$\therefore 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n > \dfrac{8.191}{8.192} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{8.192}$

$\therefore \left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{13} \Rightarrow n > 13$

Como n representa um número natural, concluímos que o menor valor possível de n é 14.

79 A sequência é a seguinte PG de 30 termos:

$\left(\dfrac{1}{5^9}, \dfrac{1}{5^8}, \dfrac{1}{5^7}, ..., 5^{19}, 5^{20}\right)$

Aplicando a fórmula $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, para $n = 30$, concluímos:

$P_{30} = \left(\dfrac{1}{5^9}\right)^{30} \cdot 5^{\frac{(30-1)30}{2}} \Rightarrow P_{30} = \dfrac{1}{5^{270}} \cdot 5^{435} = 5^{165}$

Logo, o produto dos 30 termos da sequência é 5^{165}.
Alternativa **a**.

80 Sabemos que $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$ é o produto dos n termos da PG; então:

$7^{630} = 7^n \cdot 7^{\frac{(n-1)n}{2}} \Rightarrow 630 = n + \dfrac{(n-1)n}{2}$

$\therefore 1.260 = 2n + n^2 - n \Rightarrow n^2 + n - 1.260 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos:
$n = 35$ ou $n = -36$ (não convém)
Assim, $n = 35$.

81 A sequência (5, 25, 125, ...) é uma PG de razão $q = 5$ e $a_1 = 5$.
Sendo $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$ o produto dos n primeiros termos, temos:

$P_n = 5^n \cdot 5^{\frac{(n-1)n}{2}} = 5^{n + \frac{(n-1)n}{2}} = 5^{\frac{2n + n^2 - n}{2}} =$

$= 5^{\frac{n^2 + n}{2}}$

$\therefore P_n = 5^{\frac{n^2 + n}{2}}$

82 **a)** Temos $P_1 = a_1$; então, para $n = 1$, temos:

$P_1 = 3^{\frac{1+1}{2}} \Rightarrow P_1 = 3$

$\therefore a_1 = 3$

b) Temos $P_2 = a_1 \cdot a_2$; então, para $n = 2$, temos:

$P_2 = 3^{\frac{4+2}{2}} \Rightarrow P_2 = 3^3 = 27$

Do item **a**, $a_1 = 3$, então:
$P_2 = a_1 \cdot a_2 \Rightarrow 27 = 3 \cdot a_2$
$\therefore a_2 = 9$
Sabemos que $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é razão da PG; então

$q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{9}{3} = 3$

c) Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:
$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 3^3 = 81$

d) Temos $a_3\, a_4\, a_5 = \dfrac{P_5}{P_2}$. Assim:

$a_3\, a_4\, a_5 = \dfrac{3^{\frac{5^2+5}{2}}}{3^{\frac{2^2+2}{2}}} = \dfrac{3^{15}}{3^3} = 3^{12}$

83 **a)** Sabemos que $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$ é a soma dos infinitos termos de uma PG com $-1 < q < 1$. Então, para $q = \dfrac{2}{5}$ e $a_1 = 1$, temos:

$S_\infty = \dfrac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \dfrac{5}{3}$

b) Para $q = -\dfrac{2}{3}$ e $a_1 = -4$, temos:

$S_\infty = \dfrac{-4}{1 + \frac{2}{3}} = -\dfrac{12}{5}$

c) Para $q = 0{,}2$ e $a_1 = 1$, temos:

$S_\infty = \dfrac{1}{1 - 0{,}2} = \dfrac{1}{0{,}8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$

84 **a)** Temos:
$7{,}484848... = 7 + 0{,}48 + 0{,}0048 + 0{,}000048 + ...$
em que $(0{,}48 + 0{,}0048 + 0{,}000048 + ...)$ é a soma dos infinitos termos da PG de razão $q = 0{,}01$ e $a_1 = 0{,}48$.
Aplicando $S_\infty = \dfrac{a^1}{1 - q}$, temos:

$S_\infty = \dfrac{0{,}48}{1 - 0{,}01} = \dfrac{0{,}48}{0{,}99} = \dfrac{48}{99}$

$\therefore 7{,}484848... = 7 + \dfrac{48}{99} = \dfrac{741}{99} = \dfrac{247}{33}$

b) Temos:
$2{,}54666... = 2{,}54 + 0{,}006 + 0{,}0006 + 0{,}00006 + ...$
Observando que $(0{,}006 + 0{,}0006 + 0{,}00006 + ...)$ é a soma dos infinitos termos da PG de razão $q = 0{,}1$ e $a_1 = 0{,}006$, temos:

$S_\infty = \dfrac{0{,}006}{1 - 0{,}1} = \dfrac{0{,}006}{0{,}9} = \dfrac{6}{900}$

$\therefore 2{,}54666... = \dfrac{254}{100} + \dfrac{6}{900} = \dfrac{2.292}{900} = \dfrac{191}{75}$

85 O perímetro de um círculo de raio r é $2\pi r$. Assim, a sequência dos perímetros é a PG infinita:

$\left(8\pi, 4\pi, 2\pi, \pi, \dfrac{\pi}{2} ...\right)$

A soma S_∞ dos infinitos termos dessa PG é dada por:

$S_\infty = \dfrac{8\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 16\pi$

Logo, a soma dos perímetros dos infinitos círculos é 16π cm.
Alternativa **c**.

86 O produto dos infinitos termos da sequência é:

$$\sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5}}}\cdot\ldots=\sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt[9]{2^5}\cdot\sqrt[27]{2^5}\cdot\ldots=$$

$$=2^{\frac{5}{3}}\cdot2^{\frac{5}{9}}\cdot2^{\frac{5}{27}}\cdot\ldots=2^{\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\ldots}$$

em que $\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\ldots$ é a soma S_∞ dos infinitos termos da PG de razão $q=\frac{1}{3}$ e $a_1=\frac{5}{3}$. Assim:

$$S_\infty=\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{2}$$

Logo:

$$2^{\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\ldots}=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{2^5}=4\sqrt{2}$$

87 As áreas dos círculos, em ordem decrescente, formam a PG infinita:

$$\left(\frac{\pi m^2}{4},\frac{\pi m^2}{8},\frac{\pi m^2}{16},\ldots\right)$$

Logo, a soma S_∞ dessas infinitas áreas é dada por:

$$S_\infty=\frac{\frac{\pi m^2}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi m^2}{2}$$

Alternativa **a**.

88 Sendo $AB=d$ e $BB'=h$, temos que a área do triângulo ABB' é $\frac{dh}{2}$.

As áreas dos triângulos destacados, em ordem decrescente, formam a PG $\left(\frac{dh}{4},\frac{dh}{8},\frac{dh}{16},\ldots\right)$, cuja soma dos infinitos termos é dada por:

$$S_\infty=\frac{\frac{dh}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{dh}{2}$$

Concluímos, então, que a soma das áreas dos triângulos destacados é igual à área do triângulo ABB'.

Alternativa **a**.

Exercícios contextualizados

89 Sendo x o 1º número a aparecer na tela, temos:

2º número: $x\rightarrow\frac{1}{x}\rightarrow\frac{x+1}{x}$

3º número: $\frac{x+1}{x}\rightarrow\frac{x}{x+1}\rightarrow\frac{2x+1}{x+1}$

4º número: $\frac{2x+1}{x+1}\rightarrow\frac{x+1}{2x+1}\rightarrow\frac{3x+2}{2x+1}$

5º número: $\frac{3x+2}{2x+1}\rightarrow\frac{2x+1}{3x+2}\rightarrow\frac{5x+3}{3x+2}$

Portanto, o 5º número que aparecerá na tela será $\frac{5x+3}{3x+2}$.

90 Observando o esquema abaixo, constatamos que a cada 7 dias a sequência de dias da semana S = (sáb., 4ª f, dom., 5ª f, 2ª f, 6ª f, 3ª f) se repete:

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª
sáb.	4ª f	dom.	5ª f	2ª f	6ª f	3ª f

8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª		98ª
sáb.	4ª f	dom.	5ª f	2ª f	6ª f	3ª f	... ...	3ª f

Dividindo 100 por 7, obtemos:

$100=14\cdot7+2$

Assim, na 100ª vez ele terá completado 14 sequências S e terá nadado mais dois dias: sábado e 4ª feira.

Logo, na 100ª vez, José foi nadar na 4ª feira.

Alternativa **b**.

91 a) Do enunciado, temos a sequência:

(48, 58, 68, 78, ..., 2.848)

b) A lei de formação dessa sequência é:

$a_n=a_1+(n-1)10$

$a_n=48+(n-1)\cdot10\Rightarrow a_n=38+10n$

92 a) Do enunciado, temos:

$(10.000, 10.200, 10.404, \ldots, 10.000(1{,}02)^{20})$

b) A lei de formação da sequência é dada por:

$a_n=10.000\cdot(1+0{,}02)^{n-1}\Rightarrow a_n=10.000\cdot1{,}02^{n-1}$

93 a) 1º dia: $\frac{t}{2}+\frac{1}{2}=\frac{t+1}{2}$

2º dia: $\frac{t-\frac{t+1}{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{t+1}{4}$

3º dia: $\frac{t-\frac{t+1}{2}-\frac{t+1}{4}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{t+1}{8}$

4º dia: $\frac{t-\frac{t+1}{2}-\frac{t+1}{4}-\frac{t+1}{8}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{t+1}{16}$

Logo, a sequência dos tempos trabalhados nesses quatro dias é:

$$\left(\frac{t+1}{2},\frac{t+1}{4},\frac{t+1}{8},\frac{t+1}{16}\right)$$

b) $\frac{t+1}{2}+\frac{t+1}{4}+\frac{t+1}{8}+\frac{t+1}{16}=t\Rightarrow t=15$

Logo, o pedreiro trabalhou 15 horas para completar a tarefa.

94 a) Chamaremos de "rodada" o conjunto de duas jogadas consecutivas dos jogadores A e B, nessa ordem. Assim, esquematizamos:

	Quantidade de bolas retiradas pelo jogador A	Quantidade de bolas retiradas pelo jogador B	Total retirado	Total de bolas na caixa
1ª rodada	2	$5-2=3$	$2+3=5$	95
2ª rodada	n_2	$5-n_2$	$n_2+5-n_2=5$	90
3ª rodada	n_3	$5-n_3$	$n_3+5-n_3=5$	85
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Da tabela observamos que a cada rodada diminuem sempre 5 bolas da caixa. Os números de bolas na caixa no fim de cada rodada formam a sequência (95, 90, ..., 0), em que $a_n=100-5n$.

Assim, a última bola será retirada quando $a_n=0$. Portanto: $100-5n=0\Rightarrow n=20$

Logo, a última bola será retirada no fim da 20ª rodada.

Então, podemos concluir que o jogador B vencerá, pois é ele quem termina a 20ª rodada.

b) Como cada rodada é composta de 2 jogadas (1 do jogador A e outra do jogador B), o total de jogadas será $2 \cdot 20 = 40$.
Ou seja, o jogo será composto de 40 jogadas.

95 Temos uma PA com $a_1 = 40$ e $r = 6$.
Aplicando $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:
$136 = 40 + (n - 1)6 \Rightarrow 6n = 102$
$\therefore\ n = 17$
Logo, na 17ª semana foi atingida pela primeira vez a cota máxima de pessoas.
Então, excluindo o primeiro sábado, passaram-se 16 sábados para que a cota máxima de fregueses fosse atingida pela primeira vez.
Alternativa **b**.

96 As distâncias, em centímetro, alcançadas pelo dardo formam uma PA (a_n) de razão $r = 2$ e $a_{30} = 1.500$. Assim, temos:
$a_{30} = a_3 + (30 - 3)r \Rightarrow 1.500 = a_3 + (30 - 3) \cdot 2$
$\therefore\ a_3 = 1.446$
Logo, no terceiro lançamento o dardo alcançou 1.446 cm, o que equivale a 14,46 m.
Alternativa **c**.

97 A altura da onda no dia 1º de setembro, em metro, seria o termo a_1 da PA (a_n) de razão $r = -0{,}5$ e $a_{25} = 2{,}5$; logo:
$a_{25} = a_1 + 24r \Rightarrow 2{,}5 = a_1 + 24 \cdot (-0{,}5)$
$\therefore\ a_1 = 14{,}5$
Assim, no dia 1º de sentembro, a altura da onda teria sido 14,5 m.
Alternativa **a**.

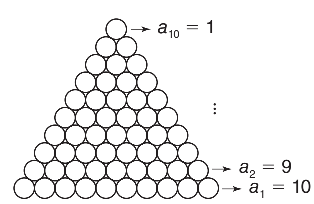
98 Temos que a produção inicial p_i é 10% do consumo mensal de 150 m^3; logo $p_i = 15\ m^3$.
Queremos que a produção atinja 70% do consumo mensal, ou seja, $p_F = 105\ m^3$.
A cada mês temos um aumento de 3 m^3 na produção; então, as quantidades produzidas do reagente, mês a mês, formam a PA de razão $r = 3$, $a_1 = 15$ e $a_n = 105$.
Aplicando a fórmula do termo geral da PA $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:
$105 = 15 + (n - 1)3 \Rightarrow 3n = 93$
$\therefore\ n = 31$
Portanto, serão necessários 31 meses para que a indústria produza, em um único mês, 70% do volume de reagente consumido.
Alternativa **d**.

99 Os anos em que o corpo celeste pode ser visto da Terra a olho nu podem ser representados pela PA de razão $r = -63$:
(1968, 1905, 1842, ...)
O primeiro ano da era cristã é o último termo da PA tal que $a_n \geqslant 0$. Assim:
$a_n \geqslant 0 \Rightarrow 1968 + (n - 1) \cdot (-63) \geqslant 0$
$\therefore\ 2031 - 63n \geqslant 0 \Rightarrow n \leqslant \dfrac{2031}{63} \approx 32{,}24$
Então, o maior valor inteiro de n que satisfaz $a_n \geqslant 0$ é 32.
Assim, temos:
$a_{32} = 1968 + (32 - 1) \cdot (-63) \Rightarrow a_{32} = 15$
Logo, o primeiro ano do calendário cristão em que o corpo esteve visível foi o ano 15.
Alternativa **a**.

100 Em cada linha da tabela temos uma PA de razão 6. Sendo $a_n = 275$ um termo de uma dessas progressões aritméticas, temos:
$275 = a_1 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow 275 - a_1 = (n - 1) \cdot 6$
Assim, a diferença $275 - a_1$ deve ser um número múltiplo de 6. Testando o primeiro termo de cada PA, temos:
$275 - 1 = 274$ (não é múltiplo de 6)
$275 - 6 = 269$ (não é múltiplo de 6)
$275 - 2 = 273$ (não é múltiplo de 6)
$275 - 5 = 270$ (é múltiplo de 6)
$275 - 3 = 272$ (não é múltiplo de 6)
$275 - 4 = 271$ (não é múltiplo de 6)
O único múltiplo de 6 ocorreu na linha da tabela correspondente à quinta-feira. Logo, a filial atenderá o setor 275 na quinta-feira.
Alternativa **b**.

101 Sabemos que o século XXI vai de 2001 a 2100.
Como 2.100 é o único múltiplo de 100 desse intervalo, e como nesse intervalo não há múltiplo de 400, temos que os anos bissextos desse período formam uma PA de 2.004 a 2.096, de razão $r = 4$.
Da fórmula do termo geral, temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 2.096 = 2.004 + (n - 1)4$
$\therefore\ 4n = 96 \Rightarrow n = 24$
Portanto, o século XXI terá 24 anos bissextos.
Alternativa **b**.

102 Se uma camada é um quadrado com a_n laranjas em cada lado, então essa camada contém $(a_n)^2$ laranjas.



Como $(a_1, ..., a_{10})$ é uma PA de razão $r = -1$, temos:
$a_n = 10 + (n - 1)(-1) = 10 + 1 - n = 11 - n$
Assim, concluímos que o número de laranjas da camada de número n dessa pilha é:
$(11 - n)^2$
Alternativa **e**.

103 **a)** As distâncias percorridas pela pedra em cada segundo da queda formam uma PA cujo primeiro termo é $a_1 = 10$, $r = 10$ e cujo último termo é $a_n = 10n$.
$(10, 20, 30, ..., 10n)$
Logo, temos que a soma dos n termos da PA será a altura do prédio.
Sabendo que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, temos:
$S_n = \dfrac{(10 + 10n)n}{2} \Rightarrow S_n = 5n^2 + 5n$
Portanto, a altura do prédio é $(5n^2 + 5n)$ metros.

b) Sabemos que no n-ésimo segundo a distância, em metro, percorrida pela pedra foi $10n$. Logo, a velocidade da pedra nesse último segundo foi $10n$ m/s.

104 Como a sequência $(F_1, F_2, F_3, ..., F_n, ...)$ representa a PA (4, 12, 20, 28, ...) de razão $r = 8$, temos:

a) O termo geral dessa PA é dado por:
$F_n = F_1 + (n - 1)r$. Portanto:
$F_{10} = F_1 + 9r \Rightarrow F_{10} = 4 + 9 \cdot 8 = 76$

b) O número de palitos necessários para construir as 50 primeiras figuras é a soma S_{50} dos 50 primeiros termos da PA $(F_1, F_2, F_3, ..., F_n, ...)$, isto é:

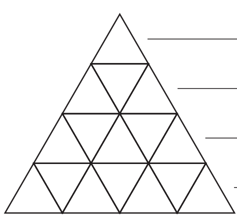
$$S_{50} = \frac{(F_1 + F_{50})50}{2}$$

Calculando F_{50}, temos: $F_{50} = 4 + 49 \cdot 8 = 396$.
Logo:

$$S_{50} = \frac{(4 + 396)50}{2} = 10.000$$

Assim, a construção das 50 primeiras figuras exige exatamente 10.000 palitos.

105 Nota-se que, a cada linha de um triângulo assim formado, o número de triângulos aumenta em 2.



Logo, temos que os números de triângulos congruentes ao triângulo T das fileiras formam uma PA de razão 2.
Como queremos um triângulo formado por 49 triângulos congruentes a T, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = 49$$

Usando $a_n = a_1 + (n - 1)r$, obtemos:
$a_n = 1 + (n - 1)2 = 2n - 1$
Assim:

$$\frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = 49 \Rightarrow 2n^2 = 2 \cdot 49$$

$\therefore\ n = 7$
Portanto, um triângulo formado por 49 triângulos T terá 7 fileiras e, como consequência, terá lado medindo 7 unidades de comprimento.
Alternativa **a**.

106 Só nos 10 primeiros dias, 290 pessoas foram socorridas nesse posto médico.

Sendo $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, temos:

$$290 = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \Rightarrow a_1 + a_{10} = 58$$

Temos $a_n = a_1 + (n - 1)r$; logo:
$a_{10} = a_1 + 9r$
Assim:
$a_1 + a_1 + 9r = 58 \Rightarrow 2a_1 + 9r = 58 \quad$ (I)
No 21º dia foram atendidos 91 pacientes; então:
$a_{21} = a_1 - (21 - 1)r \Rightarrow a_1 + 20r = 91 \quad$ (II)
Temos, assim, o sistema formado por (I) e (II):

$$\begin{cases} 2a_1 + 9r = 58 \\ a_1 + 20r = 91 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $r = 4$ e $a_1 = 11$.
Logo, o número de pacientes atendidos até o dia 21 é dado por:

$$S_{21} = \frac{(11 + 91) \cdot 21}{2} = 1.071$$

Do dia 22 ao 30 temos uma nova PA, (b_n), com razão $R = -10$, sendo $b_1 = 91 - 10 = 81$
Então, temos que no dia 30 foram atendidos b_9 pacientes, tal que:
$b_9 = 81 + (9 - 1) \cdot (-10) \Rightarrow b_9 = 1$
Logo, o número de pacientes atendidos nesse período é dado por:

$$S_9 = \frac{(81 + 1) \cdot 9}{2} = 41 \cdot 9 = 369$$

Portanto, o número total de pacientes atendidos nesse posto no mês de junho foi $1.071 + 369 =$
$= 1.440$.
Alternativa **b**.

107 **a)** Os números de acessos ao site no mês de janeiro, em ordem crescente, formam a PA de primeiro termo $a_1 = 1.800$ e razão $r = 100$. Assim, o número n do dia de janeiro em que houve 3.700 acessos é obtido por:
$3.700 = 1.800 + (n - 1) \cdot 100 \Rightarrow n = 20$
Logo, o site foi acessado por 3.700 pessoas no dia 20 de janeiro.

b) O número de acessos no mês de janeiro até o dia 20 é a soma S_{20} dos 20 primeiros termos da PA (a_n), com $a_1 = 1.800$ e $a_{20} = 3.700$, ou seja:

$$S_{20} = \frac{(1.800 + 3.700)20}{2} = 55.000$$

Logo, no mês de janeiro, até o dia 20, o site foi acessado por 55.000 internautas.

108 **a)** F, pois:
Os números de fichas distribuídas nos dias 1, 2, 3, ..., n formam a PA $(6, 15, 24, ..., a_n)$ na qual $a_n = 9n - 3$
Para que a soma $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ dos termos dessa PA seja 276, devemos ter:

$$\frac{(6 + 9n - 3) \cdot n}{2} = 276 \Rightarrow 9n^2 + 3n - 552 = 0$$

$\therefore\ 3n^2 + n - 184 = 0$
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-184) = 2.209$

$$\therefore\ n = \frac{-1 \pm 47}{6} \Rightarrow n = \frac{23}{3} \text{ ou } n = -8$$

Como nenhum dos valores de n encontrados é natural, concluímos que não é possível sobrarem 4 fichas após a distribuição.

b) V, pois

Calculando S_7 e a_8 da PA do item a, temos:

$$S_7 = \frac{[6 + (6 + 6 \cdot 9)] \cdot 7}{2} = 231 \text{ e}$$

$a_8 = 6 + 7 \cdot 9 = 69$

Como $S_7 < 280$ e $S_7 + a_8 > 280$, concluímos que a última distribuição ocorreu no 7º dia.

c) V, pois

Os números de fichas recebidas por Z nos 7 dias formam a PA (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21). Logo, o total de fichas recebidas por Z foi 84.

d) F, pois

Os números de fichas recebidas por X nos 7 dias formam a PA (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19). Logo, no 5º dia X recebeu 13 fichas.

e) V, pois

Os números de fichas recebidas por Y nos 7 dias formam a PA (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20). Logo, no fim da distribuição do 6º dia Y havia recebido 57 fichas.

109 Em ordem crescente, as distâncias percorridas, em metro, formam a PA (a_n) de razão $r = 100$ e $a_{21} = 6.000$.

Assim, temos:

$a_{21} = a_1 + 20r \Rightarrow 6.000 = a_1 + 20 \cdot 100$

$\therefore a_1 = 4.000$

A distância percorrida nos 21 dias é a soma S_{20} dos 20 primeiros termos da PA (4.000, 4.100, 4.200, ...), isto é:

$$S_{20} = \frac{(4.000 + 6.000)21}{2} = 105.000$$

Logo, nos 21 dias de caminhada foram percorridos 105.000 m.

Alternativa **b**.

110 Temos que a proliferação do fungo apresenta o comportamento de uma PG de razão $q = 3$.

A área contaminada um mês após a descoberta era $a_1 = 8 \cdot 3 = 24$. Como queremos determinar n tal que a área contaminada a_n seja $\frac{1}{3}$ da área da floresta, temos:

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 472.392 = 157.464$$

Temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é a fórmula do termo geral da PG; então:

$157.464 = 24 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 6.561 = 3^{n-1}$

$\therefore 3^8 = 3^{n-1} \Rightarrow n = 9$

Portanto, em 9 meses após a descoberta somente $\frac{2}{3}$ da área dessa reserva ainda não estará contaminada.

Alternativa **b**.

111 Os números de lados dos polígonos obtidos nesse processo são multiplicados por 4 a cada figura; assim, temos que os números de lados formam uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e $q = 4$.

Então, para $n = 6$, temos:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1 \cdot q^5$

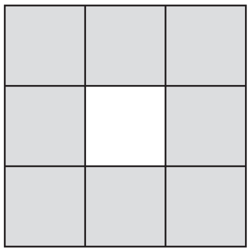
$\therefore a_6 = 3 \cdot 4^5 \Rightarrow a_6 = 3.072$

Portanto, o 6º polígono tem 3.072 lados.

Alternativa **e**.

112 Consideramos apenas uma face do cubo inicial.

A cada processo, a área dessa face reduz-se a $\frac{8}{9}$ de sua área.



A área inicial dessa face é 1 m². Logo, as áreas dessa face formam a PG $\left(1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, ...\right)$.

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ e $q = \frac{8}{9}$, temos, para $n = 30$:

$$a_{30} = 1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{29} = \left(\frac{8}{9}\right)^{29}$$

Assim a área da face na figura 30 será $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$ m².

Alternativa **b**.

113 **a)** Temos que a quantidade de coelhos infectados nos períodos de 5 dias forma uma PG de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão $q = 3$.

Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:

$a_5 = 5 \cdot 3^4 = 405$

Logo, serão 405 coelhos infectados.

b) Temos o total de 3.645 coelhos. Então, para que todos estejam infectados devemos ter $a_n = 3.645$.

$a_n = a_1 q^{n-1}$

$\therefore 3.645 = 5 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 729 = 3^{n-1}$

$\therefore 3^6 = 3^{n-1} \Rightarrow n = 7$

Portanto, no fim do dia $5 \cdot n - 4 = 31$ todos os coelhos estarão infectados.

114 No período de 1971 a 2320 temos 10 períodos de 35 anos. Como o número de furacões dobra a cada 35 anos, os números de furacões ocorridos nesses períodos formam uma PG com 10 termos, tal que $q = 2$ e $a_1 = x$.

Assim, ao longo dos 10 períodos teremos:

$$S_{10} = \frac{x(1 - 2^{10})}{1 - 2} = 1.023x$$

Portanto, no período de 1971 a 2320 ocorrerão 1.023x furacões.

115 Temos que os valores pagos nessas parcelas formam uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$ de 10 termos e $a_1 = 256$.

Sendo $S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ a soma dos n primeiros termos da PG, para $n = 10$:

$$S_{10} = \dfrac{256\left(1 - \dfrac{1}{2^{10}}\right)}{1 - \dfrac{1}{2}} = 512 \cdot \dfrac{1.023}{1.024} = 511{,}50$$

Portanto, Hélio pagou o total de R$ 511,50 pela máquina de lavar.
Alternativa **b**.

116 A sequência decrescente da 2ª coluna da tabela é a PG (a_n) de razão $q = \dfrac{1}{2}$ e $a_1 = 1$. Após 20 minutos sob a atuação do fermento, obtemos o termo a_{21} da PG, cuja soma S_{21} dos 21 primeiros termos é dada por:

$$S_{21} = \dfrac{1 \cdot \left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{21}\right)}{1 - \dfrac{1}{2}}$$

Como $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{21}$ é um número muito próximo de zero, podemos obter uma aproximação de S_{21}, por:

$$S_{21} \approx \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} \Rightarrow s_{21} \approx 2$$

Assim, o volume da massa após 20 minutos de atuação do fermento é, aproximadamente, 2 vezes o volume inicial.
Alternativa **c**.

117 A cada ano a produção dessa indústria dobra e no período de 2001 a 2005 ela produziu 74.400 unidades, ou seja:

Ano	Produção
2001	x
2002	$2x$
2003	$4x$
2004	$8x$
2005	$16x$
Total	74.400

Logo, $31x = 74.400 \Rightarrow x = 2.400$.
Portanto, em 2001 a produção foi de 2.400 unidades.
As produções dessa indústria a cada ano formam uma PG de razão $q = 2$ e $a_1 = x = 2.400$.
Queremos determinar a partir de qual ano a produção será superior a 76.800 unidades.
Sendo $a_n = a_1 q^{n-1}$, temos:
$76.800 < 2.400 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 32 < 2^{n-1}$
$\therefore 2^5 < 2^{n-1} \Rightarrow n > 6$
Então, a partir de 2007 a produção será superior a 76.800 unidades.
Alternativa **b**.

118 Temos:
$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot ... \cdot 2^{20} = 2^{1+2+...+20}$
Temos no expoente a soma dos 20 termos da PA de razão $r = 1$ e $a_1 = 1$.
Sendo $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ a soma dos termos da PA, temos:

$$S_{20} = \dfrac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = 210$$

$\therefore 2^{210} = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 ... 2^{20}$
Portanto, devem ser acionadas as teclas

$\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$

Alternativa **c**.

119 Cada contribuinte gasta 90% de sua receita, e esse gasto torna-se receita para outros contribuintes; então, a cada valor gasto, sempre 90% vai gerar novos gastos. Esses gastos, em bilhões de reais, formam uma PG de primeiro termo $a_1 = 36$ e $q = 0{,}9$:
(36; 32,4; 29,16; ...)
O valor global do consumo dos contribuintes é a soma dos infinitos termos dessa PG dada por:

$$S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q} = \dfrac{36}{1 - 0{,}9} = 360$$

Portanto, o consumo global será de 360 bilhões de reais.
Alternativa **d**.

120 A afirmação é falsa, pois a velocidade de Aquiles é dez vezes a velocidade da tartaruga; assim, enquanto Aquiles percorre uma distância d, a tartaruga percorre uma distância $\dfrac{d}{10}$.
Portanto, as distâncias entre Aquiles e a tartaruga a cada vez que Aquiles cobre a distância A_0J_{n-1} formam uma PG tal que o primeiro termo é $a_1 = d_0$ e a razão é $q = \dfrac{1}{10}$.

$$\left(d_0, \dfrac{d_0}{10}, \dfrac{d_0}{10^2}, \dfrac{d_0}{10^3}, \dfrac{d_0}{10^4}, ...\right)$$

A soma dos infinitos termos dessa PG é dada por:

$$S_\infty = \dfrac{d_0}{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{10d_0}{9}$$

Assim, Aquiles alcançará a tartaruga após percorrer a distância $\dfrac{10d_0}{9}$ no tempo $\dfrac{10t_0}{9}$.

Exercícios de revisão cumulativa

1 O lucro do vendedor será o valor recebido pela venda das x unidades menos o valor gasto com a compra desses produtos, ou seja, $4 \cdot x - 600$.
Como esse lucro foi uma quantia entre 160 e 220 reais, temos:
$160 < 4 \cdot x - 600 < 220 \Rightarrow 760 < 4 \cdot x < 820$
$\therefore 190 < x < 205$
$\therefore x \in]190, 205[$
Alternativa **a**.

2 Como o raio da mancha cresce em função do tempo t obedecendo à relação $R(t) = 16t + 1$, temos que para $t = 5$:

$R(t) = 16 \cdot 5 + 1 = 81$

Assim, após 5 minutos do início do vazamento, o raio da mancha será de 81 m e, portanto, a área A ocupada por ela será:

$A = \pi \cdot 81^2 \text{ m}^2 = 6.561\pi \text{ m}^2$

3 Sabendo que o valor M de uma grandeza qualquer a partir de seu valor inicial C, do tempo t e da taxa constante i de crescimento é dado por $M = C(1 + i)^t$, temos, nesse caso:

$t = 50$ anos

$C = 1{,}2$ bilhões

$i = -0{,}5\%$ ao ano

$\therefore M = 1{,}2 \cdot (1 - 0{,}005)^{50} \Rightarrow M = 1{,}2 \cdot 0{,}995^{50} = 1{,}2 \cdot 0{,}9^2$

$\therefore M = 0{,}972$ bilhões

Portanto a população da China no ano 2050 será de 0,972 bilhões de habitantes, o que equivale a:

$0{,}972 \cdot 10^9$ habitantes $= 9{,}72 \cdot 10^8$ habitantes

Alternativa **a**.

Análise da resolução

O primeiro membro da equação representa a soma dos infinitos termos da PG em que o primeiro termo a_1 e a razão q são x e $\frac{x}{2}$, respectivamente. A condição para que exista essa soma é que $-1 < \frac{x}{2} < 1$, ou seja, $-2 < x < 2$.

Sob essa condição, aplicamos a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$:

$$6 - 4x = \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} \Rightarrow 6 - 4x = \frac{x}{\frac{2 - x}{2}}$$

$$\therefore 6 - 4x = \frac{2x}{2 - x} \Rightarrow 12 - 6x - 8x + 4x^2 = 2x$$

$$\therefore 4x^2 - 16x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Calculando o discriminante da equação, temos:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$

Logo:

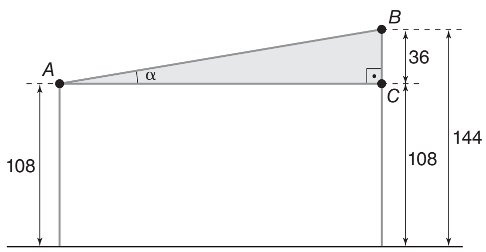
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1$$

Apenas $x = 1$ satisfaz a condição de existência; portanto, o conjunto solução é $S = \{1\}$.

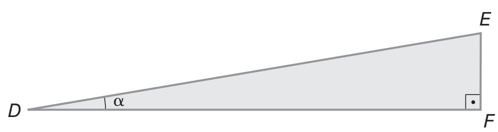
RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 Esquematizando a situação, temos:



Para calcular a distância *AB*, podemos construir com régua e compasso um triângulo *DEF* semelhante ao triângulo *ABC*:

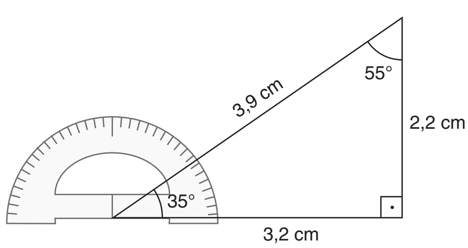


Medindo os lados *DE* e *EF* desse triângulo, obtemos a medida *AB* pela proporção:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{36}{EF} \Rightarrow AB = \frac{36 \cdot DE}{EF}$$

Exercícios propostos

1 a) Resposta possível:



b) Valores aproximados:

	35°	55°
sen	0,56	0,82
cos	0,82	0,56
tg	0,69	1,45

2 a) $\cos 28° = \frac{x}{4} \Rightarrow 0{,}88 = \frac{x}{4}$

Logo: $x = 3{,}52$ cm

b) $\text{sen } 28° = \frac{x}{5} \Rightarrow 0{,}46 = \frac{x}{5}$

Logo: $x = 2{,}3$ cm

c) $\text{tg } 28° = \frac{x}{10} \Rightarrow 0{,}53 = \frac{x}{10}$

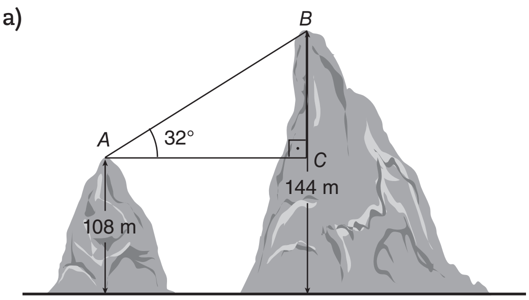
Logo: $x = 5{,}3$ dm

3 No triângulo retângulo *ABC*, estão relacionados o ângulo agudo (44°), o cateto oposto (ℓ) e o cateto adjacente (40 m). A razão trigonométrica que relaciona essas medidas é a tangente; logo:

$\text{tg } 44° = \frac{\ell}{40} \Rightarrow 0{,}96 = \frac{\ell}{40}$, ou seja, $\ell = 38{,}4$

Assim, a largura do rio é 38,4 m.

4 a)



b) $\text{sen } 32° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow 0{,}52 = \frac{36}{AB}$

$AB \approx 69{,}23$

Logo, a distância entre *A* e *B* é 69,23 m, aproximadamente.

5 $\text{tg } 55° = \frac{x}{27}$

Como $\text{tg } 55° = \frac{0{,}81}{0{,}57} \approx 1{,}42$, temos:

$1{,}42 \approx \frac{x}{27} \Rightarrow x \approx 38{,}34$

Logo, o valor *x* na figura é, aproximadamente, 38,34 cm.

6 Temos:

$\cos 10° = \text{sen } 80° = 0{,}98$

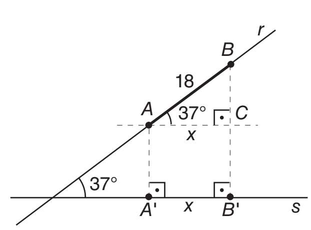
$\cos 80° = \text{sen } 10° = 0{,}17$

$$\text{tg } 10° = \frac{\text{sen } 10°}{\cos 10°} = \frac{0{,}17}{0{,}98} \approx 0{,}17$$

$$\text{tg } 80° = \frac{\text{sen } 80°}{\cos 80°} = \frac{0{,}98}{0{,}17} \approx 5{,}76 \text{ e, portanto:}$$

	10°	80°
sen	0,17	0,98
cos	0,98	0,17
tg	0,17	5,76

7



$\cos 37° = \frac{x}{18}$

Como $\cos 37° = \text{sen } 53° = 0{,}79$, temos:

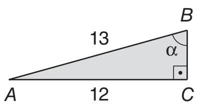
$0{,}79 = \frac{x}{18} \Rightarrow x = 14{,}22$

Logo: $A'B' = 14{,}22$ cm

8 Temos: $\text{sen}\,(90° - \alpha) = \cos\alpha$ e $\cos\,(90° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

$\therefore\ E = \dfrac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha} + \text{sen}\,\alpha = 1 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$

9 Como α é a medida de um ângulo agudo e $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{12}{13}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a ele mede 12 e a hipotenusa mede 13:



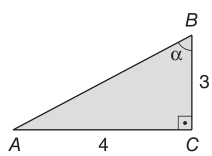
Aplicando o teorema de Pitágoras:

$13^2 = (BC)^2 + 12^2 \Rightarrow BC = 5$

Logo:

$\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ e $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{12}{5}$

10 Se α é a medida de um ângulo agudo e $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{3}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo de medida α tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 4 e o cateto adjacente mede 3:



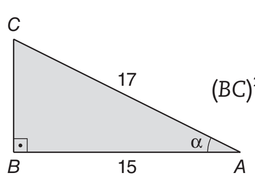
Pelo teorema de Pitágoras:

$(AB)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow AB = 5$

Logo:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{4}{5}$ e $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

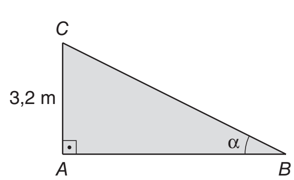
11 **a)** Sendo α a medida de um ângulo agudo $B\hat{A}C$ de um triângulo retângulo ABC, com $AC = 17$ e $AB = 15$, temos:



$(BC)^2 + 15^2 = 17^2 \Rightarrow BC = 8$

Logo: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{BC}{15} = \dfrac{8}{15}$

b) Temos $\triangle ABC$:



A distância dos olhos do espectador à base da tela é a medida do segmento $\overline{AB}$.

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{8}{15} = \dfrac{3{,}2}{AB}$

$\therefore\ AB = 6$ m

Então, a distância dos olhos do espectador à base da tela é 6 m.

12 $E = \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4}{(\sqrt{3})^4} = \dfrac{\dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{16}}{9} = \dfrac{1}{16}$

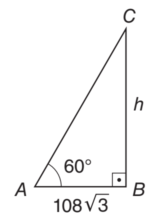
13 $E = \dfrac{\text{sen}\,30° + \cos 15° - \text{sen}\,75°}{\text{tg}^2\,60°}$

Como 15° e 75° são complementares, temos:

$E = \dfrac{\text{sen}\,30° + \cos 15° - \cos 15°}{\text{tg}^2\,60°} = \dfrac{\text{sen}\,30°}{\text{tg}^2\,60°}$

$E = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{(\sqrt{3})^2} = \dfrac{1}{6}$

14 Indicando por h a medida da altura $\overline{BC}$ da torre Eiffel, esquematizamos:



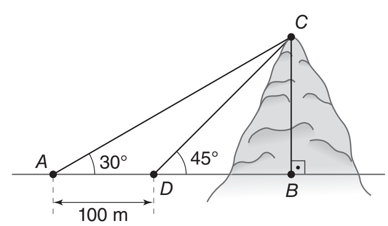
Logo:

$\text{tg}\,60° = \dfrac{h}{108\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot 108\sqrt{3} = h$

$\therefore\ h = 324$

Concluímos, então, que a torre Eiffel tem 324 m de altura.

15 Esquematizando a situação, temos:



Assim:

$\text{tg}\,30° = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{BC}{100 + BD}$ (1)

$\text{tg}\,45° = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow 1 = \dfrac{BC}{BD}$

$\therefore\ BC = BD$ (2)

De (1) e (2), temos:

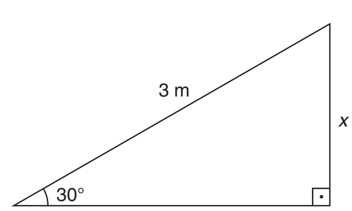
$\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{BC}{100 + BC} \Rightarrow \sqrt{3}(100 + BC) = 3 \cdot BC$

$\therefore\ (3 - \sqrt{3})BC = 100\sqrt{3} \Rightarrow BC = \dfrac{100\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$

$\therefore\ BC = 50(\sqrt{3} + 1) \approx 137$

Logo, a altura da parte emersa é $50(\sqrt{3} + 1)$ m ou, aproximadamente, 137 m.

16



$\text{sen}\,30° = \dfrac{x}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{3}$; logo $x = 1{,}5$

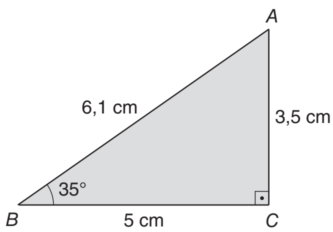
Assim, a altura de cada degrau é $\dfrac{1{,}5}{6}$ m, ou seja, 0,25 m.

Alternativa **c**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a) Com régua e transferidor, construímos um triângulo retângulo *ABC* que tenha um ângulo interno de medida 35° e medimos seus lados.



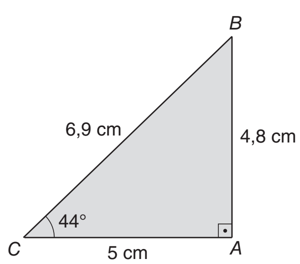
Então, do $\triangle ABC$, temos:

$\text{sen } 35° = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3{,}5}{6{,}1} \approx 0{,}57$

$\cos 35° = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{5}{6{,}1} \approx 0{,}82$

$\text{tg } 35° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3{,}5}{5} = 0{,}70$

b) Com régua e transferidor, construímos um triângulo retângulo *ABC* que tenha um dos ângulos internos de medida 44°.



Pelas definições de sen α, cos α e tg α, temos:

$\text{sen } 44° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4{,}8}{6{,}9} \approx 0{,}69$

$\cos 44° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{6{,}9} \approx 0{,}72$

$\text{tg } 44° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4{,}8}{5} = 0{,}96$

(**Nota:** Quando medimos um segmento de reta com régua graduada, inevitavelmente cometemos erros de aproximação. Por isso, os resultados obtidos nesses itens são valores aproximados.)

2 a) $\text{tg } 70° = \dfrac{x + 18}{2x} \Rightarrow 2{,}75 = \dfrac{x + 18}{2x}$

$\therefore\ x = 4$

b) Como 20° e 70° são ângulos complementares, temos que sen 20° = cos 70°. Então:

$\text{sen } 20° = \cos 70° = \dfrac{2x - 8{,}26}{x + 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}34 = \dfrac{2x - 8{,}26}{x + 5}$

$\therefore\ x = 6$

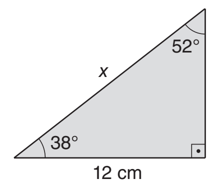
c) $\text{sen } 70° = \dfrac{x + \sqrt{2}}{x + 2\sqrt{2}} \Rightarrow 0{,}94 = \dfrac{x + \sqrt{2}}{x + 2\sqrt{2}}$

$\therefore\ x = \dfrac{44\sqrt{2}}{3}$

3 Aplicando o teorema da soma dos ângulos internos:

$(\alpha + 34°) + (\alpha + 20°) + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 18°$

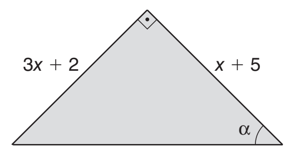
Logo:



$\text{sen } 52° = \dfrac{12}{x} \Rightarrow 0{,}79x = 12$

$\therefore\ x \approx 15{,}19$ cm

4



$\text{tg } \alpha = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = \dfrac{3x + 2}{x + 5} \Rightarrow x = \dfrac{7}{9}$

5 Queremos mostrar que:

$\text{sen } \alpha + \cos \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow \text{tg } \alpha + 1 = \cos \alpha$

Dividindo ambos os membros da primeira igualdade por cos α, temos:

$\text{sen } \alpha + \cos \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \dfrac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$

$\therefore\ \text{tg } \alpha + 1 = \cos \alpha$

6 $4 \text{ sen } \alpha = 3 \cos \alpha \Rightarrow \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{3}{4}$

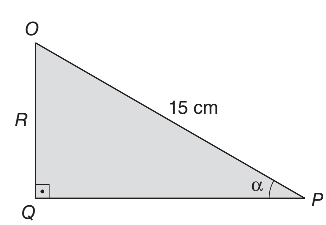
$\therefore\ \text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4}$

Logo, $E = \dfrac{4 \cdot \frac{3}{4} - 2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{9}{16}} = \dfrac{16}{9}$

7 Os ângulos de medidas 72° e 18° são complementares; portanto: sen 72° = cos 18° = 0,95 e sen 18° = cos 72° = 0,31

Assim: $x = 0{,}31$ e $y = 0{,}95$

8 Sendo *R* a medida do raio $\overline{OQ}$, temos o $\triangle OPQ$:

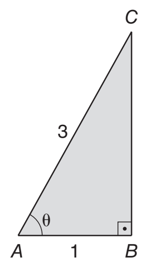


Do enunciado, cos (90° − α) = 0,3. Como cos (90° − α) = sen α, então sen α = 0,3.

$\text{sen } \alpha = \dfrac{OQ}{PO} \Rightarrow 0{,}3 = \dfrac{R}{15}$

$\therefore\ R = 4{,}5$ cm

9 Sendo θ a medida de um ângulo agudo $B\hat{A}C$ de um triângulo retângulo ABC, com $AB = 1$ e $AC = 3$, temos:

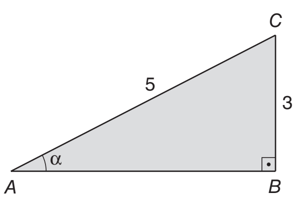


$(BC)^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow BC = 2\sqrt{2}$

Logo, $\text{sen}\ \theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ e

$\text{tg}\ \theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$

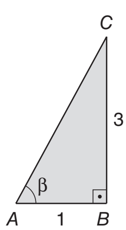
10 $\text{sen}\ \alpha = 0{,}6 = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$. Assim, sendo α a medida de um ângulo agudo $B\hat{A}C$ de um triângulo retângulo ABC, com $AC = 5$ e $BC = 3$, temos:



$(AB)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow AB = 4$

Logo, $\cos \alpha \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$ e $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

11 $\text{tg}\ \beta = \dfrac{3}{1}$. Assim, sendo β a medida de um ângulo agudo $B\hat{A}C$ de um triângulo retângulo ABC, com $AB = 1$ e $BC = 3$, temos:



$(AC)^2 = 3^2 + 1^2 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$

Logo, $\text{sen}\ \beta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ e

$\cos \beta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

12 a) $\text{tg}\ 60° = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{AB}{20}$

$\therefore\ AB = 20\sqrt{3}$ cm

Pelo teorema da soma dos ângulos internos, $m(A\hat{B}C) = 45°$; então, o $\triangle ABC$ é isósceles.

Sabemos que em um triângulo isósceles retângulo os catetos têm a mesma medida; então, $AB = AC$.

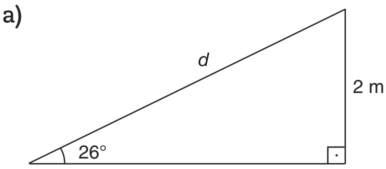
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 \Rightarrow x^2 = \left(20\sqrt{3}\right)^2 + \left(20\sqrt{3}\right)^2$

$\therefore\ x = 20\sqrt{6}$ cm

Exercícios contextualizados

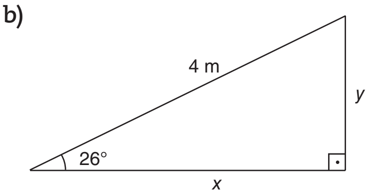
13 a)



$\text{sen}\ 26° = \dfrac{2}{d} \Rightarrow 0{,}43 = \dfrac{2}{d}$, ou seja, $d \approx 4{,}6$

Logo, o carrinho percorrerá 4,6 m, aproximadamente.

b)

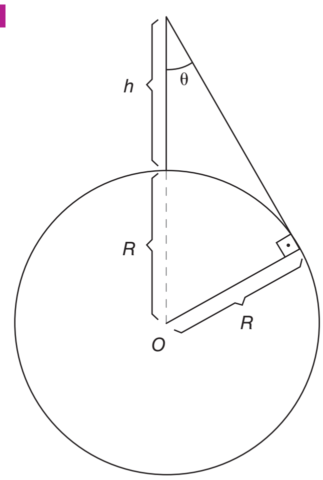


$\cos 26° = \dfrac{x}{4} \Rightarrow 0{,}89 = \dfrac{x}{4}$, ou seja, $x = 3{,}56$

$\text{sen}\ 26° = \dfrac{y}{4} \Rightarrow 0{,}43 = \dfrac{y}{4}$, ou seja, $y = 1{,}72$

Logo, os deslocamentos horizontal e vertical são 3,56 m e 1,72 m, respectivamente.

14



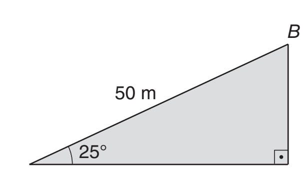
O é o centro da Terra.

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{R}{h + R} \Rightarrow R = h\text{sen}\ \theta + R\text{sen}\ \theta$

$\therefore\ R - R\text{sen}\ \theta = h\text{sen}\ \theta \Rightarrow R(1 - \text{sen}\ \theta) = h\text{sen}\ \theta$

$\therefore\ R = \dfrac{h\text{sen}\ \theta}{1 - \text{sen}\ \theta}$

15 A altura pedida é igual à medida do cateto $\overline{BC}$ de um triângulo ABC, retângulo em C, com $AB = 50$ m e $m(B\hat{A}C) = 25°$.

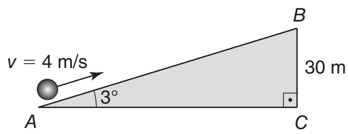


$\text{sen}\ 25° = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow 0{,}42 = \dfrac{BC}{50}$

$\therefore\ BC = 21$ m

Logo, a altura procurada é 21 m.

16 Temos o esquema:



Sabendo que sen 3° = 0,05, temos:

$\text{sen } 3° = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow 0{,}05 = \dfrac{30}{AB}$

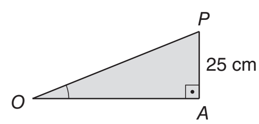
$\therefore AB = 600$ m

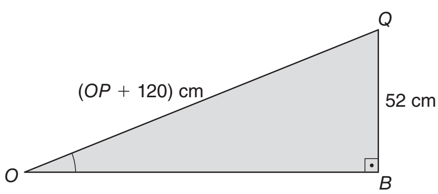
Sabemos que $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ em que v é a velocidade durante o trajeto, Δs a distância percorrida e Δt o tempo gasto; então:

$4 = \dfrac{600}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 150 \text{ s} = 2{,}5 \text{ min}$

Alternativa **a**.

17 Pelo caso *AA*, os $\triangle OPA$ e $\triangle OQB$ são semelhantes; então:





Por semelhança de triângulos, temos:

$\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{PA}{QB} \Rightarrow \dfrac{OP}{OP + 120} = \dfrac{25}{52}$

$\therefore OP = \dfrac{1.000}{9}$ cm

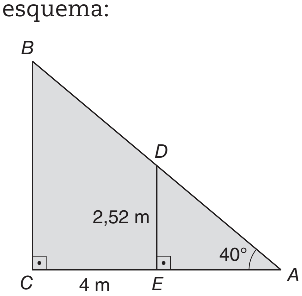
Sendo $m(A\hat{O}P) = \alpha$, temos:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{AP}{OP} = \dfrac{25}{\dfrac{1.000}{9}} \Rightarrow \text{sen } \alpha \approx 0{,}225$

Da tabela, temos que sen 13° = 0,225.

Alternativa **c**.

18 Temos o esquema:



No $\triangle ADE$:

$\text{tg } 40° = \dfrac{DE}{AE} \Rightarrow 0{,}84 = \dfrac{2{,}52}{AE}$

$\therefore AE = 3$ m

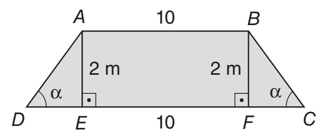
No $\triangle ABC$:

$\cos 40° = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow 0{,}77 = \dfrac{4 + 3}{AB}$

$\therefore AB = \dfrac{700}{77} \text{ m} \approx 9{,}09 \text{ m}$

Portanto, a escada tem, aproximadamente, 9,09 m de comprimento.

19 Temos que a calçada é formada por 5 trapézios isósceles *ABCD*:



Sabendo que a medida a_i de cada ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada por

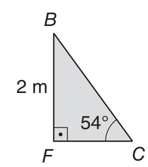
$a_i = \dfrac{180° (n - 2)}{n}$, temos:

$a_i = \dfrac{180° (5 - 2)}{5} = 108°$

Como o lado $\overline{BC}$ do trapézio está contido na bissetriz do ângulo interno do pentágono, temos:

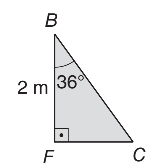
$\alpha = 54°$

Temos então que os triângulos *BCF* e *ADE* são congruentes.



Pelo teorema da soma dos ângulos internos, temos:

$m(C\hat{B}F) = 36°$



$\text{tg } 36° = \dfrac{FC}{2} \Rightarrow FC = 2 \text{ tg } 36°$

Pela congruência dos triângulos *BCF* e *ADE*, temos:

$DE = FC = 2 \text{ tg } 36°$

O perímetro externo *P* é dado pela soma das medidas das bases maiores dos trapézios:

$P = 5 \cdot (DE + EF + FC) =$

$= 5(2 \text{ tg } 36° + 10 + 2 \text{ tg } 36°) = 10(5 + 2 \text{ tg } 36°)$

Alternativa **d**.

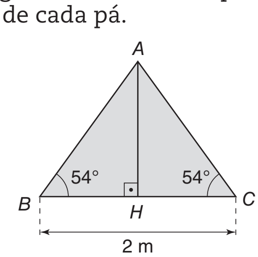
20 Os extremos móveis das pás são vértices de um pentágono regular.

Sabemos que a medida de cada ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada por

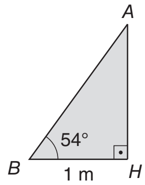
$a_i = \dfrac{180° (n - 2)}{n}$, então:

$a_i = \dfrac{180° (5 - 2)}{5} = 108°$

Temos que o pentágono é formado por cinco triângulos isósceles *ABC* em que as medidas dos lados congruentes $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ representam o comprimento de cada pá.



Num triângulo isósceles, a altura $\overline{AH}$ também é mediana e, portanto, H é ponto médio de $\overline{BC}$. Assim, temos o $\triangle AHB$:



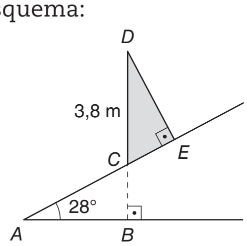
Pelo teorema da soma dos ângulos internos, $m(B\hat{A}H) = 36°$ e, portanto:

$\text{sen } 36° = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow 0{,}588 = \dfrac{1}{AB}$

$\therefore\ AB \approx 1{,}70$ m

Logo, o comprimento de cada pá é, aproximadamente, 1,70 m.

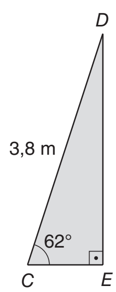
21 Temos o esquema:



Pelo teorema da soma dos ângulos internos, no $\triangle ABC$:

$m(A\hat{C}B) + 28° + 90° = 180° \Rightarrow m(A\hat{C}B) = 62°$

Temos que $m(D\hat{C}E) = m(A\hat{C}B) = 62°$, pois $D\hat{C}E$ e $A\hat{C}B$ são ângulos opostos pelo vértice. Assim:



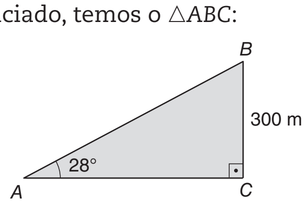
Pelo teorema da soma dos ângulos internos, $m(C\hat{D}E) = 28°$ e portanto:

$\text{sen } 28° = \dfrac{CE}{DC} \Rightarrow 0{,}47 = \dfrac{CE}{3{,}8}$

$\therefore\ CE = 1{,}786$ m

Logo, o comprimento da sombra do pinheiro é 1,786 m.

22 Do enunciado, temos o $\triangle ABC$:



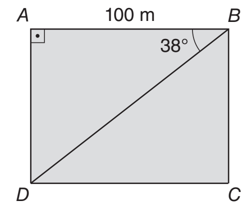
Sendo AC a distância pedida, temos:

$\text{tg } 28° = \dfrac{\text{sen } 28°}{\cos 28°} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow \dfrac{0{,}47}{0{,}88} = \dfrac{300}{AC}$

$\therefore\ AC \approx 561{,}7$ m

Logo, a distância entre a cabeceira da pista e o ponto do qual decolou o avião é, aproximadamente, 561,7 m.

23 Do enunciado, temos o retângulo $ABCD$:

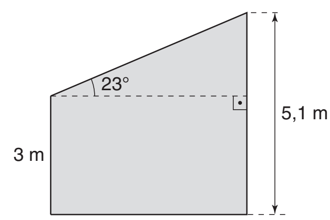


$\text{tg } 38° = \dfrac{\text{sen } 38°}{\cos 38°} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow \dfrac{0{,}65}{0{,}79} = \dfrac{AD}{100}$

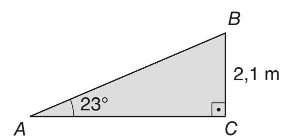
$\therefore\ AD \approx 82{,}3$ m

Logo, a largura do campo é, aproximadamente, 82,3 m.

24 Do enunciado temos:



Dessa figura, destacamos o $\triangle ABC$:

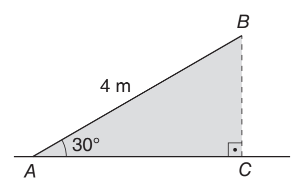


$\text{tg } 23° = \dfrac{\text{sen } 23°}{\cos 23°} = \dfrac{BC}{CA} \Rightarrow \dfrac{0{,}39}{0{,}92} = \dfrac{2{,}1}{CA}$

$\therefore\ CA \approx 4{,}95$ m

Logo, a distância entre as paredes é, aproximadamente, 4,95 m.

25 Quando a inclinação é máxima, temos o $\triangle ABC$:



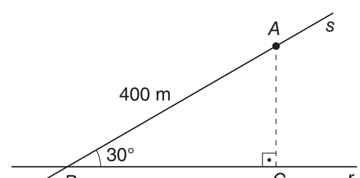
Sendo $\overline{BC}$ a altura do ponto B em relação ao plano horizontal, temos:

$\text{sen } 30° = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{BC}{4}$

$\therefore\ BC = 2$ m

Logo, a altura é 2 m.

26



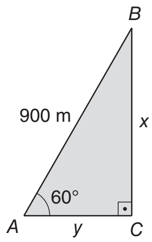
Sendo B o ponto de encontro das duas avenidas e AC a distância do posto A à avenida r, temos no $\triangle ABC$:

$\text{sen } 30° = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{AC}{400}$

$\therefore\ AC = 200$ m

Alternativa **e**.

27 Após 5 segundos, com uma velocidade igual a 180 m/s, o foguete terá percorrido 900 m. Assim, temos o $\triangle ABC$:



A é o ponto de lançamento, B a posição do foguete após 5 segundos e BC a altura nesse ponto. Então:

$\text{sen } 60° = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{900}$

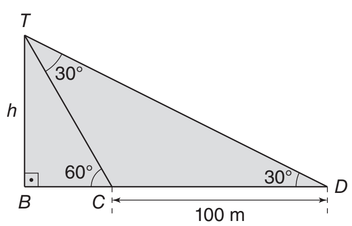
$\therefore\ x = 450\sqrt{3}\,\text{m}$

$\cos 60° = \dfrac{CA}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{y}{900}$

$\therefore\ y = 450\ \text{m}$

Alternativa **d**.

28 Esquematizamos a situação, para $BT = h$:



Como o triângulo CDT é isósceles, temos:

$CT = CD = 100\ \text{m}$

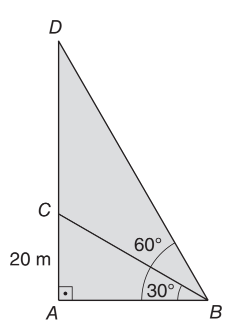
Logo, do triângulo CBT, concluímos:

$\text{sen } 60° = \dfrac{BT}{CT} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{100}$

$\therefore\ h = 50\sqrt{3}\ \text{cm}$

Portanto, a altura do penhasco é $50\sqrt{3}$ m ou, aproximadamente, 86,6 m.

29 Do enunciado:



Temos que AC é a altura no 1º ponto e AD é a altura no 2º ponto. No $\triangle ABC$, temos:

$\text{tg } 30° = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{20}{AB}$

$\therefore\ AB = 20\sqrt{3}\ \text{m}$

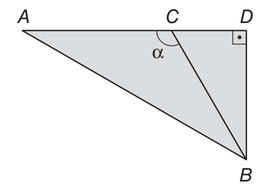
No $\triangle ABD$:

$\text{tg } 60° = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{AD}{20\sqrt{3}}$

$\therefore\ AD = 60\ \text{m}$

Logo, sob o ângulo de 60°, o balão estava a 60 metros de altura.

30 Do enunciado.



Sendo $BD = x$, temos que $AB = 2x$.

Sendo $m(B\hat{A}C) = \beta$, temos:

$\text{sen } \beta = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30°$

O $\triangle ABC$ é isósceles, pois $AC = BC$; portanto, $m(A\hat{B}C) = m(B\hat{A}C) = \beta = 30°$.

Pelo teorema da soma dos ângulos internos, temos:

$\alpha + 30° + 30° = 180° \Rightarrow \alpha = 120°$

Alternativa **b**.

31 Seja n o número máximo de degraus que podem ser inteiramente visíveis.

A medida p da hipotenusa do triângulo retângulo da figura representa a distância percorrida pelos degraus:

$p = (72 \cdot 0{,}2)\ \text{m} = 14{,}4\ \text{m}$

A medida q do cateto horizontal do triângulo retângulo da figura representa a soma das extensões de $n - 2$ degraus (excluídos o primeiro e o último):

$\cos 30° = \dfrac{q}{p} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{q}{14{,}4}$

$\therefore\ 0{,}85 = \dfrac{q}{14{,}4} \Rightarrow q = 12{,}24\ \text{m}$

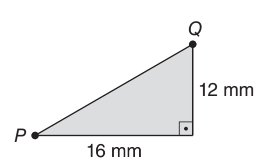
Assim:

$\dfrac{12{,}24}{n - 2} = 0{,}36 \Rightarrow n = 36$

Logo, o número máximo de degraus inteiramente visíveis é 36.

Exercícios de revisão cumulativa

1 Do enunciado, temos o triângulo:

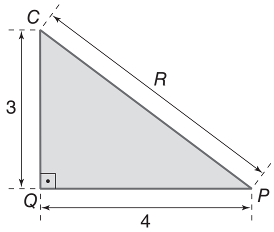


Aplicando o teorema de Pitágoras:

$(PQ)^2 = 16^2 + (12)^2 \Rightarrow (PQ)^2 = 400$

$\therefore\ PQ = 20\ \text{mm}$

2 A medida R do raio é a medida da hipotenusa de um triângulo de catetos 4 e 3:



Logo: $R^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow R = 5$

3 a) Sendo M o montante, C o capital inicial, t a taxa por período e n o número de períodos, temos:

$M = C(1 + t)^n \Rightarrow M = 1.000\left(1 + \dfrac{2,2}{100}\right)^5$

$\therefore\ M \approx 1.114,95$

Logo, nesses 5 meses, o montante acumulado foi R$ 1.114,95, aproximadamente.

b) O juro J produzido é a diferença entre o montante M e o capital inicial C, isto é:

$J = M - C \Rightarrow J = 1.114,95 - 1.000 = 114,95$

Logo, o juro produzido foi, aproximadamente, R$ 114,95.

4 a) $f(x + 4) = 3x - 1$

Queremos $f(10)$, logo:

$x + 4 = 10 \Rightarrow x = 6$

Então:

$f(10) = 3 \cdot 6 - 1 \Rightarrow f(10) = 17$

b) Fazendo $x + 4 = t$, temos:

$x + 4 = t \Rightarrow x = t - 4$

Então:

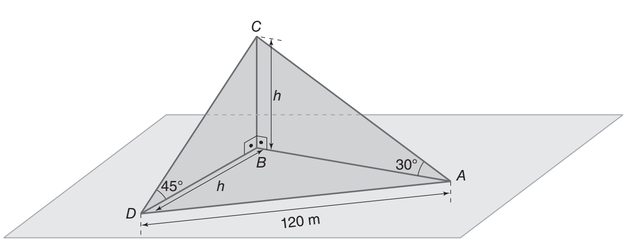
$f(t) = 3(t - 4) - 1 \Rightarrow f(t) = 3t - 13$

ou, em relação à variável x:

$f(x) = 3x - 13$

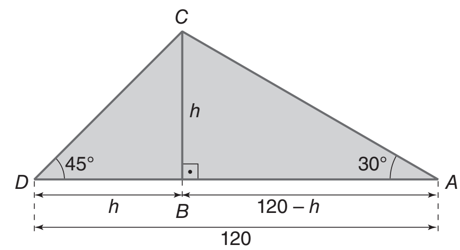
Análise da resolução

O triângulo BCD é isósceles, pois tem dois ângulos internos de 45°; logo, $BD = BC = h$



Esses dados são insuficientes para determinar a altura h, pois, para isso, deveríamos conhecer a medida de um ângulo interno do triângulo ABD ou a medida de mais um lado de um dos triângulos. Porém, podemos limitar os possíveis valores de h a um intervalo, de acordo com a seguinte análise:

I. Se os pontos A, B e D fossem colineares, com B entre A e D, teríamos:



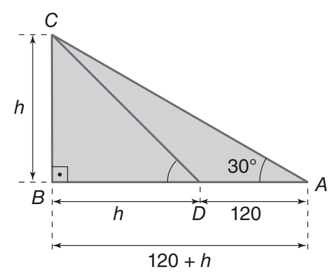
$\text{tg } 30° = \dfrac{h}{120 - h} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{120 - h}$

$\therefore\ 3h = 120\sqrt{3} - \sqrt{3}h \Rightarrow h\left(3 + \sqrt{3}\right) = 120\sqrt{3}$

$\therefore\ h = \dfrac{120\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow h = 60\sqrt{3} - 60$

$\therefore\ h \approx 43,9$ m

II. Se os pontos A, B e D fossem colineares, com D entre A e B, teríamos:



$\text{tg } 30° = \dfrac{h}{120 + h} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{120 + h}$

$\therefore\ 3h = 120\sqrt{3} + \sqrt{3}h \Rightarrow h\left(3 - \sqrt{3}\right) = 120\sqrt{3}$

$\therefore\ h = \dfrac{120\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow h = 60\sqrt{3} + 60$

$\therefore\ h \approx 163,9$ m

Como o enunciado do problema garante que A, B e D são vértices de um triângulo, temos que nenhuma das situações (I) ou (II) ocorre; logo, concluímos que 43,9 m $< h <$ 163,9 m.

Alternativa **c**.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 A Giranda Mundi tem 14 ângulos de medida α, e, lembrando que a circunferência mede 360°, temos:

$$\alpha = \frac{360°}{14} \approx 25{,}7°$$

Portanto, a medida α do ângulo central é aproximadamente 25,7°.

2 A London Eye tem 135 metros de altura, então o raio de sua circunferência mede 67,5 metros. Como o comprimento de uma circunferência é dado por $C = 2\pi r$, temos:

$$C \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 67{,}5 = 423{,}9$$

Logo, a circunferência da London Eye tem aproximadamente 424 metros.

3 A Singapore Flyer tem 165 metros de altura, então o raio de sua circunferência mede 82,5 metros. O comprimento de sua circunferência, em metro, é:

$$C \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 82{,}5 = 518{,}1$$

Como o comprimento da circunferência da Singapore Flyer é aproximadamente 518 metros e cada ciclo (volta completa) demora 37 minutos, a velocidade v de giro dessa roda-gigante é:

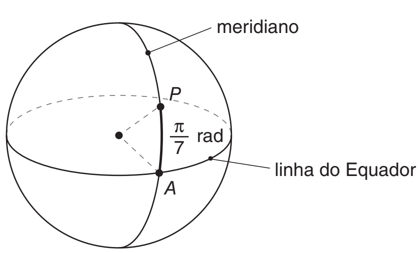
$$v \approx \frac{518 \text{ m}}{37 \text{ min}} = 14 \text{ m/min}$$

Exercícios propostos

1 A razão entre o comprimento do arco e a medida do raio, nessa ordem, é a medida x do arco em radiano, ou seja:

$$x = \frac{10}{2{,}5} \cdot \text{rad} \Rightarrow x = 4 \text{ rad}$$

2



Dividindo o comprimento C do arco $\overset{\frown}{PA}$ pela medida do raio da Terra, obtém-se a medida desse arco em radiano:

$$\frac{C}{6.370} = \frac{\pi}{7} \Rightarrow C = 910\pi$$

Logo, o comprimento do arco $\overset{\frown}{PA}$ é 910π km.
Alternativa **b**.

3 Como o ponteiro maior mede 2 m, podemos dizer que essa é a medida do raio da circunferência descrita pelo movimento realizado pela ponta móvel do ponteiro maior.

Sabemos que em 1 hora essa ponta móvel percorre toda a circunferência ($2 \cdot \pi \cdot 2 \text{ m} = 4\pi \text{ m}$).
Então:

$$\begin{array}{lcl} 1\text{h} & \text{———} & 4\pi \text{ m} \\ t & \text{———} & 5\pi \text{ m} \end{array}$$

$$t = \frac{1\text{h} \cdot 5\pi \text{ m}}{4\pi \text{ m}} = 1{,}25\text{h} = 1\text{h } 15\text{min}$$

Alternativa **a**.

4 a)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 30 \end{array} \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, 30° equivalem a $\frac{\pi}{6}$ rad.

b)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 120 \end{array} \Rightarrow x = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

Portanto, 120° equivalem a $\frac{2\pi}{3}$ rad.

c)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 225 \end{array} \Rightarrow x = \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$$

Portanto, 225° equivalem a $\frac{5\pi}{4}$ rad.

d)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 300 \end{array} \Rightarrow x = \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$$

Portanto, 300° equivalem a $\frac{5\pi}{3}$ rad.

e)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 240 \end{array} \Rightarrow x = \frac{240\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, 240° equivalem a $\frac{4\pi}{3}$ rad.

f)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 330 \end{array} \Rightarrow x = \frac{330\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}$$

Portanto, 330° equivalem a $\frac{11\pi}{6}$ rad.

5 a)
$$\begin{array}{lcl} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{\pi}{4} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 180°}{\pi} \quad \therefore x = 45°$$

b)
$$\begin{array}{lcl} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{3\pi}{2} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{3\pi}{2} \cdot 180°}{\pi} \quad \therefore x = 270°$$

c)
$$\begin{array}{lcl} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{7\pi}{6} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{7\pi}{6} \cdot 180°}{\pi} \quad \therefore x = 210°$$

d)
$$\begin{array}{lcl} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{2\pi}{5} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{2\pi}{5} \cdot 180°}{\pi} \quad \therefore x = 72°$$

e)
$$\begin{array}{lcl} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{5\pi}{3} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{5\pi}{3} \cdot 180°}{\pi} \quad \therefore x = 300°$$

6 Quando a polia maior gira $\frac{4\pi}{3}$ rad (ou 240°), a menor gira α rad tal que: $\frac{\alpha}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{12}{4} \Rightarrow \alpha = 4\pi$

Alternativa **d**.

7 a) $x_1 = 50°$

$x_2 = 50° + 360° = 410°$

$x_3 = 50° + 2 \cdot 360° = 770°$

Logo, as medidas procuradas são 50°, 410° e 770°.

b) $x_1 = 50° - 360° = -310°$

$x_2 = 50° - 2 \cdot 360° = -670°$

Logo, as medidas procuradas são $-310°$ e $-670°$.

8 a) $x_1 = \frac{6\pi}{7}$

$x_2 = \frac{6\pi}{7} + 2\pi \Rightarrow x_2 = \frac{20\pi}{7}$

$x_3 = \frac{6\pi}{7} + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x_3 = \frac{34\pi}{7}$

Logo, as medidas procuradas são $\frac{6\pi}{7}$ rad, $\frac{20\pi}{7}$ rad e $\frac{34\pi}{7}$ rad.

b) $x_2 = \frac{6\pi}{7} - 2\pi \Rightarrow x_2 = -\frac{8\pi}{7}$

$x_3 = \frac{6\pi}{7} - 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x_3 = -\frac{22\pi}{7}$

Logo, as medidas procuradas são $-\frac{8\pi}{7}$ rad e $-\frac{22\pi}{7}$ rad.

9 a) $2.923° \;|\underline{\,360°\,}$
$\quad 43° \quad 8$

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 43°.

b) $1.972° \;|\underline{\,360°\,}$
$\quad 172° \quad 5$

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 172°.

c) $-40° + 360° = 320°$ (1ª volta positiva)

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 320°.

d) $-400° + 360° = -40$ (1ª volta negativa)

$-40° + 360° = 320°$ (1ª volta positiva)

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 320°.

e) $\frac{45\pi}{11}$ rad $= \left(\frac{44\pi}{11} + \frac{\pi}{11}\right)$ rad $= \left(4\pi + \frac{\pi}{11}\right)$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{\pi}{11}$ rad.

f) $\frac{38\pi}{5}$ rad $= \left(\frac{35\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}\right)$ rad $= \left(7\pi + \frac{3\pi}{5}\right)$ rad $=$

$= \left(6\pi + \pi + \frac{3\pi}{5}\right)$ rad $= \left(6\pi + \frac{8\pi}{5}\right)$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{8\pi}{5}$ rad.

g) $-\frac{\pi}{13}$ rad $= \left(-\frac{\pi}{13} + 2\pi\right)$ rad $= \left(\frac{-\pi + 26\pi}{13}\right)$ rad $=$

$= \frac{25\pi}{13}$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{25\pi}{13}$ rad.

h) $-\frac{18\pi}{5}$ rad $\equiv \left(-\frac{8\pi}{5} + 2\pi\right)$ rad $= \left(\frac{-8\pi + 10\pi}{5}\right)$ rad $=$

$= \frac{2\pi}{5}$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{2\pi}{5}$ rad.

10 a) $2.040° \;|\underline{\,360°\,}$
$\quad 240° \quad 5$

Logo: $x = 240°$

b) $x = 240° + 360° \Rightarrow x = 600°$

c) $x = 240° + 2 \cdot 360° \Rightarrow x = 960°$

d) $x = 240° - 360° \Rightarrow x = -120°$

11 $\frac{121\pi}{6} = \frac{120\pi + \pi}{6} = \frac{120\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 20\pi + \frac{\pi}{6}$

a) $x = \frac{\pi}{6}$

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow x = \frac{13\pi}{6}$

c) $x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{25\pi}{6}$

d) $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi \Rightarrow x = -\frac{11\pi}{6}$

12 Temos:

1 volta da engrenagem $\rightarrow \frac{1}{4}$ de volta do ponteiro

Assim:

4.135 voltas da engrenagem $\rightarrow 4.135 \cdot \frac{1}{4}$ de volta do ponteiro

$4.135 \cdot \frac{1}{4} = 1.033$ voltas $+ 0{,}75$ volta

Logo, 0,75 volta de 360° corresponde a 270°.

Alternativa **a**.

13 a) Os infinitos números reais associados ao ponto A' são:

$\ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π, podemos representar todos esses números reais por:

$x = \pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) Os infinitos números reais associados ao ponto B são:

$\ldots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π, podemos representar todos esses números reais por:

$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) Os infinitos números reais associados aos pontos B ou B' são:

$\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é π, podemos representar todos esses números reais por:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) Os infinitos números reais associados aos pontos A, B, A', B' são:

$\ldots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é $\frac{\pi}{2}$, podemos representar todos esses números reais por:

$x = \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

14 **a)** Os infinitos números reais associados aos pontos M, N, P são:

$\ldots, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, \ldots$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é $\frac{2\pi}{3}$, podemos representar todos esses números reais por:

$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) Existem infinitas expressões diferentes que podem representar esses pontos.

Para obtê-las, basta adicionar $k \cdot \frac{2\pi}{3}$ a um número qualquer associado a um dos pontos; por exemplo:

$x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

15 A cada hora:

- o ponteiro das horas gira 30°;
- o ponteiro dos minutos gira 360°.

A cada 20 minutos:

- o ponteiro das horas gira $\frac{1}{3} \cdot 30° = 10°$;
- o ponteiro dos minutos gira $\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$.

Assim, em 2.400 horas e 20 minutos, temos:

a) $2.400 \cdot 30° + 10° = 72.000° + 10° = 72.010°$

Logo, o ponteiro das horas girou 72.010°.

b) $2.400 \cdot 360° + 120° = 864.000° + 120° = 864.120°$

Logo, o ponteiro dos minutos girou 864.120°, o que corresponde a $\frac{14.402\pi}{3}$ rad.

c) Como 2.400 horas e 20 minutos equivalem a 100 dias e 20 minutos, concluímos que, quando parou de funcionar, o relógio marcava 0 h 20 min.

16 **a)** N: $180° - 22° = 158°$

P: $180° + 22° = 202°$

Q: $360° - 22° = 338°$

b) N: $\pi \text{ rad} - \frac{\pi}{7} \text{ rad} = \frac{6\pi}{7} \text{ rad}$

P: $\pi \text{ rad} + \frac{\pi}{7} \text{ rad} = \frac{8\pi}{7} \text{ rad}$

Q: $2\pi \text{ rad} - \frac{\pi}{7} \text{ rad} = \frac{13\pi}{7} \text{ rad}$

17 **a)** M: $180° - 120° = 60°$

N: 120°

P: $180° + 60° = 240°$

Q: $360° - 60° = 300°$

b) M: $210° - 180° = 30°$

N: $180° - 30° = 150°$

P: 210°

Q: $360° - 30° = 330°$

c) M: $360° - 310° = 50°$

N: $180° - 50° = 130°$

P: $180° + 50° = 230°$

Q: 310°

d) M: $\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$

N: $\frac{4\pi}{5}$

P: $\pi + \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$

Q: $2\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}$

e) M: $\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$

N: $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

P: $\frac{4\pi}{3}$

Q: $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

f) M: $2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

N: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

P: $\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}$

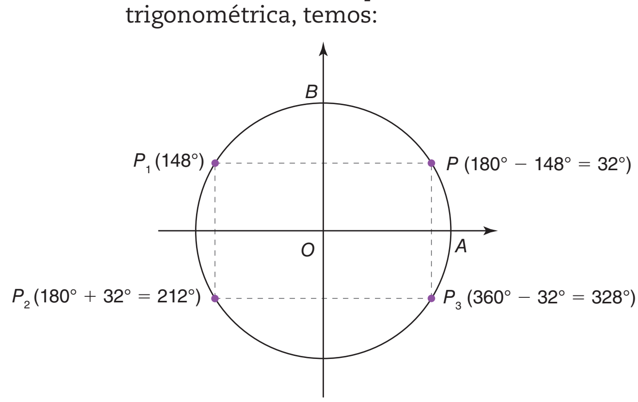
Q: $\frac{11\pi}{6}$

18 Do estudo dos espelhos planos, sabemos que a imagem de um ponto P é o simétrico a ele em relação ao plano do espelho.

Assim, considerando o plano da circunferência observada no esquema da página anterior, concluímos que:

- P_1 é o simétrico de P em relação à reta $\overleftrightarrow{OB}$;
- P_3 é o simétrico de P em relação à reta $\overleftrightarrow{OA}$;
- P_2 é o simétrico de P_1 em relação à reta $\overleftrightarrow{OA}$ (e também é simétrico de P_3 em relação à reta $\overleftrightarrow{OB}$).

Portanto, aplicando o mesmo raciocínio usado nas simetrias de um ponto da circunferência trigonométrica, temos:



Assim, concluímos que os arcos $\overset{\frown}{AP}$, $\overset{\frown}{AP_2}$ e $\overset{\frown}{AP_3}$ medem, respectivamente, 32°, 212° e 328°.

19 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$

a) $\cos 0 = 1$

b) $\text{sen } 0 = 0$

c) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

d) $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

e) $\cos \pi = -1$

f) $\text{sen } \pi = 0$

g) $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

h) $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

i) $\cos 2\pi = 1$

j) $\text{sen } 2\pi = 0$

k) $\cos 720° = \cos 0° = 1$

l) $\text{sen } 450° = \text{sen } (90° + 360°) = \text{sen } 90° = 1$

m) $\text{sen } 990° = \text{sen } (2 \cdot 360° + 270°) = \text{sen } 270° = -1$

n) $\cos 810° = \cos (2 \cdot 360° + 90°) = \cos 90° = 0$

o) $\text{sen } (-270°) = \text{sen } 90° = 1$

p) $\cos (-180°) = \cos 180° = -1$

q) $\cos 12\pi = \cos 0 = 1$

r) $\cos 11\pi = \cos (5 \cdot 2\pi + \pi) = \cos \pi = -1$

s) $\text{sen } \frac{21\pi}{2} = \text{sen } \left(\frac{20\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

t) $\text{sen } \frac{23\pi}{2} = \text{sen } \left(\frac{20\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

u) $\text{sen } (-\pi) = \text{sen } \pi = 0$

v) $\cos (-3\pi) = \cos (-2\pi - \pi) = \cos (-\pi) = \cos \pi =$
$= -1$

20 $E = \frac{\text{sen } 90° - \cos 180° + \cos 270°}{\text{sen } 270° - \cos 90°}$

$E = \frac{1 - (-1) + 0}{-1 - 0} = \frac{2}{-1} = -2$

21 a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{2} + \text{sen } \pi + \cos \frac{3\pi}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 + 0 + 0 = 2$

b) $f(\pi) = 2 \text{ sen } \pi + \text{sen } 2\pi + \cos 3\pi$

$f(\pi) = 2 \cdot 0 + 0 + (-1) = -1$

c) • $f(0) = 2 \text{ sen } 0 + \text{sen } 0 + \cos 0$

$f(0) = 2 \cdot 0 + 0 + 1 = 1$

• $f(2\pi) = 2 \cdot \text{sen } 2\pi + \text{sen } 4\pi + \cos 6\pi$

$f(2\pi) = 2 \cdot 0 + 0 + 1 = 1$

• $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2} + \text{sen } 3\pi + \cos \frac{9\pi}{2}$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot (-1) + 0 + 0 = -2$

Logo: $\frac{f(0) + f(2\pi)}{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1 + 1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

22 $E = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3}}{\text{sen } \frac{\pi}{2}} \Rightarrow E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$

23 Para $x \in \mathbb{R}$, temos:

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$

Portanto, o valor máximo de f é 1 e o valor mínimo é -1.

24 a) $\text{sen } 17° < \cos 74°$

Falso, pois $\cos 74° = \text{sen } (90° - 74°) = \text{sen } 16°$, e $\text{sen } 17° > \text{sen } 16°$.

b) $\text{sen } 74° < \cos 17°$

Falso, pois $\cos 17° = \text{sen } (90° - 17°) = \text{sen } 73°$, e $\text{sen } 74° > \text{sen } 73°$.

c) $\cos 37° = \cos 143°$

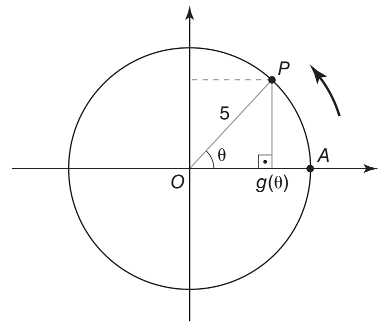
Falso, pois $\cos 37° = -\cos (180° - 37°) =$
$= -\cos 143°$.

d) $\text{sen } 31° > \text{sen } 150°$

Verdadeiro, pois $\text{sen } 150° = \text{sen } (180° - 150°) =$
$= \text{sen } 30°$, e $\text{sen } 31° > \text{sen } 30°$.

Alternativa **d**.

25 Sendo P a posição da partícula em dado instante e θ a medida do arco $\overset{\frown}{AP}$, com A(5, 0), esquematizamos:



A função g que expressa a abscissa de P para cada medida θ é:

$g(\theta) = 5 \cos \theta$ (I)

A medida θ, em radiano, pode ser obtida em função do tempo t, em segundo, pela regra de três:

deslocamento angular da partícula em radiano	tempo em segundo
2π	3
θ	t

$\therefore \theta = \frac{2\pi t}{3}$ rad (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

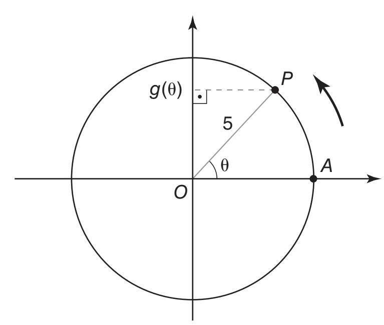
$g\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = 5 \cos \frac{2\pi t}{3}$

Indicando essa função por $f(t)$, concluímos:

$f(t) = 5 \cos \frac{2\pi t}{3}$

Alternativa **b**.

26 Sendo P a posição da partícula em dado instante e θ a medida do arco $\overset{\frown}{AP}$, com A(5, 0), esquematizamos:



A função g que expressa a ordenada de P para cada medida θ é:

$g(\theta) = 5 \text{ sen } \theta$ (I)

A medida θ, em radiano, pode ser obtida em função do tempo t, em segundo, pela regra de três:

deslocamento angular da partícula em radiano	tempo em segundo
2π	3
θ	t

$\therefore\ \theta = \dfrac{2\pi t}{3}$ rad (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

$g\left(\dfrac{2\pi t}{3}\right) = 5\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi t}{3}$

Indicando essa função por $f(t)$, concluímos:

$f(t) = 5\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi t}{3}$

Alternativa **d**.

27 a) $\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 60°) = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 120° = \cos (180° - 60°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

c) $\text{sen } 210° = \text{sen } (180° + 30°) = -\text{sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$

d) $\cos 210° = \cos (180° + 30°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen } 300° = \text{sen } (360° - 60°) = -\text{sen } 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos 300° = \cos (360° - 60°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

28 a) • M e N são simétricos em relação ao eixo das ordenadas; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são iguais. Assim, temos:

$N\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

• M e P são simétricos em relação à origem do sistema de eixos cartesianos; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são opostas. Assim, temos:

$P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

• M e Q são simétricos em relação ao eixo das abscissas; logo, suas ordenadas são opostas e suas abscissas são iguais. Assim, temos:

$Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

b) • M e P são simétricos em relação à origem do sistema de eixos cartesianos; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são opostas. Assim, temos:

$M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

• N e P são simétricos em relação ao eixo das abscissas; logo, suas ordenadas são opostas e suas abscissas são iguais. Assim, temos:

$N\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

• Q e P são simétricos em relação ao eixo das ordenadas; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são iguais. Assim, temos:

$Q\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) • M e Q são simétricos em relação ao eixo das abscissas; logo, suas ordenadas são opostas e suas abscissas são iguais. Assim, temos:

$M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

• N e Q são simétricos em relação à origem do sistema de eixos cartesianos; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são opostas. Assim, temos:

$N\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

• P e Q são simétricos em relação ao eixo das ordenadas; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são iguais. Assim, temos:

$P\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

29 a) $\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

c) $\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\cos\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

30 a) $\text{sen } (-30°) = -\text{sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$

b) $\cos (-30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen } (-300°) = -\text{sen } 300° = -(-\text{sen } 60°) =$
$= \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos (-300°) = \cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

e) $\text{sen } (-1.485°) = -\text{sen } 1.485° = -\text{sen } 45° =$
$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos (-1.230°) = \cos 1.230° = \cos 210° =$
$= -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

h) $\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

i) $\text{sen}\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = -\left(-\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right) =$
$= \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

j) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

k) $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

l) $\text{sen}\,\dfrac{25\pi}{6} = \text{sen}\left(\dfrac{24\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) =$
$= \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

m) $\text{sen}\,\dfrac{33\pi}{4} = \text{sen}\left(\dfrac{32\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right) =$
$= \text{sen}\left(8\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

31 $E = \dfrac{\cos(180° + x) + \text{sen}(180° + x) + \text{sen}(180° - x)}{\cos(360° - x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \dfrac{-\cos x - \cancel{\text{sen}\, x} + \cancel{\text{sen}\, x}}{\cos x}$

$\therefore E = -\dfrac{\cos x}{\cos x} = -1$

32 Como a medida do arco $\widehat{AN}$, na primeira volta positiva, é $\pi - \alpha$, temos que a medida do arco $\widehat{AM}$, na primeira volta positiva, é α. Então:

a) $\text{sen}\, \alpha = \dfrac{5}{13}$

b) $\cos \alpha = \dfrac{12}{13}$

c) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\dfrac{12}{13}$

d) $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\, \alpha = -\dfrac{5}{13}$

e) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha = \dfrac{12}{13}$

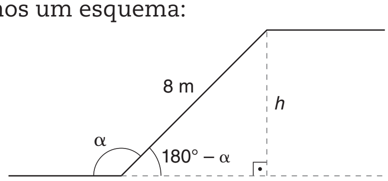
33 Se $\cos \alpha = -\dfrac{4}{7}$, então $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha = \dfrac{4}{7}$

Assim:

$\cos(180° - \alpha) = \dfrac{AB}{12} \Rightarrow AB = \dfrac{4}{7} \cdot 12 \Rightarrow AB = \dfrac{48}{7}$

Portanto, a medida do cateto $\overline{AB}$ é $\dfrac{48}{7}$ cm.

34 Façamos um esquema:



$\cos(180° - \alpha) = \dfrac{x}{8} \Rightarrow -\cos \alpha = \dfrac{x}{8}$

$\therefore -\left(-\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{x}{8} \Rightarrow x = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$8^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 39 \Rightarrow h = \sqrt{39}$

Logo, a altura do piso superior em relação ao piso inferior é $\sqrt{39}$ m ou, aproximadamente, 6,24 m.

35 $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{9}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{16}{25}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\dfrac{4}{5}$

Como $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, concluímos que $\cos \alpha = -\dfrac{4}{5}$.

36 $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\dfrac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{25}{169} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{144}{169}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\dfrac{12}{13}$

Como $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, concluímos que $\cos \alpha = \dfrac{12}{13}$.

37 $\begin{cases} \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 & \text{(I)} \\ \text{sen}\, \beta = 2\cos \beta & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$(2\cos \beta)^2 + \cos^2 \beta = 1$ e, portanto:

$4\cos^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow = 5\cos^2 \beta = 1$

$\therefore \cos^2 \beta = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \cos \beta = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$, concluímos que $\cos \beta = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Substituindo $\cos \beta$ por $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, em (II), obtemos:

$\text{sen}\, \beta = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

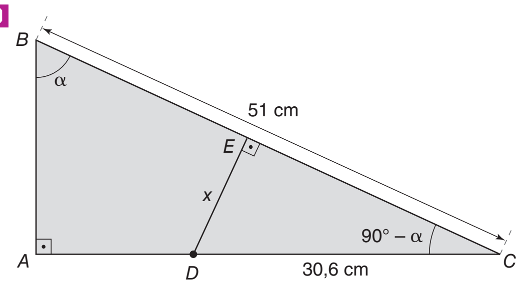
38 $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{m}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{m+1}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \dfrac{m^2}{16} + \dfrac{m+1}{4} = 1 \Rightarrow \dfrac{m^2 + 4m + 4}{16} = \dfrac{16}{16}$

$\therefore m^2 + 4m - 12 \Rightarrow m = 2$ ou $m = -6$ (não convém)

Concluímos, então, que $m = 2$.

39



Aplicando a relação fundamental, $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, calculamos $\cos \alpha$:

$\left(\dfrac{15}{17}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{289 - 225}{289} = \dfrac{64}{289}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\dfrac{8}{17}$

Como α é a medida de um ângulo agudo, só nos interessa o valor positivo do cosseno, isto é:

$\cos \alpha = \dfrac{8}{17}$

Do triângulo CDE, obtemos:

$\text{sen}(90° - \alpha) = \dfrac{x}{30{,}6} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{x}{30{,}6}$

$\therefore \dfrac{8}{17} = \dfrac{x}{30{,}6} \Rightarrow x = \dfrac{30{,}6 \cdot 8}{17} = 14{,}4$

Portanto, a distância do ponto D à hipotenusa $\overline{BC}$ é 14,4 cm.

40 Fazendo a mudança de variável $\cos x = y$, obtemos a equação do 2º grau:

$3y^2 - 4y + 1 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$

$\therefore y = \dfrac{-(-4) \pm 2}{2 \cdot 3} \Rightarrow y = 1$ ou $y = \dfrac{1}{3}$

Retornando à variável original, temos:

$\cos x = 1$ $\left(\text{não convém, pois } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ ou

$\cos x = \dfrac{1}{3}$

Pela relação fundamental ($\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$), concluímos:

$\text{sen}^2 x + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \dfrac{1}{9}$

$\therefore \text{sen}^2 x = \dfrac{8}{9} \Rightarrow \text{sen}\, x = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, só nos interessa o valor positivo do seno, isto é:

$\text{sen}\, x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

41 $\begin{cases} 4\cos^2 x + 9\,\text{sen}\,x - 6 = 0 \\ \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x + 9\,\text{sen}\,x = 6 & \text{(I)} \\ \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$4(1 - \text{sen}^2 x) + 9\,\text{sen}\,x = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\,\text{sen}^2 x - 9\,\text{sen}\,x + 2 = 0$

Fazendo a mudança de variável sen $x = t$, obtemos a equação do 2º grau:

$4t^2 - 9t + 2 = 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$

$\therefore\ t = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} \Rightarrow t = 2 \text{ ou } t = \dfrac{1}{4}$

Retornando à variável original, temos:

sen $x = 2$ (não convém) ou sen $x = \dfrac{1}{4}$

Substituindo sen x por $\dfrac{1}{4}$ na equação (I), concluímos:

$4\cos^2 x + 9 \cdot \dfrac{1}{4} = 6 \Rightarrow 4\cos^2 x = 6 - \dfrac{9}{4}$

$\therefore\ \cos^2 x = \dfrac{24 - 9}{16} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{15}{16}$

$\therefore\ \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Logo, $\cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\cos x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

42 Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$, temos:

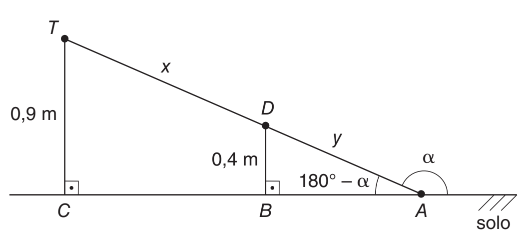
$1 - 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^2 x(1 - \text{sen}^2 x) =$

$= 1 - 2\,\text{sen}^2 x + \cancel{\text{sen}^4 x} + \text{sen}^2 x - \cancel{\text{sen}^4 x} =$

$= 1 - \text{sen}^2 x = \cos^2 x$

Alternativa **a**.

43 Sendo A o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{TD}$ com o plano do solo, esquematizamos:



Temos:

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = \dfrac{1}{5}$

Assim:

(I) Do triângulo ADB, obtemos:

$\text{sen}(180° - \alpha) = \dfrac{0{,}4}{y} \Rightarrow \dfrac{1}{5} = \dfrac{0{,}4}{y}$

$\therefore\ y = \dfrac{0{,}4}{\frac{1}{5}} \Rightarrow y = 2$

(II) Do triângulo ATC, obtemos:

$\text{sen}(180° - \alpha) = \dfrac{0{,}9}{x + y} \Rightarrow x + y = \dfrac{0{,}9}{\frac{1}{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 4{,}5$

De (I) e (II), concluímos:

$x + 2 = 4{,}5 \Rightarrow x = 2{,}5$

Portanto, a distância entre T e D é 2,5 m.

44 a) Na circunferência trigonométrica, o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco de medida 2π rad intercepta o eixo das tangentes na origem; logo, tg $2\pi = 0$.

b) Na circunferência trigonométrica, o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco de medida $\dfrac{3\pi}{2}$ rad é paralelo ao eixo das tangentes; logo, não existe tg $\dfrac{3\pi}{2}$.

c) Na circunferência trigonométrica, o arco de medida 3π é congruente ao arco de medida π. Assim, tg 3π = tg π. Como o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco de medida π rad intercepta o eixo das tangentes na origem, tg π = tg $3\pi = 0$.

d) Na circunferência trigonométrica, o arco de medida $(-\pi)$ é congruente ao arco de medida π. Assim, tg $(-\pi)$ = tg π. Como o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco de medida π intercepta o eixo das tangentes na origem, tg π = tg $(-\pi) = 0$.

45 a) F, pois $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{5} > 0$ (1º quadrante) e $\text{tg}\,\dfrac{4\pi}{5} < 0$ (2º quadrante), então $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{5} \cdot \text{tg}\,\dfrac{4\pi}{5} < 0$.

b) V, pois $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{9} < 0$ (2º quadrante) e $\text{tg}\,\dfrac{2\pi}{9} > 0$ (1º quadrante), então $\dfrac{\text{tg}\,\frac{5\pi}{9}}{\text{tg}\,\frac{2\pi}{9}} < 0$.

c) V, pois $\text{tg}\,\dfrac{13\pi}{18} < 0$ (2º quadrante), $\text{tg}\,\dfrac{4\pi}{15} > 0$ (1º quadrante) e $\left|\text{tg}\,\dfrac{13\pi}{18}\right| > \left|\text{tg}\,\dfrac{4\pi}{15}\right|$, então $\text{tg}\,\dfrac{13\pi}{18} + \text{tg}\,\dfrac{4\pi}{15} < 0$.

46 $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{5} \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, para $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Assim:

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$

Logo, tg $\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

47 $\begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{7} \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{6}{7}$, para $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

Assim:

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

Logo, tg $\alpha = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

48 $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{3\cos\alpha}{4}$

$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{3\cos\alpha}{4} \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{4}{5},$$

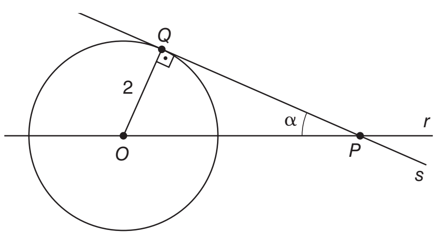
para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Assim:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3\cos\alpha}{4} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{5}$

Logo, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{5}$ e $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.

49 • O raio $\overline{OQ}$ é perpendicular à reta s:



Logo: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{2}{PQ}$ (I)

• $$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{15}{17} \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{8}{17} \\ 0° < \alpha < 90° \end{cases}$$

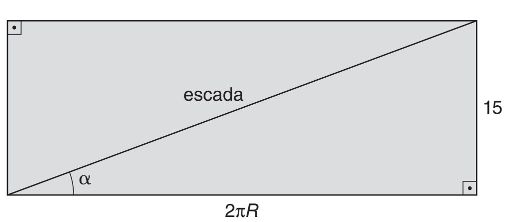
Logo: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{8}{15}$ (II)

• Substituindo (II) em (I), concluímos:

$\dfrac{8}{15} = \dfrac{2}{PQ} \Rightarrow PQ = \dfrac{30}{8} = \dfrac{15}{4}$

Portanto, o segmento $\overline{PQ}$ mede $\dfrac{15}{4}$ cm ou 3,75 cm.

50 Planificando a superfície lateral do reservatório, obtemos um retângulo de altura de 15 m e base $2\pi R$, em que R é a medida do raio da base do cilindro.



$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{15}{2\pi R}$ (I)

Calculando $\text{tg}\,\alpha$:

$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{5} \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{4}{5},$$

para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Assim, $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{4}$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{2\pi R} \Rightarrow R = \dfrac{10}{\pi}$

Logo, o raio da base do cilindro mede $\dfrac{10}{\pi}$ m ou aproximadamente 3,18 m.

51 Calculamos usando a redução ao 1º quadrante.

a) $\text{tg}\,120° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

b) $\text{tg}\,135° = -\text{tg}\,45° = -1$

c) $\text{tg}\,210° = \text{tg}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{3} = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

e) $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{4} = \text{tg}\,\dfrac{\pi}{4} = 1$

f) $\text{tg}\,\dfrac{11\pi}{4} = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{4} = -1$

g) $\text{tg}\,\dfrac{20\pi}{3} = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

h) $\text{tg}\,\dfrac{17\pi}{6} = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

52 Reduzindo ao 1º quadrante, temos:

$\dfrac{25\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{51\pi}{4} \equiv \dfrac{3\pi}{4}$ e $\dfrac{45\pi}{4} \equiv \dfrac{5\pi}{4}$

Assim,

$E = \text{tg}^2\,\dfrac{25\pi}{3} + \text{tg}\,\dfrac{51\pi}{4} - \text{tg}\,\dfrac{45\pi}{4} =$

$= \text{tg}^2\,\dfrac{\pi}{3} + \text{tg}\,\dfrac{3\pi}{4} - \text{tg}\,\dfrac{5\pi}{4} =$

$= 3 + (-1) - 1 = 1$

Logo, $E = 1$.

53 a) $E = \dfrac{\text{tg}\,\alpha - (-\text{tg}\,\alpha)}{-\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha} = \dfrac{2\text{tg}\,\alpha}{-2\text{tg}\,\alpha} = -1$

b) $E = \dfrac{\text{tg}\,(180° + x) + \text{tg}\,(180° - x) + \text{tg}\,(360° - x)}{\text{sen}\,(360° - x)} =$

$= \dfrac{\text{tg}\,x + (-\text{tg}\,x) + (-\text{tg}\,x)}{-\text{sen}\,x} =$

$= \dfrac{\text{tg}\,x}{\text{sen}\,x} = \dfrac{\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}}{\text{sen}\,x} = \dfrac{1}{\cos x}$

54 Sabemos que $\text{tg}\,\alpha = -2{,}6$ e $\alpha + \beta = 180°$.

a) $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha$

$\text{tg}\,\beta = \text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha = 2{,}6$.

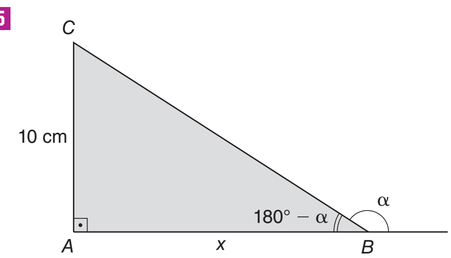
Logo, $\text{tg}\,\beta = 2{,}6$.

b) $\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \text{tg}\,180° = 0$.

c) $\text{tg}\,(2\alpha + \beta) = \text{tg}\,(2\alpha + 180° - \alpha) = \text{tg}\,(180° + \alpha) =$
$= \text{tg}\,\alpha = -2{,}6$

Logo, $\text{tg}\,(2\alpha + \beta) = -2{,}6$.

55



$\text{tg}\,(180° - \alpha) = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{5}{6} = \dfrac{10}{AB}$

$\therefore AB = 12$

Logo, o cateto $\overline{AB}$ mede 12 cm.

56 a) $tg\,(-45°) = -tg\,45° = -1$
b) $tg\,(-120°) = -tg\,120° = -\left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$
c) $tg\,(-300°) = -tg\,300° = -\left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$

57 Chamando o deslocamento horizontal de x, temos:
$tg\,(180 - \alpha) = \frac{4}{x} \Rightarrow -tg\,\alpha = \frac{4}{x}$
$\therefore \frac{2}{5} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 10$
Logo, o deslocamento horizontal dessa pessoa é 10 m.

58 a) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $sen\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ são $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

b) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ são $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.
Logo, $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

c) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $sen\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ são $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

d) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ são $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.
Logo, $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

e) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $\cos x = \frac{1}{2}$ são $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

f) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $sen\,x = -\frac{1}{2}$ são $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.
Logo, $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

g) O valor de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para o qual $sen\,x = -1$ é $x = \frac{3\pi}{2}$.
Logo, $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.

h) O valor de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para o qual $\cos x = 1$ é $x = 0$.
Logo, $S = \{0\}$.

i) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $sen\,x = 0$ são $x = 0$ ou $x = \pi$.
Logo, $S = \{0, \pi\}$.

j) Não existe x tal que $sen\,x = 3$. Logo, $S = \varnothing$.

k) Não existe x tal que $\cos x = -2$. Logo, $S = \varnothing$.

l) $tg\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

m) $tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

n) $tg\,x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.
Logo, $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

o) $tg\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.
Logo, $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

59 a) Na primeira volta do sentido positivo, temos: $sen\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ são $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

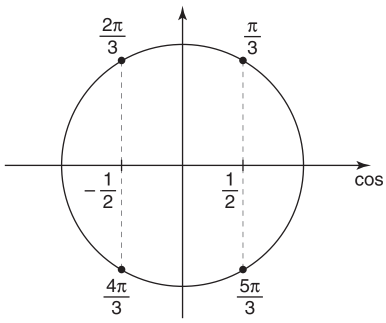
e) Na primeira volta do sentido positivo, temos: $\cos x = \frac{1}{2}$ são $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

i) Na primeira volta do sentido positivo, temos: $sen\,x = 0$ são $x = 0$ ou $x = \pi$.
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

m) Na primeira volta do sentido positivo, temos: $tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$.
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

n) Na primeira volta do sentido positivo, temos: $tg\,x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

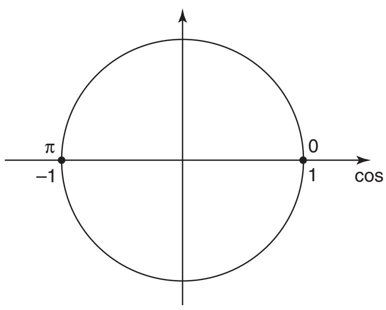
60 a) $\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$



$\therefore\ x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

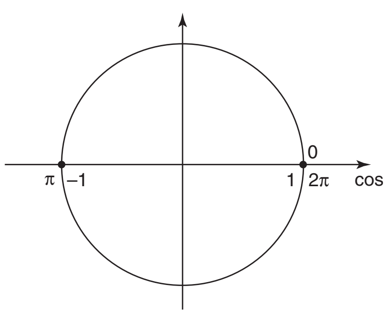
b) $\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -1$



$\therefore\ x = 0$ ou $x = \pi$

Logo, $S = \{0, \pi\}$.

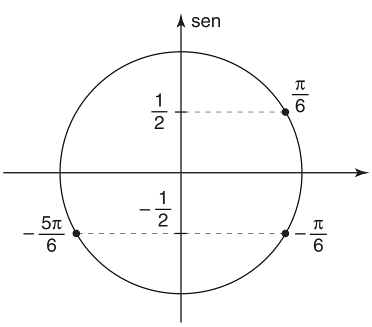
c) $\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -1$



$\therefore\ x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$

Logo, $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

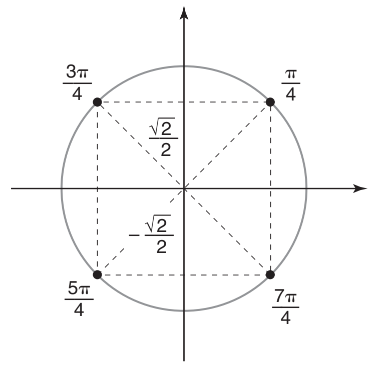
d) $\text{sen}^2\, x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$ ou $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$



$\therefore x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.

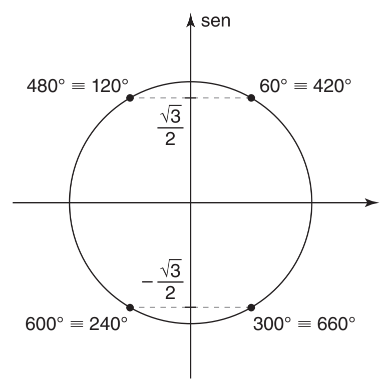
e) $|\text{sen}\, x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

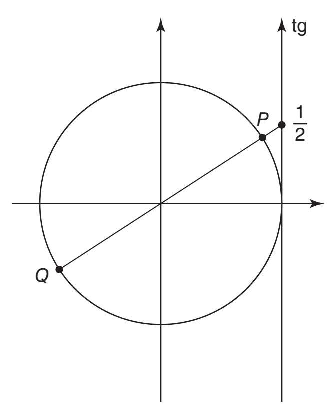
61 $\text{sen}^2\, x = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\therefore x = 60°$ ou $x = 120°$ ou $x = 240°$ ou
$x = 300°$ ou $x = 420°$ ou $x = 480°$ ou
$x = 600°$ ou $x = 660°$.

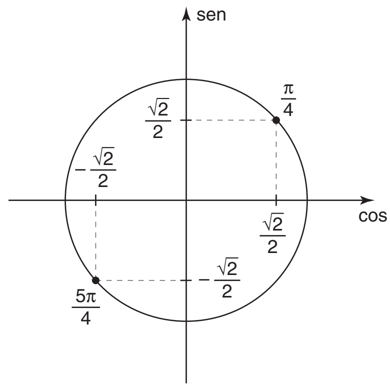
Logo, $S = \{60°, 120°, 240°, 300°, 420°, 480°, 600°, 660°\}$.

62 Prolongando o raio que passa pelo ponto de ordenada $\frac{1}{2}$ do eixo das tangentes, determinamos dois pontos, P e Q, sobre a circunferência trigonométrica abaixo.



Logo, em cada volta dessa circunferência a equação possui 2 raízes e, portanto, nas 3 voltas representadas pelo intervalo $[0, 6\pi[$ a equação possui 6 raízes.

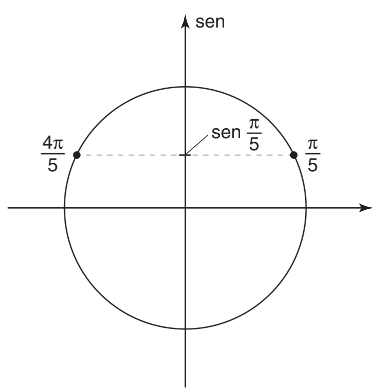
63 sen x = cos x



$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

64 a) sen x = sen $\frac{\pi}{5}$

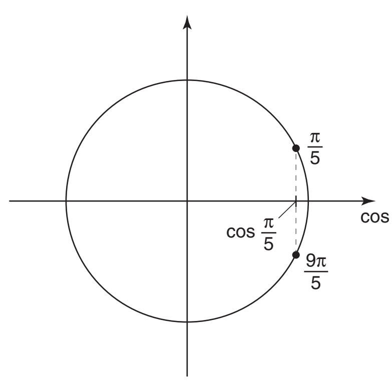


Para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

sen x = sen $\frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}$ ou $x = \frac{4\pi}{5}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$.

b) cos x = cos $\frac{\pi}{5}$

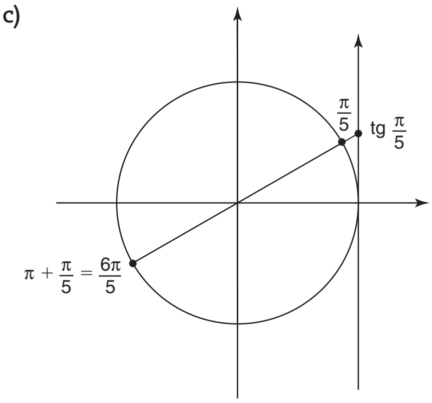


Para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

cos x = cos $\frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}$ ou $x = \frac{9\pi}{5}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$.

c)



Para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

$S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\right\}$

65 Como sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = cos x, temos:

cos x + sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1 \Rightarrow$ cos x + cos $x = -1$

$\therefore\ 2\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

Os valores de x, com $0 \leqslant x < 4\pi$, tais que

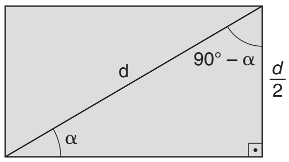
$\cos x = -\frac{1}{2}$ são: $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$

Assim:

$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} = 8\pi$

Alternativa **d**.

66 Sendo, respectivamente, d e α as medidas de uma diagonal do retângulo e de um ângulo que essa diagonal forma com um dos lados, esquematizamos:

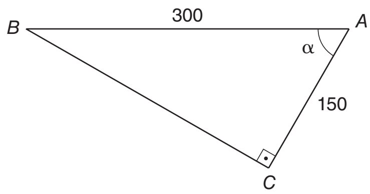


Assim, temos:

$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \\ 0° < \alpha < 90° \end{cases} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Concluímos, então, que cada diagonal forma ângulos de 30° e de 60° com os lados do retângulo.

67 Sendo α a medida do ângulo $B\hat{A}C$, temos:



$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$

Como $0° < x < 90°$ e $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, concluímos que $\alpha = 60°$.

68 $\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$, para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Dividindo o comprimento do arco pela medida R do raio de curvatura, obtemos a medida do ângulo central correspondente, em radiano. Assim:

$\frac{20}{R} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow R = \frac{120}{\pi}$

Logo, o raio de curvatura mede $\frac{120}{\pi}$ m, ou aproximadamente 38,2 m.

69 **a)** $\left(2\,\text{sen } x - \sqrt{3}\right)\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\text{sen } x - \sqrt{3} = 0$ ou $2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$\therefore \text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$
- $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

b) $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x(2\cos x + 1) = 0$

$\therefore \text{sen } x = 0$ ou $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

c) $\text{tg}^2\, x - \text{tg } x = 0$

Para $t = \text{tg } x$, temos:

$t^2 - t = 0 \Rightarrow t(t - 1) = 0$

$\therefore t = 0$ ou $t = 1$

Assim:

- $\text{tg } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

d) $\left(\text{tg } x - \sqrt{3}\right)(\text{tg}^2\, x - 1) = 0 \Rightarrow \text{tg } x - \sqrt{3} = 0$ ou $\text{tg}^2\, x - 1 = 0$

$\therefore \text{tg } x = \sqrt{3}$ ou $\text{tg } x = 1$ ou $\text{tg } x = -1$

Assim, temos:

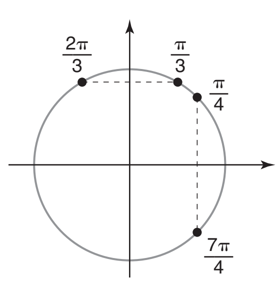
$\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

$\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

$\text{tg } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

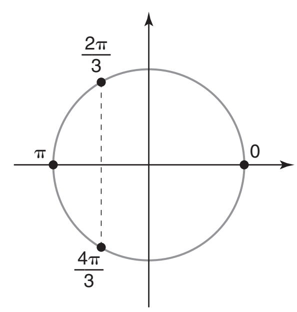
70 **a)** Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **a** do exercício anterior, temos:



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

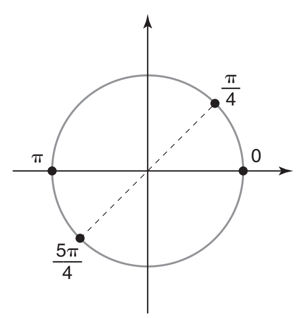
b) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **b** do exercício anterior, temos:



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **c** do exercício anterior, temos:



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

71 $\text{tg } x \cdot \text{sen } x = \text{sen } x \Rightarrow \text{tg } x \cdot \text{sen } x - \text{sen } x = 0$

$\therefore \text{sen } x\,(\text{tg } x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\text{tg } x = 1$

Assim, temos:

- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

72 **a)** Fazendo a mudança de variável $\text{sen } x = y$, temos:

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ ou } y = \frac{1}{2}$$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\text{sen } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

ou

- $\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Assim, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

b) Fazendo a mudança de variável cos x = y, temos:

$2y^2 - 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\cos x = 2$ (não convém)

ou

- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$

Assim, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) Fazendo a mudança de variável tg x = y, temos:

$4y^2 + \sqrt{3}y = y^2 + 3\sqrt{3}y + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y^2 - 2\sqrt{3}y - 3 = 0$

$\therefore\ y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$

ou

- $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6}$

Assim, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

73 $\cos^2 x - 4 \text{ sen } x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x - 4 \text{ sen } x + 4 = 0$

$\therefore\ \text{sen}^2 x + 4 \text{ sen } x - 5 = 0$

Fazendo a mudança da variável sen x = y, temos:

$y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = -5 \text{ ou } y = 1$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\text{sen } x = -5$ (não convém)

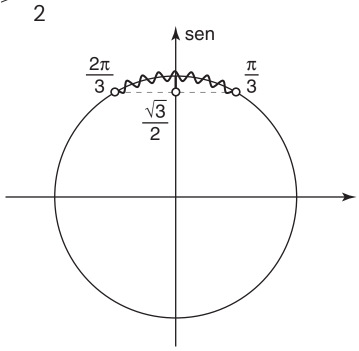
ou

- $\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$

Assim, temos como conjunto solução:

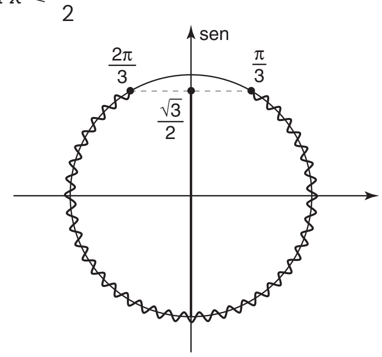
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

74 **a)** $\text{sen } x > \frac{\sqrt{3}}{2}$



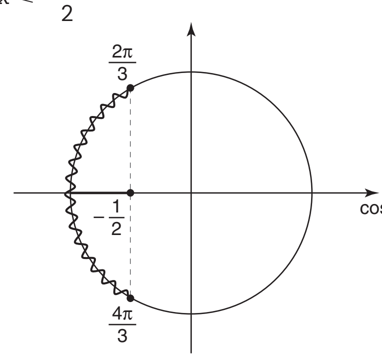
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$.

b) $\text{sen } x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$



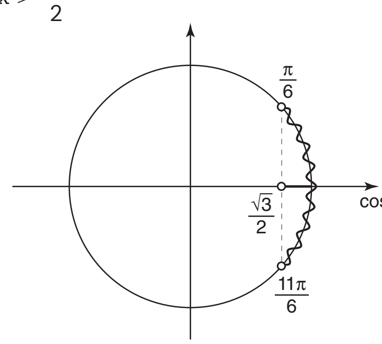
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

c) $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$



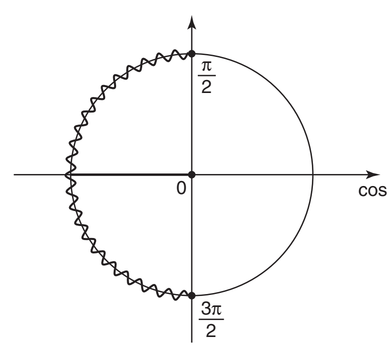
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}\right\}$.

d) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$



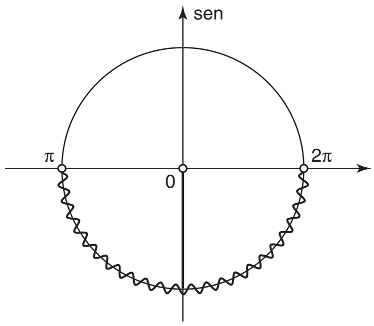
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$.

e) $\cos x \leqslant 0$



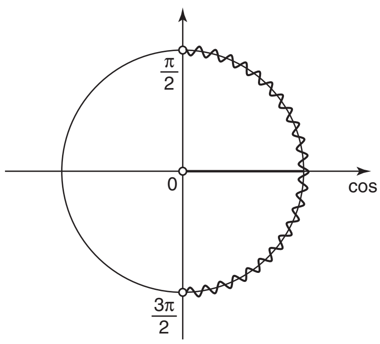
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}$.

f) sen x < 0



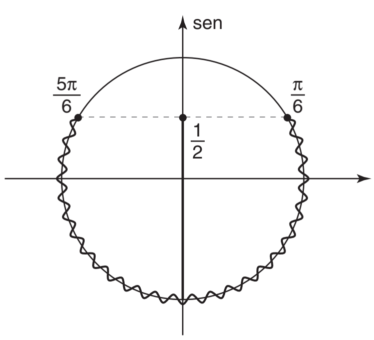
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi < x < 2\pi\}$.

g) cos x > 0



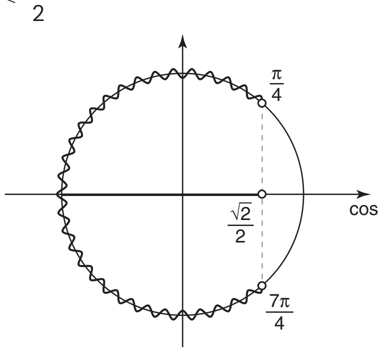
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

h) $\text{sen } x \leqslant \frac{1}{2}$



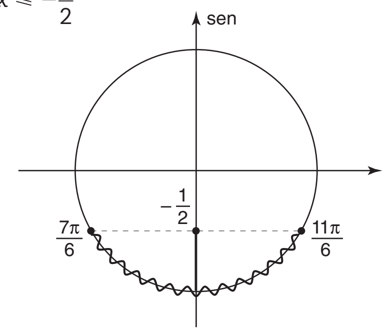
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

i) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



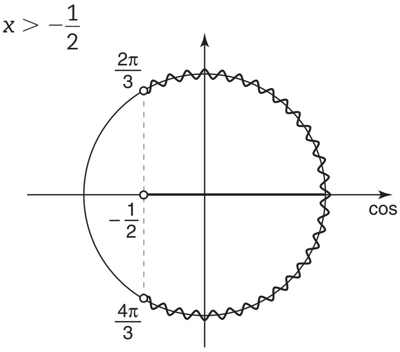
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$.

j) $\text{sen } x \leqslant -\frac{1}{2}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$.

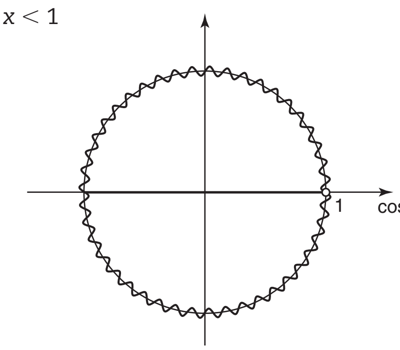
k) $\cos x > -\frac{1}{2}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

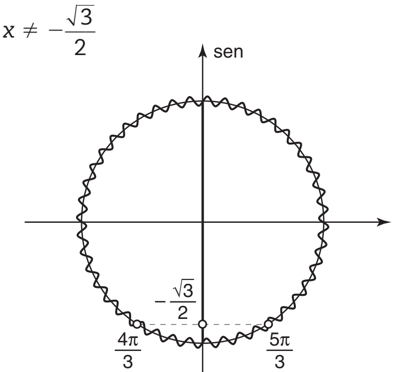
l) sen x > 1
Não existem valores de x que satisfaçam essa inequação, pois $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Logo, $S = \varnothing$.

m) cos x < 1



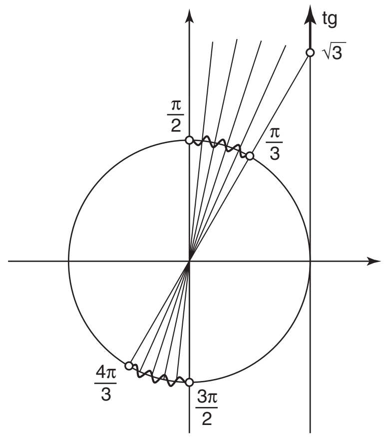
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\pi\}$

n) $\text{sen } x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$



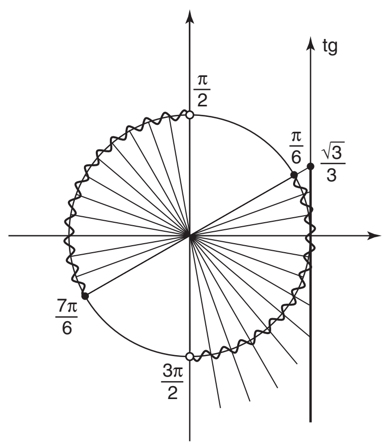
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{4\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{5\pi}{3}\right\}$.

o) $\text{tg}\, x > \sqrt{3}$



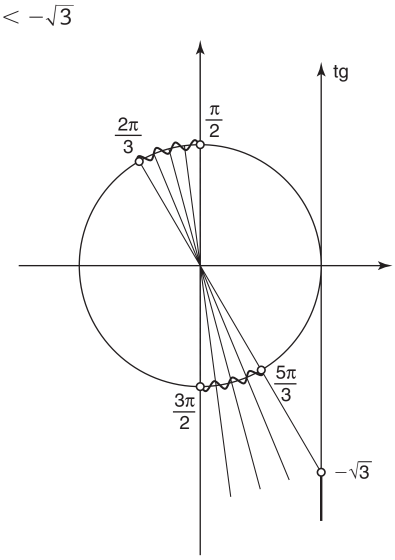
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}.$

p) $\text{tg}\, x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}.$

q) $\text{tg}\, x < -\sqrt{3}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}.$

75 a) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **a** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **c** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) Como os números $\frac{11\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ estão associados ao mesmo ponto da circunferência trigonométrica, o conjunto solução da inequação do item **d** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

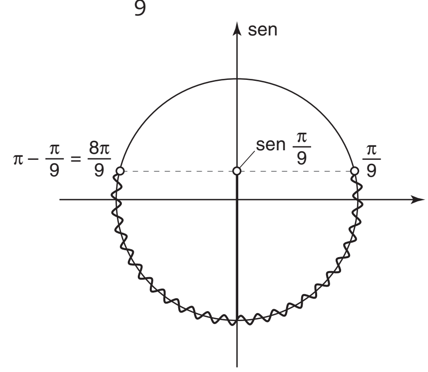
o) Basta adicionar a expressão $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a um dos intervalos obtidos no item **o** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

p) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, aos extremos do intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right]$ obtido no item **p** do exercício anterior:

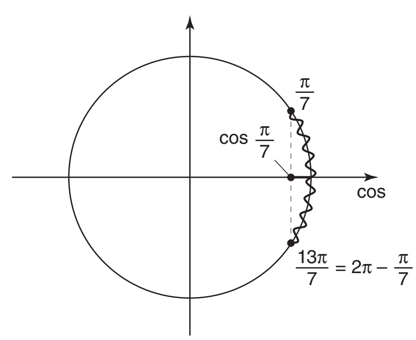
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \frac{7\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

76 a) $\text{sen}\, x < \text{sen}\, \frac{\pi}{9}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{9} \text{ ou } \frac{8\pi}{9} < x < 2\pi\right\}.$

b) $\cos x \geqslant \cos \frac{\pi}{7}$

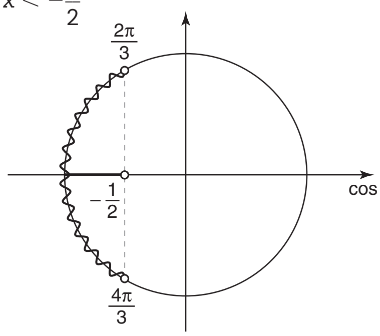


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{7} \text{ ou } \frac{13\pi}{7} \leqslant x < 2\pi\right\}.$

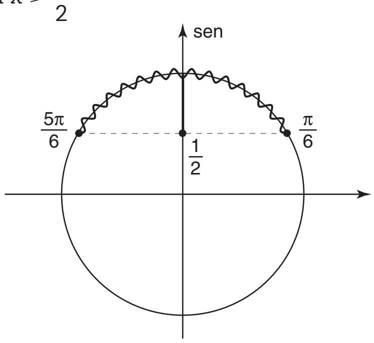
77 a) $\begin{cases} \cos x < -\dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x \geqslant \dfrac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo cada uma das inequações do sistema, temos:

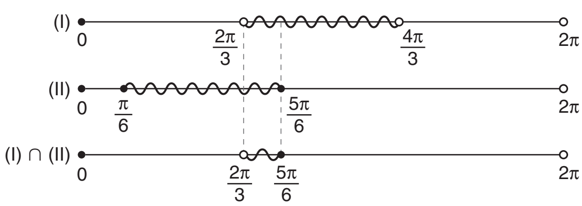
(I) $\cos x < -\dfrac{1}{2}$



(II) $\text{sen } x \geqslant \dfrac{1}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), vamos ter:

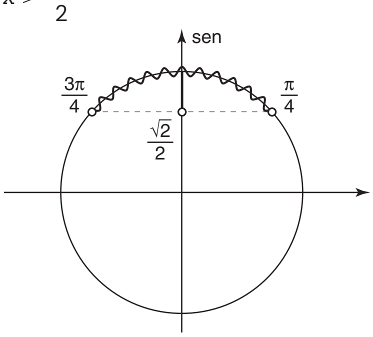


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2\pi}{3} < x \leqslant \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

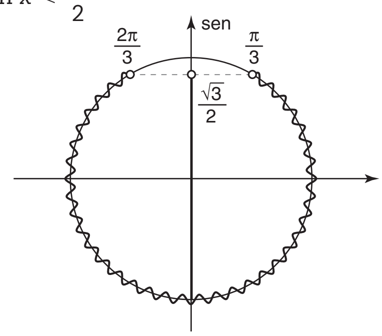
b) $\begin{cases} \text{sen } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

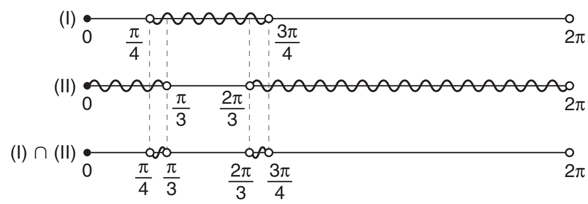
(I) $\text{sen } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



(II) $\text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

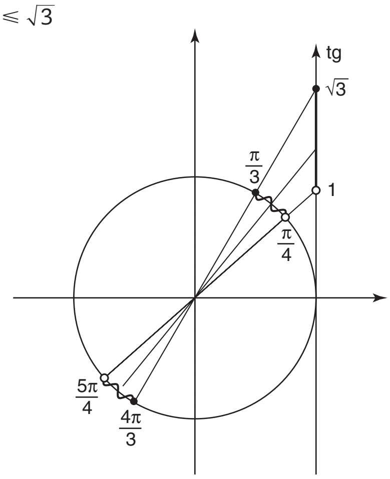


Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), vamos ter:



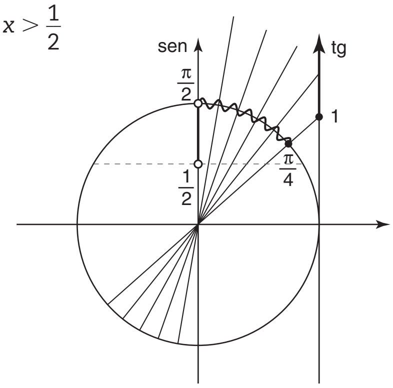
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

c) $\begin{cases} \text{tg } x > 1 \\ \text{tg } x \leqslant \sqrt{3} \end{cases}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

d) $\begin{cases} \text{tg } x \geqslant 1 \\ \text{sen } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

78 **a)** Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **a** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **d** do exercício anterior:

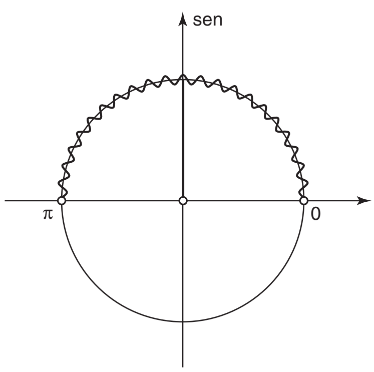
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

79 **a)** A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

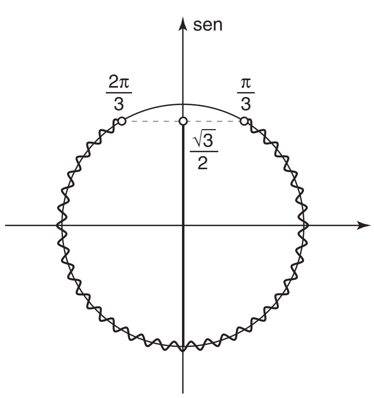
$$\begin{cases} \text{sen } x > 0 & \text{(I)} \\ \text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

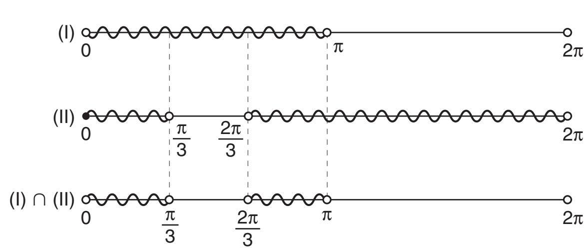
(I) $\text{sen } x > 0$



(II) $\text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



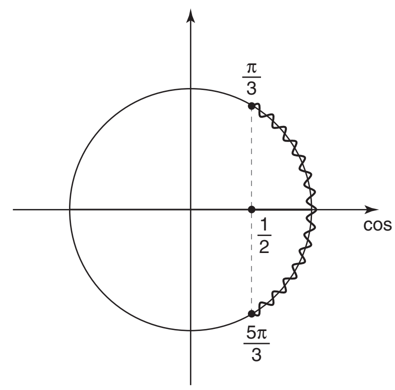
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} < x < \pi\right\}$.

b) A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

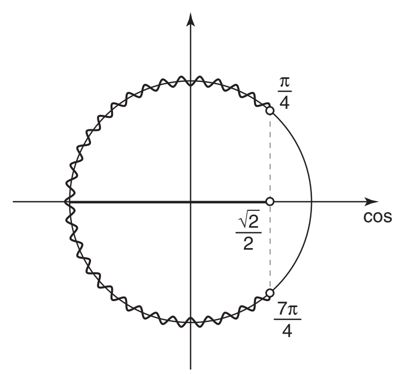
$$\begin{cases} \cos x \geqslant \dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

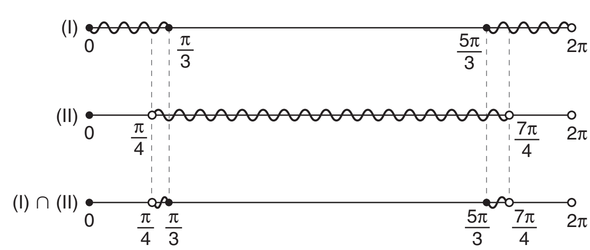
(I) $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$



(II) $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{3} \leqslant x < \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

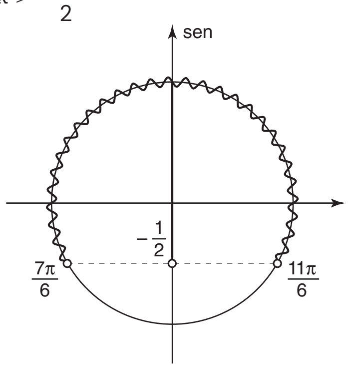
c) $|\text{sen } x| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < \text{sen } x < \dfrac{1}{2}$

Essa dupla desigualdade é equivalente ao sistema

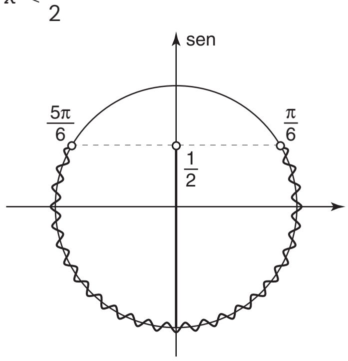
$$\begin{cases} \text{sen } x > -\dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x < \dfrac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

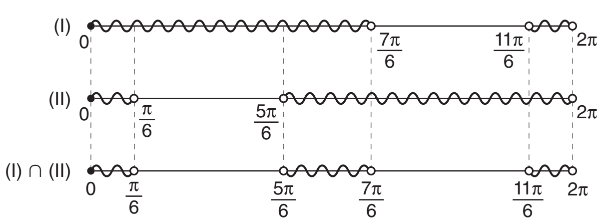
(I) sen $x > -\frac{1}{2}$



(II) sen $x < \frac{1}{2}$

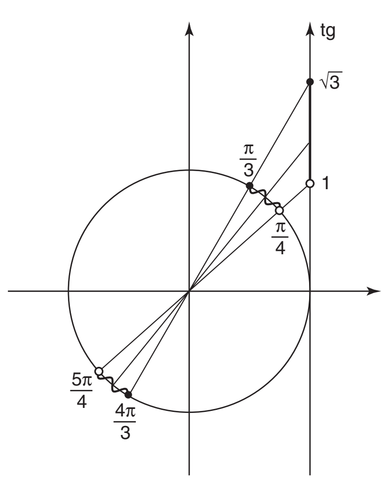


Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



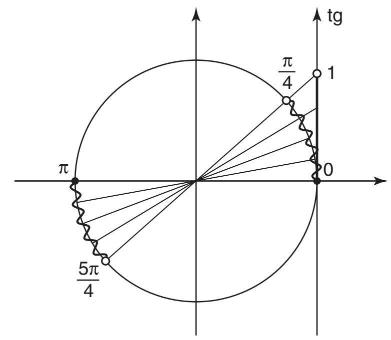
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$.

d)



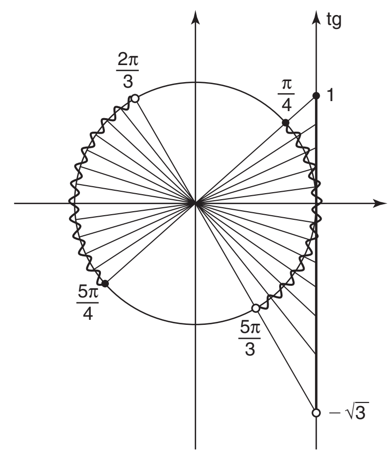
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x \leq \frac{4\pi}{3}\right\}$.

e)



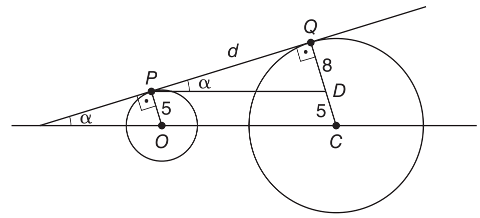
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi \leq x < \frac{5\pi}{4}\right\}$.

f)



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

80 Sendo α a medida do ângulo agudo formado pelas retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{OC}$; $\overline{PD} /\!/ \overline{OC}$, com $D \in \overline{CQ}$; e $PQ = d$, esquematizamos:



$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{8}{d} \\ d > 16 \end{cases} \Rightarrow \text{sen } \alpha < \frac{1}{2}$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, concluímos que $0° < \alpha < 30°$.

81 Sendo d a distância entre o automóvel e o ponto B, temos:

$$\begin{cases} \text{tg } x = \frac{d}{15} \\ d > 5\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{tg } x > \frac{5\sqrt{3}}{15}$$

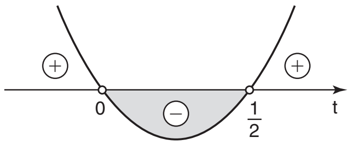
$$\therefore \text{ tg } x > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como x é medida de um ângulo agudo, concluímos que $30° < x < 90°$.

82 a) $2\,\text{sen}^2\,x - \text{sen}\,x < 0$.

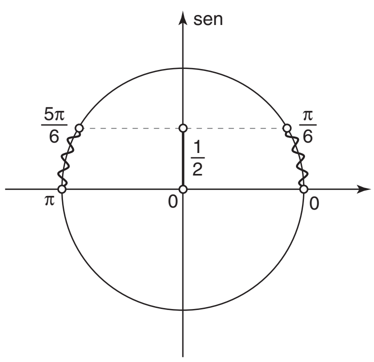
Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\,x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - t < 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - t$ é esquematizada por:



Assim, $f(t) < 0 \Rightarrow 0 < t < \frac{1}{2}$.

Retornando à variável original, temos $0 < \text{sen}\,x < \frac{1}{2}$ e, portanto:



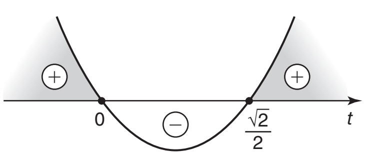
Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}\,|\,0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$$

b) $2\,\text{sen}^2\,x - \sqrt{2}\,\text{sen}\,x \geqslant 0$

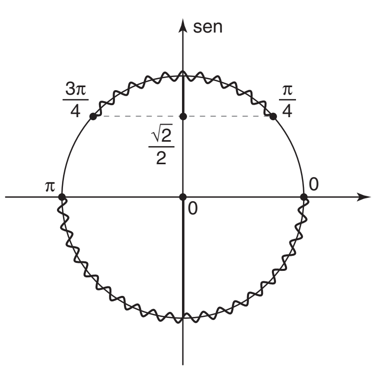
Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\,x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - \sqrt{2}t \geqslant 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - \sqrt{2}\,t$ é esquematizada por:



Assim, $f(t) \geqslant 0 \Rightarrow t \leqslant 0 \text{ ou } t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Retornando à variável original, temos $\text{sen}\,x \leqslant 0$ ou $\text{sen}\,x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. A reunião dos conjuntos soluções dessas inequações é representada por:



Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}\,|\,x = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi \leqslant x < 2\pi\right\}$$

c) $2\,\text{sen}^2\,x + 5\cos x - 4 > 0 \Rightarrow$

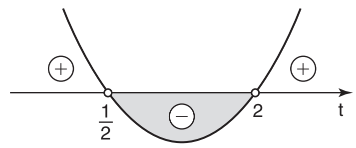
$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 4 > 0$

$\therefore -2\cos^2 x + 5\cos x - 2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 < 0$

Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - 5t + 2 < 0$.

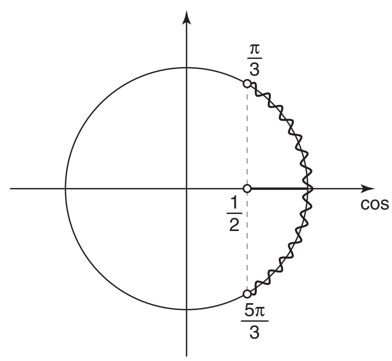
A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 5t + 2$ é esquematizada por:



Assim, $f(t) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < 2$

Retornando à variável original, temos:

$\frac{1}{2} < \cos x < 2$, ou seja, $\cos x > \frac{1}{2}$, cujas soluções são representadas por:



Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}\,|\,0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$$

d) $2\cos^2 x + 5\,\text{sen}\,x - 8 < 0 \Rightarrow$

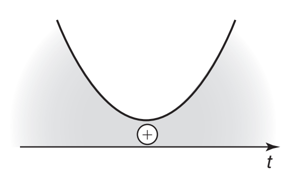
$\Rightarrow 2(1 - \text{sen}^2\,x) + 5\,\text{sen}\,x - 8 < 0$

$\therefore -2\,\text{sen}^2\,x + 5\,\text{sen}\,x - 6 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\text{sen}^2\,x - 5\,\text{sen}\,x + 6 > 0$

Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\,x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - 5t + 6 > 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 5t + 6$ é esquematizada por:



Assim, $f(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

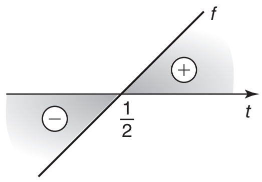
Retornando à variável original, concluímos que qualquer valor do $\text{sen}\,x$ satisfaz a inequação. Concluímos, então:

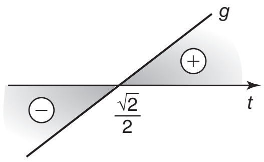
$S = \{x \in \mathbb{R}\,|\,0 \leqslant x < 2\pi\}$

e) $(2\cos x - 1)\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) < 0$.

Fazendo $\cos x = t$, obtemos a inequação $(2t - 1)\left(2t - \sqrt{2}\right) < 0$.

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t - 1$, $g(t) = 2t - \sqrt{2}$ e $f \cdot g$, temos:

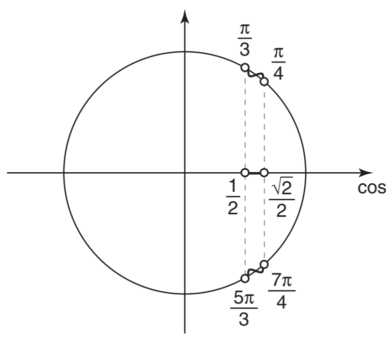




	$t < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$t > \frac{\sqrt{2}}{2}$
f	−	+	+
g	−	−	+
$f \cdot g$	+	−	+

$f(t) \cdot g(t) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



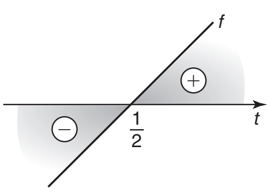
Concluímos, então:

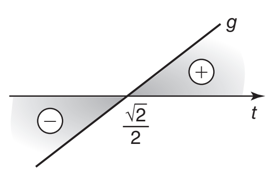
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

f) $\frac{2 \operatorname{sen} x - 1}{2 \operatorname{sen} x - \sqrt{2}} < 0$

Fazendo sen $x = t$, obtemos a inequação $\frac{2t - 1}{2t - \sqrt{2}} < 0$.

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t - 1$, $g(t) = 2t - \sqrt{2}$ e $\frac{f}{g}$, temos:

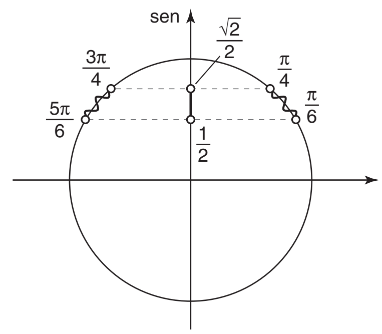




	$t < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$t > \frac{\sqrt{2}}{2}$
f	−	+	+
g	−	−	+
$\frac{f}{g}$	+	−	+

$\frac{f(t)}{g(t)} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $\frac{1}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



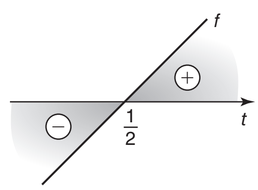
Concluímos, então:

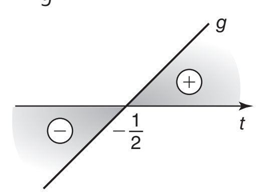
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

g) $\frac{2 \cos x - 1}{2 \cos x + 1} > 0$

Fazendo cos $x = t$, obtemos a inequação $\frac{2t - 1}{2t + 1} > 0$.

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t - 1$, $g(t) = 2t + 1$ e $\frac{f}{g}$, temos:

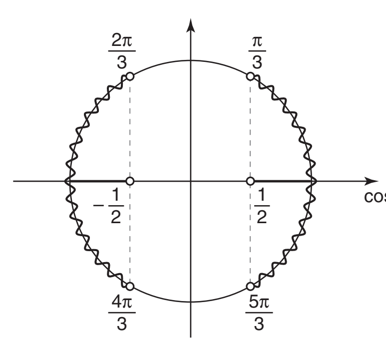




	$t < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$	$t > \frac{1}{2}$
f	−	−	+
g	−	+	+
$\frac{f}{g}$	+	−	+

$\frac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\frac{1}{2}$ ou $t > \frac{1}{2}$

Logo, $\cos x < -\frac{1}{2}$ ou $\cos x > \frac{1}{2}$; e portanto:



Concluímos, então:

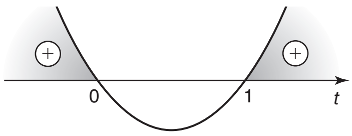
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

h) $\text{tg}^2\, x - \text{tg}\, x > 0$

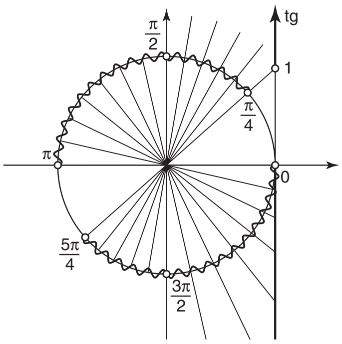
Fazendo $\text{tg}\, x = t$, temos:

$t^2 - t > 0$

Estudando a variação de sinal de função $f(t) = t^2 - t$, obtemos:



Assim, $f(t) > 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t > 1$, e portanto: $\text{tg}\, x < 0$ ou $\text{tg}\, x > 1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

i) $\left(\text{tg}\, x - \sqrt{3}\right)(\text{tg}^2\, x - 1) \leqslant 0$

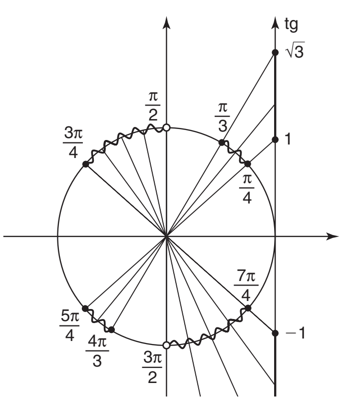
Fazendo $\text{tg}\, x = t$, temos:

$\left(t - \sqrt{3}\right)(t^2 - 1) \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t - \sqrt{3}$, $g(t) = t^2 - 1$ e $f \cdot g$, obtemos:

	$t < -1$	$-1 < t < 1$	$1 < t < \sqrt{3}$	$t > \sqrt{3}$
f	−	−	−	+
g	+	−	+	+
$f \cdot g$	−	+	−	+

Assim, $f(t) \cdot g(t) \leqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -1$ ou $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$, e portanto: $\text{tg}\, x \leqslant -1$ ou $1 \leqslant \text{tg}\, x \leqslant \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}$.

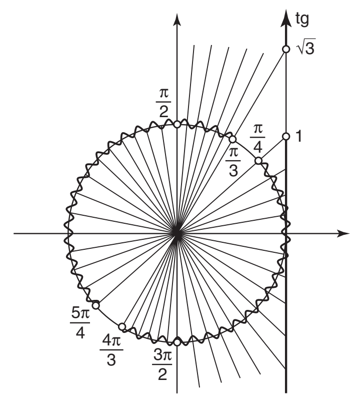
j) $\dfrac{\text{tg}\, x - 1}{\text{tg}\, x - \sqrt{3}} > 0$

Fazendo $\text{tg}\, x = t$, temos: $\dfrac{t - 1}{t - \sqrt{3}} > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t - 1$, $g(t) = t - \sqrt{3}$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

	$t < 1$	$1 < t < \sqrt{3}$	$t > \sqrt{3}$
f	−	+	+
g	−	−	+
$\frac{f}{g}$	+	−	+

Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < 1$ ou $t > \sqrt{3}$, e portanto: $\text{tg}\, x < 1$ ou $\text{tg}\, x > \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

83 **a)** Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo dos intervalos obtidos no item **a** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \pi + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo dos intervalos obtidos no item **f** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

j) Basta adicionar a expressão $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **j** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + k\pi < x < 2\pi + k\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2} + k\pi\right\}$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 A medida em radiano desse arco é $\frac{4\pi}{8}$, ou seja, $\frac{\pi}{2}$ rad, cuja conversão para graus é dada por:

$$\frac{2\pi}{360°} = \frac{\frac{\pi}{2}}{x} \Rightarrow x = 90°$$

Logo, a medida procurada é 90°.

2 A razão entre o comprimento do arco e a medida do raio, nessa ordem, é a medida x do arco, em radiano, ou seja:

$$x = \frac{2\pi}{12}\text{ rad} = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

3 $\frac{137\pi}{5} = \frac{130\pi}{5} + \frac{7\pi}{5} = 26\pi + \frac{7\pi}{5}$

Logo, $\frac{7\pi}{5}$ rad é a medida de um arco côngruo a $\frac{137\pi}{5}$ rad.

Alternativa **e**.

4 a) $360° : 8 = 45°$ $(0° \leqslant x < 360°)$

$x_A = 0°$ $x_E = 180°$
$x_B = 45°$ $x_F = 225°$
$x_C = 90°$ $x_G = 270°$
$x_D = 135°$ $x_H = 315°$

Logo: $A(0°)$, $B(45°)$, $C(90°)$, $D(135°)$, $E(180°)$, $F(225°)$, $G(270°)$ e $H(315°)$.

b) x_F na 2ª e na 3ª voltas positivas.

$225° + 360° = 585°$ (na 2ª volta positiva)
$225° + 2 \cdot 360° = 945°$ (na 3ª volta positiva)

Logo, as medidas procuradas associadas ao vértice F são 585° e 945°.

c) x_H na 1ª e na 2ª voltas negativas.

$315° - 360° = -45°$ (na 1ª volta negativa)
$315° - 2 \cdot 360° = -405°$ (na 2ª volta negativa)

Logo, as medidas procuradas associadas ao vértice H são $-45°$ e $-405°$.

5 a) $2\pi : 6 = \frac{\pi}{3}$

$x_A = 0$ rad

$x_B = \frac{\pi}{3}$ rad

$x_C = \frac{2\pi}{3}$ rad

$x_D = \pi$ rad

$x_E = \frac{4\pi}{3}$ rad

$x_F = \frac{5\pi}{3}$ rad

Logo: $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $D(\pi)$, $E\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, $F\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

b) x_C na 2ª e na 3ª voltas positivas.

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$ (na 2ª volta positiva)

$\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{14\pi}{3}$ (na 3ª volta positiva)

Logo, as medidas procuradas associadas ao vértice C são $\frac{8\pi}{3}$ rad e $\frac{14\pi}{3}$ rad.

c) x_F na 1ª e na 2ª voltas negativas.

$\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ (na 1ª volta negativa)

$\frac{5\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$ (na 2ª volta negativa)

Logo, as medidas procuradas associadas ao vértice F são $-\frac{\pi}{3}$ rad e $-\frac{7\pi}{3}$ rad.

6 Adicionando à medida 30° qualquer múltiplo inteiro de 360°, obtemos a medida de um arco côngruo ao arco de 30°. Assim, podemos afirmar que a medida α pode ser expressa por: $\alpha = 30° + k \cdot 360°$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Alternativa **e**.

7 a) M: $180° - 133° = 47°$
N: $133°$
P: $180° + 47° = 227°$
Q: $360° - 47° = 313°$

b) M: $234° - 180° = 54°$
N: $180° - 54° = 126°$
P: $234°$
Q: $360° - 54° = 306°$

c) M: $360° - 340° = 20°$
N: $180° - 20° = 160°$
P: $180° + 20° = 200°$
Q: $340°$

d) M: $\pi - \frac{23\pi}{36} = \frac{13\pi}{36}$

N: $\frac{23\pi}{36}$

P: $\pi + \frac{13\pi}{36} = \frac{49\pi}{36}$

Q: $2\pi - \frac{13\pi}{36} = \frac{59\pi}{36}$

e) M: $\frac{11\pi}{9} - \pi = \frac{2\pi}{9}$

N: $\pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$

P: $\frac{11\pi}{9}$

Q: $2\pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{16\pi}{9}$

f) M: $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

N: $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

P: $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Q: $\frac{5\pi}{3}$

8 M: α
N: $\beta + 90° = 180° - \alpha \Rightarrow \beta = 90° - \alpha$ (I)
P: $70° + 3\alpha + \beta = 180° + \alpha \Rightarrow 2\alpha + \beta = 110°$ (II)
Q: $360° - \alpha$

De (I) e (II), temos:
$2\alpha + 90° - \alpha = 110°$
$\alpha = 110° - 90°$
$\alpha = 20°$

Substituindo α por 20° na medida associada ao ponto Q, temos:
Q: $360° - \alpha = 360° - 20° = 340°$

Alternativa **d**.

9 Para $x \in \mathbb{R}$, temos:
$0 \leqslant |\text{sen } x| \leqslant 1$
Portanto, o valor mínimo de f é zero.

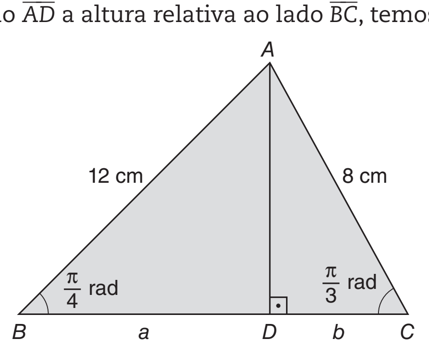
10 A expressão $\dfrac{1}{|\cos x|}$ assume o valor mínimo quando o denominador $|\cos x|$ assume o valor máximo. Como o valor máximo de $|\cos x|$ é 1, concluímos que o valor mínimo de $\dfrac{1}{|\cos x|}$ é $\dfrac{1}{1} = 1$.

11 Temos: $a < b$, com a e b no 3º quadrante. Assim:
- $\cos a < \cos b$
- $\text{sen } a > \text{sen } b$
- $\cos a < 0$ e $\cos b < 0 \Rightarrow \cos a \cdot \cos b > 0$

Alternativa **e**.

12 Sendo M e N as extremidades dos arcos trigonométricos de medidas α e β, respectivamente, temos:
a) V, pois a ordenada de M é maior que a ordenada de N.
b) F, pois a ordenada de M é menor que a ordenada de N.
c) F, pois a abscissa de M é menor que a abscissa de N.
d) V, pois a abscissa de M é maior que a abscissa de N.

13 Sendo $\overline{AD}$ a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, temos:



$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{12} \Rightarrow a = 6\sqrt{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{b}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b}{8} \Rightarrow b = 4$$
Logo: $BC = a + b = 6\sqrt{2} + 4$
Portanto, a medida de $\overline{BC}$ é $(6\sqrt{2} + 4)$ cm.

14 $\cos 1.560 = \cos(4 \cdot 360° + 120°) = \cos 120° =$
$= \cos(180° - 60°) = -\cos 60°$
Alternativa **d**.

15 $\cos\dfrac{26\pi}{3} + \cos\dfrac{89\pi}{3} =$
$$= \cos\left(\frac{24\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{84\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}\right) =$$
$$= \cos\left(8\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(28\pi + \frac{5\pi}{3}\right) =$$
$$= \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} =$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$
Alternativa **b**.

16 $E = \dfrac{\text{sen}(\pi - x) - \text{sen}(\pi + x)}{\text{sen}(2\pi - x)} =$
$$= \frac{\text{sen } x + \text{sen } x}{-\text{sen } x} = \frac{2\,\text{sen } x}{-\text{sen } x} = -2$$
Alternativa **d**.

17 **a)** $E = \dfrac{\cos\alpha - \text{sen }\alpha}{-\cos\alpha + \text{sen }\alpha} = \dfrac{\cos\alpha - \text{sen }\alpha}{-(\cos\alpha - \text{sen }\alpha)} = -1$

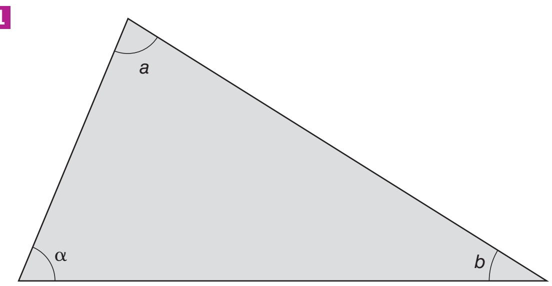
b) $E = \dfrac{1 - (-\cos\alpha)^2}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos^2\alpha^2}{1 + \cos\alpha} =$
$$= \frac{(1 - \cos\alpha)\cancel{(1 + \cos x)}}{\cancel{(1 + \cos\alpha)}} = 1 - \cos\alpha$$

18 Se k for um número par, temos que $k\pi \equiv 0$; portanto:
$\cos(k\pi - x) = \cos(0 - x) = \cos(-x) = \cos x$
Alternativa **c**.

19 Como $\text{sen } 70° = \cos 20°$ e $\text{sen } 50° = \cos 40°$, temos:
$E = \text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 40° + \text{sen}^2 50° + \text{sen}^2 70° \Rightarrow$
$\Rightarrow E = \text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 40° + \cos^2 40° + \cos^2 20°$
1
1
$\therefore E = 2$

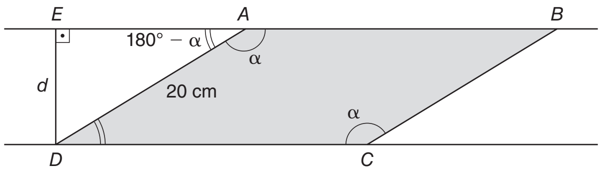
20 Como $\cos 140° = -\cos 40°$, temos:
$$E = \frac{\text{sen}^2 30° + \cos^2 60°}{\text{sen}^2 40° + \cos^2 140°} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\text{sen}^2 40° + \cos^2 40°} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{1}$$
$$\therefore E = \frac{1}{2}$$

21



$a + b + \alpha = 180° \Rightarrow a + b = 180° - \alpha$
Logo, $\cos(a + b) = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
Pela relação fundamental, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:
$$\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$$
$$\therefore \cos\alpha = \pm\frac{1}{4}$$
Como α é a medida de um ângulo agudo, obtemos $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.
Concluímos, então, que $\cos(a + b) = -\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$.

22 Sendo d a distância procurada, esquematizamos:



Pela relação fundamental, $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, calculamos sen α:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$\therefore\ \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{2}{3}$

Como $90° < \alpha < 180°$, só nos interessa o valor positivo do seno, isto é:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{3}$

Do triângulo ADE, obtemos:

$$\text{sen}\,(180° - \alpha) = \frac{d}{20} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{d}{20}$$

$$\therefore\ \frac{2}{3} = \frac{d}{20} \Rightarrow d = \frac{40}{3}$$

Portanto, a distância do ponto D à reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $\frac{40}{3}$ cm.

23 $\text{sen}\,x + \cos x = 0{,}6 \Rightarrow (\text{sen}\,x + \cos x)^2 = (0{,}6)^2$

$\therefore\ \text{sen}^2\,x + 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0{,}36 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x = 0{,}36$

$\therefore\ \text{sen}\,x \cdot \cos x = \frac{0{,}36 - 1}{2}$

$\therefore\ \text{sen}\,x \cdot \cos x = -0{,}32$

24 $\begin{cases} 4\cos^2 x + 5\,\text{sen}\,x - 5 = 0 \\ \cos^2 x + \text{sen}\,x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x + 5\,\text{sen}\,x - 5 = 0 & \text{(I)} \\ \cos^2 x = 1 - \text{sen}\,x^2 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$4(1 - \text{sen}^2\,x) + 5\,\text{sen}\,x - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\,\text{sen}^2\,x - 5\,\text{sen}\,x + 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\,x = k$, obtemos a equação do 2º grau:

$4k^2 - 5k + 1 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$

$$\therefore\ k = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} \Rightarrow k = 1 \text{ ou } k = \frac{1}{4}$$

Retornando à variável original, temos:

$\text{sen}\,x = 1 \left(\text{não convém, pois } \frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$

ou $\text{sen}\,x = \frac{1}{4}$

Portanto, concluímos que $\text{sen}\,x = \frac{1}{4}$.

25 $x^2 - 4x + 4\cos^2\alpha = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4\cos^2\alpha = 16 - 16\cos^2\alpha =$

$= 16(1 - \cos^2\alpha)$

Como $1 - \cos^2\alpha = \text{sen}^2\,\alpha$, temos:

$\Delta = 16\,\text{sen}^2\,\alpha$

$$\therefore\ x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16\,\text{sen}^2\,\alpha}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 4\,\text{sen}\,\alpha}{2}$$

$\therefore\ x = 2 \pm 2\,\text{sen}\,\alpha$

Portanto: $S = \{2 - 2\cos\alpha, 2 + 2\cos\alpha\}$

26 $$E = \frac{1 + \cos x \cdot (-\cos x)}{-\text{sen}\,x \cdot (-\text{sen}\,x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{\text{sen}^2\,x} = \frac{\text{sen}^2\,x}{\text{sen}^2\,x} = 1$$

27 **a)** Soma $= \frac{-(-2k)}{1} = 2k$

b) Produto $= \frac{k^2 + k}{1} = k^2 + k$

c) Sendo as raízes sen α e cos α, temos:

$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha + \cos\alpha = 2k & \text{(I)} \\ \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = k^2 + k & \text{(II)} \end{cases}$

Quadramos ambos os membros de (I):

$(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 = (2k)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = 4k^2$

$\therefore\ 1 + 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 4k^2 \quad \text{(III)}$:

Substituímos (II) em (III):

$1 + 2(k^2 + k) = 4k^2$

$\therefore\ 2k^2 - 2k - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 12$

$$\therefore\ k = \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Como k é um número real negativo, concluímos que $k = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

28 Como $\text{sen}\,210° = -\frac{1}{2}$, $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\text{tg}\,210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, temos:

$\cos 210° < \text{sen}\,210° < \text{tg}\,210°$.

Alternativa **b**.

29 $\text{tg}\,\alpha = 2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha$

$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, para $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Alternativa **c**.

30 $\text{tg}\,\alpha = -2 \Rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -2$

$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = -2\cos\alpha \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, para $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Assim:

$$\text{sen}\,\alpha = -2\cos\alpha = -2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Logo, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

31 $\text{tg}\,\alpha = -7 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -7\cos\alpha$

$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = -7\cos\alpha \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$,

para $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Então:

$\text{sen}\,\alpha = -7\cos\alpha = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

Logo, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ e $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

32 $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}\cos\alpha$

$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}\cos\alpha \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ para}$$

$\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Assim:

$\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{10} = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

Logo, $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ e $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

33 Observe que $\cos x \neq 0$, pois para $\cos x = 0$ teríamos $\text{sen}\,x = \pm 1$, o que não satisfaz a equação. Assim, podemos dividir ambos os membros por $\cos^2 x$, obtendo:

$\dfrac{\text{sen}^2\,x}{\cos^2 x} - \dfrac{3\cdot\text{sen}\,x\cdot\cos x}{\cos^2 x} + \dfrac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{0}{\cos^2 x} \Rightarrow \text{tg}^2\,x - 3\,\text{tg}\,x + 2 = 0$

Fazendo $\text{tg}\,x = y$, obtemos a equação do 2º grau $y^2 - 3y + 2 = 0$, cujas raízes são 2 e 1.

Concluímos, então, que $\text{tg}\,x = 2$ ou $\text{tg}\,x = 1$.

Alternativa **c**.

34 $$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{2\cos\alpha} \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$\therefore \dfrac{1}{4\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1 = 0$

$\therefore (2\cos^2\alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

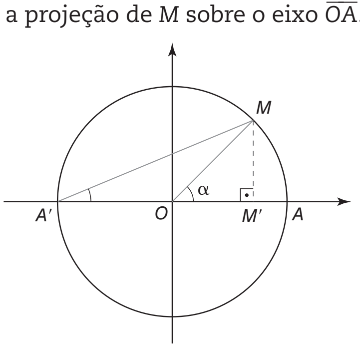
Como $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, temos $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Substituindo $\cos\alpha$ por $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ em $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{2\cos\alpha}$, obtemos $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto:

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

35 a) Seja M' a projeção de M sobre o eixo $\overline{OA}$.



Cálculo de OM':

$(OM)^2 = (MM')^2 + (OM')^2 \Rightarrow 1 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + (OM')^2$

$\therefore (OM') = \dfrac{4}{5}$.

Assim:

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{MM'}{OM'} = \dfrac{3}{4}$

b) $m(A\hat{A'}M) = \dfrac{1}{2}\cdot m(A\hat{O}M) \Rightarrow m(A\hat{A'}M) = \dfrac{\alpha}{2}$

c) $\text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{MM'}{A'M'} = \dfrac{\dfrac{3}{5}}{1 + \dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{3}$

36 a) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$ ou $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$

$\therefore M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ e $N\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

b) $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\alpha = \dfrac{5\pi}{3}$

$\therefore M\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ e $N\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$

c) $\text{tg}\,\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $\alpha = \dfrac{7\pi}{4}$

$\therefore M\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ e $N\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

37 Cálculo das medidas α, β e θ:

$\alpha = \dfrac{360°}{6} \Rightarrow \alpha = 60°$

$\beta = \dfrac{360°}{8} \Rightarrow \beta = 45°$

$\theta = \dfrac{360°}{12} \Rightarrow \theta = 30°$

a) $\text{tg}\,17\alpha = \text{tg}\,(17\cdot 60°) = \text{tg}\,1.020° = \text{tg}\,300° =$
$= -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

b) $\text{tg}\,29\beta = \text{tg}\,(29\cdot 45°) = \text{tg}\,1.305° = \text{tg}\,225° =$
$= \text{tg}\,45° = 1$

c) $\text{tg}\,16\theta = \text{tg}\,(16\cdot 30°) = \text{tg}\,480° = \text{tg}\,120° =$
$= -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

38 $E = \dfrac{\text{tg}^2\,(\pi - x) - \text{tg}\,(\pi + x)}{\text{tg}\,(2\pi - x)} = \dfrac{(-\text{tg}\,x)^2 - \text{tg}\,x}{-\text{tg}\,x} =$

$= \dfrac{\text{tg}\,x\,(\text{tg}\,x - 1)}{-\text{tg}\,x} = \dfrac{\text{tg}\,x - 1}{-1} = 1 - \text{tg}\,x$

Alternativa **e**.

39 a) $\text{tg}\,(-30°) = -\text{tg}\,30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg}\,(-120°) = -\text{tg}\,120° = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

c) $\text{tg}\,(-225°) = -\text{tg}\,225° = -\text{tg}\,45° = -1$

d) $\text{tg}\,(-300°) = -\text{tg}\,300° = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

e) $\text{tg}\,(-1.110°) = -\text{tg}\,(1.110°) = -\text{tg}\,30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{tg}\,(-1.860°) = -\text{tg}\,(1.860°) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

40 a) $\text{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = -\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{3} = \text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

c) $\text{tg}\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\text{tg}\,\dfrac{7\pi}{6} = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$

e) $\text{tg}\left(\frac{33\pi}{4}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$

f) $\text{tg}\left(\frac{31\pi}{3}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

41 $E = \dfrac{\text{tg}\,(-\alpha) + \text{tg}\,(\pi - \alpha)}{\text{tg}\,(\pi + \alpha) - \text{tg}\,(2\pi - \alpha)} = \dfrac{-\text{tg}\,\alpha + (-\text{tg}\,\alpha)}{\text{tg}\,\alpha - (-\text{tg}\,\alpha)} =$

$= \dfrac{-2\,\text{tg}\,\alpha}{2\,\text{tg}\,\alpha} = -1$

Alternativa **a**.

42 $E = \dfrac{\text{tg}\,(-\alpha) - \text{sen}\,(\pi + \alpha) \cdot \cos\,(-\alpha)}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} =$

$= \dfrac{-\text{tg}\,\alpha - (-\text{sen}\,\alpha) \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$= \dfrac{-\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$= \dfrac{\frac{-\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos\alpha}}{\cos^2\alpha} =$

$= \dfrac{-\text{sen}\,\alpha\,(1 - \cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha} = \dfrac{-\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha} =$

$= -\dfrac{\text{sen}^3\alpha}{\cos^3\alpha} = -\text{tg}^3\,\alpha$

Alternativa **c**.

43 a) O valor de x, com $0° \leqslant x < 360°$, para que $\text{sen}\,x = 1$ é $x = 90°$.
Logo, $S = \{90°\}$.

b) Os valores de x, com $0° \leqslant x < 360°$, para os quais $\cos x = 0$ são $x = 90°$ ou $x = 270°$.
Logo, $S = \{90°, 270°\}$.

c) Os valores de x, com $0° \leqslant x < 360°$, para os quais $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$ são $x = 30°$ ou $x = 180° - 30° = 150°$.
Logo, $S = \{30°, 150°\}$.

d) Os valores de x, com $0° \leqslant x < 360°$, para os quais $\cos x = -\frac{1}{2}$ são $x = 180° - 60° = 120°$ ou $x = 180° + 60° = 240°$.
Logo, $S = \{120°, 240°\}$.

44 a) Na primeira volta no sentido positivo, temos:

$\text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Na primeira volta no sentido positivo, temos:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

45 a) $\text{tg}^2\,x = 0 \Rightarrow \text{tg}\,x = 0 \quad \therefore\ x = 0$ ou $x = \pi$
Logo, $S = \{0, \pi\}$.

b) $\text{tg}^2\,x = 1 \Rightarrow \text{tg}\,x = 1$ ou $\text{tg}\,x = -1$

- $\text{tg}\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$
- $\text{tg}\,x = -1 \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

c) $\text{tg}^2\,x = 3 \Rightarrow \text{tg}\,x = \sqrt{3}$ ou $\text{tg}\,x = -\sqrt{3}$

- $\text{tg}\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
- $\text{tg}\,x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

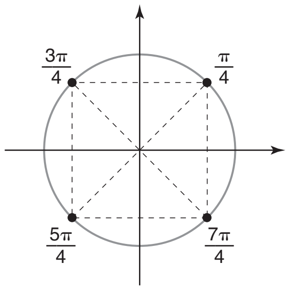
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

d) $|\text{tg}\,x| = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\text{tg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

- $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$
- $\text{tg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

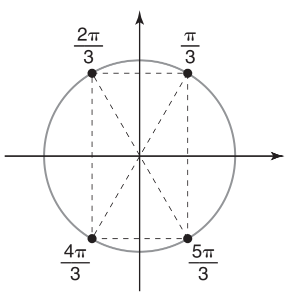
46 b) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **b** do exercício anterior, temos:



Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

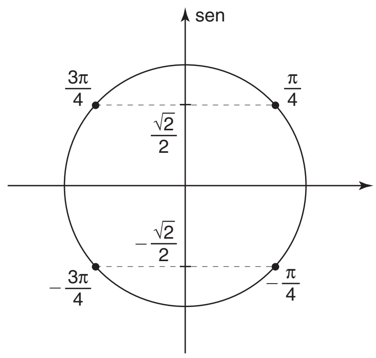
c) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **c** do exercício anterior, temos:



Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

47 $\text{sen}^2\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\therefore\ x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

48 $3\,\text{sen}\, x = \sqrt{3}\cos x \Rightarrow \frac{3\,\text{sen}\, x}{\cos x} = \sqrt{3}$

$\therefore\ \text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

49 $4^{3\cos x} = 8 \Rightarrow (2^2)^{3\cos x} = 2^3$

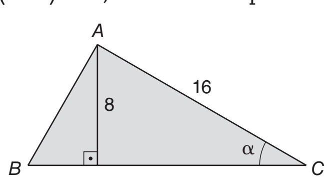
$\therefore\ 2^{2\cdot 3\cos x} = 2^3 \Rightarrow 2^{6\cos x} = 2^3$

$\therefore\ 6\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

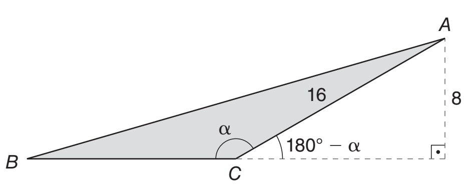
Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, tais que $\cos x = \frac{1}{2}$ são $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

Alternativa **a**.

50 Sendo $m(A\hat{C}B) = \alpha$, temos duas possibilidades:



ou

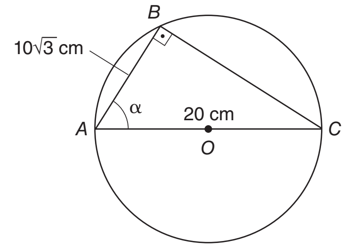


Na primeira figura, temos $\text{sen}\,\alpha = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$; na segunda, temos $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Como $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$, deduzimos que nas duas figuras as medidas α são raízes da equação $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$, com $0° < \alpha < 180°$. Essas raízes são: 30° ou 150°.

Alternativa **d**.

51 Sendo α a medida procurada, esquematizamos:



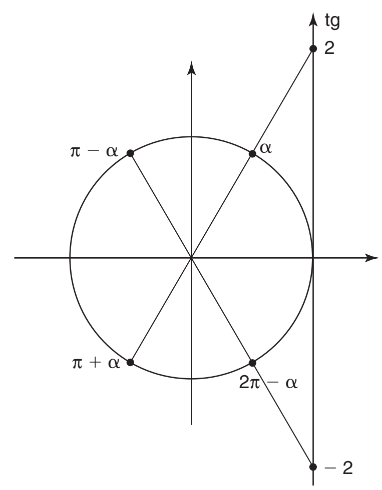
Assim, temos:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0° < \alpha < 90° \end{cases} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Logo, a medida do ângulo agudo que a corda $\overline{AB}$ forma com o diâmetro $\overline{AC}$ é 30°.

52 $\text{tg}^2\, x = 4 \Rightarrow \text{tg}\, x = 2$ e $\text{tg}\, x = -2$

Sendo α a raiz pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:



Logo, a soma S das raízes no intervalo $[0, 2\pi[$ é dada por:

$S = \alpha + \pi - \alpha + \pi + \alpha + 2\pi - \alpha = 4\pi$

53 Como $\cos x \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por cos x, obtendo:

$\frac{5\,\text{sen}\, x - \cos x}{\cos x} = \frac{4\,\text{tg}\, x \cdot \cos x}{\cos x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\,\text{tg}\, x - 1 = 4\,\text{tg}\, x$

$\therefore\ \text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

54 Condição: $2 + \text{tg}\, x \neq 0 \Rightarrow \text{tg}\, x \neq -2$

$\frac{1}{2 + \text{tg}\, x} + \frac{1 + \text{tg}\, x}{3} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3 + (1 + \text{tg}\, x)(2 + \text{tg}\, x) - 3(2 + \text{tg}\, x)}{3(2 + \text{tg}\, x)} = 0$

$\therefore\ \text{tg}^2\, x - 1 = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x = 1$ ou $\text{tg}\, x = -1$

Assim, temos:

- $\text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $\text{tg}\, x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

55 $\text{sen } x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 0$
Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:
- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

56 $\text{sen } x \cdot \cos x - 3 \text{ sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x (\cos x - 3) = 0$
$\therefore \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 3$ (não convém)
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
$\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
Logo, $S = \{0, \pi\}$.

57 $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \sqrt{2} \cos x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x \left(2 \text{ sen } x - \sqrt{2}\right) = 0$
$\therefore \cos x = 0$ ou $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} +$ $+ k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

58 $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \cos x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0$
$\therefore \cos x(2 \text{ sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ ou $\text{sen } x = \frac{1}{2}$
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$
$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

59 $\text{sen}^3 x \cdot \cos x - 3 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen } x \cdot \cos x (\text{sen}^2 x - 3) = 0$
$\therefore \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 0$ ou $\text{sen } x = \pm\sqrt{3}$ (não convém)
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

60 a) $(4 \text{ sen}^2 x - 3)(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{4 \text{ sen}^2 x - 3 = 0}_{\text{(I)}}$ ou $\underbrace{\cos x - 1 = 0}_{\text{(II)}}$
Resolvendo as equações (I) e (II), para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos:
(I) $4 \text{ sen}^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{3}{4}$
$\therefore \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$
(II) $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \quad \therefore x = 0$ ou $x = 2\pi$

De (I) e (II), concluímos:
$S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

b) $\cos^2 x \cdot \text{sen } x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x (\cos^2 x - 1) = 0$
$\therefore \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$
Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:
- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$
- $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Logo, $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

c) $4 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + 2 \text{ sen } x - 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \text{ sen } x (2 \cos x + 1) - 1(2 \cos x + 1) = 0$
$\therefore (2 \cos x + 1)(2 \text{ sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\text{sen } x = \frac{1}{2}$
Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:
- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
- $\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

d) $2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x (2 \text{ sen } x - 1) = 0$
$\therefore \text{sen } x = 0$ ou $\text{sen } x = \frac{1}{2}$
Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:
- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, 2\pi\right\}$.

e) $\text{tg}^2 x - \sqrt{3} \text{ tg } x = 0 \Rightarrow \text{tg } x \left(\text{tg } x - \sqrt{3}\right) = 0$
$\therefore \text{tg } x = 0$ ou $\text{tg } x = \sqrt{3}$
Assim:
- $\text{tg } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

f) $\text{tg}^5 x - \text{tg } x = 0 \Rightarrow \text{tg } x (\text{tg}^4 x - 1) = 0$
$\therefore \text{tg } x = 0$ ou $\text{tg } x = 1$ ou $\text{tg } x = -1$
Assim:
- $\text{tg } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $\text{tg } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$.

61 $\text{sen}^2 x + \text{sen } (-x) = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x - \text{sen } x = 0$
$\therefore \text{sen } x (\text{sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\text{sen } x = 1$
Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, obtemos:
- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Concluímos, assim, que a soma das raízes é:
$0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$
Alternativa **a**.

62 Condição de existência: $\cos x \neq 0$
$(tg^2 x - 3)(\cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow tg^2 x - 3 = 0$ ou $\cos^2 x - 1 = 0$
$\therefore\ tg\, x = \sqrt{3}$ ou $tg\, x = -\sqrt{3}$ ou $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$
Assim, temos:
- $tg\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $tg\, x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1 \Rightarrow x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

63 Condição de existência: $\cos x \neq 0$
$tg\, x \cdot \text{sen}\, x - tg\, x - \text{sen}\, x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow tg\, x\,(\text{sen}\, x - 1) - (\text{sen}\, x - 1) = 0$
$\therefore\ (\text{sen}\, x - 1)(tg\, x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x - 1 = 0$ ou $tg\, x - 1 = 0$
Assim, temos:
- $\text{sen}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$, não convém, pois $tg\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ e $\cos x \neq 0$
- $tg\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

64 Condição de existência: $\cos x \neq 0$
$\text{sen}\, x \cdot tg\, x + \text{sen}\, x - tg\, x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}\, x\,(tg\, x + 1) - \cos x\,(tg\, x + 1) = 0$
$\therefore\ (tg\, x + 1)(\text{sen}\, x - \cos x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow tg\, x + 1 = 0$ ou $\text{sen}\, x - \cos x = 0$
Assim, temos:
- $tg\, x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$
- $\text{sen}\, x = \cos x \Rightarrow tg\, x = 1$
  $\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$
  Logo, $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$.

65 Condição de existência: $\cos x \neq 0$
Temos:
$tg\, x \cdot \text{sen}\, x = tg\, x \Rightarrow tg\, x \cdot \text{sen}\, x - tg\, x = 0$
$\therefore\ tg\, x\,(\text{sen}\, x - 1) = 0 \Rightarrow tg\, x = 0$ ou $\text{sen}\, x = 1$
Os valores de x para os quais $\text{sen}\, x = 1$ não convêm, pois esses valores não satisfazem a condição de existência. Portanto:
$tg\, x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

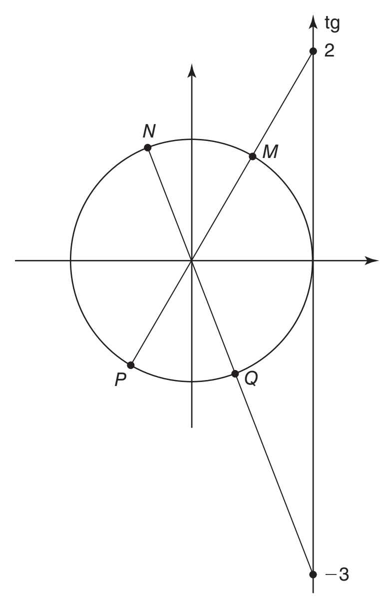
66 a) $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a equação de 2º grau:
$t^2 - 4t + 3 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$
$\therefore\ t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow t = 3$ ou $t = 1$
Como $\cos x = t$, temos $\cos x = 3$ (impossível) ou $\cos x = 1$.
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$
Logo, $S = \{0\}$.

b) $\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}\, x + 2 = 0$
Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\, x = t$, obtemos a equação do 2º grau:
$t^2 - 3t + 2 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$
$\therefore\ t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow t = 2$ ou $t = 1$
Como $\text{sen}\, x = t$, temos $\text{sen}\, x = 2$ (impossível) ou $\text{sen}\, x = 1$.
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
$\text{sen}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

c) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a equação do 2º grau:
$2t^2 + 3t + 1 = 0$
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$
$\therefore\ t = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ ou $t = -1$
Como $\cos x = t$, temos $\cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = -1$.
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
- $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$.

Logo, $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi\right\}$.

67 $tg^2 x + tg\, x - 6 = 0$
Para $tg\, x = y$, temos: $y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -3$
Logo: $tg\, x = 2$ ou $tg\, x = -3$
Quatro pontos, M, N, P e Q, são extremos de arcos trigonométricos que têm essas tangentes, conforme mostra a figura:



Assim, concluímos que no intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ a equação proposta apresenta 3 raízes.

68 $\text{tg}^2\,x - (1 + \sqrt{3})\,\text{tg}\,x + \sqrt{3} = 0$

Para $t = \text{tg}\,x$, temos:

$t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0$

Sendo S e P, respectivamente, a soma e o produto das raízes dessa equação do 2º grau, temos:

$$\begin{cases} S = 1 + \sqrt{3} \\ p = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = \sqrt{3}$$

Assim:

- $\text{tg}\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $\text{tg}\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Concluímos, então, que a maior raiz da equação proposta, no intervalo $[0, 2\pi[$, é $\frac{4\pi}{3}$.

69 $2\,\text{sen}^2\,x - 3\,\text{sen}\,x + 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\,x = t$, obtemos a equação do 2º grau:

$2t^2 - 3t + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$\therefore\ t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ ou $t = 1$

Retornando à variável original, temos:

$\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen}\,x = 1$

Para $0 \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$, concluímos:

- $\text{sen}\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{13\pi}{6}$ (3 soluções)
- $\text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{5\pi}{2}$ (2 soluções)

Logo, a equação possui 5 soluções no intervalo considerado.

Alternativa **d**.

70 $\text{sen}^2\,x - 2\cos x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0$

$\therefore\ \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\cos x = y$, obtemos a equação do 2º grau:

$y^2 + 2y + 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$\therefore\ y = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \Rightarrow y = -1$

Retornando à variável original, temos $\cos x = -1$.

Assim, para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Logo, $S = \{\pi\}$.

71 $9 - 2\cos^2 x = 15\,\text{sen}\,x \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 - 2(1 - \text{sen}^2\,x) = 15\,\text{sen}\,x$

$\therefore\ 2\,\text{sen}^2\,x - 15\,\text{sen}\,x + 7 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\,x = t$, obtemos a equação do 2º grau:

$2t^2 - 15t + 7 = 0$

$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 225 - 56 = 169$

$\therefore\ t = \frac{-(-15) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm 13}{4} \Rightarrow t = 7$ ou $t = \frac{1}{2}$

Retornando à variável original, temos:

$\text{sen}\,x = 7$ (impossível) ou $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$

Para $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, concluímos:

$\text{sen}\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.

72 $3\,\text{sen}^2\,x + \text{sen}\,x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 - 3\,\text{sen}^2\,x - \text{sen}\,x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$

$\therefore\ 3(1 - \text{sen}^2\,x) - \text{sen}\,x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cos^2 x - \text{sen}\,x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$

$\therefore\ \cos^2 x - \text{sen}\,x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x\,(\cos x - \text{sen}\,x) = 0$

$\therefore\ \cos x = 0$ ou $\cos x - \text{sen}\,x = 0$

Assim, temos:

- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- $\cos x = \text{sen}\,x \Rightarrow \text{tg}\,x = 1$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right\}$.

73 $8\,\text{sen}^4\,x + 2\cos^2 x = 3 \Rightarrow 8\,\text{sen}^4\,x + 2(1 - \text{sen}^2\,x) = 3$

$\therefore\ 8\,\text{sen}^4\,x - 2\,\text{sen}^2\,x - 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\text{sen}^2\,x = t$, obtemos a equação do 2º grau:

$8t^2 - 2t - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1) = 36$

$\therefore\ t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 8} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ ou $t = -\frac{1}{4}$

Retornando à variável original, temos:

$\text{sen}^2\,x = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen}^2\,x = -\frac{1}{4}$ (impossível)

Assim, calculamos os possíveis valores de sen x:

$\text{sen}^2\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Para $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, concluímos:

- $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$
- $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right\}$.

74 $x^2 - 2x \cdot \cos\theta + \text{sen}^2\,\theta = 0$

Se essa equação, na variável x, possui raízes reais e iguais, então $\Delta = 0$. Assim:

$\Delta = 0 \Rightarrow (-2\cos\theta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \text{sen}^2\,\theta = 0$

$\therefore\ 4\cos^2\theta - 4\,\text{sen}^2\,\theta = 0$

$\therefore\ \cos^2\theta = \text{sen}^2\,\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\theta = \text{sen}\,\theta$ ou $\cos\theta = -\text{sen}\,\theta$

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:

- $\cos\theta = \text{sen}\,\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{4}$
- $\cos\theta = -\text{sen}\,\theta \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

75 $\dfrac{16^{\operatorname{sen}^2 x}}{4^{5 \operatorname{sen} x}} = \dfrac{1}{64} \Rightarrow \dfrac{(4^2)^{\operatorname{sen}^2 x}}{4^{5 \operatorname{sen} x}} = \dfrac{1}{4^3}$

$\therefore\ 4^{2 \operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x} = 4^{-3} \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x = -3$

Fazendo a mudança de variável sen $x = t$, obtemos a equação do 2º grau:

$2t^2 - 5t + 3 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$

$\therefore\ t = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm 1}{4} \Rightarrow t = \dfrac{3}{2}$ ou $t = 1$

Retornando à variável original, temos:

sen $x = \dfrac{3}{2}$ (impossível) ou sen $x = 1$

Assim, para $0° \leqslant x \leqslant 360°$, concluímos:

sen $x = 1 \Rightarrow x = 90°$

Alternativa **b**.

76 $\operatorname{sen}^4 x = \cos^4 x \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x$ ou $\operatorname{sen} x = -\cos x$

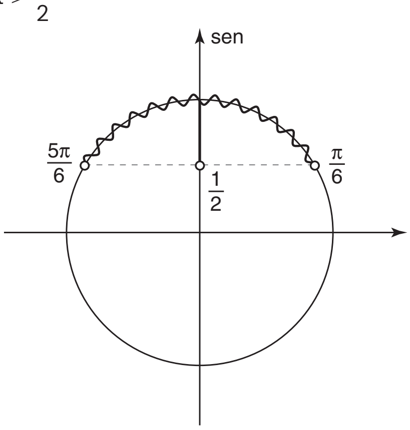
Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:

- $\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$
- $\operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Logo, a equação proposta tem quatro soluções no intervalo considerado.

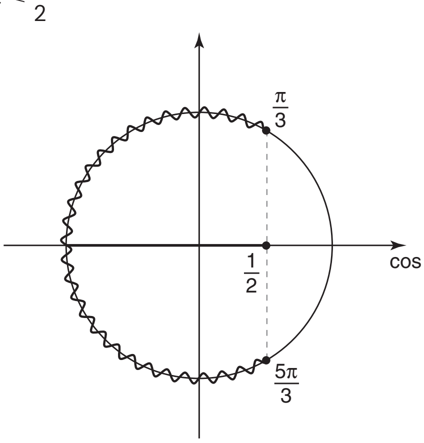
Alternativa **a**.

77 a) $\operatorname{sen} x > \dfrac{1}{2}$



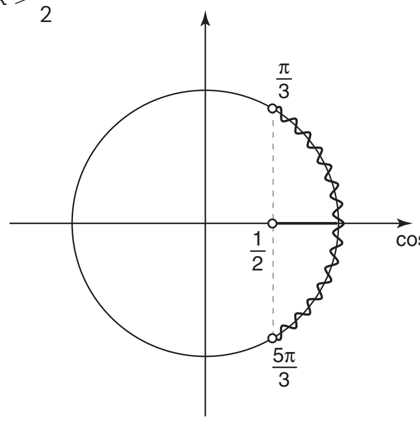
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

b) $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$



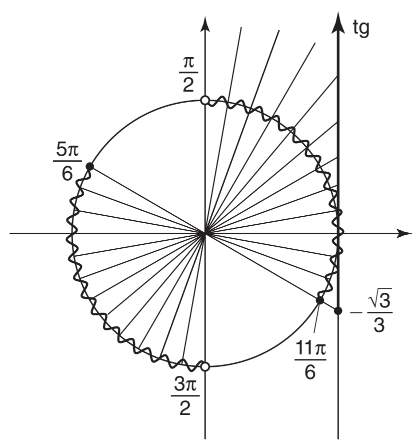
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

c) $\cos x > \dfrac{1}{2}$



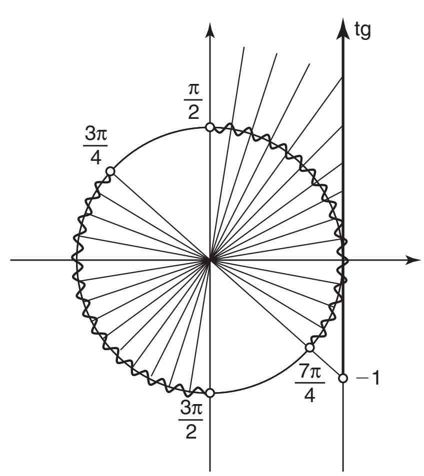
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

d) $\operatorname{tg} x \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



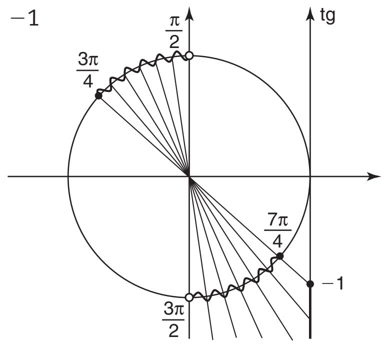
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{6} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{11\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

e) $\operatorname{tg} x > -1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

f) $\text{tg } x \leqslant -1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}$.

78 b) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **b** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) Como os números $\frac{5\pi}{3}$ e $-\frac{\pi}{3}$ estão associados ao mesmo ponto da circunferência trigonométrica, o conjunto solução da inequação do item **c** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

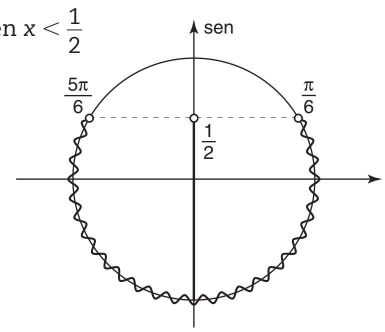
d) Basta adicionar a expressão $k\pi$ a cada extremo do intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Assim, o conjunto solução da inequação do item **d** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

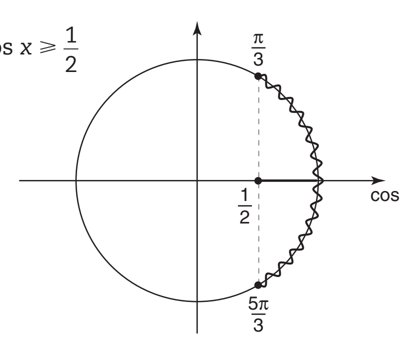
79 a) $\begin{cases} \text{sen } x < \frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x \geqslant \frac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

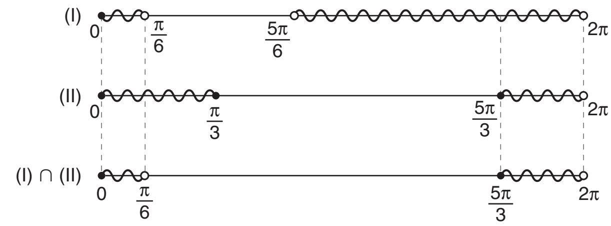
(I) $\text{sen } x < \frac{1}{2}$



(II) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:

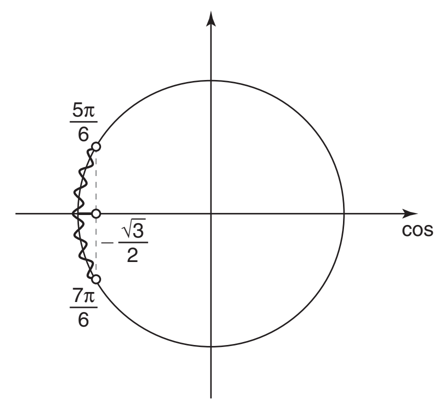


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

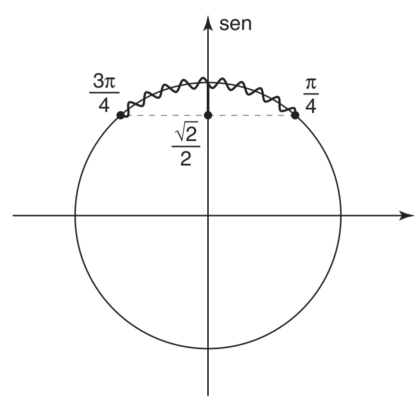
b) $\begin{cases} \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

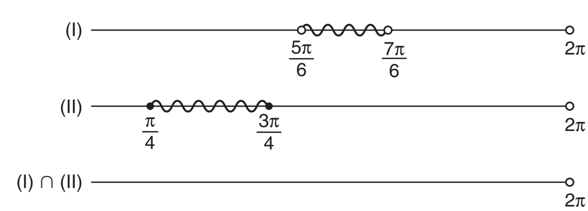
(I) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$



(II) $\text{sen } x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

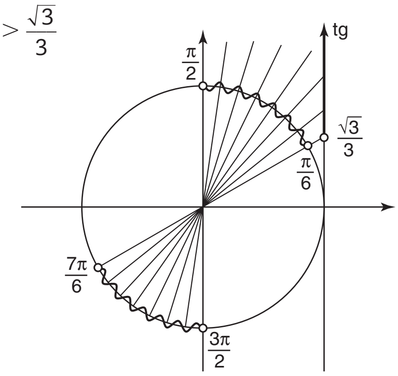


Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:

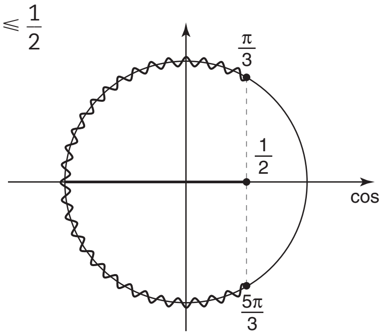


Logo, $S = \varnothing$.

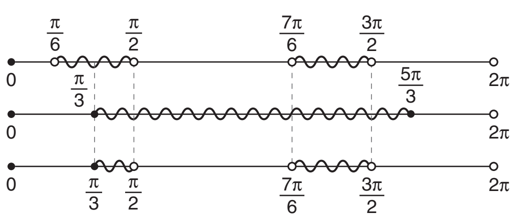
c) $\text{tg } x > \frac{\sqrt{3}}{3}$



$\cos x \leqslant \frac{1}{2}$

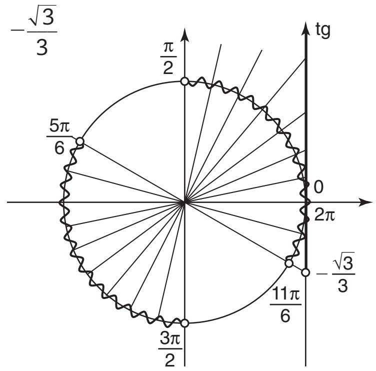


Retificando as soluções, temos:

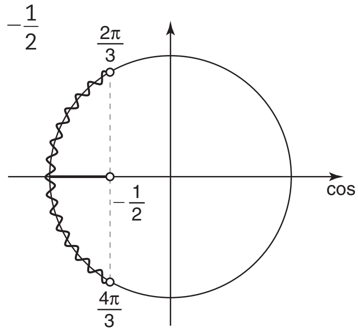


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

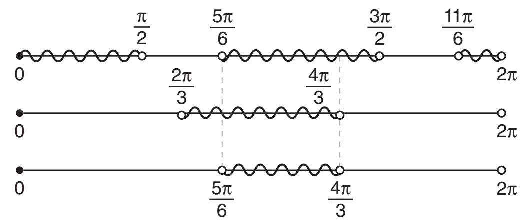
d) $\text{tg } x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$



$\cos x < -\frac{1}{2}$



Retificando as soluções, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3}\right\}$.

80 **a)** Como os números $\frac{5\pi}{3}$ e $-\frac{\pi}{3}$ estão associados ao mesmo ponto da circunferência trigonométrica, o conjunto solução do sistema do item **a** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\right.$

$\left.\text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **d** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\right.$

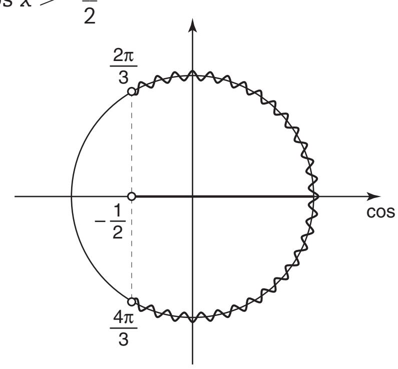
$\left.\text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

81 **a)** A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

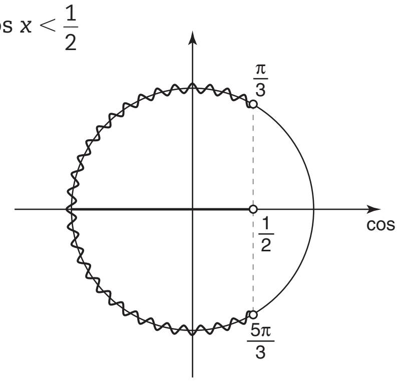
$$\begin{cases} \cos x > -\frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x < \frac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

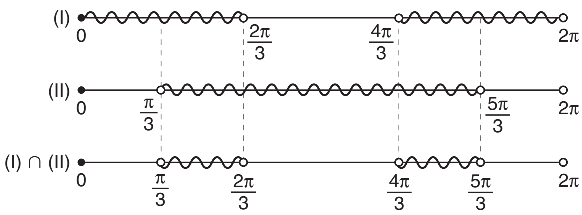
(I) $\cos x > -\frac{1}{2}$



(II) $\cos x < \frac{1}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



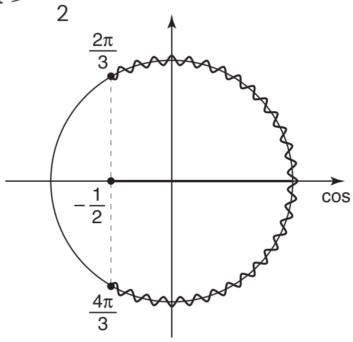
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$.

b) A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

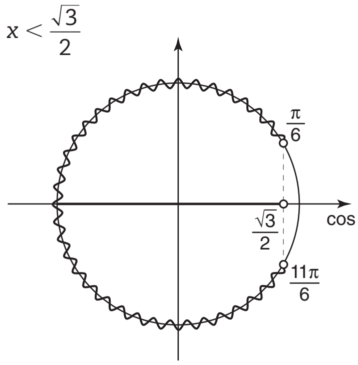
$$\begin{cases} \cos x \geqslant -\frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

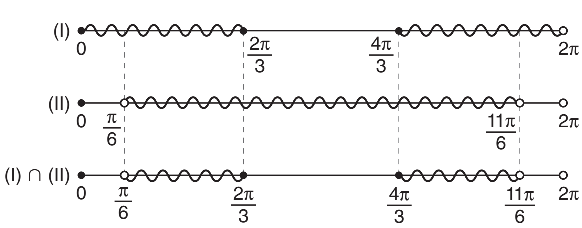
(I) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$



(II) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:

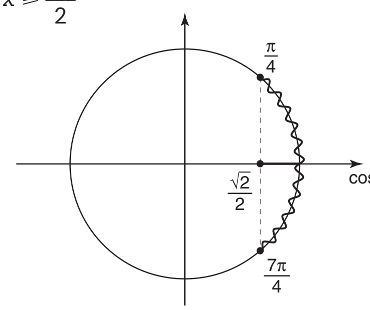


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leqslant x < \frac{11\pi}{6}\right\}$.

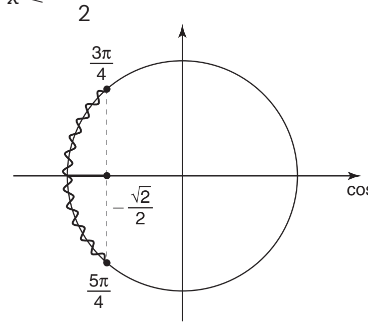
c) $|\cos x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underbrace{\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{(I)}} \text{ ou } \underbrace{\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{(II)}}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

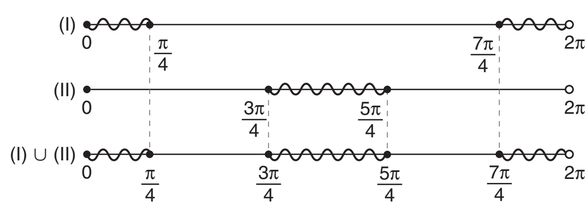
(I) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$



(II) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$

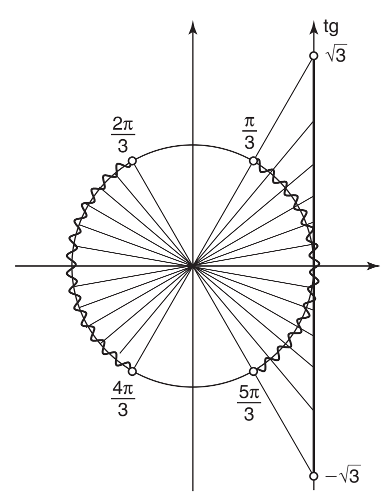


Fazendo a união dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



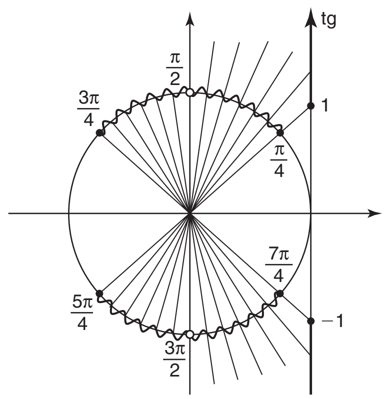
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}\right.$ ou $\left.\frac{7\pi}{4} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

d) $|\text{tg } x| < \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < \text{tg } x < \sqrt{3}$



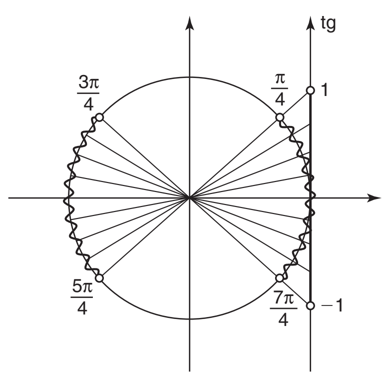
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}\right.$ ou $\left.\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

e) $|\text{tg } x| \geqslant 1 \Rightarrow \text{tg } x \geqslant 1$ ou $\text{tg } x \leqslant -1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

f) $|\text{tg } x| + 1 > |2 \text{ tg } x| \Rightarrow |\text{tg } x| + 1 > 2|\text{tg } x|$
$\therefore |\text{tg } x| < 1 \Rightarrow -1 < \text{tg } x < 1$

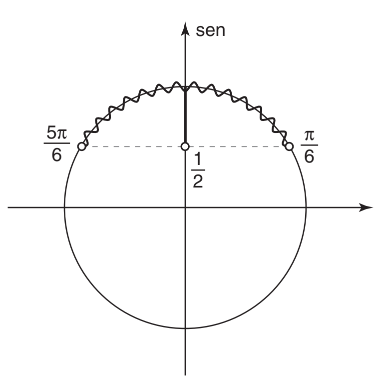


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

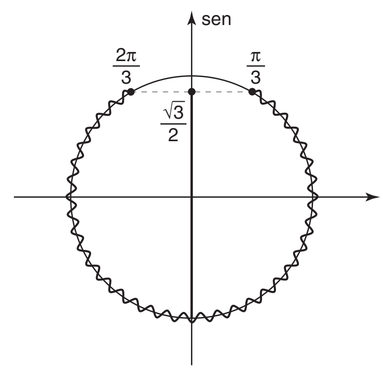
82 $\frac{1}{2} < \text{sen } x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x > \frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

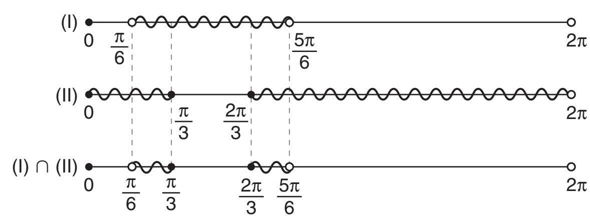
(I) $\text{sen } x > \frac{1}{2}$



(II) $\text{sen } x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções (I) e (II), obtemos:



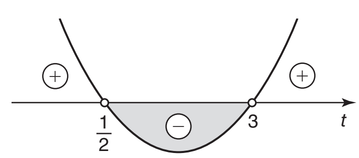
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x < \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Alternativa **a**.

83 a) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 < 0$

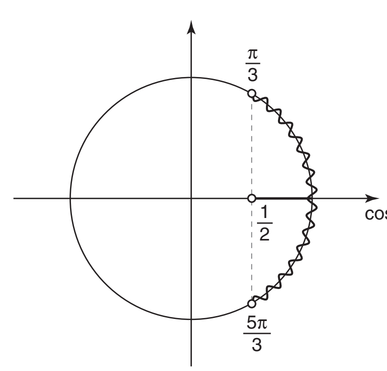
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - 7t + 3 < 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 7t + 3$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < 3$

Retornando à variável original, temos $\frac{1}{2} < \cos x < 3$, ou seja, $\cos x > \frac{1}{2}$, cujas soluções são representadas por:



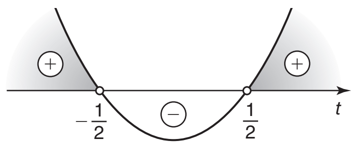
Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

b) $4\cos^2 x - 1 > 0$

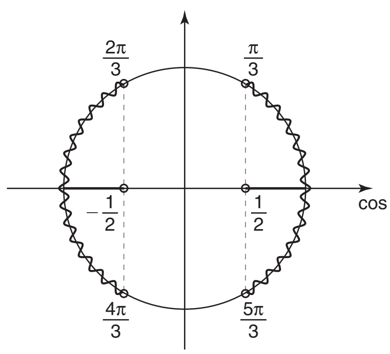
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $4t^2 - 1 > 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 4t^2 - 1$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) > 0 \Rightarrow t < -\frac{1}{2}$ ou $t > \frac{1}{2}$

Retornando à variável original, temos $\cos x < -\frac{1}{2}$ ou $\cos x > \frac{1}{2}$. A reunião dos conjuntos soluções dessas inequações é representada por:



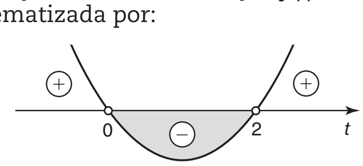
Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$$

c) $\text{sen}^2 x < 2\,\text{sen}\, x \Rightarrow \text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\, x < 0$

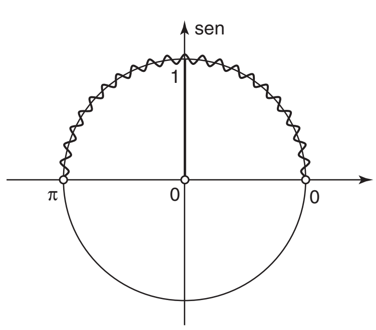
Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\, x = t$, obtemos a inequação $t^2 - 2t < 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = t^2 - 2t$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) < 0 \Rightarrow 0 < t < 2$

Retornando à variável original, temos $0 < \text{sen}\, x < 2$, ou seja, $\text{sen}\, x > 0$, cujas soluções são representadas por:



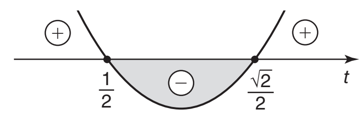
Concluímos, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$

d) $4\cos^2 x - (2\sqrt{2} + 2)\cos x + \sqrt{2} \leq 0$

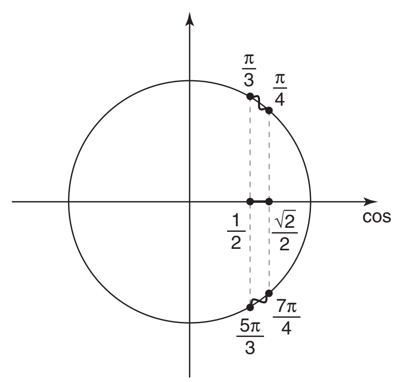
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $4t^2 - (2\sqrt{2} + 2)t + \sqrt{2} \leq 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 4t^2 - (2\sqrt{2} + 2)t + \sqrt{2}$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Retornando à variável original, temos $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, cujas soluções são representadas por:



Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}\right\}$$

(**Nota:**

No caso de os alunos terem dificuldade na resolução da equação $4t^2 - (2\sqrt{2} + 2)t + \sqrt{2} = 0$, podem ser sugeridas duas formas de resolução:

I) Soma (S) e Produto (P) das raízes:

$$\begin{cases} S = \dfrac{2\sqrt{2} + 2}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} \\ P = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Concluímos, então, que as raízes são $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

II) $\Delta = 8 + 8\sqrt{2} + 4 - 16\sqrt{2} = 8 - 8\sqrt{2} + 4 = (2\sqrt{2} - 2)^2$

$$\therefore t = \frac{2\sqrt{2} + 2 \pm \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2}}{8} \text{ ou}$$

$$t = \frac{2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2}}{8}$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } t = \frac{1}{2}\text{)}$$

e) $\dfrac{\text{sen}^2 x}{3} + \dfrac{\cos x}{2} - \dfrac{1}{2} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2\,\text{sen}^2 x + 3\cos x - 3}{6} \leqslant \dfrac{0}{6}$

$\therefore\ 2\,\text{sen}^2 x + 3\cos x - 3 \leqslant 0 \Rightarrow$

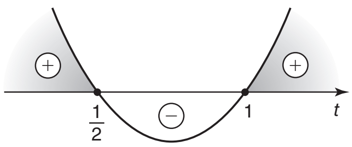
$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x - 3 \leqslant 0$

$\therefore\ -2\cos^2 x + 3\cos x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geqslant 0$

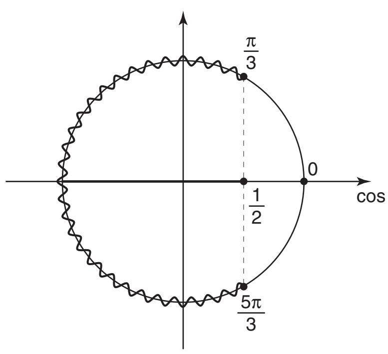
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - 3t + 1 \geqslant 0$

A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 3t + 1$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) \geqslant 0 \Rightarrow t \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $t \geqslant 1$

Retornando à variável original, temos $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $\cos x \geqslant 1$, ou seja, $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $\cos x = 1$. A reunião dos conjuntos soluções dessa inequação e dessa equação é representada por:



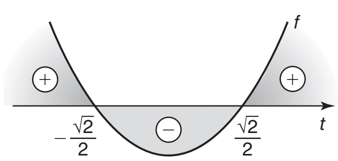
Concluímos, então:

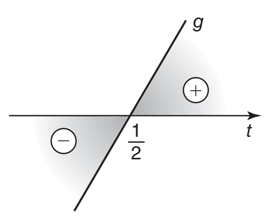
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{3} \text{ ou } x = 0\right\}$

f) $(2\cos^2 x - 1)(2\cos x - 1) < 0$

Fazendo $\cos x = t$, temos: $(2t^2 - 1)(2t - 1) < 0$

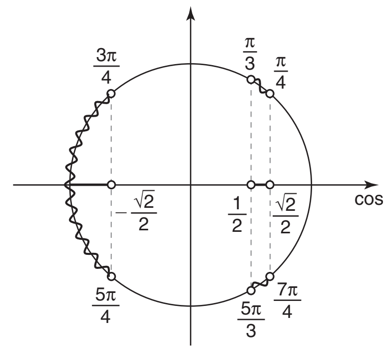
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t^2 - 1$, $g(t) = 2t - 1$ e $f \cdot g$, obtemos:





	$t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$t > \frac{\sqrt{2}}{2}$
f	+	−	−	+
g	−	−	+	+
$f \cdot g$	−	+	−	+

Logo, $\cos x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\dfrac{1}{2} < \cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



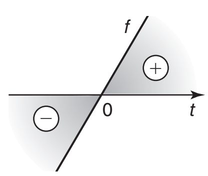
Concluímos, então:

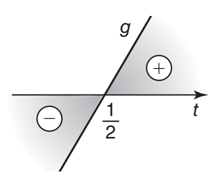
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{3} < x < \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

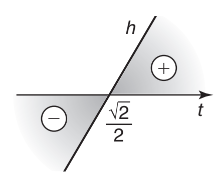
g) $\text{sen}\, x \left(\text{sen}\, x - \dfrac{1}{2}\right)\left(2\,\text{sen}\, x - \sqrt{2}\right) > 0$

Fazendo $\text{sen}\, x = t$, temos: $t\left(t - \dfrac{1}{2}\right)\left(2t - \sqrt{2}\right) > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t$, $g(t) = t - \dfrac{1}{2}$, $h(t) = 2t - \sqrt{2}$ e $f \cdot g \cdot h$, obtemos:



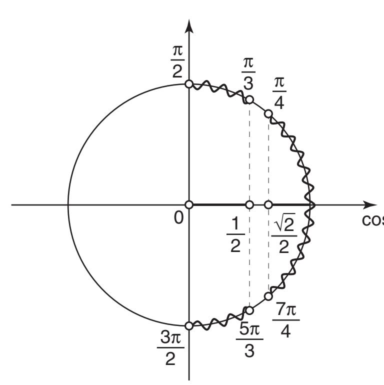




	$t < 0$	$0 < t < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$t > \frac{\sqrt{2}}{2}$
f	−	+	+	+
g	−	−	+	+
h	−	−	−	+
$f \cdot g \cdot h$	−	+	−	+

$f(t) \cdot g(t) \cdot h(t) > 0 \Rightarrow 0 < t < \dfrac{1}{2}$ ou $t > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $0 < \cos x < \dfrac{1}{2}$ ou $\cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

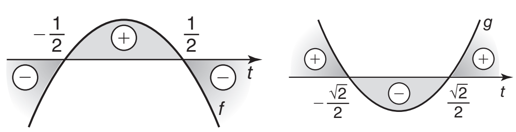
h) $\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\text{sen}^2 x - \frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow$

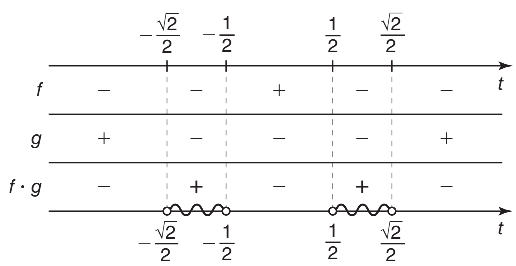
$\Rightarrow \left(1 - \text{sen}^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\text{sen}^2 x - \frac{1}{2}\right) > 0$

$\therefore \left(-\text{sen}^2 x + \frac{1}{4}\right)\left(\text{sen}^2 x - \frac{1}{2}\right) > 0$

Fazendo sen x = t, temos: $\left(-t^2 + \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - \frac{1}{2}\right) > 0$

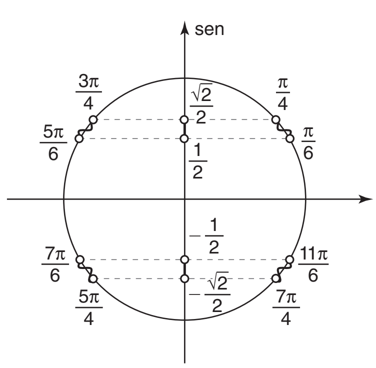
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = -t^2 + \frac{1}{4}$, $g(t) = t^2 - \frac{1}{2}$ e $f \cdot g$, obtemos:





$f(t) \cdot g(t) > 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < t < -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen } x < -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < \text{sen } x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



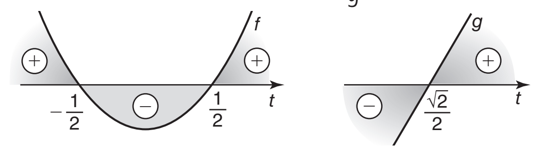
Concluímos, então:

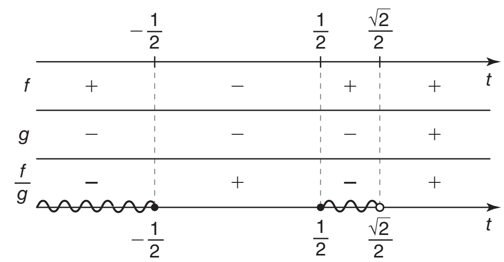
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

i) $\dfrac{4\cos^2 x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}} \leqslant 0$

Fazendo cos x = t, temos: $\dfrac{4t^2 - 1}{2t - \sqrt{2}} \leqslant 0$

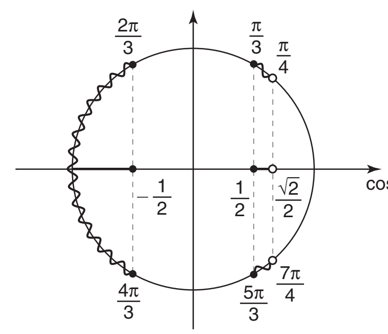
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 4t^2 - 1$, $g(t) = 2t - \sqrt{2}$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:





$\dfrac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant t < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



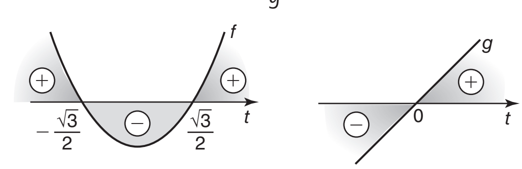
Concluímos, então:

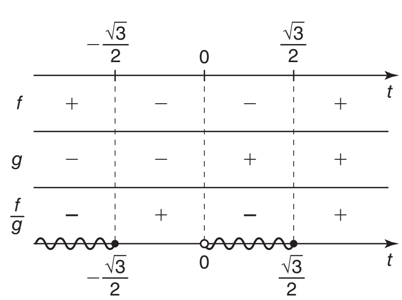
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

j) $\dfrac{4\cos^2 x - 3}{\cos x} \leqslant 0$

Fazendo cos x = t, temos: $\dfrac{4t^2 - 3}{t} \leqslant 0$

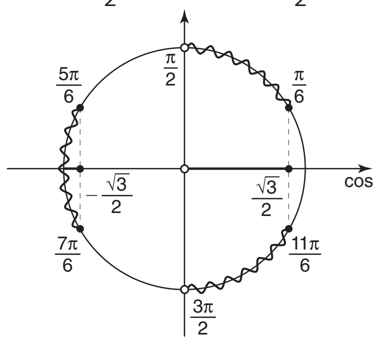
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 4t^2 - 3$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:





$\dfrac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $0 < t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $0 < \cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; e portanto:



Concluímos, então:

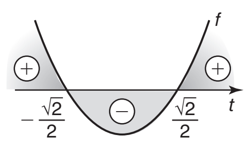
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$

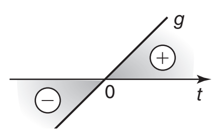
k) $\frac{-2\cos^2 x + 1}{\text{sen } x} > 0 \Rightarrow \frac{-2(1 - \text{sen}^2 x) + 1}{\text{sen } x} > 0$

$\therefore \frac{2\,\text{sen}^2 x - 1}{\text{sen } x} > 0$

Fazendo sen x = t, temos: $\frac{2t^2 - 1}{t} > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t^2 - 1$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:

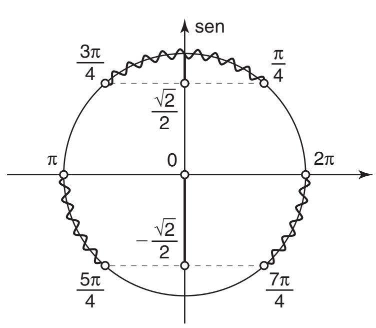




	$t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < 0$	$0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$t > \frac{\sqrt{2}}{2}$
f	+	−	−	+
g	−	−	+	+
$\frac{f}{g}$	−	+	−	+

$\frac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < t < 0$ ou $t > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen } x < 0$ ou $\text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



Concluímos, então:

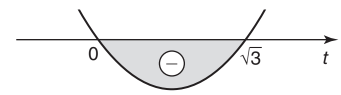
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

84 a) $\text{tg}^2 x - \sqrt{3}\,\text{tg } x \leqslant 0$

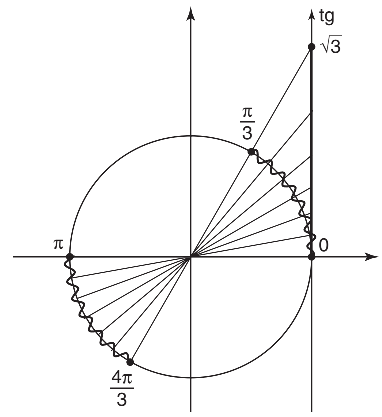
Fazendo tg x = t, temos:

$t^2 - \sqrt{3}t \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal da função $f(t) = t^2 - \sqrt{3}t$, obtemos:



Assim, $f(t) \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$; e portanto: $0 \leqslant \text{tg } x \leqslant \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}\right\}$.

b) $\text{tg}^3 x - \text{tg } x > 0$

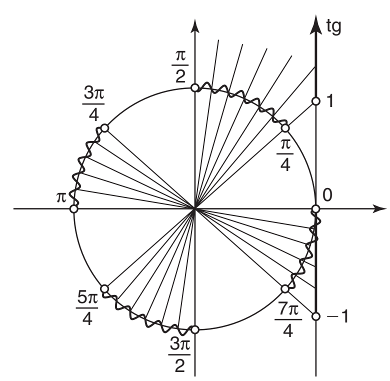
Fazendo tg x = t, temos:

$t^3 - t > 0 \Rightarrow t(t^2 - 1) > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t$, $g(t) = t^2 - 1$ e $f \cdot g$, obtemos:

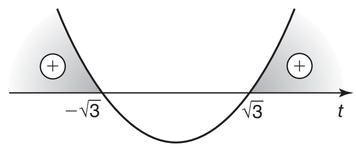
	$t < -1$	$-1 < t < 0$	$0 < t < 1$	$t > 1$
f	−	−	+	+
g	+	−	−	+
$f \cdot g$	−	+	−	+

Assim, $f(t) \cdot g(t) > 0 \Rightarrow -1 < t < 0$ ou $t > 1$; e portanto: $-1 < \text{tg } x < 0$ ou $\text{tg } x > 1$

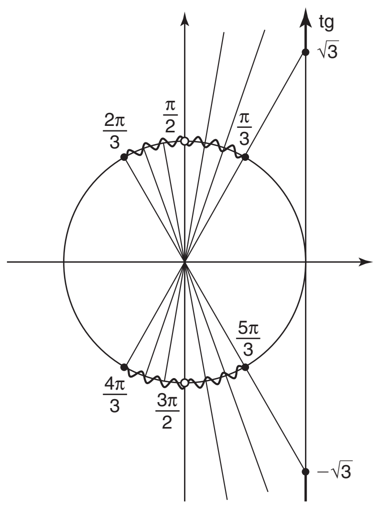


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

c) $\text{tg}^2\, x - 3 \geqslant 0$
Fazendo tg x = t, temos:
$t^2 - 3 \geqslant 0$
Estudando a variação de sinal da função
$f(t) = t^2 - 3$, obtemos:



Assim, $f(t) \geqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\sqrt{3}$ ou $t \geqslant \sqrt{3}$; e portanto: $\text{tg}\, x \leqslant -\sqrt{3}$ ou $\text{tg}\, x \geqslant \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

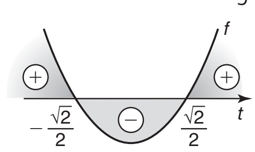
85 $2\,\text{sen}\, x \geqslant \dfrac{1}{\text{sen}\, x} \Rightarrow 2\,\text{sen}\, x - \dfrac{1}{\text{sen}\, x} \geqslant 0$

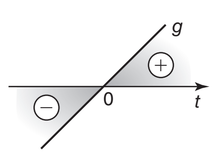
$\therefore \dfrac{2\,\text{sen}^2\, x - 1}{\text{sen}\, x} \geqslant 0$

Fazendo sen x = t, temos: $\dfrac{2t^2 - 1}{t} \geqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = 2t^2 - 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

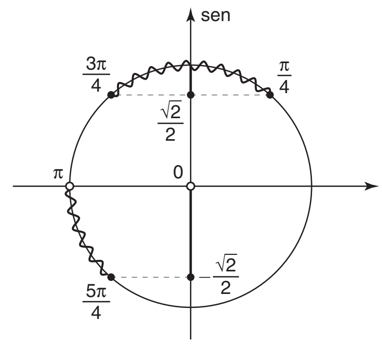




	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		t
f	+		−	−		+	
g	−		−	+		+	
$\frac{f}{g}$	−		+	−		+	
	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		t

$\dfrac{f(t)}{g(t)} \geqslant 0 \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant t < 0$ ou $t \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \text{sen}\, x < 0$ ou $\text{sen}\, x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



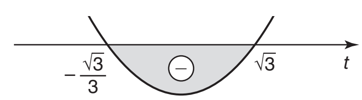
Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi < x \leqslant \frac{5\pi}{4}\right\}$

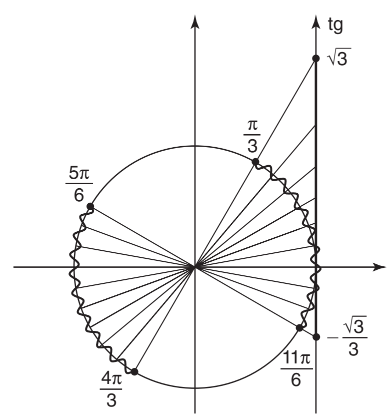
Portanto, o maior valor que x pode assumir é $\dfrac{5\pi}{4}$.

Alternativa **d**.

86 a) $3\,\text{tg}^2\, x - 2\sqrt{3}\,\text{tg}\, x - 3 \leqslant 0$
Fazendo tg x = t, temos:
$3t^2 - 2\sqrt{3}t - 3 \leqslant 0$
Estudando a variação de sinal da função
$f(t) = 3t^2 - 2\sqrt{3}t - 3$, obtemos:

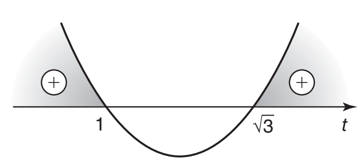


Assim, $f(t) \leqslant 0 \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$; e portanto:
$-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \text{tg}\, x \leqslant \sqrt{3}$

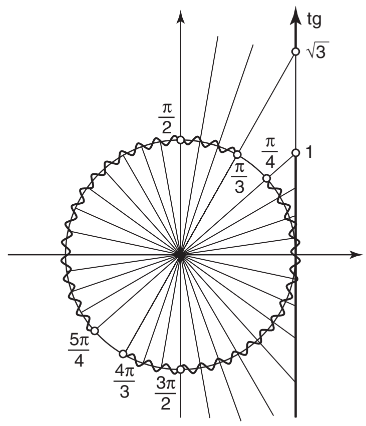


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

b) $\text{tg}^2\, x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\text{tg}\, x + \sqrt{3} > 0$
Fazendo tg x = t, temos:
$t^2 - \left(1 + \sqrt{3}\right)t + \sqrt{3} > 0$
Estudando a variação de sinal da função
$f(t) = t^2 - \left(1 + \sqrt{3}\right)t + \sqrt{3}$, obtemos:



Assim, $f(t) > 0 \Rightarrow t < 1$ ou $t > \sqrt{3}$; e portanto:
$\text{tg } x < 1$ ou $\text{tg } x > \sqrt{3}$

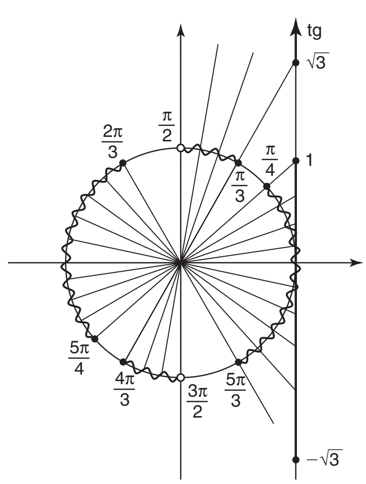


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

c) $(\text{tg}^2 x - 3)(\text{tg } x - 1) \geq 0$
Fazendo $\text{tg } x = t$, temos:
$(t^2 - 3)(t - 1) \geq 0$
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t^2 - 3$, $g(t) = t - 1$ e $f \cdot g$, obtemos:

	$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$	
f	+		−	−		+
g	−		−	+		+
$f \cdot g$	−		+	−		+

Assim, $f(t) \cdot g(t) \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq t \leq 1$ ou $t \geq \sqrt{3}$; e portanto:
$-\sqrt{3} \leq \text{tg } x \leq 1$ ou $\text{tg } x \geq \sqrt{3}$



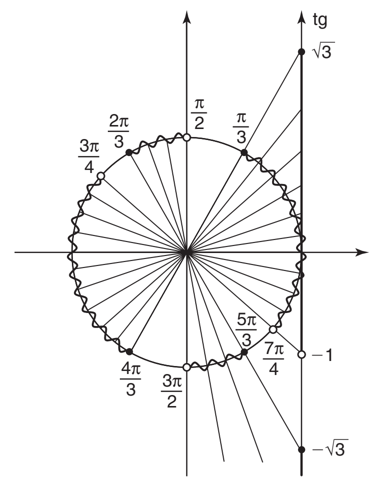
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < 2\pi\right\}$.

d) $\frac{\text{tg}^2 x - 3}{\text{tg } x + 1} \leq 0$
Fazendo $\text{tg } x = t$, temos: $\frac{t^2 - 3}{t + 1} \leq 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t^2 - 3$, $g(t) = t + 1$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:

	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$	
f	+		−	−		+
g	−		−	+		+
$\frac{f}{g}$	−		+	−		+

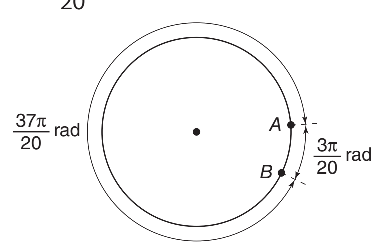
Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} \leq 0 \Rightarrow t \leq -\sqrt{3}$ ou $-1 < t \leq \sqrt{3}$; e portanto: $\text{tg } x \leq -\sqrt{3}$ ou $-1 < \text{tg } x \leq \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x \leq \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

87 Temos: $\frac{117\pi}{20}\text{ rad} = \underbrace{\frac{80\pi}{20}\text{ rad}}_{\text{2 voltas}} + \frac{37\pi}{20}\text{ rad}$

Assim, considerando apenas uma volta da pista, o ponto B é extremidade de um arco de $\frac{37\pi}{20}$ rad e do outro de $\frac{3\pi}{20}$ rad, conforme mostra a figura:



A medida x, em metro, do arco menor $\widehat{AB}$ é obtida pela regra de três:

medida do arco em radiano	medida do arco em metro
$\frac{3\pi}{20}$	x
2π	$2\pi \cdot 100$

Logo: $x = \frac{\frac{3\pi}{20} \cdot 200\pi}{2\pi}\text{ m} \Rightarrow x = 15\pi\text{ m} = 47{,}1\text{ m}$

Alternativa **e**.

88 A medida x, em quilômetro, do arco percorrido pela Lua em 1 dia é dada por:

$\frac{x}{384.000} = \frac{\pi}{15} \Rightarrow x = 25.600\pi$

Logo, a velocidade v da Lua é:

$v = \frac{25.600\pi}{24}$ km/h $\Rightarrow v = \frac{3.200\pi}{3}$ km/h

Alternativa **e**.

89 **a)** A medida x, em radiano, do arco é dada por:

$x = \frac{30}{10}$ rad $= 3$ rad

Logo, a velocidade angular ω_a do ponto é:

$\omega_a = \frac{3}{2}$ rad/min $= 1{,}5$ rad/min

Portanto, a velocidade angular do ponto P é 1,5 rad/min.

b) $\omega_a = \frac{3{,}6 \text{ rad}}{1 \text{ s}}$

Em 3 segundos, o ponto Q percorrerá:

$3 \cdot 3{,}6$ rad $= 10{,}8$ rad

Sendo R a medida, em centímetro, do raio da circunferência, temos:

$\frac{54}{R} = 10{,}8 \Rightarrow R = 5$

Portanto, a medida do raio dessa circunferência é 5 cm.

90 $\omega_a = \frac{5\pi}{8}$ rad/s

2π rad ——— $2\pi \cdot 6$ cm
$\frac{5\pi}{8}$ rad ——— x cm

$x = \frac{5\pi}{8} \cdot 2\pi \cdot 6 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{30\pi}{8} = \frac{15\pi}{4}$

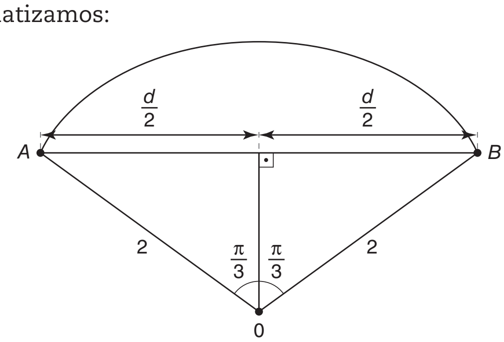
Logo, a velocidade desse ponto é $\frac{15\pi}{4}$ cm/s.

91 A razão entre o comprimento da ponte e a medida r do raio da circunferência é igual à medida, em radiano, do ângulo central $A\hat{O}B$:

$\frac{\frac{4\pi}{3}}{r} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow r = 2$

Logo, o raio da circunferência mede 2 km.

Sendo d a distância entre os pontos A e B, esquematizamos:

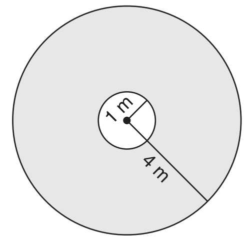


Assim:

$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{d}{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{4} \quad \therefore d = 2\sqrt{3}$

Concluímos, então, que a distância entre os pontos A e B é $2\sqrt{3}$ km ou aproximadamente 3,46 km.

92 **a)** Quando $\theta = 2\pi$ rad, a região irrigada é representada pela parte sombreada da figura abaixo.



A área A dessa região é dada por:

$A = (\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 1^2)$ m² $\Rightarrow A = 15\pi$ m²

Assim, para um valor θ qualquer, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a área $A(\theta)$ pode ser obtida pela regra de três:

2π rad ——— 15π m²
θ rad ——— $A(\theta)$

$\therefore A(\theta) = \frac{15\pi \cdot \theta}{2\pi}$ m² $\Rightarrow A(\theta) = \frac{15\theta}{2}$ m²

b) $\frac{15\theta}{2} = 8 \Rightarrow \theta = \frac{16}{15}$ rad

π rad ——— 180°
$\frac{16}{15}$ rad ——— θ

$\therefore \theta = \frac{\frac{16}{15} \cdot 180°}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{16}{15} \cdot 180°}{3} = 64°$

93 $180° = 180 \cdot 60' = 10.800'$

A medida x, em radiano, equivalente a 10.800′ pode ser obtida pela regra de três:

π rad ——— 10.800′
x ——— 2′

$\therefore x = \frac{2' \cdot \pi \text{ rad}}{10.800'} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5.400}$ rad

Logo, o ângulo mede $\frac{\pi}{5.400}$ rad.

94

Giro da roda		Giro da engrenagem
72π rad	———	2π rad
$\frac{18\pi}{5}$ rad	———	x

$\therefore x = \frac{18\pi}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{72\pi}$ rad $= \frac{\pi}{10}$ rad

Logo, a engrenagem gira $\frac{\pi}{10}$ rad, ou seja, 18°.

Alternativa **d**.

95 O deslocamento x, em grau, do ponteiro dos minutos, correspondente ao deslocamento de 48° do ponteiro das horas, pode ser obtido pela regra de três:

deslocamento do ponteiro dos minutos		deslocamento do ponteiro das horas
360°	———	30°
x	———	48°

$\therefore x = 576°$

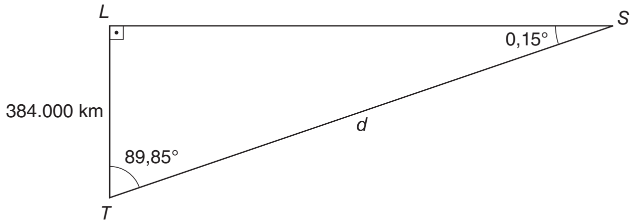
A medida y, em radiano, equivalente a 576° pode ser obtida pela regra de três:

360° ——— 2π rad
576° ——— y

$\therefore y = \frac{16\pi}{5}$ rad

Logo, o deslocamento pedido é de $\frac{16\pi}{5}$ rad.

96 Esquematizando a situação, temos:



Como 0,15° < 1°, uma boa aproximação para sen 0,15° é a medida de 0,15° expressa em radiano. Assim:

radiano grau

$$\frac{\pi}{x} = \frac{180}{0{,}15} \Rightarrow x = \frac{15}{100} \cdot \pi \cdot \frac{1}{180} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{1.200}\text{ rad}$$

Portanto, $\text{sen } 0{,}15° = \frac{\pi}{1.200}$ e $\text{sen } 0{,}15° = \frac{384.000}{d}$

Temos, então:

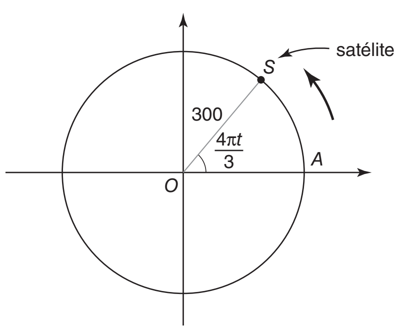
$$\frac{384.000}{d} = \frac{\pi}{1.200} \Rightarrow d = \frac{4.608 \cdot 10^5}{\pi}\text{ km}$$

Adotando para π o valor 3,14, $d \cong 1.467 \cdot 10^5$ km; ou, ainda, 146.700.000 km.

Logo, a distância aproximada da Terra ao Sol é 147.000.000 km.

Alternativa **d**.

97 Esquematizando essa situação, temos:



a) $f(1{,}5) = 300 \cdot \cos \frac{4\pi \cdot 1{,}5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1{,}5) = 300 \cos 2\pi = 300$

Logo, a abscissa da posição do satélite para $t = 1{,}5$ é 300.

b) A função g que expressa a ordenada da posição S do satélite em cada instante t, em hora, é:

$g(t) = 300 \text{ sen } \frac{4\pi t}{3}$

Assim, temos:

$g(2{,}5) = 300 - \text{sen}\frac{4\pi \cdot 2{,}5}{3} \Rightarrow g(t) = 300 - \text{sen}\frac{10\pi}{3}$

$\therefore g(t) = 300 - \text{sen } \frac{4\pi}{3} = 300 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= -150\sqrt{3}$

Logo, a abscissa da posição do satélite para $t = 2{,}5$ é $-150\sqrt{3}$.

c) O valor máximo da função $f(t) = 300 - \cos \frac{4\pi t}{3}$, em quilômetro, é o raio da órbita.

Como o valor máximo do $\cos \frac{4\pi t}{3}$ é 1, temos que o valor máximo de f é 300.

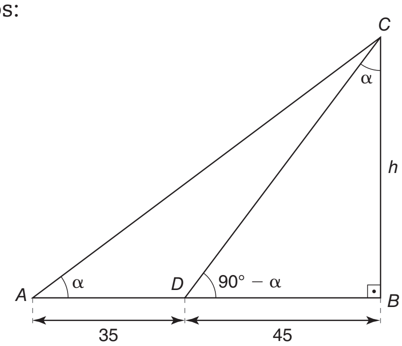
Portanto, o raio da órbita é 300 km.

d) Quando a medida $\frac{4\pi t}{3}$ varia de 0 rad a 2π rad, o satélite completa uma volta ao redor da Terra. Assim, calculamos a variação de t, em hora:

$$0 \leqslant \frac{4\pi t}{3} \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant 4\pi t \leqslant 6\pi \quad \therefore 0 \leqslant t \leqslant 1{,}5$$

Concluímos, então, que o satélite completa uma volta em 1,5 hora.

98 Sendo h a altura da torre, em metro, esquematizamos:



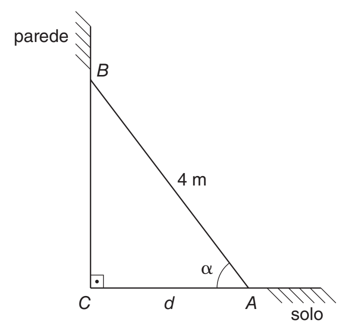
Dos triângulos ABC e CDB obtemos, respectivamente, $\text{tg } \alpha = \frac{h}{80}$ e $\text{tg } \alpha = \frac{45}{h}$.

Logo: $\frac{h}{80} = \frac{45}{h} \Rightarrow h^2 = 3.600 \quad \therefore h = 60$

Concluímos, então, que a altura da torre é 60 m.

(**Nota:** Comentar a resolução desse problema aplicando semelhança de triângulos.)

99 Sendo d a distância do ponto A à parede, esquematizamos:



$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{d}{4} \\ 2\sqrt{2} \leqslant d \leqslant 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{4} \leqslant \cos \alpha \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos \alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos que $30° \leqslant \alpha \leqslant 45°$.

Alternativa **c**.

100 Para qualquer posição do elevador E sobre o segmento $\overline{AC}$, temos:

$$\begin{cases} \text{tg } \alpha = \frac{BE}{10} \\ \frac{10\sqrt{3}}{3} \leqslant BE \leqslant 10\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}}{10} \leqslant \text{tg } \alpha \leqslant \frac{10\sqrt{3}}{10}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \text{tg } \alpha \leqslant \sqrt{3}$$

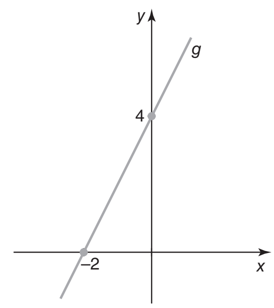
Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos que $30° \leqslant \alpha \leqslant 60°$.

Alternativa **c**.

Exercícios de revisão cumulativa

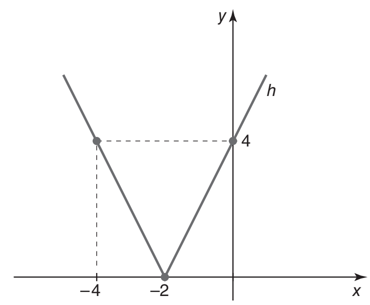
1 Passo 1

Construímos o gráfico da função $g(x) = 2x + 4$.



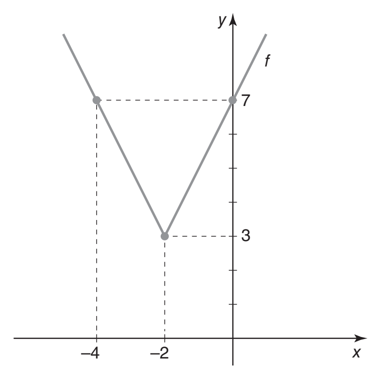
Passo 2

Construímos o gráfico da função $h(x) = |2x + 4|$. Para isso, conservamos os pontos de ordenadas não negativas do gráfico anterior e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas.



Passo 3

Finalmente, construímos o gráfico da função $f(x) = |2x + 4| + 3$. Para isso, transladamos o gráfico anterior 3 unidades verticalmente para cima.



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [3, +\infty[$

a) No *n-ésimo* ano de funcionamento, o número de litros produzidos é *n-ésimo* termo da PG (200.000, 210.000, 220.500, ...), ou seja:
$a_n = 200.000 \cdot (1{,}05)^{n-1}$

b) A produção acumulada, em litros de óleo, até o final do *n-ésimo* ano de funcionamento é a soma dos n primeiros termos da PG do item **a**, ou seja:

$$S_n = \frac{200.000(1 - 1{,}05^n)}{1 - 1{,}05} \Rightarrow S_n = \frac{200.000(1 - 1{,}05^n)}{-0{,}05} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = -4.000.000(1 - 1{,}05^n) \Rightarrow S_n = 4.000.000(1{,}05^n)$$

Análise da resolução

Fazendo a mudança de variável $2x = \alpha$, temos:

$\text{sen}\ \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Retornando à variável original, obtemos:

$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ $\quad \therefore\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos que os únicos valores possíveis de k são 0 e 1:

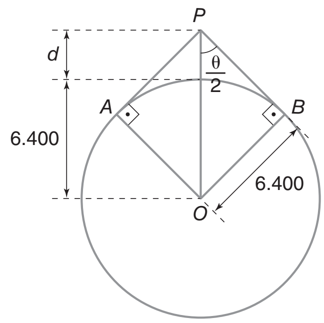
- $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 0\pi = \frac{\pi}{4}$
- $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

Seja d a distância, em quilômetro, do ponto P à superfície da Terra. Como os triângulos PAO e PBO são congruentes, temos:



Assim, a distância d do astronauta à superfície da Terra é obtida por:

$$\text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{6.400}{6.400 + d} \Rightarrow d = \frac{6.400\left(1 - \text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}$$

Exercícios propostos

1 a) $\text{cotg}\,45° = \dfrac{1}{\text{tg}\,45°} = \dfrac{1}{1} = 1$

b) $\sec 0° = \dfrac{1}{\cos 0°} = 1$

c) $\text{cossec}\,270° = \dfrac{1}{\text{sen}\,270°} = -1$

2 $E = \text{cossec}\,x + \sec^2 2x + \text{cotg}\,\dfrac{3x}{2}$

Para $x = \dfrac{\pi}{6}$, temos:

$E = \text{cossec}\,\dfrac{\pi}{6} + \sec^2\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{6}\right) + \text{cotg}\left(\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\pi}{6}\right) =$

$= \text{cossec}\,\dfrac{\pi}{6} + \sec^2\dfrac{\pi}{3} + \text{cotg}\,\dfrac{\pi}{4} =$

$= \dfrac{1}{\text{sen}\,\frac{\pi}{6}} + \left(\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\right)^2 + \dfrac{1}{\text{tg}\,\frac{\pi}{4}} = 2 + 4 + 1 = 7$

Logo, $E = 7$.

3 $\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} = 3 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{3} & \text{(I)} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

$\text{sen}^2 x + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, temos $\text{sen}\,x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, e portanto:

$\text{cossec}\,x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = \dfrac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

4 $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = 4 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 4\,\text{sen}\,x & \text{(I)} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

$\text{sen}^2 x + (4\,\text{sen}\,x)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

Como $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, temos $\text{sen}\,x = -\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

Substituindo $\text{sen}\,x$ por $-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$ em (I), obtemos:

$\cos x = -\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$, e portanto:

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{-\frac{4\sqrt{17}}{17}} = -\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

5 a) $\text{cossec}\,x = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = 1$

$\therefore\ \text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

b) $\sec x = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = -1$

$\therefore\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Logo, $S = \{\pi\}$.

c) $\text{cossec}\,x = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = 2$

$\therefore\ \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

d) $\sec x = -2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = -2$

$\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

e) $\sec x = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$

$\therefore\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

f) $\text{cossec}\,x = -\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = -\sqrt{2}$

$\therefore\ \text{sen}\,x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

6 Condição de existência: $\text{sen}\,x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$

$\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = \sec x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \dfrac{1}{\cos x}$

$\dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}\,x \cdot \cos x} = \dfrac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x \cdot \cos x} \Rightarrow \text{sen}\,x = 1$

$\therefore\ x = \dfrac{\pi}{2}$

Observando que $\dfrac{\pi}{2}$ não satisfaz a condição de existência, pois $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, concluímos que $S = \varnothing$.

7 $\sec x = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$

$\therefore \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Um valor possível para x é $\dfrac{7\pi}{4}$; portanto:

$\text{tg}\, x = \text{tg}\, \dfrac{7\pi}{4} = -1$, $\text{cossec}\, x =$

$= \text{cossec}\, \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{1}{\text{sen}\, \dfrac{7\pi}{4}} = \dfrac{1}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$ e

$\text{cotg}\, x = \text{cotg}\, \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{1}{\text{tg}\, \dfrac{7\pi}{4}} = \dfrac{1}{-1} = -1$

Então:

$\dfrac{1 + \text{tg}\, x + \text{cossec}\, x}{1 + \text{cotg}\, x - \text{cossec}\, x} = \dfrac{1 + (-1) + \left(-\sqrt{2}\right)}{1 + (-1) - \left(-\sqrt{2}\right)} =$

$= \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$

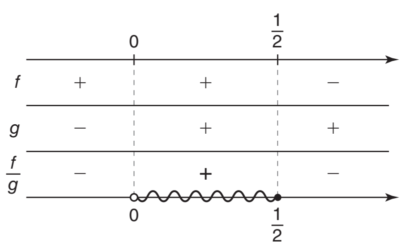
Alternativa **a**.

8 **a)** $\sec x \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} \geqslant 2$

Para $t = \cos x$, temos:

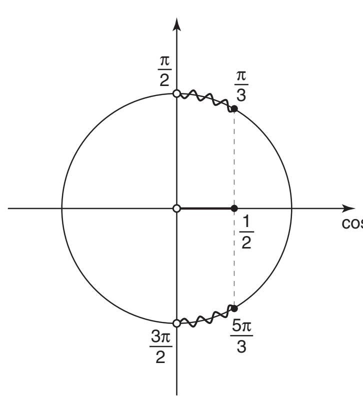
$\dfrac{1}{t} \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{-2t + 1}{t} \geqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = -2t + 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} \geqslant 0 \Rightarrow 0 < t \leqslant \dfrac{1}{2}$, e portanto:

$0 < \cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$

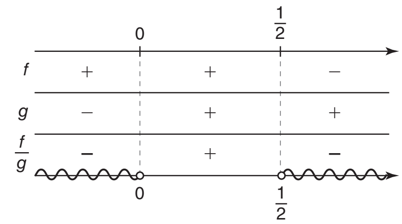


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \dfrac{\pi}{3} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

b) $\text{cossec}\, x < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\, x} < 2$. Para $t = \text{sen}\, x$, temos:

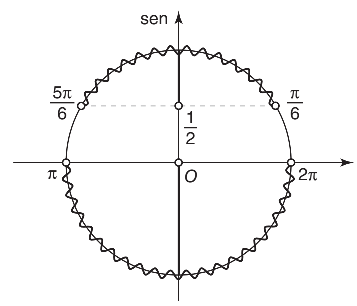
$\dfrac{1}{t} < 2 \Rightarrow \dfrac{-2t + 1}{t} < 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = -2t + 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} < 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t > \dfrac{1}{2}$, e portanto:

$\text{sen}\, x < 0$ ou $\text{sen}\, x > \dfrac{1}{2}$

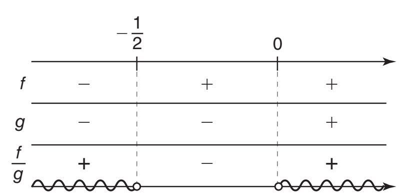


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6} \text{ ou } \pi < x < 2\pi\right\}$.

c) $\sec x > -2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} > -2$. Para $t = \cos x$, temos:

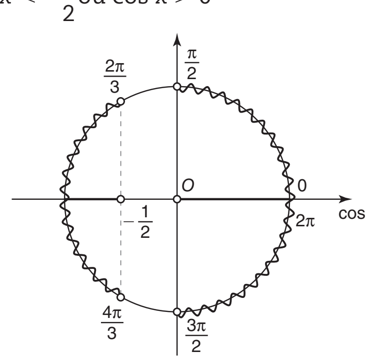
$\dfrac{1}{t} > -2 \Rightarrow \dfrac{2t + 1}{t} > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t + 1$, $g(t)$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:



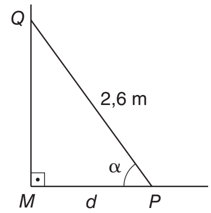
Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\dfrac{1}{2}$ ou $t > 0$, e portanto:

$\cos x < -\dfrac{1}{2}$ ou $\cos x > 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{4\pi}{3} \text{ ou } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

9 Sendo *d* a distância procurada, temos:



cossec $\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$, para $0° < \alpha < 90°$

Assim:

$\cos 60° = \frac{d}{2{,}6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{2{,}6}$

$\therefore d = 1{,}3$

Concluímos, então, que a distância entre a estaca e o poste é 1,3 m.

10 a) $5(x + 2) = 5x + 10$ é equivalente à sentença $5x + 10 = 5x + 10$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

b) $6x = 12$ é equivalente à sentença $x = 2$, que se verifica apenas para o número real 2. Logo, não é uma identidade em $\mathbb{R}$.

c) O produto $0 \cdot x$ se anula para todo x real. Logo, a sentença $0 \cdot x = 0$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

d) Para $x = 0$, a sentença $\frac{0}{x} = 0$ é falsa. Logo, essa sentença não é identidade em $\mathbb{R}$.

e) Para qualquer x real não nulo, o quociente $\frac{0}{x}$ é nulo. Logo, a sentença $\frac{0}{x} = 0$ é uma identidade em $\mathbb{R}^*$.

f) Como 1 é elemento neutro da multiplicação, $1 \cdot x = x$ é equivalente a $x = x$, o que é uma identidade em $\mathbb{R}$.

g) Existe pelo menos um valor real de x, por exemplo $x = 1$, para o qual a sentença $(x + 3)^2 = x^2 + 9$ é falsa. Logo, essa sentença não é identidade em $\mathbb{R}$.

h) Desenvolvendo o quadrado perfeito do primeiro membro, obtemos a sentença:
$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x + 9$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

i) $\sqrt{x^2} = |x|$ é equivalente à sentença $x^2 = |x|^2$, que é equivalente a $x^2 = x^2$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

j) $\sqrt[3]{x^3} = x$ é equivalente à sentença $x^3 = x^3$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

11 Na alternativa **d**, temos cossec $x \cdot$ sen $x = 1$, equivalente a $\frac{1}{\text{sen } x} \cdot \text{sen } x = 1$, que se verifica para todo x real, com sen $x \neq 0$. Logo, é uma identidade em U.

Alternativa **d**.

12 a) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir cada uma das expressões sen $x \cdot$ tg x e sec x − cos x, devemos ter cos $x \neq 0$. Logo, o primeiro e o segundo membros de igualdade estão definidos em U.

Passo 2

1º membro = sen $x \cdot$ tg x = sen $x \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ =

$= \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x} =$

$= \frac{1}{\cos x} - \cos x = \sec x - \cos x =$ 2º membro

b) Aplicando a técnica 3.

Sabemos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ é uma identidade em $\mathbb{R}$ e, portanto, também o é em U, pois $U \subset \mathbb{R}$.

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por $\text{sen}^2 x$, com sen $x \neq 0$, temos:

$\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$

c) Aplicando a técnica 2.

$\sec^2 x + \text{cossec}^2 x = \sec^2 x \cdot \text{cossec}^2 x$ é equivalente a:

$\sec^2 x + \text{cossec}^2 x - \sec^2 x \cdot \text{cossec}^2 x = 0$

Passo 1

Para existir o primeiro membro dessa igualdade, devemos ter: sen $x \neq 0$ e cos $x \neq 0$.

O segundo membro é a constante zero e, portanto, existe para qualquer valor real de x.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em U.

Passo 2

1º membro $= \sec^2 x + \text{cossec}^2 x - \sec^2 x \cdot \text{cossec}^2 x =$

$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 x} =$

$= \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 1}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} = \frac{1 - 1}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} =$

$= \frac{0}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} = 0 = 2°$ membro

d) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Os dois membros da igualdade estão definidos em $U = \mathbb{R}$.

Passo 2

1º membro $= \text{sen}^4 x - \cos^4 x =$

$= (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\text{sen}^2 x - \cos^2 x) =$

$= 1[\text{sen}^2 x - (1 - \text{sen}^2 x)] = 2\,\text{sen}^2 x - 1 =$

= 2º membro

13 a) $\cos 75° = \cos (45° + 30°) =$

$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

Logo, $\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

b) $\text{sen } 15° = \text{sen } (45° - 30°) =$

$= \text{sen } 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \text{sen } 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

Logo, $\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

c) $\text{tg } 75° = \text{tg } (45° + 30°) =$

$$= \frac{\text{tg } 45° + \text{tg } 30°}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

Logo, $\text{tg } 75° = 2 + \sqrt{3}$.

14 Aplicando as identidades
$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$ e
$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$, temos:

$\cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$

$= \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \text{sen } \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen } x +$

$+ \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \cos x - \text{sen } \frac{3\pi}{2} \cdot \text{sen } x =$

$= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \text{sen } x + 0 \cdot \cos x - (-1) \cdot \text{sen } x =$
$= \text{sen } x + \text{sen } x = 2 \text{ sen } x$

15 $\cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen } \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \text{sen } x \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6} =$

$= \text{sen } x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3} - 1$

$\therefore \cancel{\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} - \text{sen } x \cdot \frac{1}{2} = \text{sen } x \cdot \frac{1}{2} + \cancel{\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2} \text{ sen } x \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 1$

$\therefore \text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
Portanto:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

16 a) $\text{sen } 10° \cdot \cos 20° + \text{sen } 20° \cdot \cos 10° =$

$= \text{sen } (10° + 20°) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

b) $\cos 5° \cdot \cos 55° - \text{sen } 5° \cdot \text{sen } 55° =$

$= \cos (5° + 55°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

c) $\dfrac{\text{tg} \frac{\pi}{3} - \text{tg} \frac{\pi}{12}}{1 + \text{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \text{tg} \frac{\pi}{12}} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

17 Fazendo a mudança de variáveis $x - y = z$, observamos que:
$\text{sen } z \cdot \cos y + \cos z \cdot \text{sen } y = \text{sen}(z + y)$
Logo:
$\text{sen}(x - y) \cdot \cos y + \cos(x - y) \cdot \text{sen } y =$
$= \text{sen}(x - y + y) = \text{sen } x$
Alternativa **c**.

18 $\cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \text{sen } x \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}$

Como $\cos x = \frac{5}{13}$, vamos obter sen x:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}$

$\therefore \text{sen}^2 x = \frac{144}{169}$

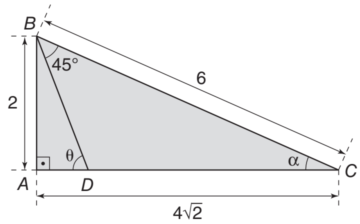
Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\text{sen } x = -\frac{12}{13}$. Assim:

$\cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{26} + \frac{12\sqrt{2}}{26}$

Logo, $\cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}$.

19 Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $AC = 4\sqrt{2}$.



O ângulo $B\hat{D}A$ é externo do triângulo BDC e, portanto, $\theta = \alpha + 45°$. Assim:
$\text{sen } \theta = \text{sen } (\alpha + 45°) =$
$= \text{sen } \alpha \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

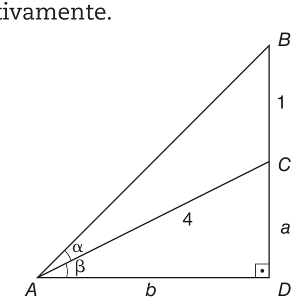
$\Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{2}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2} + 4}{6}$

Concluímos, então:

$\text{sen } \theta = \frac{2}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} + 4}{6} = \frac{2}{BD}$

$\therefore BD = \frac{12}{\sqrt{2} + 4} = \frac{6\left(4 - \sqrt{2}\right)}{7}$

20 Sejam *a* e *b* as medidas dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente.



Temos:

- $\begin{cases} \cos (\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \\ \text{sen}^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha + \beta) = 1 \\ (\alpha + \beta) \text{ é um ângulo agudo} \end{cases} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \text{sen } (\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$

- No $\triangle$ ACD: $\text{sen } \beta = \frac{a}{4}$ e $\cos \beta = \frac{b}{4}$

Assim:

- $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$

  $\frac{4}{5} = \cos \alpha \cdot \frac{b}{4} - \text{sen } \alpha \cdot \frac{a}{4} \Rightarrow$

  $\Rightarrow b \cdot \cos \alpha - a \cdot \text{sen } \alpha = \frac{16}{5} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{\frac{16}{5} + a \cdot \text{sen } \alpha}{b}$

  $\therefore \cos \alpha = \frac{16}{5b} + \frac{a \cdot \text{sen } \alpha}{b}$ (I)

- $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$

$$\frac{3}{5} = \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{b}{4} + \cos\alpha \cdot \frac{a}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \cdot \text{sen}\,\alpha + a \cdot \cos\alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\frac{12}{5} - b \cdot \text{sen}\,\alpha}{a}$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{12}{5a} - \frac{b \cdot \text{sen}\,\alpha}{a} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), obtemos:

$$\frac{16}{5b} + \frac{a \cdot \text{sen}\,\alpha}{b} = \frac{12}{5a} - \frac{b \cdot \text{sen}\,\alpha}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16a + 5a^2\,\text{sen}\,\alpha}{5ab} = \frac{12b - 5b^2\,\text{sen}\,\alpha}{5ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a^2\,\text{sen}\,\alpha + 5b^2\,\text{sen}\,\alpha = 12b - 16a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot (a^2 + b^2) = 12b - 16a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{12b - 16a}{5(a^2 + b^2)} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{4 \cdot (3b - 4a)}{5 \cdot (a^2 + b^2)} \quad \text{(III)}$$

Temos, ainda:

- No $\triangle\,ACD$, aplicando o teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = 4^2$

$\therefore a^2 + b^2 = 16 \quad \text{(IV)}$

- $$\begin{cases} \text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4} \\ \text{No } \triangle\,ABD\text{: tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{1 + a}{b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 + a}{b} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 3b = 4a + 4 \Rightarrow 3b - 4a = 4 \quad \text{(V)}$$

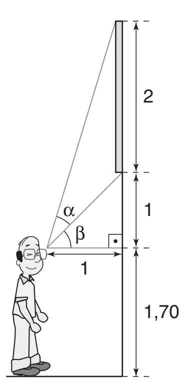
Substituindo (IV) e (V) em (III):

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{4 \cdot (3b - 4a)}{5 \cdot (a^2 + b^2)} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 16} = \frac{1}{5}$$

Logo, $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{5}$.

Alternativa **d**.

21



$$\begin{cases} \text{tg}\,\beta = 1 \\ \text{tg}(\beta + \alpha) = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\,\beta = 1 & \text{(I)} \\ \dfrac{\text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\alpha} = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$$\frac{1 + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,\alpha} = 3 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$$

22 Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $-1 < \cos x < 0$.

Pela relação fundamental, temos:

$$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\therefore \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Temos, então:

$$\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) =$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

23 $\text{sen}\,x = 2\cos x \Rightarrow \text{sen}^2\,x = (2\cos x)^2$

$\therefore \text{sen}^2\,x = 4\cos^2 x \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 4\cos^2 x$

$\therefore 5\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$

$\therefore \cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $-1 < \cos x < 0$;

logo, $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e, da equação dada:

$$\text{sen}\,x = 2\cos x \Rightarrow \text{sen}\,x = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\therefore \text{sen}\,x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Logo:

$$\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x = 2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

24 $\cos 10x = \cos(2 \cdot 5x) = \cos^2 5x - \text{sen}^2\,5x =$

$= 2\cos^2 5x - 1$

$$\therefore \cos 10x = 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7}{18}$$

25 Lembrando que $\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x$ e $\text{sen}(x - y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y - \text{sen}\,y \cdot \cos x$, temos:

$$\frac{\text{sen}\,27°}{\text{sen}\,9°} - \frac{\cos 27°}{\cos 9°} =$$

$$= \frac{\text{sen}\,27° \cdot \cos 9° - \text{sen}\,9° \cdot \cos 27°}{\text{sen}\,9° \cdot \cos 9°} =$$

$$= \frac{\text{sen}(27° - 9°)}{\text{sen}\,9° \cdot \cos 9°} = \frac{\text{sen}\,18°}{\text{sen}\,9° \cdot \cos 9°} =$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\,18°}{2 \cdot \text{sen}\,9° \cdot \cos 9°} = \frac{2\,\text{sen}\,18°}{\text{sen}(2 \cdot 9°)} =$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\,18°}{\text{sen}\,18°} = 2$$

Alternativa **e**.

26 $f(x) = \text{sen}\,x \cdot \cos x \Rightarrow f(x) = \frac{2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x}{2}$

$$\therefore f(x) = \frac{\text{sen}\,2x}{2}$$

Logo:

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Alternativa **e**.

27 Lembrando que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ e que $\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x$, temos:

$\cos 3x = \cos (x + 2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, 2x =$
$= \cos x(2\cos^2 x - 1) - \text{sen}\, x(2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x) =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$
$= 4\cos^3 x - 3\cos x$
Logo, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Assim:
$\cos 3x = 4k^3 - 3k$.

28 Lembrando que $\text{sen}\, 2x = 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x$ e que $\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$, temos:
$\text{sen}\, 3x = \text{sen}\, (x + 2x) =$
$= \text{sen}\, x \cdot \cos 2x + \text{sen}\, 2x \cdot \cos x =$
$= \text{sen}\, x(1 - 2\,\text{sen}^2 x) + 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos^2 x =$
$= \text{sen}\, x - 2\,\text{sen}^3 x + 2\,\text{sen}\, x(1 - \text{sen}^2 x) =$
$= \text{sen}\, x - 2\,\text{sen}^3 x + 2\,\text{sen}\, x - 2\,\text{sen}^3 x =$
$= 3\,\text{sen}\, x - 4\,\text{sen}^3 x$
Logo, $\text{sen}\, 3x = 3\,\text{sen}\, x - 4\,\text{sen}^3 x$. Assim:
$\text{sen}\, 3x = 3a - 4a^3$.

29 Para $x \in [0, 2\pi]$, temos:
$\text{sen}\, 2x = \cos x \Rightarrow 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x - \cos x = 0$
$\therefore \cos x(2\,\text{sen}\, x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ ou $\text{sen}\, x = \dfrac{1}{2}$
Resolvendo cada uma dessas equações, obtemos:
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$
- $\text{sen}\, x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

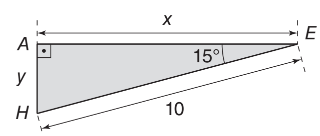
Logo, no intervalo $[0, 2\pi]$, a equação proposta possui 4 soluções.
Alternativa **b**.

30 Sendo $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$
Fazendo a substituição na equação
$\cos^2 2x = \dfrac{1}{2} - \text{sen}^2 x$, temos:
$(1 - 2\,\text{sen}^2 x)^2 = \dfrac{1}{2} - \text{sen}^2 x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(1 - 2\,\text{sen}^2 x)^2 = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$
$\therefore 2(1 - 2\,\text{sen}^2 x)^2 - (1 - 2\,\text{sen}^2 x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 - 2\,\text{sen}^2 x)\,[2(1 - 2\,\text{sen}^2 x) - 1] = 0$
$\therefore 1 - 2\,\text{sen}^2 x = 0$ ou $2(1 - 2\,\text{sen}^2 x) - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}$ ou $\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{4}$
$\therefore \text{sen}\, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen}\, x = \pm\dfrac{1}{2}$
De $\text{sen}\, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, temos:
$x_1 = \dfrac{\pi}{4}, x_2 = \dfrac{3\pi}{4}, x_3 = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x_4 = \dfrac{7\pi}{4}$
De $\text{sen}\, x = \pm\dfrac{1}{2}$, temos:
$x_5 = \dfrac{\pi}{6}, x_6 = \dfrac{5\pi}{6}, x_7 = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $x_8 = \dfrac{11\pi}{6}$
$S = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

31 $\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha =$
$= (\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) +$
$+ 1(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) =$
$= 1(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) + 1(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) =$
$= 2(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) = 2\cos 2\alpha$
Alternativa **a**.

32 $10 \cos 2x + \text{sen}\, x = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10(1 - 2\,\text{sen}^2 x) + \text{sen}\, x = 9$
$\therefore 10 - 20\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 20\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x - 1 = 0$
Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\, x = t$, obtemos a seguinte equação do 2º grau:
$20t^2 - t - 1 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-1) = 81$
$\therefore t = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 20} \Rightarrow t = \dfrac{1}{4}$ ou $t = -\dfrac{1}{5}$
Retornando à variável original, temos:
$\text{sen}\, x = \dfrac{1}{4}$ ou $\text{sen}\, x = -\dfrac{1}{5}$
Como o arco tem extremidade no terceiro quadrante, $\text{sen}\, x < 0$ e $\cos x < 0$.
Assim, $\text{sen}\, x = -\dfrac{1}{5}$ e, pela relação fundamental:
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$
$\therefore \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{24}{25}$
$\therefore \cos x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$
Logo, $\text{sen}\, x = -\dfrac{1}{5}$ e $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

33 Os triângulos *AEH*, *BFE*, *CGF* e *DHG* são congruentes (caso LAA_o). Logo, a área *S* do quadrado maior é a soma da área do quadrado menor com o quádruplo da área de um desses triângulos.
Sendo $AE = x$, temos:



$\cos 15° = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cdot \cos 15°$
$\text{sen}\, 15° = \dfrac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \cdot \text{sen}\, 15$
Logo, a área S_t do triângulo *AEH* é dada por:
$S_t = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 15° \cdot \text{sen}\, 15°$
ou, ainda:
$S_t = 50 \cdot \cos 15° \cdot \text{sen}\, 15° = 25 \cdot 2 \cdot \cos 15° \cdot \text{sen}\, 15° \Rightarrow$
$\Rightarrow S_t = 25\,\text{sen}\, 30° = \dfrac{25}{2}$
Concluímos, então, que a área *S* do quadrado maior é:
$S = \left(10^2 + 4 \cdot \dfrac{25}{2}\right) \text{cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$

34 $\text{tg}\, \theta = 2 \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\, \theta}{\cos \theta} = 2$
$\therefore \text{sen}\, \theta = 2 \cos \theta \quad \text{(I)}$
Além disso:
- $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta =$
  $= (\cos \theta + \text{sen}\, \theta)(\cos \theta - \text{sen}\, \theta)$
- $1 + \text{sen}\, 2\theta = \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cdot \text{sen}\, \theta \cdot \cos \theta =$
  $= (\text{sen}\, \theta + \cos \theta)^2$

Assim:

$$\frac{\cos 2\theta}{1 + \text{sen } 2\theta} = \frac{(\cos \theta + \text{sen } \theta)(\cos \theta - \text{sen } \theta)}{(\text{sen } \theta + \cos \theta)^2} =$$

$$= \frac{\cos \theta - \text{sen } \theta}{\text{sen } \theta + \cos \theta} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$$\frac{\cos \theta - 2\cos \theta}{2\cos \theta + \cos \theta} = \frac{-\cos \theta}{3\cos \theta} = -\frac{1}{3}$$

Logo, $\frac{\cos 2\theta}{1 + \text{sen } 2\theta} = -\frac{1}{3}$.

Alternativa **b**.

35 Como $0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$, temos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \frac{x}{2} < 1$$

Pela relação fundamental:

$$\left(\text{sen } \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow (0{,}6)^2 + \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 = 1 - 0{,}36$$

$$\therefore \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 = 0{,}64 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0{,}8$$

Assim:

$$\text{sen } x = \text{sen}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \text{sen } \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} =$$

$$= 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$$

Logo, sen $x = 0{,}96$.

36 Pela relação fundamental ($\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$), temos:

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{5}{13}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, deduzimos que $\cos x = \frac{5}{13}$.

Logo:

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{13} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \quad \therefore \cos \frac{x}{2} = \pm\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Como $\frac{x}{2}$ é uma medida do primeiro quadrante, concluímos que $\cos \frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Pela relação fundamental $\left(\text{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1\right)$, temos ainda:

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} + \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } \frac{x}{2} = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Como $\frac{x}{2}$ é uma medida do primeiro quadrante, concluímos que $\text{sen } \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

37 $\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$

Para $x = 45°$, temos:

$$\cos 45° = 2\cos^2 22°30' - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 22°30' - 1$$

$$\therefore \cos^2 22°30' = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

Como 22°30′ é uma medida do 1º quadrante, concluímos:

$$\cos 22°30' = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$$

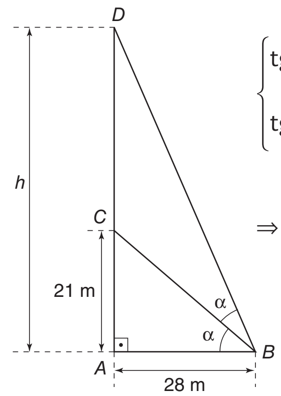
38 Temos:

$$\text{tg } x = \text{tg}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \frac{2\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} =$$

$$= \frac{4}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

Alternativa **c**.

39 Sendo h a altura pedida, em metro, temos:



$$\begin{cases} \text{tg } \alpha = \frac{21}{28} \\ \text{tg } 2\alpha = \frac{h}{28} \end{cases} \Rightarrow$$

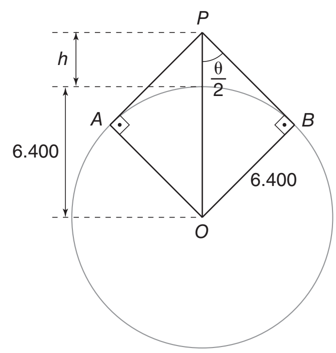
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{tg } \alpha = \frac{3}{4} & \text{(I)} \\ \frac{2\,\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{h}{28} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$$\frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{h}{28} \Rightarrow h = 96$$

Logo, ao atingir o ponto D, o helicóptero está a 96 m de altura em relação à pista.

40 Seja h a distância, em quilômetro, do ponto P à superfície da Terra. Como os triângulos PAO e PBO são congruentes, temos:



$$\begin{cases} \cos \theta = -0{,}62 & \text{(I)} \\ \text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{6.400}{h + 6.400} & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), obtemos:

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = -0{,}62 \Rightarrow \cos^2 \frac{\theta}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = -0{,}62$$

$$\therefore 1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = -0{,}62 \Rightarrow \text{sen } \frac{\theta}{2} = \pm 0{,}9$$

Como $\frac{\theta}{2}$ é medida de um ângulo interno de um triângulo, deduzimos que $\text{sen } \frac{\theta}{2} = 0{,}9$. Substituindo $\text{sen } \frac{\theta}{2}$ por 0,9 em (II), concluímos:

$$0{,}9 = \frac{6.400}{h + 6.400} \Rightarrow h \approx 711$$

Alternativa **e**.

41 Aplicando a lei dos cossenos, temos:

a) $x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60°$

$\therefore\ x^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore\ x^2 = 49$

Logo, $x = 7$ cm.

b) $y^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120°$

$\therefore\ y^2 = 25 + 100 - 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ y^2 = 175$

Logo, $y = 5\sqrt{7}$ m.

42 Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$2^2 = x^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\therefore\ x = 4$ ou $x = 2$

Como o ângulo $B\hat{A}C$ é obtuso, só nos interessa $x = 4$ dm.

43 a) Como o maior ângulo interno se opõe ao maior lado, pela lei dos cossenos a medida α desse ângulo é tal que:

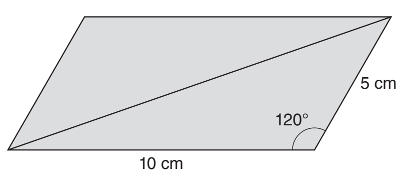
$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 49 = 16 + 25 - 40 \cos \alpha$

$\therefore\ \cos \alpha = -\frac{1}{5}$

b) O ângulo é obtuso, pois α é medida de um ângulo interno de um triângulo, com $\cos \alpha < 0$.

44



Cálculo da medida da diagonal maior (d_M):

$(d_M)^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_M)^2 = 125 - 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ d_M = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$

Cálculo da medida da diagonal menor (d_m):

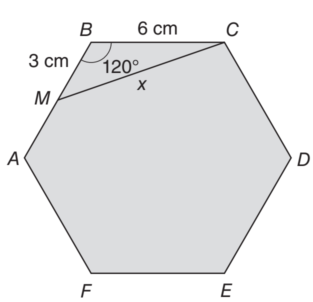
$(d_m)^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_m)^2 = 125 - 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ d_m = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Logo, as diagonais desse paralelogramo medem $5\sqrt{3}$ cm e $5\sqrt{7}$ cm.

45



Pela lei dos cossenos, temos:

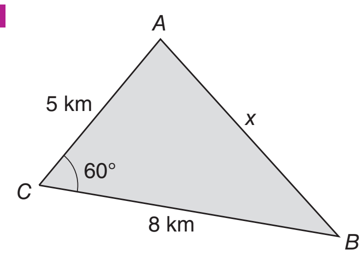
$x^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 45 - 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ x = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

Logo, o segmento $\overline{MC}$ mede $3\sqrt{7}$ cm.

46



Pela lei dos cossenos, temos:

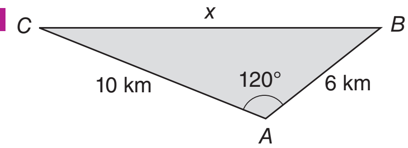
$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 89 - 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

Logo, a distância entre os dois navios é 7 km.

47



Pela lei dos cossenos, temos:

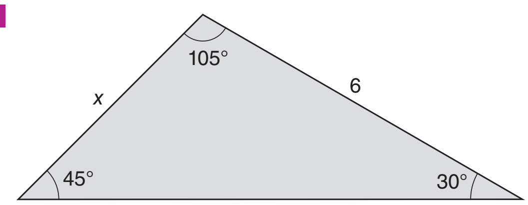
$x^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 136 - 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ x^2 = 196 \Rightarrow x = 14$

Logo, a distância percorrida foi 14 km.

48

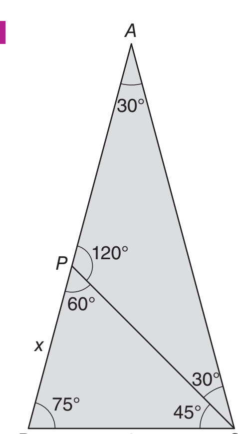


Pela lei dos senos, temos:

$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{6}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore\ x = 6 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

49



Como o triângulo ABC é isósceles, os ângulos da base são congruentes. Sendo θ a medida de cada um desses ângulos, temos:

$30° + 2\theta = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = 75°$

Assim: $m(C\hat{P}B) = 60°$

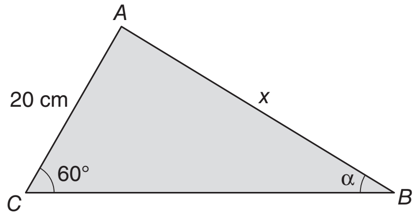
Aplicando a lei dos senos no triângulo PCB, temos:

$\frac{2}{\text{sen } 60°} = \frac{x}{\text{sen } 45°} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Logo, o segmento $\overline{BP}$ mede $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.

50



Como $\cos\alpha = 0{,}6$ e $\alpha < 90°$, pela relação fundamental temos:

$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0{,}8$

Assim, pela lei dos senos, temos:

$$\frac{20}{0{,}8} = \frac{x}{\text{sen}\,60°} \Rightarrow x = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

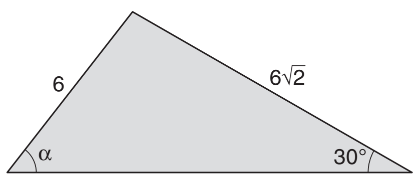
Logo, o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm.

51 Pela lei dos senos, a medida R do raio é dada por:

$$\frac{10}{\text{sen}\,60°} = 2R \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Logo, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

52

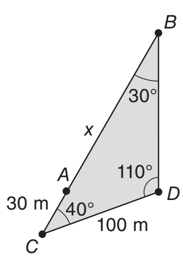


Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{6\sqrt{2}}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{6}{\text{sen}\,30°} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, temos $\alpha = 45°$.

53



Aplicando a lei dos senos, a distância x é dada por:

$$\frac{100}{\text{sen}\,30°} = \frac{30 + x}{\text{sen}\,110°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (30 + x) = 100 \cdot 0{,}94$$

$$\therefore \frac{x}{2} = 79 \Rightarrow x = 158$$

Logo, a distância entre A e B é 158 m.

54 a) A área, em centímetro quadrado, é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \text{sen}\,60° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 60, \text{ ou seja, } A = 60 \text{ cm}^2.$$

b) A área, em centímetro quadrado, é dada por:

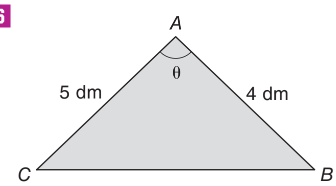
$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \text{sen}\,150° = 20, \text{ ou seja, } A = 20 \text{ cm}^2.$$

55 A área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo ADC. Assim:

$$A = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \text{sen}\,30° = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$$

Logo, a área do paralelogramo é 30 cm².

56



Sendo θ a medida do ângulo $B\hat{A}C$, temos:

$$5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta = 30°$ ou $\theta = 150°$

Logo, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 30° ou 150°.

57 Cálculo da área A_S do setor circular $OAMB$:

$$A_S = \frac{\frac{5\pi}{6} \cdot 36}{2} = 15\pi$$

Cálculo da área A_T do triângulo AOB:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \text{sen}\,150° = 9$$

Assim, o segmento circular AMB tem área de $3(5\pi - 3)$ cm².

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 $E = \text{cotg}^2\,60° + \sec 300° - \text{cossec}\,330° =$

$$= \left(\frac{1}{\text{tg}\,60°}\right)^2 + \frac{1}{\cos 300°} - \frac{1}{\text{sen}\,330°} =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 - (-2) = \frac{13}{3}$$

Logo, $E = \frac{13}{3}$.

2 $\text{cossec}\,x = 1{,}25 \Rightarrow \frac{1}{\text{sen}\,x} = 1{,}25$

$\therefore\ \text{sen}\,x = 0{,}8$

$$\begin{cases} \text{sen}\,x = 0{,}8 \\ \text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos x = -0{,}6$ para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Assim:

$$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = -\frac{0{,}6}{0{,}8} = -0{,}75$$

Logo, $\text{cotg}\,x = -0{,}75$.

3 $\text{cotg}\,x = -2{,}4 \Rightarrow \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = -\frac{12}{5}$

$$\therefore\ \cos x = -\frac{12\,\text{sen}\,x}{5}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{12\,\text{sen}\,x}{5} \\ \text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{sen}\,x = -\frac{5}{13}$ para $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Assim:

$$\cos x = -\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

Logo, $\text{sen}\,x + \cos x = \frac{7}{13}$.

4 $\text{cotg}\,\theta + \text{tg}\,\theta = 8 \Rightarrow \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} + \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 8$

$\dfrac{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta} = 8 \Rightarrow \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{1}{8}$

Assim, temos:

$(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 = \text{sen}^2\theta + 2 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta + \cos^2\theta =$

$= 1 + 2\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta = 1 + 2 \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{4}$

Alternativa **c**.

5 $\text{tg}\,x = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore \cos x = -3\,\text{sen}\,x$

$\begin{cases} \cos x = -3\,\text{sen}\,x \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\,x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, pois

$\text{sen}\,x < 0$

Assim:

$\text{cossec}\,x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = -\sqrt{10}$

Alternativa **a**.

6 Condição de existência: $\text{sen}\,a \neq 0$ e $\cos a \neq 0$

$\text{tg}\,a + \text{cotg}\,a = 2 \Rightarrow \text{tg}\,a + \dfrac{1}{\text{tg}\,a} = 2$

$\text{tg}^2 a + 1 = 2\,\text{tg}\,a \Rightarrow \text{tg}^2 a - 2\,\text{tg}\,a + 1 = 0$

$(\text{tg}\,a - 1)^2 = 0 \Rightarrow \text{tg}\,a = 1$

$\therefore a = \dfrac{\pi}{4}$ ou $a = \dfrac{5\pi}{4}$

A soma das raízes é:

$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{6\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{2}$

Alternativa **c**.

7 Condição de existência: $\cos x \neq 0$

$4(1 - \text{sen}^2 x)(\sec^2 x - 1) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cos^2 x \cdot (\sec^2 x - 1) = 3$

$4\cos^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} - 4\cos^2 x = 3 \Rightarrow 1 - \cos^2 x = \dfrac{3}{4}$

$\therefore \text{sen}^2 x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, para $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore x = \dfrac{\pi}{3}$

Alternativa **b**.

8 **a)** $\sec x \leq \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2}$

Para $t = \cos x$, temos:

$\dfrac{1}{t} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{-\sqrt{2}t + 1}{t} \leq 0$

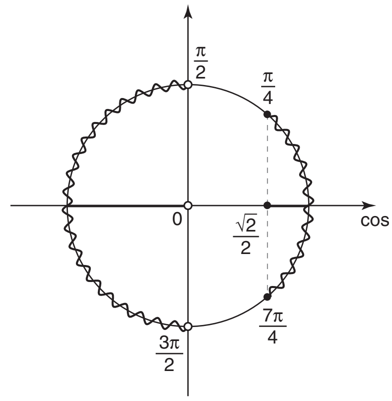
Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = -\sqrt{2}t + 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
f	$+$		$+$		$-$
g	$-$		$+$		$+$
$\frac{f}{g}$	$-$		$+$		$-$

Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} \leq 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, e portanto:

$\cos x < 0$ ou $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi\right\}$.

b) $\text{cossec}\,x > -\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\,x} > -\sqrt{2}$

Para $t = \text{sen}\,x$, temos:

$\dfrac{1}{t} > -\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2} \cdot t + 1}{t} > 0$

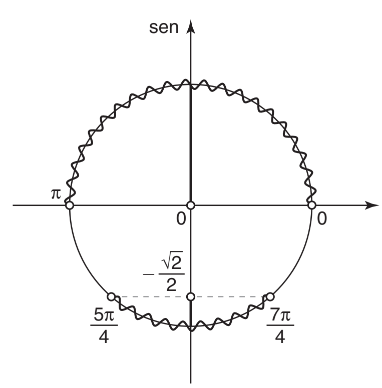
Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = \sqrt{2} \cdot t + 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0	
f	$-$		$+$		$+$
g	$-$		$-$		$+$
$\frac{f}{g}$	$+$		$-$		$+$

Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $t > 0$, e portanto:

$\text{sen}\,x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen}\,x > 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} < x < \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

c) $\sqrt{3}\sec x > 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\cos x} > 1$

Para t = cos x, temos:

$\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{t} > 1 \Rightarrow \dfrac{-t + \sqrt{3}}{t} > 0$

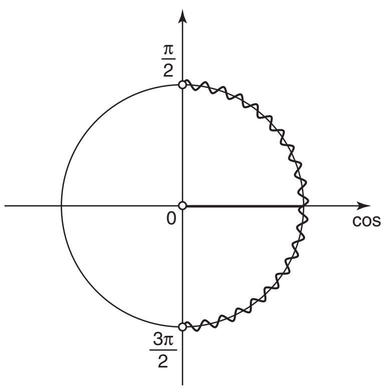
Estudando a variação de sinal da funções

$f(t) = -t + \sqrt{3}$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

		0		$\sqrt{3}$	
f	+		+		−
g	−		+		+
$\dfrac{f}{g}$	−		+		−

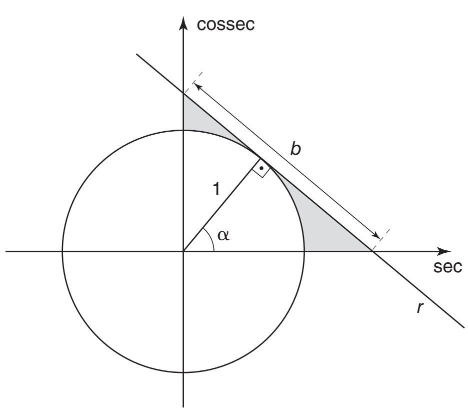
Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow 0 < t < \sqrt{3}$, e portanto:

$0 < \cos x < \sqrt{3}$, ou ainda $\cos x > 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

9



$b^2 = \sec^2 \alpha + \text{cossec}^2 \alpha = \dfrac{1}{\text{sen}^2 \alpha} + \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\therefore\ b = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos \alpha}$

Cálculo da área A da região colorida:

$A = A_{\text{triângulo}} - \dfrac{1}{4} A_{\text{círculo}} = \dfrac{b \cdot 1}{2} - \dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 =$

$= \dfrac{1}{2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos \alpha} - \dfrac{\pi}{4}$

Logo, a área A da região colorida é dada por:

$A = \dfrac{1}{2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos \alpha} - \dfrac{\pi}{4}\ A = \dfrac{1}{\text{sen}\,2\alpha} - \dfrac{\pi}{4}$

10 a) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

- Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: sen $x \neq 0$ e cos $x \neq 0$.
- O segundo membro é a constante 1 e, portanto, existe para qualquer valor real de x.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em U.

Passo 2

1º membro =

$= (\sec x - \cos x)(\text{cossec}\,x - \text{sen}\,x)(\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x) =$

$= \left(\dfrac{1}{\cos x} - \cos x\right)\left(\dfrac{1}{\text{sen}\,x} - \text{sen}\,x\right) = \left(\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}\right) =$

$= \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \cdot \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x} \cdot \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \text{sen}\,x} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}\,x} \cdot \dfrac{1}{\cos x \cdot \text{sen}\,x} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = 1 = 2^\circ$ membro

b) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: sen $x \neq 0$ e cos $x \neq -1$.

Para existir o segundo membro, devemos ter: sen $x \neq 0$.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em U.

Passo 2

1º membro $= \dfrac{1 + \cos x}{\text{sen}\,x} + \dfrac{\text{sen}\,x}{1 + \cos x} =$

$= \dfrac{(1 + \cos x)^2 + \text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x(1 + \cos x)} =$

$= \dfrac{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x(1 + \cos x)} =$

$= \dfrac{2 + 2\cos x}{\text{sen}\,x(1 + \cos x)} = \dfrac{2(1 + \cos x)}{\text{sen}\,x\,(1 + \cos x)} =$

$= \dfrac{2}{\text{sen}\,x} = 2\,\text{cossec}\,x = 2^\circ$ membro

c) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

- Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: sen $x \neq 0$ e cos $x \neq 0$.
- O segundo membro é a constante zero e, portanto, existe para qualquer x real.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em U.

Passo 2

1º membro $= \dfrac{\text{cossec}\,(\pi - x)}{\sec\,(-x)} - \text{cotg}\,(\pi + x) =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\text{sen}\,(\pi - x)}}{\dfrac{1}{\cos\,(-x)}} - \dfrac{\cos\,(\pi + x)}{\text{sen}\,(\pi + x)} =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\text{sen}\,x}}{\dfrac{1}{\cos x}} - \dfrac{(-\cos x)}{(-\text{sen}\,x)} = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} - \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = 0 =$

= 2º membro

d) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: sen x ≠ 0 e cos x ≠ 0.

Para existir o segundo membro, devemos ter: cos x ≠ 0.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em *U*.

Passo 2

$1^{\underline{o}}$ membro $= (\text{tg } x + \text{cotg } x) \cdot \text{sen } x =$

$= \left(\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}\right) \cdot \text{sen } x =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \text{sen } x} \cdot \text{sen } x = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x =$

$= 2^{\underline{o}}$ membro

e) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: sen x ≠ 0 e cos x ≠ 0.

O segundo membro é a constante 1 e, portanto, existe para qualquer *x* real.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em *U*.

Passo 2

$1^{\underline{o}}$ membro $= (\sec^2 x - 1)(\text{cossec}^2 - 1)$

$= \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} - 1\right) =$

$= \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = 1 = 2^\circ$ membro.

11 a) $\begin{cases} \text{tg } x = 3 \\ \sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \end{cases} \Rightarrow \sec^2 x = 1 + 3^2 = 10$

$\therefore \sec x = \pm\sqrt{10}$

Como $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, concluímos:

$\sec x = -\sqrt{10}$ e, portanto, $\cos x = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\begin{cases} \text{cotg } x = \sqrt{15} \\ \text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{cossec}^2 x = 1 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = 16$

$\therefore \text{cossec } x = \pm 4$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, concluímos:

cossec x = 4 e, portanto, $\text{sen } x = \dfrac{1}{4}$

c) $\begin{cases} \sec x = a + 1 \\ \text{tg } x = \sqrt{a^2 + 2} \\ \sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a + 1)^2 = 1 + \left(\sqrt{a^2 + 2}\right)^2$

$\therefore a^2 + 2a + 1 = 1 + a^2 + 2 \Rightarrow a = 1$

d) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: sen x ≠ 0 e cos x ≠ 0.

O segundo membro é a constante 1 e, portanto, existe para qualquer *x* real.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em *U*.

Passo 2

1° membro $= \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x} + \dfrac{1}{1 + \text{cotg}^2 x} =$

$= \dfrac{1}{\sec^2 x} + \dfrac{1}{\text{cossec}^2 x} =$

$= \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 = 2^\circ$ membro.

e) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir cada um dos membros da igualdade, devemos ter: cos x ≠ 0. Logo, os dois membros estão definidos em *U*.

Passo 2

1° membro $= \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x \cdot \text{tg}^2 x =$

$= \text{sen}^2 x \cdot (1 + \text{tg}^2 x) = \text{sen}^2 x \cdot \sec^2 x =$

$= \text{sen}^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \text{tg}^2 x =$

$= 2^\circ$ membro.

12 $\sec x \cdot \cos x - \text{tg } x \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos^2 x =$

$= \dfrac{1}{\cancel{\cos x}} \cdot \cancel{\cos x} - \dfrac{\text{sen } x}{\cancel{\cos x}} \cdot \text{sen } x \cdot \cancel{\cos x} - \cos^2 x =$

$= 1 - \text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1 - (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) =$

$= 1 - 1 = 0$

Além disso, $1 + \cos 3\pi = 1 + (-1) = 0$

Alternativa **b**.

13 a) $\text{sen } 165^\circ = \text{sen } (120^\circ + 45^\circ) =$

$= \text{sen } 120^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \cdot \text{sen } 45^\circ$

Mas $\text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$; assim:

$\text{sen } 120^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \cdot \text{sen } 45^\circ =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Logo, $\text{sen } 165^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

b) $\cos 105^\circ = \cos (60^\circ + 45^\circ) =$

$= \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \text{sen } 60^\circ \cdot \text{sen } 45^\circ =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

Logo, $\cos 105^\circ = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

c) $\text{tg } 240^\circ = \text{tg } (180^\circ + 60^\circ) = \dfrac{\text{tg } 180^\circ + \text{tg } 60^\circ}{1 - \text{tg } 180^\circ \cdot \text{tg } 60^\circ} =$

$= \dfrac{0 + \sqrt{3}}{1 - 0 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3}$

d) $\text{cotg } 15^\circ = \dfrac{1}{\text{tg } 15^\circ} = \dfrac{1}{\text{tg } (60^\circ - 45^\circ)} =$

$= \dfrac{1 + \text{tg } 60^\circ \cdot \text{tg } 45^\circ}{\text{tg } 60^\circ - \text{tg } 45^\circ} = \dfrac{1 + \sqrt{3} \cdot 1}{\sqrt{3} - 1} =$

$= \dfrac{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{3 - 1} = 2 + \sqrt{3}$

Logo, $\text{cotg } 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

e) $\text{cossec } 255° = \dfrac{1}{\text{sen } 255°} = \dfrac{1}{-\text{sen } 75°} =$

$= -\dfrac{1}{\text{sen } (30° + 45°)} =$

$= -\dfrac{1}{\text{sen } 30° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 30°} =$

$= -\dfrac{1}{\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} =$

$= \sqrt{2} - \sqrt{6}$

f) $\sec(-15°) = \dfrac{1}{\cos(-15°)} = \dfrac{1}{\cos 15°} =$

$= \dfrac{1}{\cos(45° - 30°)} =$

$= \dfrac{1}{\cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30°} =$

$= \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}} =$

$= \dfrac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

14
- $\text{sen } 40° = \text{sen } (20° + 20°) =$
  $= \text{sen } 20° \cdot \cos 20° + \cos 20° \cdot \text{sen } 20° =$
  $= 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}27 + 0{,}27 = 0{,}54$
- $\cos 40° = \cos(20° + 20°) =$
  $= \cos 20° \cdot \cos 20° - \text{sen } 20° \cdot \text{sen } 20° =$
  $= 0{,}9 \cdot 0{,}9 - 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}81 - 0{,}09 = 0{,}72$
- $\text{sen } 65° = \text{sen } (20° + 45°) =$
  $= \text{sen } 20° \cdot \cos 45° + \cos 20° \cdot \text{sen } 45° =$
  $= 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}21 + 0{,}63 = 0{,}84$
- $\cos 65° = \cos(45° + 20°) =$
  $= \cos 45° \cdot \cos 20° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 20° =$
  $= 0{,}7 \cdot 0{,}9 - 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}63 - 0{,}21 = 0{,}42$

Completando a tabela, temos:

	20°	40°	45°	65°
sen	0,3	0,54	0,7	0,84
cos	0,9	0,72	0,7	0,42

15
- $\text{tg } 13° = \text{tg } (35° - 22°) = \dfrac{\text{tg } 35° - \text{tg } 22°}{1 + \text{tg } 35° \cdot \text{tg } 22°} =$
  $= \dfrac{0{,}7 - 0{,}4}{1 + 0{,}7 \cdot 0{,}4} = \dfrac{0{,}3}{1 + 0{,}28} = \dfrac{0{,}3}{1{,}28} \approx 0{,}23$
- $\text{tg } 57° = \text{tg } (35° + 22°) = \dfrac{\text{tg } 35° + \text{tg } 22°}{1 - \text{tg } 35° \cdot \text{tg } 22°} =$
  $= \dfrac{0{,}7 + 0{,}4}{1 - 0{,}7 \cdot 0{,}4} = \dfrac{1{,}1}{1 - 0{,}28} = \dfrac{1{,}1}{0{,}72} \approx 1{,}53$
- $\text{tg } 70° = \text{tg } (13° + 57°) = \dfrac{\text{tg } 13° + \text{tg } 57°}{1 - \text{tg } 13° \cdot \text{tg } 57°} =$
  $= \dfrac{0{,}23 + 1{,}53}{1 - 0{,}23 \cdot 1{,}53} = \dfrac{1{,}76}{1 - 0{,}3519} = \dfrac{1{,}76}{0{,}6481} \approx 2{,}72$

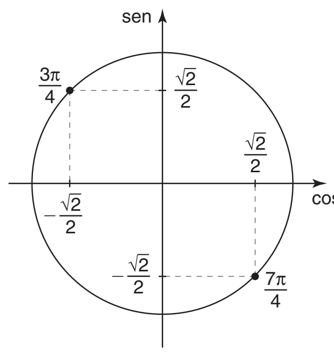
Completando a tabela, temos:

	13°	22°	35°	57°	70°
tg	0,23	0,4	0,7	1,53	2,72

16 $\cos x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \cos x \cdot \cos \dfrac{\pi}{2} - \text{sen } x \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \cos x = -\text{sen } x \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$



Alternativa **d**.

17 $E = \text{sen } 6x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos 6x \Rightarrow$
$\Rightarrow E = \text{sen } (6x - x) = \text{sen } 5x$

Para $x = \dfrac{\pi}{10}$, temos:

$E = \text{sen}\left(5 \cdot \dfrac{\pi}{10}\right) = \text{sen } \dfrac{\pi}{2} = 1$

18 $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x - \text{sen } x \cdot \text{sen } 3x = \cos(x + 3x) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = \cos 4x$

Para $x = \dfrac{\pi}{8}$, temos:

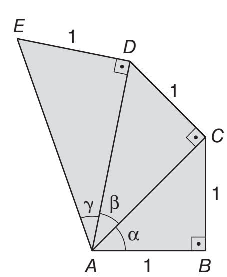
$f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \cos\left(4 \cdot \dfrac{\pi}{8}\right) = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$

19 $\text{sen } (x + \pi) = \text{sen } x \cdot \cos \pi + \text{sen } \pi \cdot \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } (x + \pi) = -\text{sen } x = -\left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3}{5}$

Alternativa **a**.

20 Sejam A, B, C, D e E os vértices dos triângulos, conforme indica a figura:



Aplicando o teorema de Pitágoras aos $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ e $\triangle ADE$, respectivamente, temos:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 1^2 + 1^2$

$\therefore AC = \sqrt{2}$

$(AD)^2 = (AC)^2 + (CD)^2 \Rightarrow (AD)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$

$\therefore AD = \sqrt{3}$

$(AE)^2 = (AD)^2 + (DE)^2 \Rightarrow (AE)^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$

$\therefore AE = \sqrt{4} = 2$

Assim, temos:

a) $\text{tg } \alpha = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{1}{1}$

$\therefore \text{tg } \alpha = 1$

$\text{tg}\,\beta = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow \text{tg}\,\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \text{tg}\,\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\,\gamma = \dfrac{DE}{AD} \Rightarrow \text{tg}\,\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \text{tg}\,\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) Como α e γ são ângulos agudos de triângulos retângulos, temos $0° < \alpha < 90°$ e $0° < \gamma < 90°$. Logo:

$\text{tg}\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

$\text{tg}\,\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \gamma = 30°$

c) Como a função tangente é crescente, temos:

$\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow \text{tg}\,\gamma < \text{tg}\,\beta < \text{tg}\,\alpha$

$\therefore\ \gamma < \beta < \alpha$

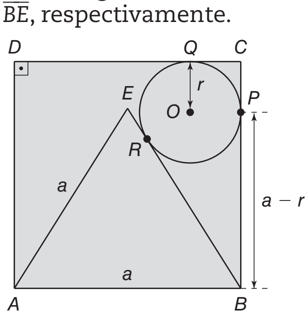
Adicionando $\alpha + \gamma$ aos três membros da desigualdade, temos:

$\alpha + 2\gamma < \alpha + \beta + \gamma < 2\alpha + \gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow 45° + 2 \cdot 30° < \alpha + \beta + \gamma < 2 \cdot 45° + 30°$

$\therefore\ 105° < \alpha + \beta + \gamma < 120°$

21 Seja O o centro da circunferência e sejam P, Q e R os pontos de tangência entre a circunferência e $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$, respectivamente.



Como P e R são pontos de tangência, $m(B\hat{R}O) = m(B\hat{P}O) = 90°$. Além disso, $OR = OP = r$, e $\overline{BO}$ é comum aos triângulos BOR e BOP; logo, $\triangle BOR \cong \triangle BOP$ (caso RHC). Dessa forma, $P\hat{B}O \cong R\hat{B}O$ e, portanto, $\overline{BO}$ é bissetriz de $P\hat{B}R$.

Por outro lado, o $\triangle ABE$ é equilátero; então:

$m(P\hat{B}R) = 90° - 60° = 30°$ e $m(P\hat{B}O) = \dfrac{m(P\hat{B}R)}{2} = 15°$

No $\triangle BOP$, temos $BP = BC - CP = BP - OQ = a - r$ e:

$\text{tg}\,(P\hat{B}O) = \dfrac{OP}{OB} \Rightarrow \text{tg}\,15° = \dfrac{r}{a - r} \quad \text{(I)}$

Mas $\text{tg}\,15° = \text{tg}\,(60° - 45°) = \dfrac{\text{tg}\,60° - \text{tg}\,45°}{1 + \text{tg}\,60° \cdot \text{tg}\,45°} =$

$= \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2};$

logo: $\text{tg}\,15° = 2 - \sqrt{3}$

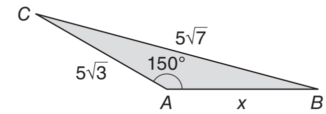
Substituindo esse valor da tangente em (I), concluímos:

$2 - \sqrt{3} = \dfrac{r}{a - r} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})a - (2 - \sqrt{3})r = r$

$\therefore\ (2 - \sqrt{3})a = (3 - \sqrt{3})r \Rightarrow r = \dfrac{(2 - \sqrt{3})a}{3 - \sqrt{3}} =$

$= \dfrac{(3 - \sqrt{3})a}{6}$

22 Sendo x a medida, em centímetro, do lado $\overline{AB}$, temos:



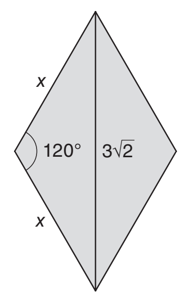
$(5\sqrt{7})^2 = (5\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot x \cdot \cos 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 15x - 100 = 0$

$\therefore\ x = -20$ (não convém) ou $x = 5$

Logo, o lado $\overline{AB}$ mede 5 cm.

23 Sendo x a medida, em metro, do lado do losango, temos:



$(3\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 120° \Rightarrow$

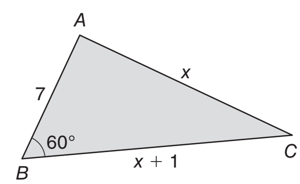
$\Rightarrow 18 = 3x^2$

$\therefore\ x = \sqrt{6}$

Logo, o lado do losango mede $\sqrt{6}$ m.

Alternativa **e**.

24 Sendo x a medida, em centímetro, do lado $\overline{AC}$, temos:



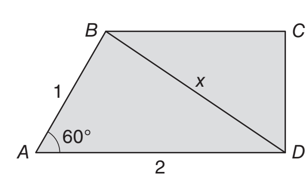
$x^2 = (x + 1)^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot (x + 1) \cdot \cos 60° \Rightarrow 5x = 43$

$\therefore\ x = \dfrac{43}{5}$

Logo, a medida do lado $\overline{BC}$ é $\left(\dfrac{43}{5} + 1\right)$ cm, ou seja, $\dfrac{48}{5}$ cm $= 9{,}6$ cm.

Alternativa **b**.

25 A soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero é 360° e, portanto, $m(B\hat{A}D) = 60°$. Assim, sendo x a medida, em centímetro, do segmento $\overline{BD}$, temos:



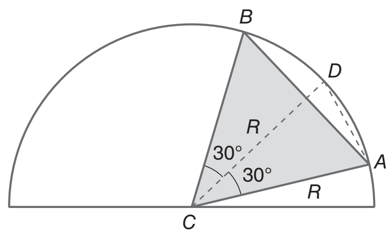
$x^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 3$

$\therefore\ x = \sqrt{3}$

Logo, o segmento $\overline{BD}$ mede $\sqrt{3}$ cm.

Alternativa **a**.

26 O triângulo ABC é equilátero e $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$; portanto, $m(A\hat{C}B) = 60°$ e $m(A\hat{C}D) = 30°$. Como $CD = CA = R$, temos:



Pela lei dos cossenos, aplicada ao triângulo ACD, concluímos:

$(AD)^2 = (CD)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot CD \cdot AC \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AD)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore (AD)^2 = 2R^2 - R^2\sqrt{3} \Rightarrow (AD)^2 = R^2\left(2 - \sqrt{3}\right)$

$\therefore AD = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Alternativa **a**.

27 Sendo α a medida do ângulo $B\hat{A}D$, o ângulo $A\hat{B}C$ mede $180° - \alpha$. Assim, temos:

$$\begin{cases} (BD)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ (AC)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,(\cos 180° - \alpha) \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as duas equações, obtemos:

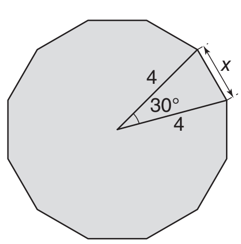
$(BD)^2 + (AC)^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha -$
$- 2ab \cdot \cos (180° - \alpha)$

Como $\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$, concluímos:

$(BD)^2 + (AC)^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$

28 A medida α do ângulo central do dodecágono regular é dada por $\alpha = \dfrac{360°}{12} = 30°$.

Assim, sendo x a medida, em centímetro, do lado desse dodecágono, temos:



$x^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 30° \Rightarrow x^2 = 16\left(2 - \sqrt{3}\right)$

$\therefore x = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Alternativa **d**.

Exercícios contextualizados

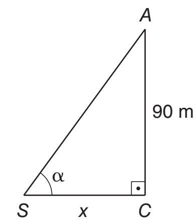
29 $\text{cotg}\, \alpha = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \text{tg}\, \alpha = 6$

$\sec \beta = \dfrac{13}{12} \Rightarrow \cos \beta = \dfrac{12}{13}$

$$\begin{cases} \cos \beta = \dfrac{12}{13} \\ \text{sen}^2\, \beta + \cos^2 \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\, \beta = \dfrac{5}{13}, \text{ para}$$

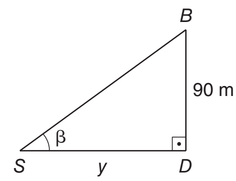
$0° < \beta < 90°$

Assim, temos:



$\text{tg}\, \alpha = \dfrac{90}{x} \Rightarrow 6 = \dfrac{90}{x}$

$\therefore x = 15$ m



$\text{tg}\, \beta = \dfrac{90}{y} \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\, \beta}{\cos \beta} = \dfrac{90}{y}$

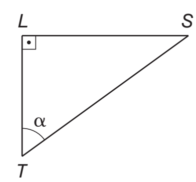
$\therefore \dfrac{5}{12} = \dfrac{90}{y}$

$\therefore y = 216$ m

Concluímos, então, que a distância d entre os navios é dada por:

$d = y - x \Rightarrow d = 201$ m

30



$\cos \alpha = \dfrac{TL}{TS} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3{,}85 \cdot 10^5}{1{,}5 \cdot 10^8}$

$\therefore \sec \alpha = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^8}{3{,}85 \cdot 10^5} \Rightarrow \sec \alpha \approx 389{,}6$

Como α é medida de ângulo agudo, observamos na tabela que $89{,}8° < \alpha < 89{,}9°$.

Alternativa **e**.

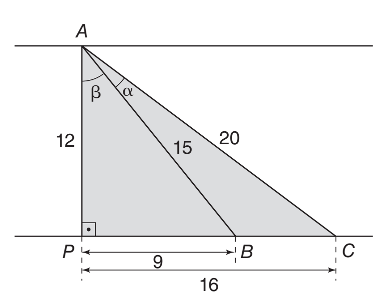
31 $\text{tg}\, (\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg}\, \alpha + \text{tg}\, \beta}{1 - \text{tg}\, \alpha \cdot \text{tg}\, \beta} = \dfrac{\dfrac{3}{9} + \dfrac{3}{6}}{1 - \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{3}{6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}\, (\alpha + \beta) = 1$

Como $0 < \alpha + \beta < 180°$, concluímos que $\alpha + \beta =$
$= 45°$.

32 Sendo P a projeção ortogonal do ponto A sobre a margem oposta da estrada, obtemos pelo teorema de Pitágoras: $PC = 16$ m e $PB = 9$ m.

Sendo β a medida do ângulo $B\hat{A}P$, esquematizamos:



$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{16}{20} = \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{12}{15} + \frac{9}{15} \cdot \cos\alpha$

$\therefore \frac{4}{5} = \frac{4\,\text{sen}\,\alpha}{5} + \frac{3\cos\alpha}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4 - 4\,\text{sen}\,\alpha}{3}$

Aplicando a relação fundamental ($\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), temos:

$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{4 - 4\,\text{sen}\,\alpha}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

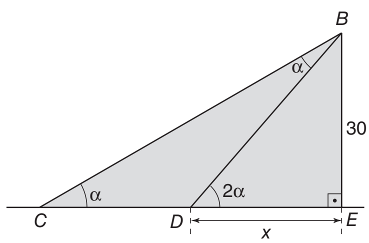
$\Rightarrow 25\,\text{sen}^2\alpha - 32\,\text{sen}\,\alpha + 7 = 0$

Assim, obtemos: $\text{sen}\,\alpha = 1$ ou $\text{sen}\,\alpha = \frac{7}{25}$.

Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos que $\text{sen}\,\alpha = \frac{7}{25}$.

(**Nota:** Outra resolução é possível por meio da lei dos cossenos.)

33 Sendo x a distância pedida, em metro, temos:



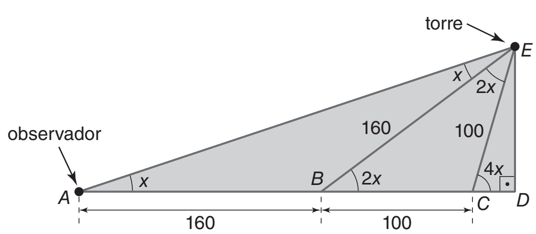
$\text{tg}\,2\alpha = \frac{30}{x} \Rightarrow \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = \frac{30}{x}$

$\therefore \frac{2 \cdot 0{,}4}{1 - (0{,}4)^2} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 31{,}5$

Logo, a distância entre o ponto D e a base da torre é 31,5 m.

34 Nomeando os vértices conforme a figura a seguir, temos:

- $E\hat{B}D$ é ângulo externo do triângulo ABE. Assim, sendo x a medida do ângulo $E\hat{A}D$, temos que $m(A\hat{E}B) = x$; logo, o triângulo ABE é isósceles, com $AB = BE = 160$ m.
- $E\hat{C}D$ é ângulo externo do triângulo BCE. Assim, $m(B\hat{E}C) = 2x$ e, portanto, o triângulo BCE é isósceles, com $BC = CE = 100$ m.



Pela lei dos senos, aplicada ao triângulo BCE, temos:

$\frac{100}{\text{sen}\,2x} = \frac{160}{\text{sen}(180° - 4x)} \Rightarrow \frac{100}{\text{sen}\,2x} = \frac{160}{\text{sen}\,4x}$

$\therefore \frac{\text{sen}\,4x}{\text{sen}\,2x} = \frac{160}{100} \Rightarrow \frac{2\,\cancel{\text{sen}\,2x}\cos 2x}{\cancel{\text{sen}\,2x}} = \frac{8}{5}$

$\therefore \cos 2x = \frac{4}{5}$

Pela relação fundamental $\text{sen}^2\,2x + \cos^2 2x = 1$, obtemos $\text{sen}\,2x = \frac{3}{5}$

Assim, concluímos do triângulo CDE:

$\text{sen}\,4x = \frac{DE}{100} \Rightarrow 2\,\text{sen}\,2x \cdot \cos 2x = \frac{DE}{100}$

$\therefore 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{DE}{100} \Rightarrow DE = 96$

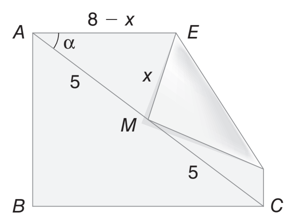
Alternativa **a**.

35 Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $AC = 10$ cm. Sendo α a medida do ângulo $C\hat{A}D$, temos:

$\cos\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Sendo x a medida, em centímetro, do segmento $\overline{EM}$, obtemos $AE = 8 - x$.

Assim, esquematizamos:



Concluímos, aplicando a lei dos cossenos no triângulo AEM:

$x^2 = 5^2 + (8 - x)^2 - 2 \cdot 5 \cdot (8 - x)\cos\alpha$

$\therefore x^2 = 25 + 64 - 16x + x^2 - 10 \cdot (8 - x) \cdot \frac{4}{5}$

$\therefore x^2 = 25 + 64 - 16x + x^2 - 64 + 8x$

$\therefore 8x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{8}$

Logo, $EM = \frac{25}{8}$ cm ou aproximadamente 3,13 cm.

36 Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, temos $m(B\hat{C}A) = 45°$.

Assim, sendo x a medida BC, em metro, temos:

$\frac{800}{\text{sen}\,45°} = \frac{x}{\text{sen}\,120°} \Rightarrow \frac{800}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore x = 400\sqrt{6}$

Logo, o comprimento do canal será $400\sqrt{6}$ m ou aproximadamente 980 m.

37 Sendo R a medida do raio do lago, temos, pela lei dos senos:

$\frac{AB}{\text{sen}\,30°} = 2R \Rightarrow \frac{AB}{\frac{1}{2}} = 2R \qquad \therefore AB = R$

38 Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, deduzimos que $m(B\hat{A}D) = 90°$ e $m(B\hat{C}D) = 63°$. Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\begin{cases} \frac{200}{\text{sen}\,90°} = \frac{AB}{\text{sen}\,30°} \\ \frac{200}{\text{sen}\,63°} = \frac{BC}{\text{sen}\,64°} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{200}{1} = \frac{AB}{0{,}5} \\ \frac{200}{0{,}89} = \frac{BC}{0{,}90} \end{cases}$$

$\therefore AB = 100$ m e $BC \approx 202{,}25$

Assim, concluímos que a área S do quadrilátero $ABCD$ é dada por:

$S \approx \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot \text{sen}\,60° + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 202{,}5 \cdot \text{sen}\,53°$

$\therefore\ S \approx \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot \cos 30° + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 202{,}25 \cdot \text{sen } 53°$

$\therefore\ S \approx \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot 0{,}87 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 202{,}25 \cdot 0{,}80$

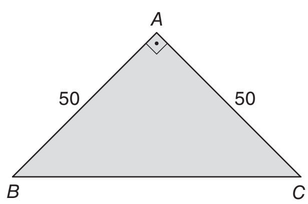
$\therefore\ S \approx 24.880\ m^2$

Logo, a área do terreno é, aproximadamente, $24.880\ m^2$.

39 Sendo α a medida do ângulo $B\hat{A}C$, a área S do triângulo ABC é dada por:

$S = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50 \cdot \text{sen } \alpha\ cm^2 = 1.250 \text{ sen } \alpha\ cm^2$

Para que essa área seja máxima, devemos ter sen $\alpha = 1$; portanto, $\alpha = 90°$.



Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, concluímos:

$(BC)^2 = 50^2 + 50^2 \Rightarrow (BC)^2 = 2 \cdot 50^2$

$\therefore\ BC = 50\sqrt{2}$ cm

Alternativa **e**.

Exercícios de revisão cumulativa

1 $\text{sen}^3 x - \text{sen}^2 x - 4 \text{ sen } x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x(\text{sen } x - 1) - 4(\text{sen } x - 1) = 0$

$\therefore\ (\text{sen } x - 1)(\text{sen}^2 x - 4) = 0 \Rightarrow \text{sen } x - 1 = 0$ ou $\text{sen}^2 x - 4 = 0$

Assim, temos:

- sen $x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- sen $x = \pm 2$ (não convém)

Concluímos, então, que o conjunto solução é:

$S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

2 A sequência 1, 16, 31, 46, ... é uma progressão aritmética de razão 15. Assim, temos:

1ª rodada: 1, 16, 31, 46, 61, 76, 91

2ª rodada: 6, 21, 36, 51, 66, 81, 96

3ª rodada: 11, 26, 41, 56, 71, 86

4ª rodada: 1 (criança já chamada)

Logo, foram distribuídos 21 chocolates.

Alternativa **c**.

3 Condição de existência: $\cos x \neq 0$

A sequência é P.G. se, e somente se:

$144 \cos^2 x = \text{sen}^2 x \cdot 16 \text{ tg}^2 x$

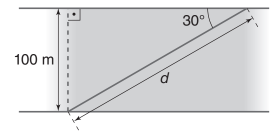
Logo:

$144 \cos^2 x = \frac{16 \text{ sen}^4 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \text{tg}^4 x = 9$

$\therefore\ \text{tg } x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

4 Sendo d a distância percorrida pelo barco, esquematizamos:



$\text{sen } 30° = \frac{100}{d} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{100}{d}$

$\therefore\ d = 200$ m

Alternativa **d**.

Análise da resolução

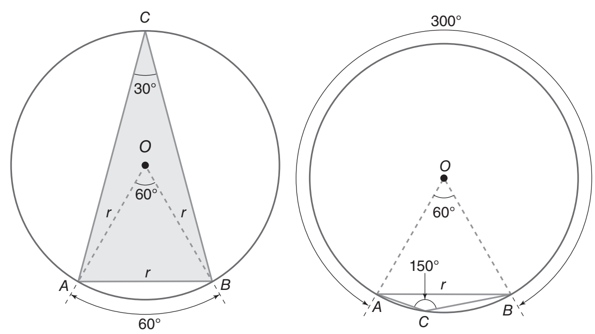
1º modo:

Pela lei dos senos, aplicada ao triângulo ABC, temos:

$$\frac{r}{\text{sen } \alpha} = 2r \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$$

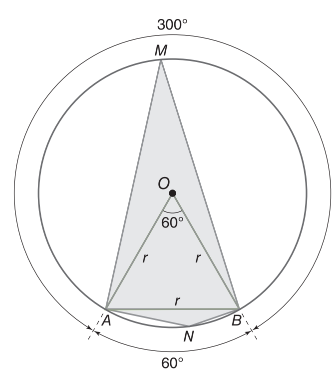
Como $0° < \alpha < 180°$, pois α é medida de um ângulo interno de um triângulo, temos dois valores possíveis: $\alpha = 30°$ ou $\alpha = 150°$.

Duas figuras possíveis para esses valores de α são:



2º modo:

Em uma circunferência de raio r, consideremos uma corda $\overline{AB}$ de comprimento r. Os pontos A e B determinam nessa circunferência dois arcos distintos de extremos A e B. Considerando um ponto M em um desses arcos e um ponto N no outro, com M e N distintos de A e B, obtemos os triângulos ABM e ABN que satisfazem as condições enunciadas. Observe:



Assim, temos:

$$m(A\hat{M}B) = \frac{m(\widehat{ANB})}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

$$m(A\hat{N}B) = \frac{m(\widehat{AMB})}{2} = \frac{300°}{2} = 150°$$

Logo, há duas respostas possíveis: 30° ou 150°.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 Resposta pessoal.

2 Se a música tem 15 batidas a cada 10 segundos, temos:

15 batidas ——— 10 segundos

x batidas ——— 60 segundos

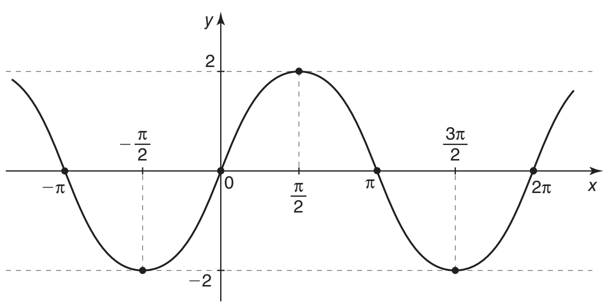
$x = \dfrac{15 \cdot 60}{10} = 90$

Portanto, essa música tem 90 bpm.

Exercícios propostos

1 a) $y = 2\,\text{sen}\,x$

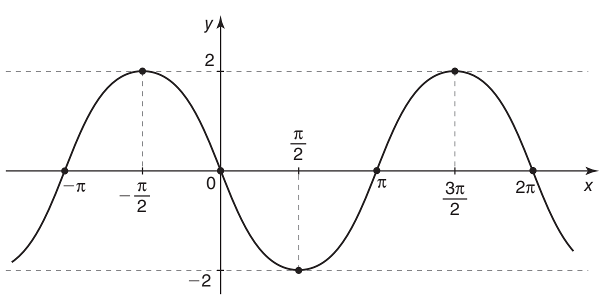
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

b) $y = -2\,\text{sen}\,x$

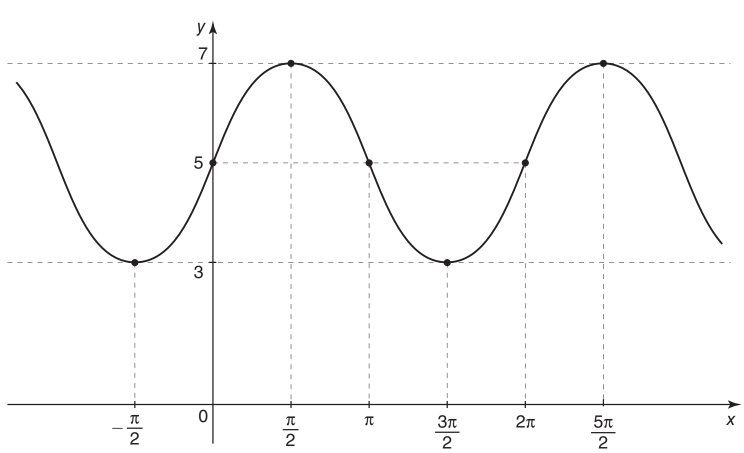
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	-2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	2
2π	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

c) $y = 5 + 2\,\text{sen}\,x$

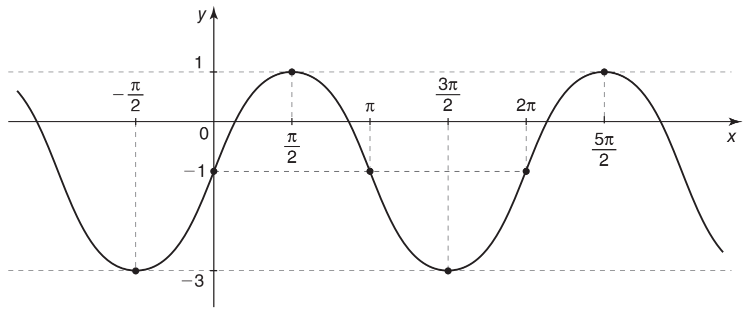
x	y
0	5
$\frac{\pi}{2}$	7
π	5
$\frac{3\pi}{2}$	3
2π	5



$D = \mathbb{R}$
$Im = [3, 7]$
$p = 2\pi$

d) $y = -1 + 2\,\text{sen}\, x$

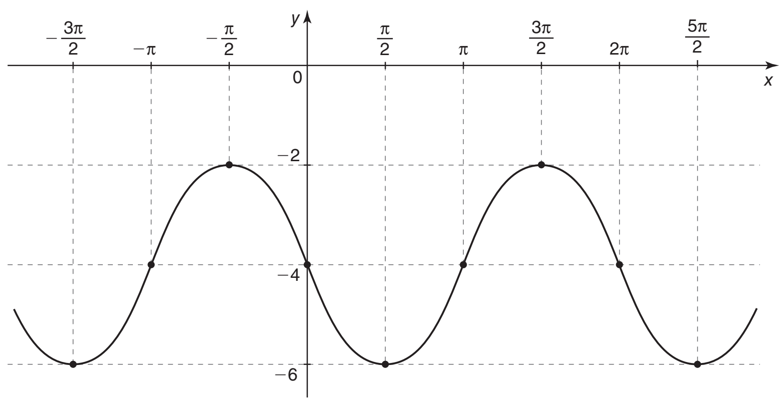
x	y
0	-1
$\frac{\pi}{2}$	1
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-3
2π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, 1]$
$p = 2\pi$

e) $y = -4 - 2\,\text{sen}\, x$

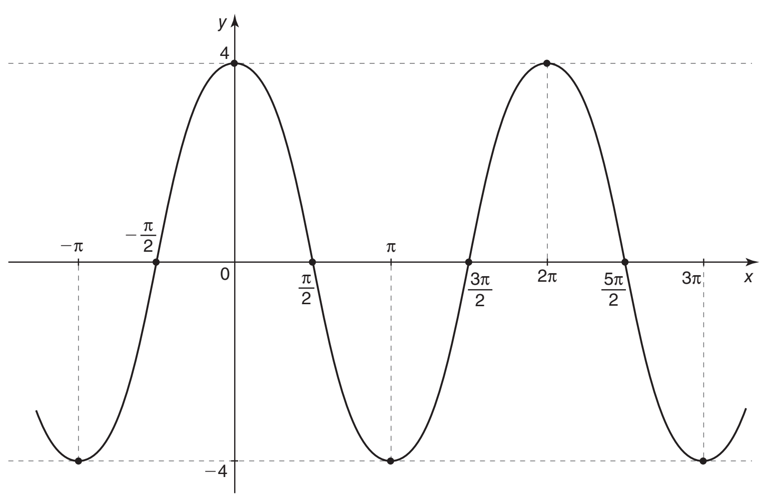
x	y
0	-4
$\frac{\pi}{2}$	-6
π	-4
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	-4



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-6, -2]$
$p = 2\pi$

f) $y = 4\cos x$

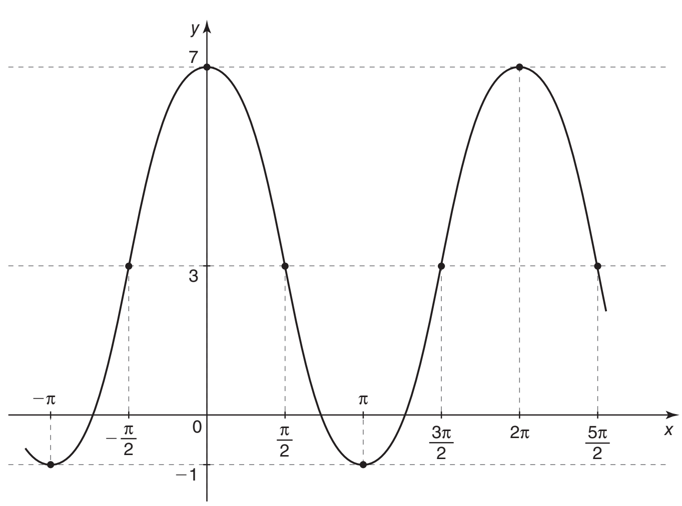
x	y
0	4
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-4
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	4



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-4, 4]$
$p = 2\pi$

g) $y = 3 + 4\cos x$

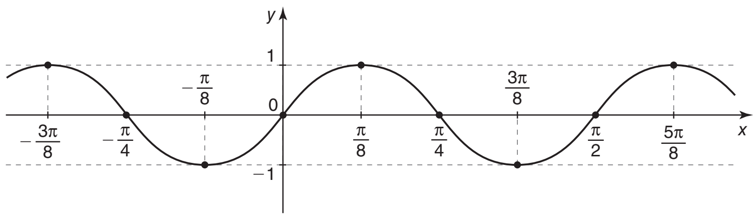
x	y
0	7
$\frac{\pi}{2}$	3
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3
2π	7



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 7]$
$p = 2\pi$

2 a) $y = \text{sen } 4x$

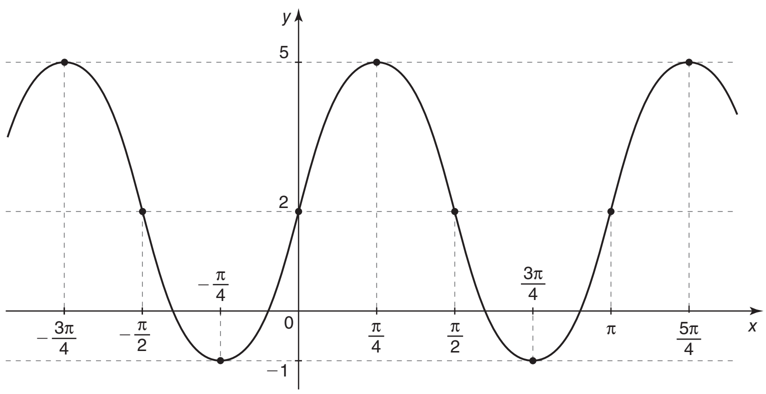
$4x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	1
π	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	-1
2π	$\frac{\pi}{2}$	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 1]$
$p = \frac{\pi}{2}$

b) $y = 2 + 3\text{sen } 2x$

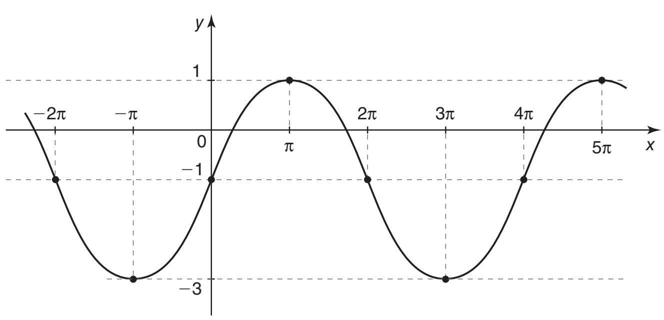
$2x$	x	y
0	0	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	5
π	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 5]$
$p = \pi$

c) $y = -1 + 2\text{sen } \frac{x}{2}$

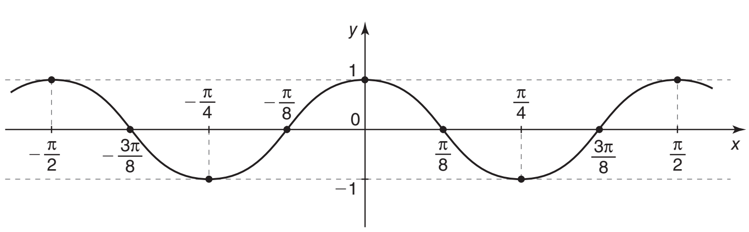
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	π	1
π	2π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3π	-3
2π	4π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, 1]$
$p = 4\pi$

d) $y = \cos 4x$

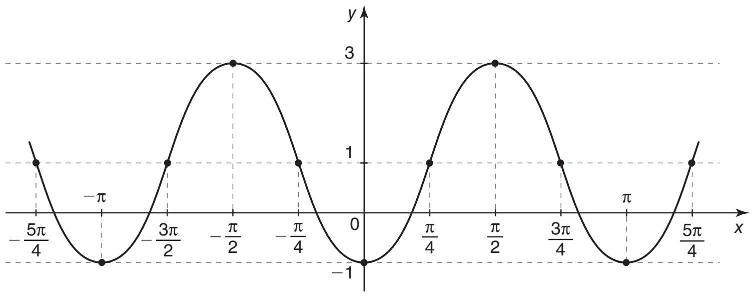
$4x$	x	y
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	0
π	$\frac{\pi}{4}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	0
2π	$\frac{\pi}{2}$	1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 1]$
$p = \frac{\pi}{2}$

e) $y = 1 - 2\cos 2x$

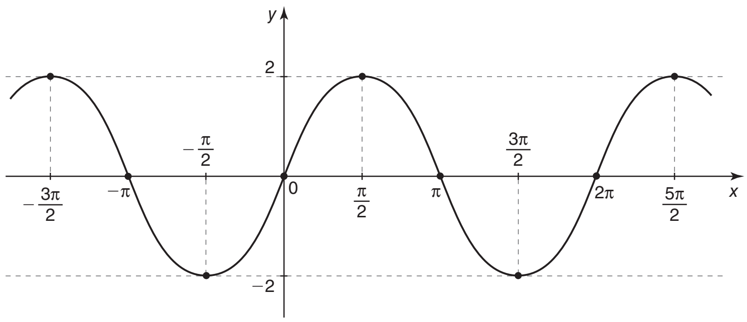
$2x$	x	y
0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
2π	π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 3]$
$p = \pi$

f) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

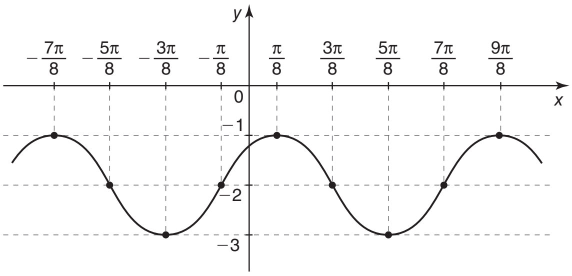
$x - \frac{\pi}{2}$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	$\frac{3\pi}{2}$	-2
$\frac{3\pi}{2}$	2π	0
2π	$\frac{5\pi}{2}$	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

g) $y = -2 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$2x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{8}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	-2
π	$\frac{5\pi}{8}$	-3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{8}$	-2
2π	$\frac{9\pi}{8}$	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, -1]$
$p = \pi$

3 a) $y = 8 \text{ sen } x$

$p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

b) $y = \text{sen } 8x$

$p = \frac{2\pi}{|8|} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

c) $y = \text{sen } \frac{x}{8}$

$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{8}\right|} = 16\pi$

d) $y = \cos(-3x)$

$p = \frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2\pi}{3}$

e) $y = 2 + 3 \text{ sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$p = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

f) $y = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$

$p = \frac{2\pi}{|-2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

4 a) $y = 10 \text{ sen } x$

$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \Rightarrow -10 \leq 10 \text{ sen } x \leq 10$

Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leq y \leq 10\}$.

b) $y = -10 \text{ sen } x$

$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \Rightarrow -10 \leq -10 \text{ sen } x \leq 10$

Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leq y \leq 10\}$.

c) $y = 3 + 2\cos x$
$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant 2\cos x \leqslant 2$
$\therefore\ 1 \leqslant 3 + 2\cos x \leqslant 5$
Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 5\}$.

d) $y = -4 + 5\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
$-1 \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 1 \Rightarrow -5 \leqslant 5\cos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 5$
$\therefore\ -9 \leqslant -4 + 5\cos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 1$
Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -9 \leqslant y \leqslant 1\}$.

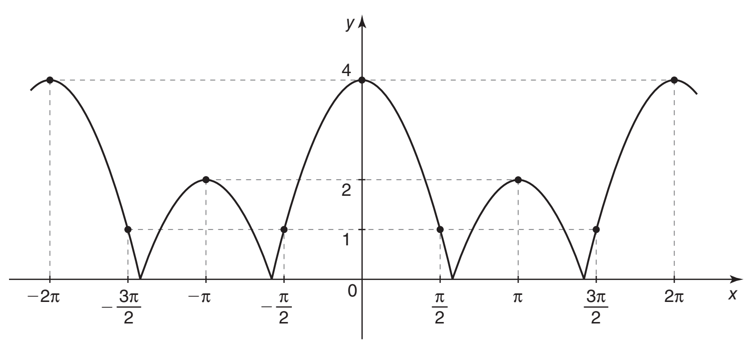
5 O ponto (0, 0) pertence ao gráfico; logo:
$0 = \text{sen}\,(0 - h) \Rightarrow 0 = \text{sen}\,(-h)$
$\therefore\ \text{sen}\,h = 0 \Rightarrow h = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
O menor número positivo h que satisfaz essa condição é π, obtido para $k = 1$. Assim, concluímos: $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
Alternativa **c**.

6 Os pontos $\left(\frac{\pi}{6}, 5\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, 7\right)$ pertencem ao gráfico da função; portanto:

$$\begin{cases} 5 = a + b\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} \\ 7 = a + b\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a + \frac{b}{2} \\ 7 = a + b \end{cases}$$

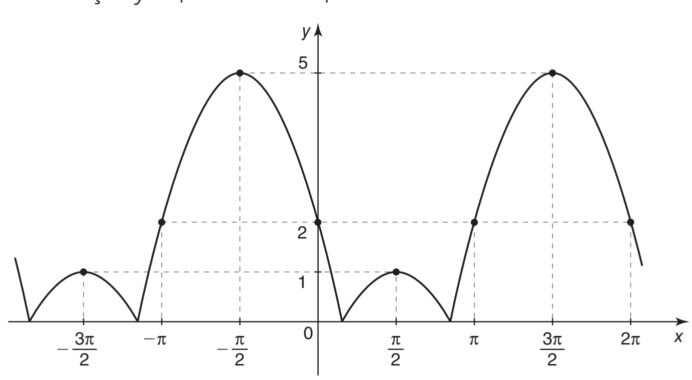
Concluímos, então, que $a = 3$ e $b = 4$.

7 a) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = 1 + 3\cos x$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = |1 + 3\cos x|$.



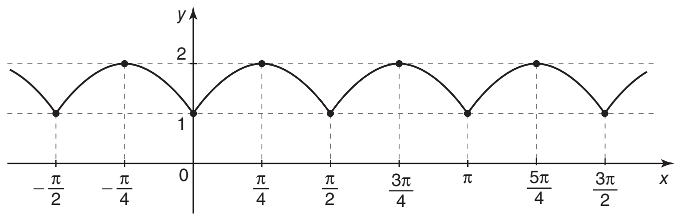
$D = \mathbb{R}$
$Im = [0, 4]$
$p = 2\pi$

b) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = -2 + 3\,\text{sen}\,x$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = |-2 + 3\,\text{sen}\,x|$.



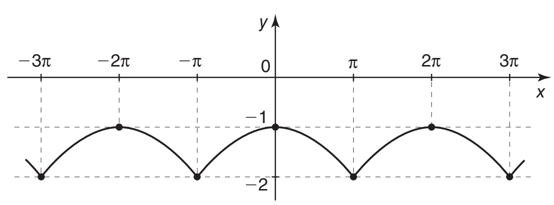
$D = \mathbb{R}$
$Im = [0, 5]$
$p = 2\pi$

c) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{sen } 2x$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = |\text{sen } 2x|$.
Fase 3: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_2 uma unidade para cima, obtendo então o gráfico de $y = 1 + |\text{sen } 2x|$.



$D = \mathbb{R}$
$Im = [1, 2]$
$p = \frac{\pi}{2}$

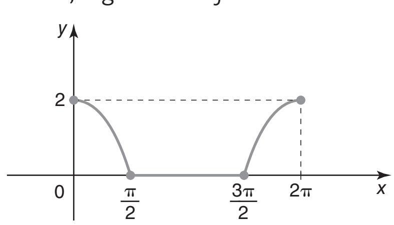
d) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \cos \frac{x}{2}$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.
Fase 3: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_2 duas unidades para baixo, obtendo então o gráfico de $y = -2 + \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, -1]$
$p = 2\pi$

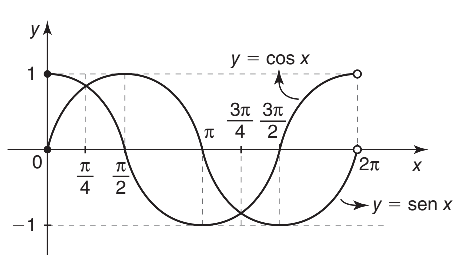
8 $f(x) = \begin{cases} \cos x + \cos x, \text{ se } \cos x \geq 0 \\ \cos x - \cos x, \text{ se } \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2\cos x, \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ 0, \text{ se } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Assim, o gráfico de f é:



Alternativa **a**.

9 a)



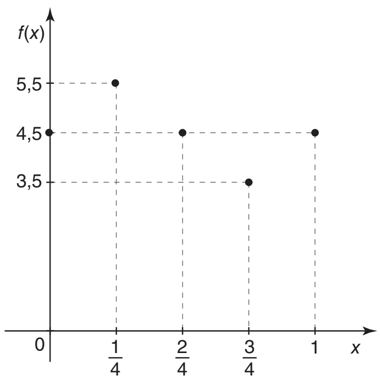
b) De acordo com o gráfico, $\text{sen } x > \cos x$ para $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

10 Sabemos que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$. Então:
$-1 \leq 4m - 5 \leq 1 \Rightarrow 4 \leq 4m \leq 6$
$\therefore\ 1 \leq m \leq \frac{3}{2}$
Assim, somente para $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$ existe a igualdade $\text{sen } x = 4m - 5$.

11 a)

Dia de abril	x	$f(x)$
1 (segunda-feira)	0	$f(0) = 4{,}5 + \text{sen}\,(2\pi \cdot 0) = 4{,}5$
2 (terça-feira)	$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = 4{,}5 + \text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = 5{,}5$
3 (quarta-feira)	$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4{,}5 + \text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = 4{,}5$
4 (quinta-feira)	$\frac{3}{4}$	$f\left(\frac{3}{4}\right) = 4{,}5 + \text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{3}{4}\right) = 3{,}5$
5 (sexta-feira)	1	$f(1) = 4{,}5 + \text{sen}\,(2\pi \cdot 1) = 4{,}5$

Marcando no plano cartesiano os pontos $(x, f(x))$ obtidos na tabela, temos o gráfico:



b) Observando o gráfico, deduzimos que o preço dessa ação atingiu o maior valor na terça-feira e o menor valor na quinta-feira.

c) Observando a tabela do item **a**, concluímos que o maior valor da ação foi 5,5 e o menor foi 3,5.

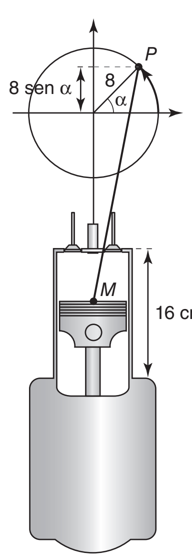
12 A medida α do arco $\widehat{AP}$ em função do tempo t é dada por:

Medida do arco (radiano)	Tempo (minuto)
2π	$\frac{1}{30}$
α	t

$\therefore\ \alpha = 60\pi t$ rad

Logo, as coordenadas de p são dadas por $f(t) = 7\cos(60\pi t)$ e $g(t) = 7\,\text{sen}\,(60\pi t)$.
Alternativa **d**.

13 Vamos imaginar uma circunferência de diâmetro 16 cm com o centro na origem de um sistema cartesiano tal que, quando um ponto P gira no sentido anti-horário na circunferência, uma haste rígida MP acompanha o movimento do pistão, conforme figura.



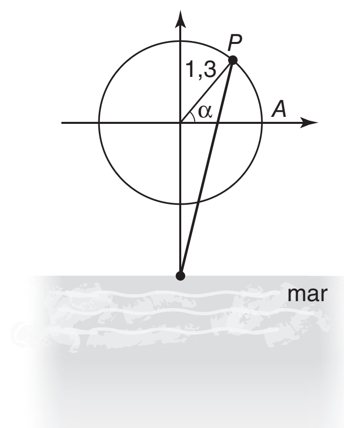
A medida α, em radiano, é dada em função do tempo t, em minuto, pela regra de três:

Medida do arco (radiano)	Tempo (minuto)
2π	$\frac{1}{60}$
α	t

$\therefore\ \alpha = 120\pi t$

Como a altura da tampa do pistão, em relação à base, é dada pela ordenada do ponto P, a função procurada é: $f(t) = 8\,\text{sen}\,120\pi t$.
Alternativa **d**.

14 Imaginemos, em um plano vertical, uma circunferência de raio 1,3 m, acima do nível do mar, e uma haste rígida ligando um ponto P da circunferência a um ponto do nível do mar, no prolongamento do eixo Oy, conforme mostra a figura.



O subir e descer da maré, como um imenso pistão, provoca um movimento circular do ponto P. Supondo esse movimento circular com velocidade constante e no sentido anti-horário, vamos calcular a medida α do arco $\widehat{AP}$, em função do horário t, em hora, com $0 \leq t \leq 24$, em que $t = 2$ corresponda a um instante em que P passou pelo ponto $A(1{,}3;\ 0)$:

Medida do arco (radiano)	Tempo (hora)
2π	12
α	$t - 2$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi(t-2)}{6}$

Assim, a ordenada do ponto P no instante t, em hora, é dada pela função:

$f(t) = 1{,}3\,\text{sen}\,\dfrac{\pi(t-2)}{6}$.

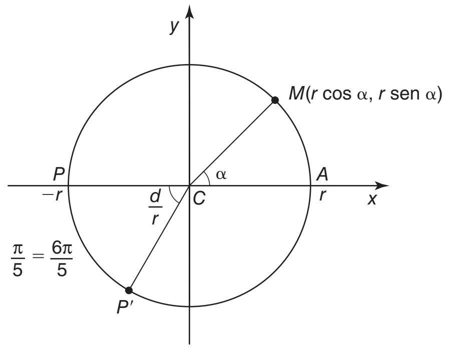
15 A medida α, em radiano, do arco $\widehat{AP}$ é dada pela regra de três:

Medida do arco (radiano)	Tempo (segundo)
2π	3
α	t

$\therefore\ \alpha = \dfrac{2\pi t}{3}$

Logo, os movimentos de P_x e P_y são descritos, respectivamente, por: $f(t) = 5\cos\dfrac{2\pi t}{3}$ e $g(t) = 5\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi t}{3}$.

16 Indicando por C o centro da circunferência, vamos admitir que o segmento $\overline{CP}$ seja paralelo ao eixo das abscissas. Transladando o sistema de eixos de modo que sua origem coincida com o ponto C e considerando o ponto $A(r, 0)$, temos que qualquer ponto M da circunferência tem abscissa $r\cos\alpha$ e ordenada $r\operatorname{sen}\alpha$, em que α é medida do ângulo central $A\hat{C}M$. Assim, se o ponto P se desloca uma distância d, $d \leqslant r$, sobre a circunferência no sentido anti-horário até um ponto P', temos que o ângulo central $P\hat{C}P'$ mede $\frac{d}{r}$ radianos:



Portanto, as coordenadas do ponto P' são $\left(r\cos\left(\pi + \frac{d}{r}\right), r\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{d}{r}\right)\right)$, ou seja, $P'\left(-r\cos\left(\frac{d}{r}\right), -r\operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right)\right)$. Assim, quando o ponto P desloca-se de $(-r, 0)$ a $\left(-r\cos\left(\frac{d}{r}\right), -r\operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right)\right)$, sua projeção ortogonal sobre o eixo das abscissas desloca-se a distância d dada por:

$$d = -r\cos\left(\frac{d}{r}\right) - (-r) = r - r\cos\left(\frac{d}{r}\right) \Rightarrow d = r \cdot \left(1 - \cos\frac{d}{r}\right)$$

Alternativa **b**.

17 a) $y = \operatorname{tg} 4x$

Sabemos que $\operatorname{tg} 4x = \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 4x}$; portanto, a condição de existência é $\cos 4x \neq 0$, ou seja, $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $\operatorname{tg} 4x$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

b) $y = 5\operatorname{tg}\frac{3x}{2}$

A condição de existência é $\cos\frac{3x}{2} \neq 0$, ou seja, $\frac{3x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $5\operatorname{tg}\frac{3x}{2}$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é: $Im = \mathbb{R}$.

c) $y = 4 + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

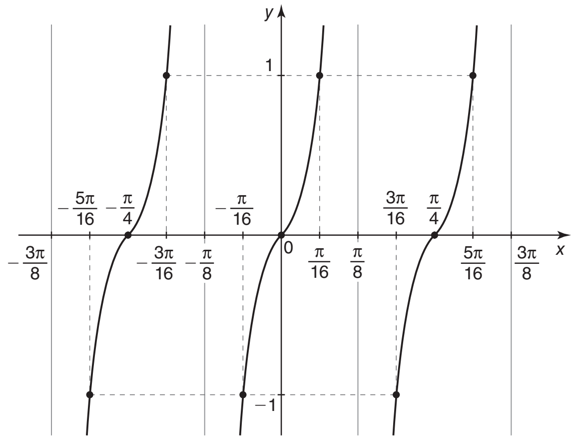
A condição de existência é $\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \neq 0$, ou seja, $x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $4 + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

18 a) $y = \text{tg } 4x$

$4x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{16}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{16}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	$\nexists$



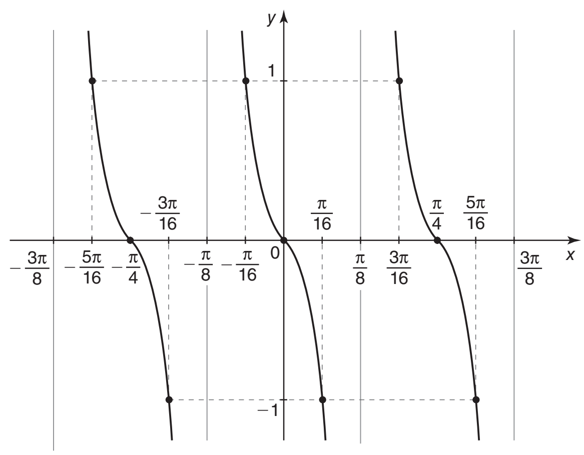
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \frac{\pi}{4}$

b) $y = -\text{tg } 4x$

$4x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{16}$	1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{16}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	$\nexists$



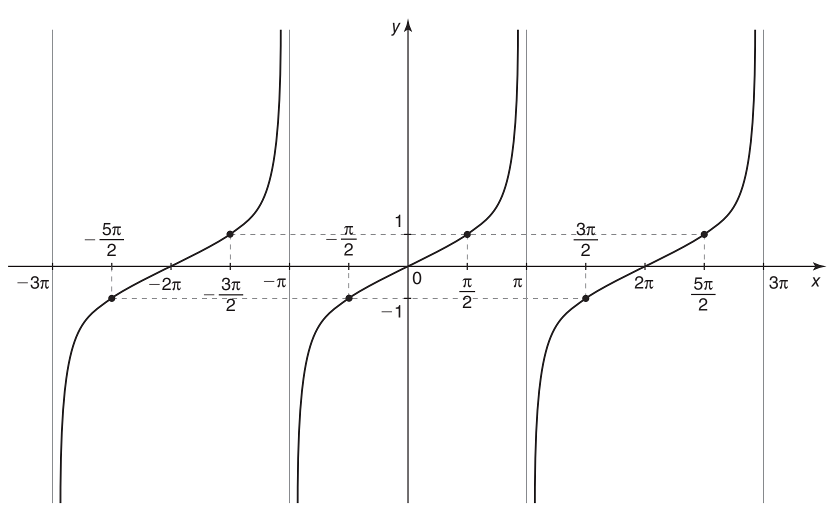
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \frac{\pi}{4}$

c) $y = \text{tg } \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	$\nexists$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = 2\pi$

19 a) $y = \text{tg}\, 6x$

$p = \frac{\pi}{|6|} = \frac{\pi}{6}$

b) $y = \text{tg}\, \frac{x}{6}$

$p = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{6}\right|} = 6\pi$

c) $y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

$p = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$

20 a) $y = \text{cotg}\, 2x$

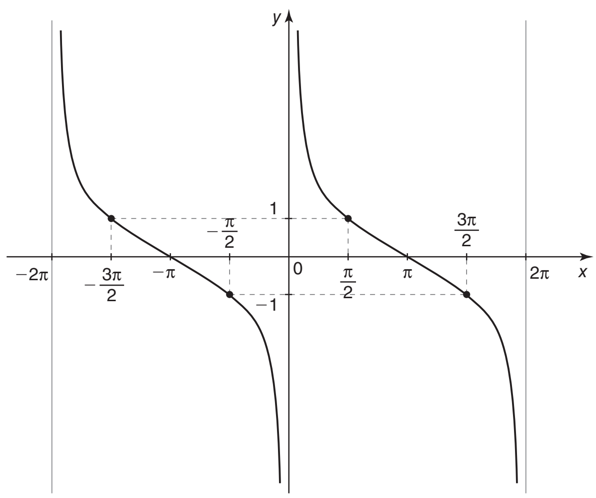
- A condição de existência é $\text{sen}\, 2x \neq 0$, ou seja, $2x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como $\text{cotg}\, 2x$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

b) $y = \text{cotg}\, \frac{x}{3}$

- A condição de existência é $\text{sen}\, \frac{x}{3} \neq 0$, ou seja, $\frac{x}{3} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \neq 3k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Logo, o domínio da função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.
- Como $\text{cotg}\, \frac{x}{3}$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

21 a) $y = \text{cotg}\, \frac{x}{2}$

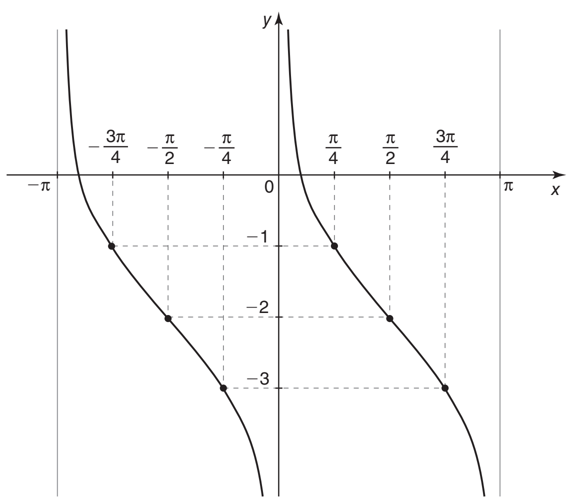
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	$\nexists$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = 2\pi$

b) $y = -2 + \text{cotg}\, x$

x	y
0	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	-2
$\frac{3\pi}{4}$	-3
π	$\nexists$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = \pi$

22 a) $y = \text{cossec}\, 2x$

- A condição de existência é $\text{sen}\, 2x \neq 0$, ou seja, $2x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Como cossec $2x$ assume qualquer valor real menor ou igual a -1, ou maior ou igual a 1, o conjunto imagem da função é $Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

b) $y = 2 + \text{cossec}\,\frac{x}{2}$

- A condição de existência é $\text{sen}\,\frac{x}{2} \neq 0$, ou seja, $\frac{x}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow x \neq 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.
- Como $\text{cossec}\,\frac{x}{2} \leqslant -1$ ou $\text{cossec}\,\frac{x}{2} \geqslant 1 \Rightarrow 2 + \text{cossec}\,\frac{x}{2} \leqslant 1$ ou $2 + \text{cossec}\,\frac{x}{2} \geqslant 3$, o conjunto imagem da função é
  $Im =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$.

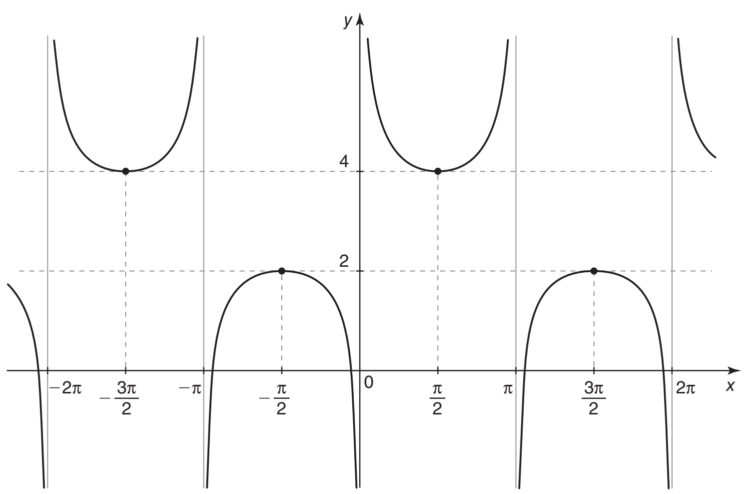
23 $k - 2\,\text{cossec}\,x = 5 \Rightarrow \text{cossec}\,x = \frac{k-5}{2}$

Como $\text{cossec}\,x \leqslant -1$ ou $\text{cossec}\,x \geqslant 1$, temos: $\frac{k-5}{2} \leqslant -1$ ou $\frac{k-5}{2} \geqslant 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow k \leqslant 3$ ou $k \geqslant 7$

Logo, para que seja possível a igualdade, devemos ter $k \leqslant 3$ ou $k \geqslant 7$.

24 a) $y = 3 + \text{cossec}\,x$

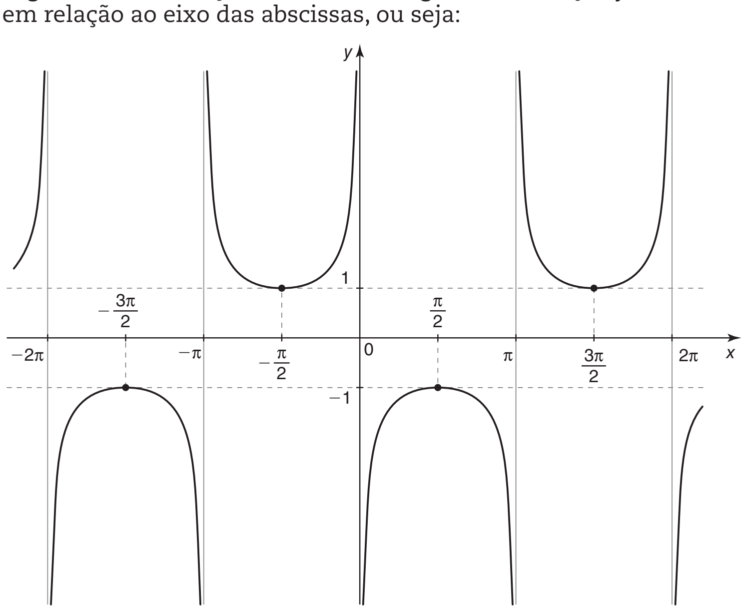
Esse gráfico é uma translação vertical do gráfico da função $y = \text{cossec}\,x$, de 3 unidades para cima, ou seja:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im =]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$
$p = 2\pi$

b) $y = -\text{cossec}\,x$

O gráfico dessa função é simétrico ao gráfico da função $y = \text{cossec}\,x$ em relação ao eixo das abscissas, ou seja:



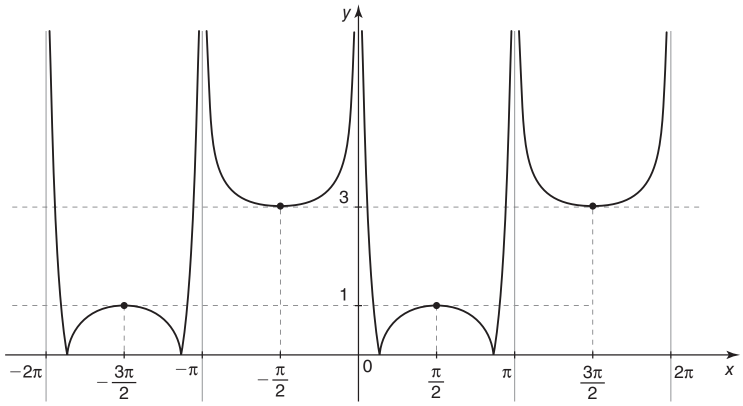
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
$p = 2\pi$

c) $y = |-2 + \text{cossec } x|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{cossec } x$.

Fase 2: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_1 duas unidades para baixo, obtendo o gráfico de $y_2 = -2 + \text{cossec } x$.

Fase 3: No gráfico da função y_2, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = |-2 + \text{cossec } x|$.



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$
$Im = [0, +\infty[$
$p = 2\pi$

25 a) $y = \sec 4x$

- A condição de existência é $\cos 4x \neq 0$, ou seja, $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como $\sec 4x$ assume qualquer valor real menor ou igual a -1, ou maior ou igual a 1, o conjunto imagem da função é $Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

b) $y = 2\sec \frac{x}{2}$

- A condição de existência é $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, ou seja, $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.
- Como $\sec \frac{x}{2}$ assume qualquer valor real, menor ou igual a -1, ou maior ou igual a 1, o conjunto imagem da função é $Im =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

26 $2k + \sec x = 5 \Rightarrow \sec x = 5 - 2k$
Como $\sec x \leq -1$ ou $\sec x \geq 1$, temos:
$5 - 2k \leq -1$ ou $5 - 2k \geq 1 \Rightarrow k \geq 3$ ou $k \leq 2$
Logo, para que exista a igualdade, devemos ter: $k \leq 2$ ou $k \geq 3$.

27 a) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
Logo, $\text{arcsen } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

b) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
Logo, $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

c) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$.
Logo, $\text{arcsen } 1 = \frac{\pi}{2}$.

d) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
Logo, $\text{arcsen } (-1) = -\frac{\pi}{2}$.

e) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Logo, $\text{arcsen } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

f) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Logo, $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

g) $\alpha = \text{arcsen } 2 \Rightarrow \text{sen } \alpha = 2$
Como essa igualdade é impossível, concluímos que não existe arcsen 2.

h) $\alpha = \text{arcsen}\left(-\sqrt[3]{5}\right) \Rightarrow \text{sen } \alpha = -\sqrt[3]{5}$
Como essa igualdade é impossível, concluímos que não existe $\text{arcsen}\left(-\sqrt[3]{5}\right)$.

28 No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sen $\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, arcsen $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ e, portanto,

$\sec\left[\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \dfrac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

29 No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sen $\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Logo, arcsen $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ e, portanto,

$\text{tg}\left(2\,\text{arcsen}\,\frac{1}{2}\right) = \text{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$

30 Seja arcsen $\frac{12}{13} = \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Assim,

sen $\alpha = \frac{12}{13}$. Temos, então, pela relação fundamental:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\therefore \cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{169 - 144}{169}$

$\therefore \cos^2\alpha = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{5}{13}$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cos $\alpha = \frac{5}{13}$.

Logo, $\cos\left(\text{arcsen}\,\frac{12}{13}\right) = \cos\alpha = \frac{5}{13}$.

31 Sendo arcsen $\frac{2}{3} = \alpha$, temos sen $\alpha = \frac{2}{3}$ e

$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Logo, $\cos\left(2\,\text{arcsen}\,\frac{2}{3}\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\alpha =$

$= 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.

32 Como $-1 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \text{arcsen}\,2x$ é tal que $-1 \leqslant 2x \leqslant 1$, ou seja, $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

33 No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sen $\frac{\pi}{2} = 1$. Além disso, sendo arcsen $\frac{3}{5} = \alpha$, temos sen $\alpha = \frac{3}{5}$ e

$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Logo, $\cos\left(\text{arcsen}\,\frac{3}{5} + \text{arcsen}\,1\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \cos\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} =$

$= \cos\alpha \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 1 = -\frac{3}{5}$.

34 Na primeira volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:

$x = \text{arcsen}\,\frac{2}{7}$ ou $x = \pi - \text{arcsen}\,\frac{2}{7}$

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \text{arcsen}\,\frac{2}{7} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \text{arcsen}\,\frac{2}{7} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arcsen}\,\frac{2}{7} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen}\,\frac{2}{7} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

35 $\frac{\pi}{3} = \text{arcsen}\,x \Rightarrow x = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} \quad \therefore x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

36 a) No intervalo $[0, \pi]$, cos $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, arccos $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

b) No intervalo $[0, \pi]$, cos $\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, arccos $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

c) No intervalo $[0, \pi]$, cos $0 = 1$.
Logo, arccos $1 = 0$.

d) No intervalo $[0, \pi]$, cos $\pi = -1$.
Logo, arccos $(-1) = \pi$.

e) No intervalo $[0, \pi]$, cos $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Logo, arccos $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

f) No intervalo $[0, \pi]$, cos $\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Logo, arccos $\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

g) $\alpha = \text{arccos}\,\frac{3}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{2}$

Como essa igualdade é impossível, concluímos que não existe arccos $\frac{3}{2}$.

37 No intervalo $[0, \pi]$, cos $\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Logo, arccos $\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ e, portanto,

$\text{cossec}\left[\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \text{cossec}\,\frac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}} =$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

38 Sendo arccos $\frac{15}{17} = \alpha$, temos cos $\alpha = \frac{15}{17}$ e $\alpha \in [0, \pi]$.

Pela relação fundamental:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{225}{289} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{64}{289}$

$\therefore \text{sen}\,\alpha = \frac{8}{17}$

Logo, $\text{sen}\left(\text{arccos}\,\frac{15}{17}\right) = \text{sen}\,\alpha = \frac{8}{17}$.

39 Sendo arccos $\frac{1}{3} = \alpha$, temos cos $\alpha = \frac{1}{3}$ e $\alpha \in [0, \pi]$.

Pela relação fundamental:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{8}{9}$

$\therefore \text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Logo, $\text{sen}\left(2\arccos\frac{1}{3}\right) = \text{sen}\,2\alpha =$

$= 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

40 Como $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \arccos 4x$ é tal que:

$-1 \leqslant 4x \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\right\}$.

41 Sendo arccos $\frac{4}{5} = \alpha$, temos cos $\alpha = \frac{4}{5}$ e $\alpha \in [0, \pi]$.

Pela relação fundamental:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{9}{25}$

$\therefore \text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$

Além disso, no intervalo $[0, \pi]$, $\cos\pi = -1$. Dessa forma, $\arccos(-1) = \pi$.

Calculamos, então, o valor da expressão dada:

$\text{tg}\left(\arccos\frac{4}{5} + \arccos(-1)\right) = \text{tg}\,(\alpha + \pi) =$

$= \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\pi}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\pi} = \frac{\text{tg}\,\alpha + 0}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot 0} = \text{tg}\,\alpha =$

$= \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$

42 Sendo arccos $\frac{12}{13} = \alpha$ e $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \beta$, temos:

$\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$ e $\{\alpha, \beta\} \subset [0, \pi]$.

Pela relação fundamental:

(i) $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{25}{169}$

$\therefore \text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$

(ii) $\text{sen}^2\,\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\beta + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2\,\beta = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}^2\,\beta = \frac{16}{25}$

$\therefore \text{sen}\,\beta = \frac{4}{5}$

Logo, $\cos\left[\arccos\frac{12}{13} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right] =$

$= \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta =$

$= \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{56}{65}$.

43 Na primeira volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:

$x = \arccos\frac{2}{3}$ ou $x = -\arccos\frac{2}{3}$

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \arccos\frac{2}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\arccos\frac{2}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \arccos\frac{2}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\arccos\frac{2}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

44 a) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$.

Logo, $\text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$.

b) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Logo, $\text{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

c) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, $\text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

d) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

45 No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Logo, $\text{arctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ e, portanto,

$\cos\left(\text{arctg}\,\sqrt{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

46 No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Logo, $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ e, portanto,

$\text{sen}\left[2\,\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right] = \text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

47 Sendo $\text{arctg}\,\sqrt{5} = \alpha$, temos $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{5}$ e

$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Logo, $\sec\left(\text{arctg}\,\sqrt{5}\right) = \sec\alpha$.

Aplicando a identidade $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\,\alpha$, para $\cos\alpha \neq 0$, obtemos:

$\sec^2\alpha = 1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 6 \Rightarrow \sec\alpha = \pm\sqrt{6}$

Como $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, concluímos que $\sec\alpha = \sqrt{6}$.

48 Sendo $\text{arctg}\,2 = \alpha$, temos $\text{tg}\,\alpha = 2$ e

$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pela identidade $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\,\alpha$, para $\cos\alpha \neq 0$,

obtemos: $\sec^2\alpha = 1 + 2^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 5$

$\therefore \cos^2\alpha = \frac{1}{5}$

Assim, concluímos que:

$\cos(2\,\text{arctg}\,2) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 =$

$= 2 \cdot \frac{1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$

49 Lembrando que a imagem de $y = \text{arctg}\, x$ é

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$, temos:

$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg}\, x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < 2\,\text{arctg}\, x < \pi$

Logo, a imagem de $y = 2\,\text{arctg}\, x$ é

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -\pi < y < \pi\}$.

50 Sendo $\text{arctg}\, 5 = \alpha$ e $\text{arctg}\, 2 = \beta$, temos:

$\text{tg}\, \alpha = 5$, $\text{tg}\, \beta = 2$ e $\{\alpha, \beta\} \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Logo, $\text{tg}\,[\text{arctg}\, 5 + \text{arctg}\, 2] = \text{tg}\,(\alpha + \beta) =$

$= \dfrac{\text{tg}\, \alpha + \text{tg}\, \beta}{1 - \text{tg}\, \alpha \cdot \text{tg}\, \beta} = \dfrac{5 + 2}{1 - 5 \cdot 2} = -\dfrac{7}{9}$.

51 Na primeira volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:

$\text{tg}\, x = 10 \Rightarrow x = \text{arctg}\, 10$ ou $x = \pi + \text{arctg}\, 10$

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \text{arctg}\, 10 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

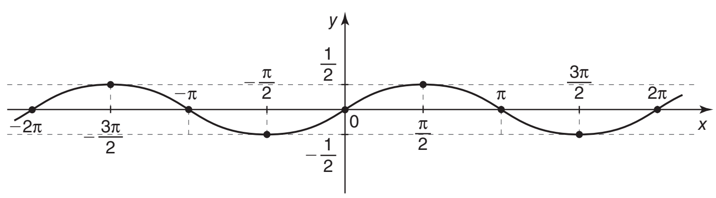
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arctg}\, 10 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a) $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{2}$

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2π	0



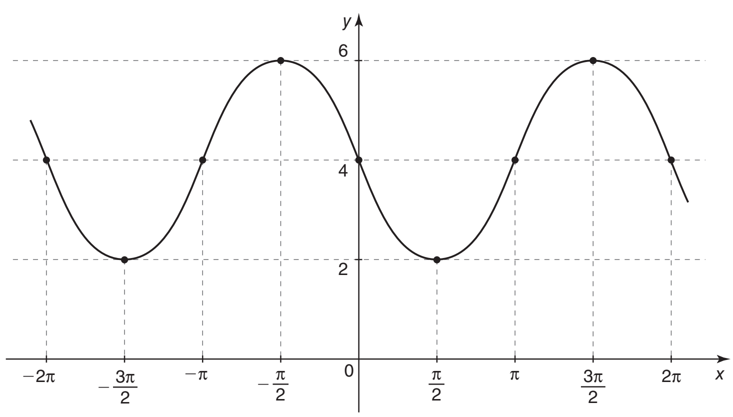
$D = \mathbb{R}$

$Im = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$p = 2\pi$

b) $y = 4 - 2\,\text{sen}\, x$

x	y
0	4
$\frac{\pi}{2}$	2
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	6
2π	4



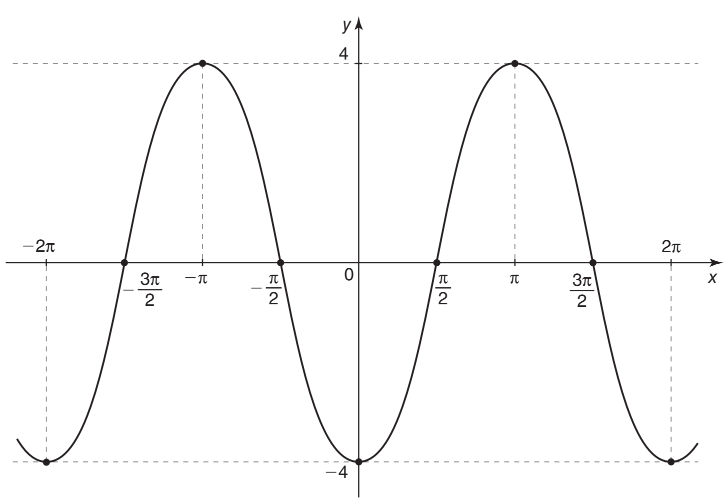
$D = \mathbb{R}$

$Im = [2, 6]$

$p = 2\pi$

c) $y = -4\cos x$

x	y
0	-4
$\frac{\pi}{2}$	0
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	-4



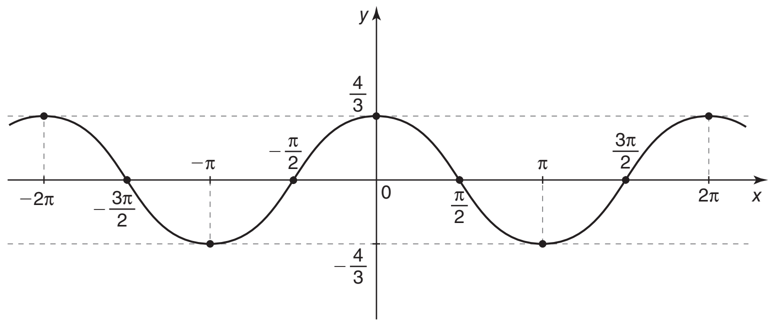
$D = \mathbb{R}$

$Im = [-4, 4]$

$p = 2\pi$

d) $y = \dfrac{4\cos x}{3}$

x	y
0	$\frac{4}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	$-\frac{4}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	$\frac{4}{3}$



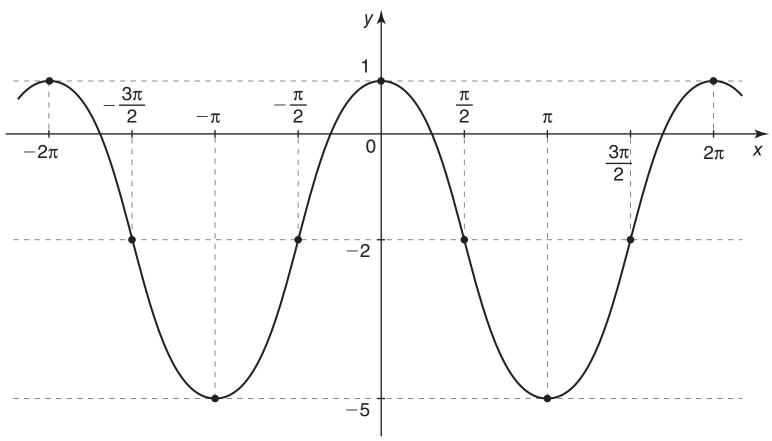
$D = \mathbb{R}$

$Im = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$

$p = 2\pi$

e) $y = -2 + 3\cos x$

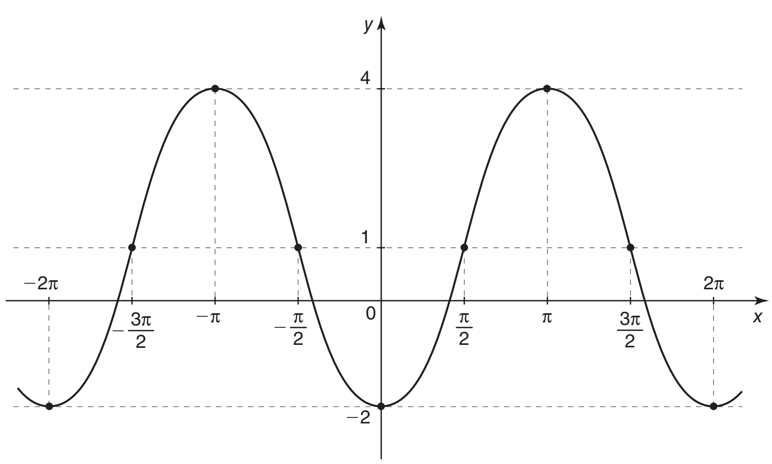
x	y
0	1
$\frac{\pi}{2}$	-2
π	-5
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-5, 1]$
$p = 2\pi$

f) $y = 1 - 3\cos x$

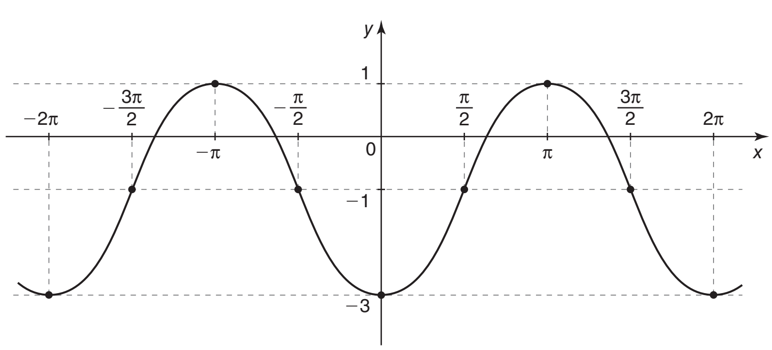
x	y
0	-2
$\frac{\pi}{2}$	1
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	-2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 4]$
$p = 2\pi$

g) $y = -1 - 2\cos x$

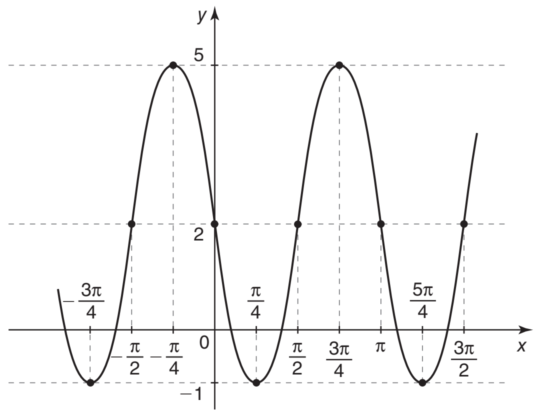
x	y
0	-3
$\frac{\pi}{2}$	-1
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	-3



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, 1]$
$p = 2\pi$

2 a) $y = 2 - 3\,\text{sen}\,2x$

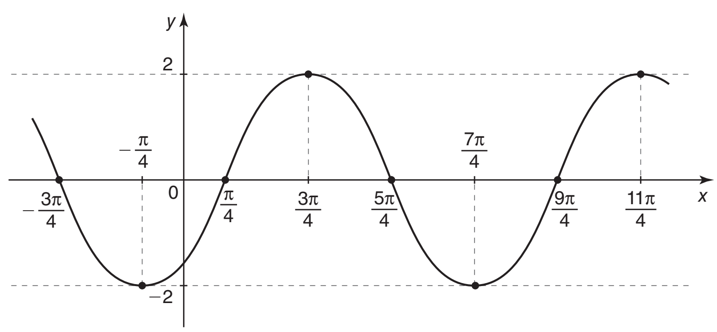
$2x$	x	y
0	0	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	-1
π	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	5
2π	π	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 5]$
$p = \pi$

b) $y = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

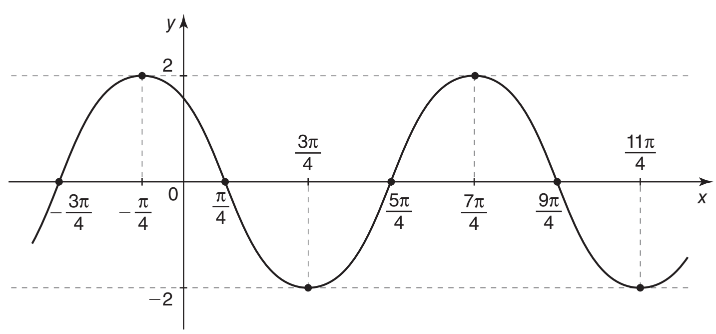
$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	-2
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

c) $y = -2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

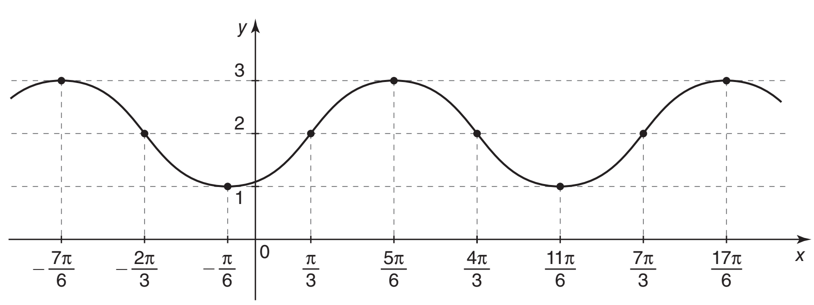
$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-2
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

d) $y = 2 + \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

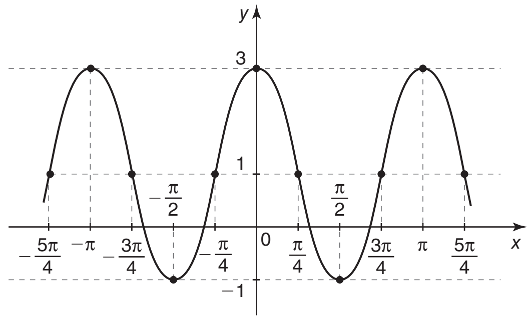
$x - \frac{\pi}{3}$	x	y
0	$\frac{\pi}{3}$	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	3
π	$\frac{4\pi}{3}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	1
2π	$\frac{7\pi}{3}$	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [1, 3]$
$p = 2\pi$

e) $y = 1 + 2\cos 2x$

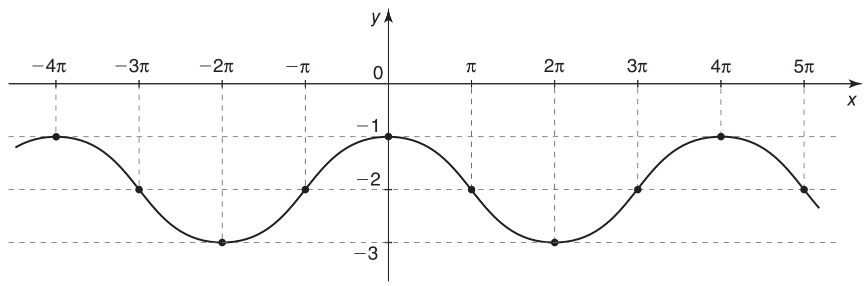
$2x$	x	y
0	0	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
2π	π	3



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 3]$
$p = \pi$

f) $y = -2 + \cos \frac{x}{2}$

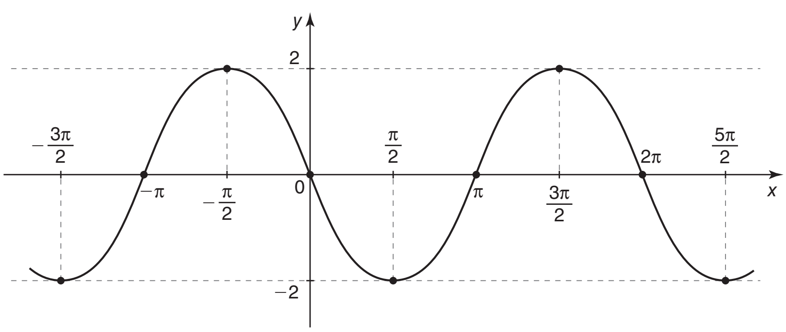
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	π	-2
π	2π	-3
$\frac{3\pi}{2}$	3π	-2
2π	4π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, -1]$
$p = 4\pi$

g) $y = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{\pi}{2}$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	-2
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	$\frac{3\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	2π	0
2π	$\frac{5\pi}{2}$	-2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

3 a) $y = \frac{\text{sen } x}{8}$

$p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

b) $y = -3\cos x$

$p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

c) $y = \frac{\cos x}{3}$

$p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

d) $y = \cos \frac{x}{3}$

$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

e) $y = -3 + 5\cos 6x$

$p = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{\pi}{3}$

f) $y = -1 - 5\,\text{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$

$p = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$

4 a) $y = -2 + 3\,\text{sen } x$

$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\,\text{sen } x \leq 3$

$\therefore\ -5 \leq -2 + 3\,\text{sen } x \leq 1$

Logo, $Im = [-5, 1]$.

b) $y = -1 + 3\,\text{sen } 2x$

$-1 \leq \text{sen } 2x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\,\text{sen } 2x \leq 3$

$\therefore\ -4 \leq -1 + 3\,\text{sen } 2x \leq 2$

Logo, $Im = [-4, 2]$.

c) $y = 6 - 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right)$

$-1 \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 \leq 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) \leq 4$

$\therefore\ 2 \leq 6 - 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) \leq 10$

Logo, $Im = [2, 10]$.

d) $y = \pi + 2\pi\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$-1 \leq \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\pi \leq 2\pi\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 2\pi$

$\therefore\ -\pi \leq \pi + 2\pi\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 3\pi$

Logo, $Im = [-\pi, 3\pi]$.

5 O valor da expressão $\frac{1}{3 - \cos x}$ é mínimo quando o denominador $3 - \cos x$ atinge seu valor máximo.
Isso ocorre para $\cos x = -1$. Assim, o menor valor da expressão $\frac{1}{3 - \cos x}$ é $\frac{1}{3 - (-1)}$, ou seja, $\frac{1}{4}$.
Alternativa **b**.

6 Como o período da função é 4π, a imagem é o intervalo $[-3, 3]$ e o ponto $(2\pi, -3)$ pertence ao gráfico, temos:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \\ b = \pm 3 \\ -3 = b\cos(2\pi m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm\frac{1}{2} \\ b = \pm 3 \\ -3 = b\cos(2\pi m) \end{cases}$$

Há dois pares de valores de m e b que satisfazem todas as equações desse sistema:

$m = \frac{1}{2}$ e $b = 3$ ou $m = -\frac{1}{2}$ e $b = 3$

7 Temos:

(I) O período da função é π; logo: $\frac{2\pi}{|m|} = \pi$

O conjunto imagem da função é $[1, 5]$; logo:

(II) $1 \leqslant a + b\cos mx \leqslant 5 \Rightarrow 1 - a \leqslant b\cos mx \leqslant 5 - a$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1-a}{b} \leqslant \cos mx \leqslant \frac{5-a}{b}, \text{ se } b > 0 \\ \frac{1-a}{b} \geqslant \cos mx \geqslant \frac{5-a}{b}, \text{ se } b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-a}{b} = -1 \\ \frac{5-a}{b} = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{1-a}{b} = 1 \\ \frac{5-a}{b} = -1 \end{cases}$$

(III) O ponto $(\pi, 1)$ pertence ao gráfico da função; logo: $1 = a + b\cos(m\pi)$

De (I), obtemos: $m = \pm 2$

De (II), obtemos: $a = 3$ e $b = 2$ ou $a = 3$ e $b = -2$

Desses valores de m, a e b, os que satisfazem a equação obtida em (III) são:

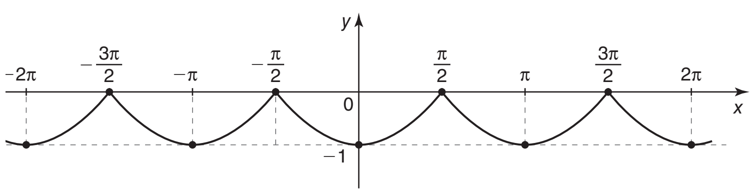
$m = 2, a = 3$ e $b = -2$ ou $m = -2, a = 3$ e $b = -2$

8 **a)** $y = -|\cos x|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \cos x$.

Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = |\cos x|$.

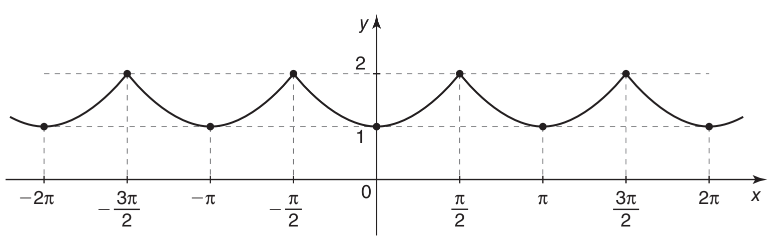
Fase 3: No gráfico da função y_2, transformamos cada ponto em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = -|\cos x|$.



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 0]$
$p = \pi$

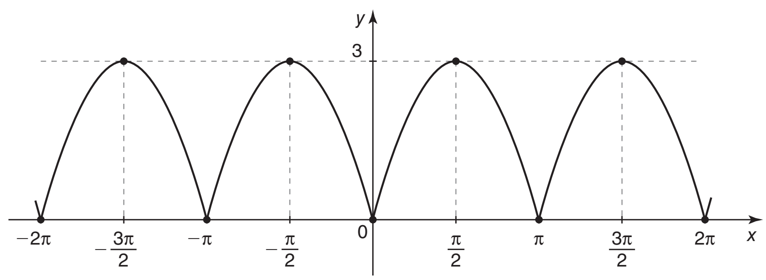
b) $y = 2 - |\cos x|$

Transladando, verticalmente, o gráfico do item **a** duas unidades para cima, obtemos o gráfico de $y = 2 - |\cos x|$.



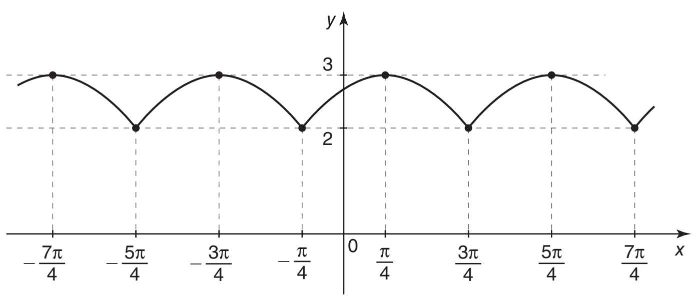
$D = \mathbb{R}$
$Im = [1, 2]$
$p = \pi$

c) Como $3|\text{sen } x| = |3| \cdot |\text{sen } x| = |3 \cdot \text{sen } x|$, a função $y = 3|\text{sen } x|$ pode ser representada por $y = |3 \text{sen } x|$.
Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = 3 \text{ sen } x$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y = |3 \text{ sen } x|$.



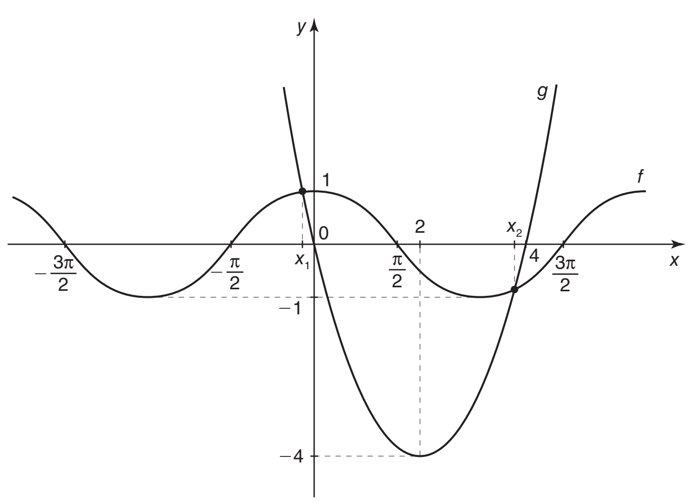
$D = \mathbb{R}$
$Im = [0, 3]$
$p = \pi$

d) $y = 2 + \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$
Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.
Fase 3: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_2 duas unidades para cima, obtendo então o gráfico da função $y = 2 + \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.



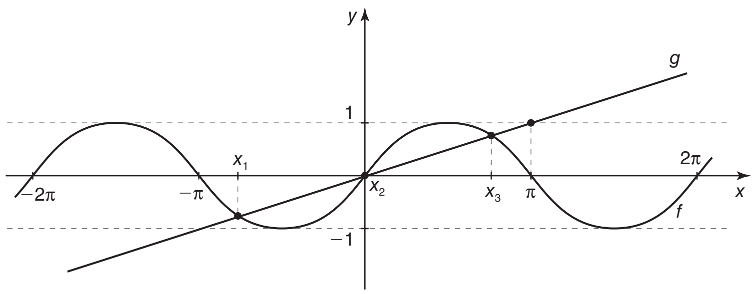
$D = \mathbb{R}$
$Im = [2, 3]$
$p = \pi$

9 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^2 - 4x$, temos:



Observamos que $f(x) = g(x)$ para apenas dois valores de x, representados na figura por x_1 e x_2; portanto, a equação $\cos x = x^2 - 4x$ possui exatamente duas raízes.

10 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \frac{x}{\pi}$, temos:



Observamos que $f(x) = g(x)$ para apenas três valores de x, representados na figura por x_1, x_2 e x_3; portanto, a equação $\text{sen } x = \frac{x}{\pi}$ possui exatamente três raízes.

11 $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2k-1}{3} \leqslant 1 \quad \therefore -3 \leqslant 2k - 1 \leqslant 3 \Rightarrow -2 \leqslant 2k \leqslant 4$
$\therefore -1 \leqslant k \leqslant 2$
Logo, a igualdade $\cos x = \frac{2k-1}{3}$ só é possível para valores reais de K tais que $-1 \leqslant k \leqslant 2$.

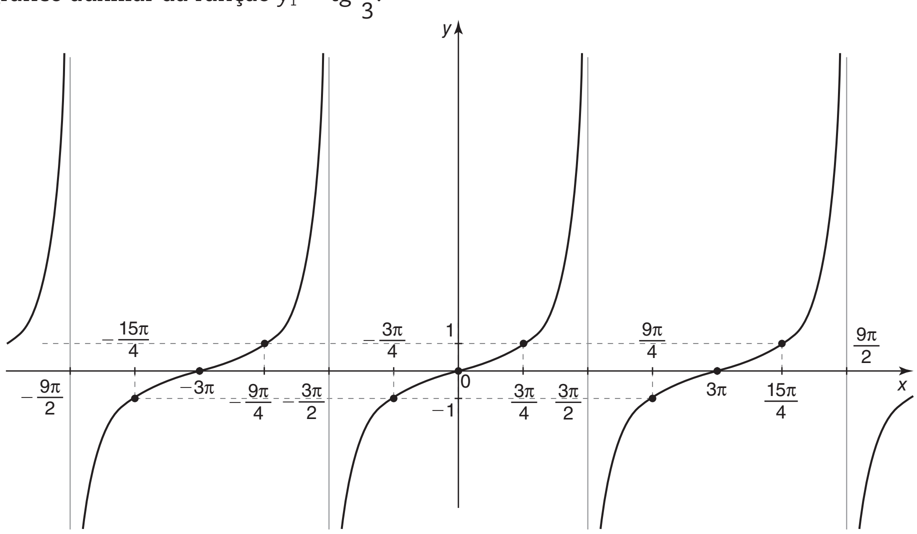
12 Como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, a equação $\cos x = 2p - 1$ tem solução se, e somente se, $-1 \leqslant 2p - 1 \leqslant 1$.
Assim, obtemos:
$-1 \leqslant 2p - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2p \leqslant 2 \quad \therefore 0 \leqslant p \leqslant 1$
Logo, a equação $\cos x = 2p - 1$ tem solução apenas para os valores reais de p tais que $0 \leqslant p \leqslant 1$.

13 Para qualquer valor de x pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, temos que $0 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$.
Logo, a equação $\text{sen } x = 2m + 5$ tem solução nesse intervalo se, e somente se, $0 \leqslant 2m + 5 \leqslant 1$.
Assim, obtemos:
$0 \leqslant 2m + 5 \leqslant 1 \Rightarrow -5 \leqslant 2m \leqslant -4 \quad \therefore -\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant -2$
Logo, a equação $\text{sen } x = 2m + 5$ tem solução no intervalo considerado apenas para os valores reais de m tais que $-\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant -2$.

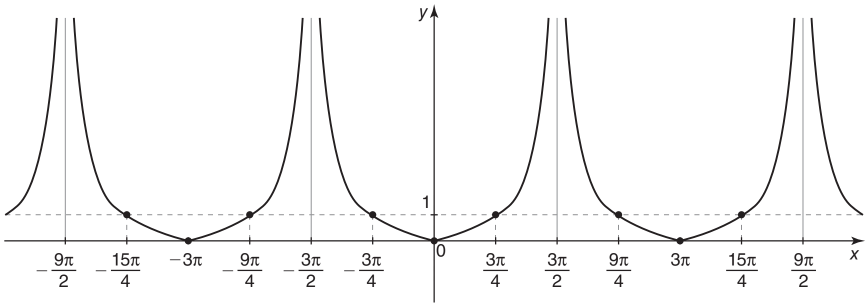
14 a) $y = \left|\text{tg } \frac{x}{3}\right|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{tg } \frac{x}{3}$.

$\frac{x}{3}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$



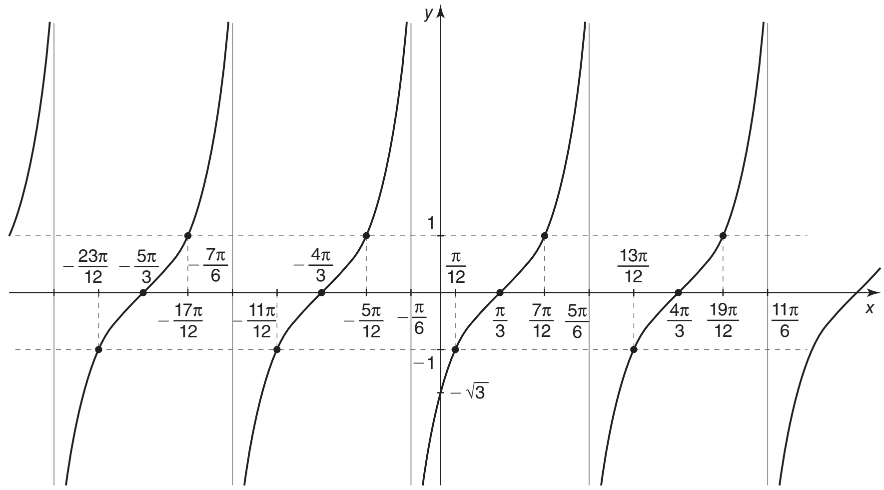
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo, então, o gráfico da função $y = \left|\text{tg}\,\frac{x}{3}\right|$



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$
$Im = \mathbb{R}_+$
$p = 3\pi$

b) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

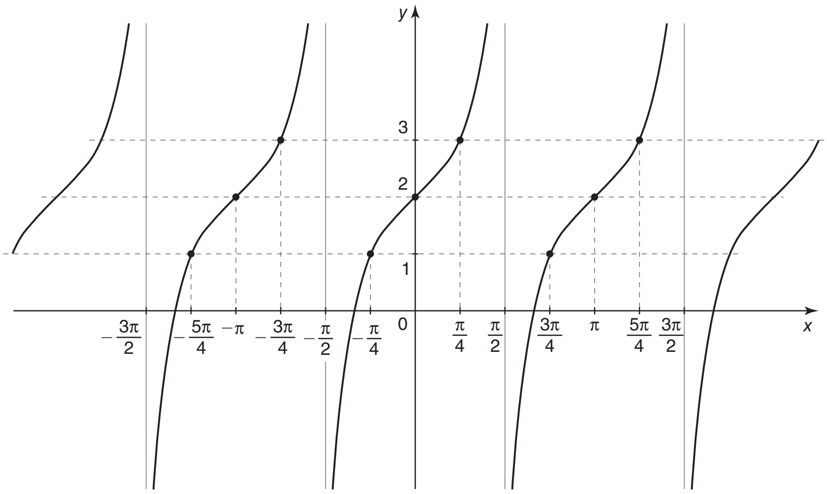
$x - \frac{\pi}{3}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}$	-1
0	$\frac{\pi}{3}$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\nexists$



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = \pi$

c) $y = 2 + \text{tg}\,x$

x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	1
0	2
$\frac{\pi}{4}$	3
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = \pi$

15 a) $y = 5 + 3\,\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$p = \frac{\pi}{|1|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

b) $y = 4\,\text{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)$

$p = \frac{\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

c) $y = \frac{\text{sen}^3\,6x}{\cos 6x} - \text{sen}\,6x \cdot \cos 6x$

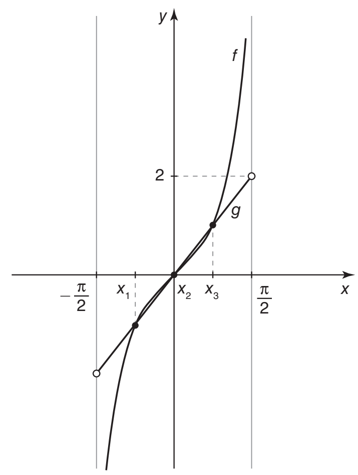
Temos:

$\frac{\text{sen}^3\,6x}{\cos 6x} + \text{sen}\,6x \cdot \cos 6x = \frac{\text{sen}^3\,6x + \text{sen}\,6x \cdot \cos^2 6x}{\cos 6x} =$

$= \frac{\text{sen}\,6x(\text{sen}^2\,6x + \cos^2 6x)}{\cos 6x} = \frac{\text{sen}\,6x}{\cos 6x} = \text{tg}\,6x$

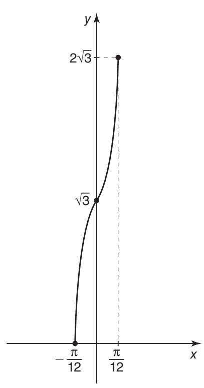
Logo, $y = \text{tg}\,6x$ e, portanto: $p = \frac{\pi}{|6|} = \frac{\pi}{6}$

16 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{tg}\,x$ e $g(x) = \frac{4x}{\pi}$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, temos:



Observamos que, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, a igualdade $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para três valores de x, representados na figura por x_1, x_2 e x_3; portanto, a equação $\text{tg}\,x = \frac{4x}{\pi}$ possui exatamente três raízes nesse intervalo.

17 Construindo o gráfico de f, temos:



Logo, o conjunto imagem dessa função é $Im = [0, 2\sqrt{3}]$.

18 a) $y = 5\,\text{cotg}\,\frac{3x}{2}$

A condição de existência é $\text{sen}\,\frac{3x}{2} \neq 0$, ou seja, $\frac{3x}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{2k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{2k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $\text{cotg}\,\frac{3x}{2}$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

b) $y = \text{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

A condição de existência é $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, ou seja, $2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

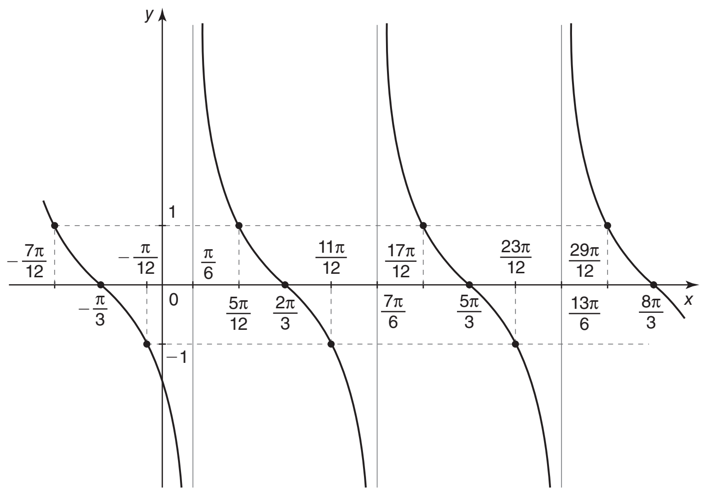
Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $\text{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

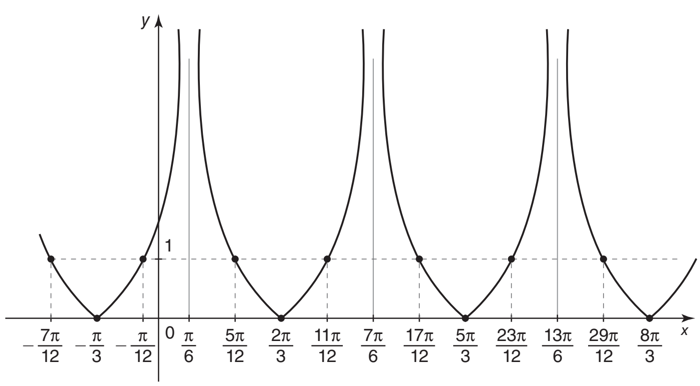
19 a) $y = \left|\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

$x - \frac{\pi}{6}$	x	y
0	$\frac{\pi}{6}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$	-1
π	$\frac{7\pi}{6}$	$\nexists$



Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = \left|\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$.



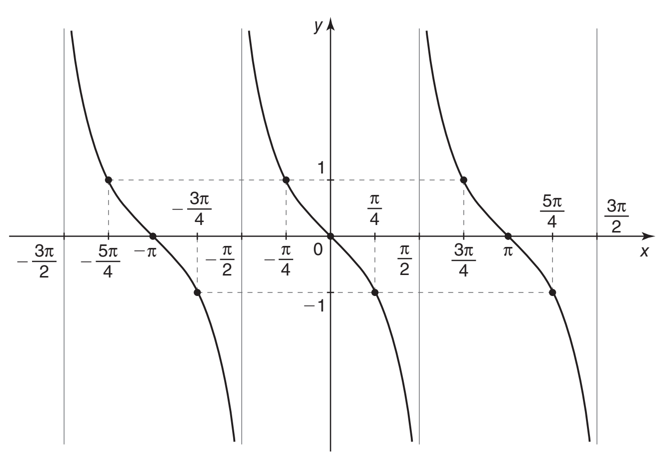
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}_+$

$p = \pi$

b) $y = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{x}{2}$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	-1
π	$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$



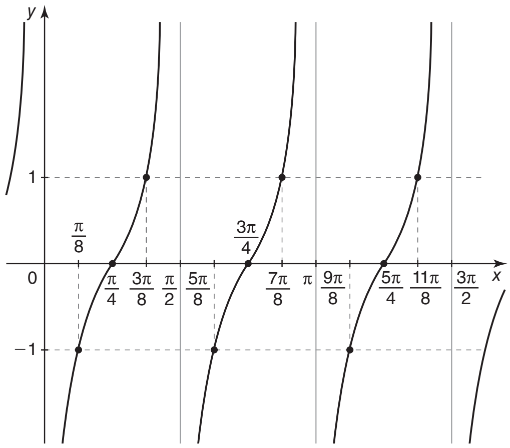
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \pi$

c) $y = -\text{cotg } 2x$

$2x$	x	y
0	0	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

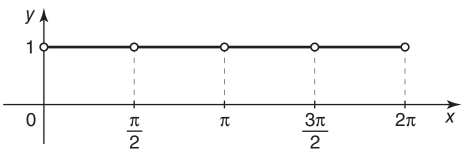
$Im = \mathbb{R}$

$p = \frac{\pi}{2}$

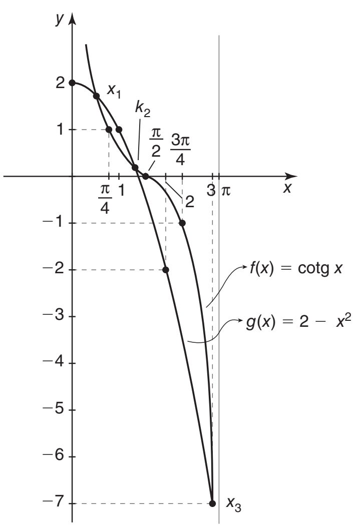
20 Para sen $x \neq 0$ e cos $x \neq 0$, temos:

$\text{tg } x \cdot \text{cotg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\text{sen } x} = 1$

Logo, o gráfico da função $y = \text{tg } x \cdot \text{cotg } x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, é:



21 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{cotg } x$ e $g(x) = 2 - x^2$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, temos:



Observamos que, no intervalo $[0, \pi]$, a igualdade $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para três valores de x, representados na figura por x_1, x_2 e x_3; portanto, a equação $\text{cotg } x = 2 - x^2$ possui exatamente três raízes nesse intervalo.

22 a) $y = 5\,\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

- A condição de existência é $\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, ou seja, $3x - \frac{\pi}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

  $\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Logo, o domínio da função é

  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Como $\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -1$ ou

  $\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 1$, temos:

  $5\,\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -5$ ou

  $5\,\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 5$

  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -5 \text{ ou } y \geqslant 5\}$.

b) $y = -2 + \text{cossec } 2x$

- A condição de existência é: sen $2x \neq 0$, ou seja, $2x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Logo, o domínio da função é

  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Como cossec $2x \leqslant -1$ ou cossec $2x \geqslant 1$, temos:

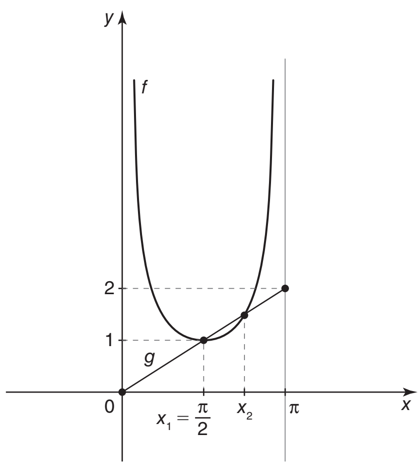
  $-2 + \text{cossec } 2x \leqslant -3$ ou $-2 + \text{cossec } 2x \geqslant -1$

  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -3 \text{ ou } y \geqslant -1\}$.

23 cossec $x \leqslant -1$ ou cossec $x \geqslant 1 \Rightarrow m^2 - 1 \leqslant -1$ ou $m^2 - 1 \geqslant 1$

Assim, obtemos: $m = 0$ ou $m \leqslant -\sqrt{2}$ ou $m \geqslant \sqrt{2}$

24 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{cossec } x$ e $g(x) = \frac{2x}{\pi}$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, temos:



Observamos que, no intervalo $[0, \pi]$, a igualdade $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para dois valores de x, representados na figura por x_1 e x_2; portanto, a equação $\text{cossec } x = \frac{2x}{\pi}$ possui exatamente duas raízes nesse intervalo.

25 a) $y = 1 + \sec x$

- A condição de existência é $\cos x \neq 0$, ou seja, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é
  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como $\sec x \leqslant -1$ ou $\sec x \geqslant 1$, temos:
  $1 + \sec x \leqslant 0$ ou $1 + \sec x \geqslant 2$.
  Assim, o conjunto imagem da função é
  $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 0 \text{ ou } y \geqslant 2\}$.

b) $y = 4\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

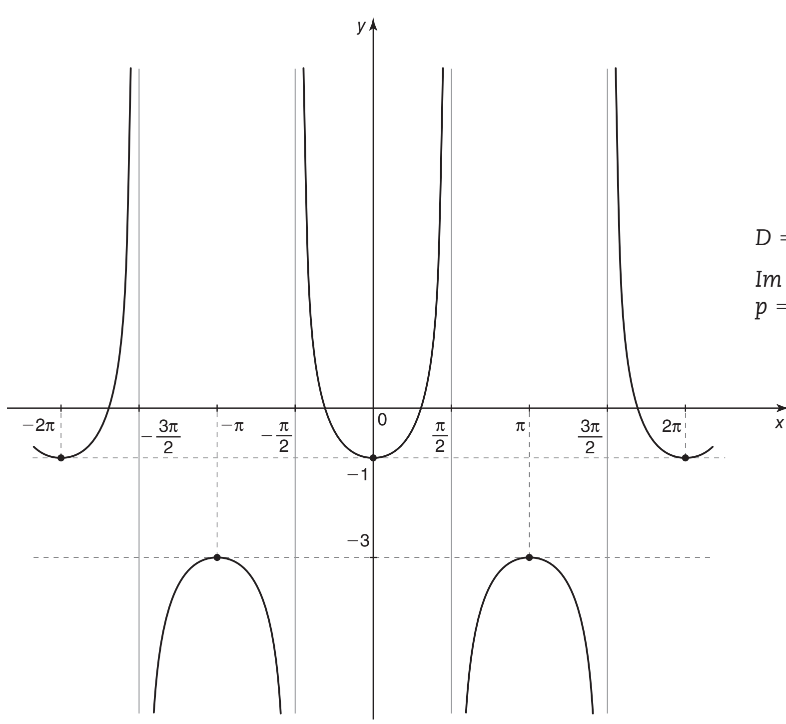
- A condição de existência é $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0$, ou seja, $\frac{\pi}{4} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} - k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Observando que essa última desigualdade também pode ser representada por $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos como domínio da função
  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como $\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leqslant -1$ ou $\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geqslant 1$, temos: $4\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leqslant -4$ ou $4\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geqslant 4$.
  Assim, o conjunto imagem da função é
  $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -4 \text{ ou } y \geqslant 4\}$.

c) $y = 3 + 2\sec 3x$

- A condição de existência é $\cos 3x \neq 0$, ou seja, $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é
  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como $\sec 3x \leqslant -1$ ou $\sec 3x \geqslant 1$, temos: $2\sec 3x \leqslant -2$ ou $2\sec 3x \geqslant 2$ e, portanto, $3 + 2\sec 3x \leqslant 1$ ou $3 + 2\sec 3x \geqslant 5$.
  Assim, o conjunto imagem da função é
  $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1 \text{ ou } y \geqslant 5\}$.

26 a) $y = -2 + \sec x$

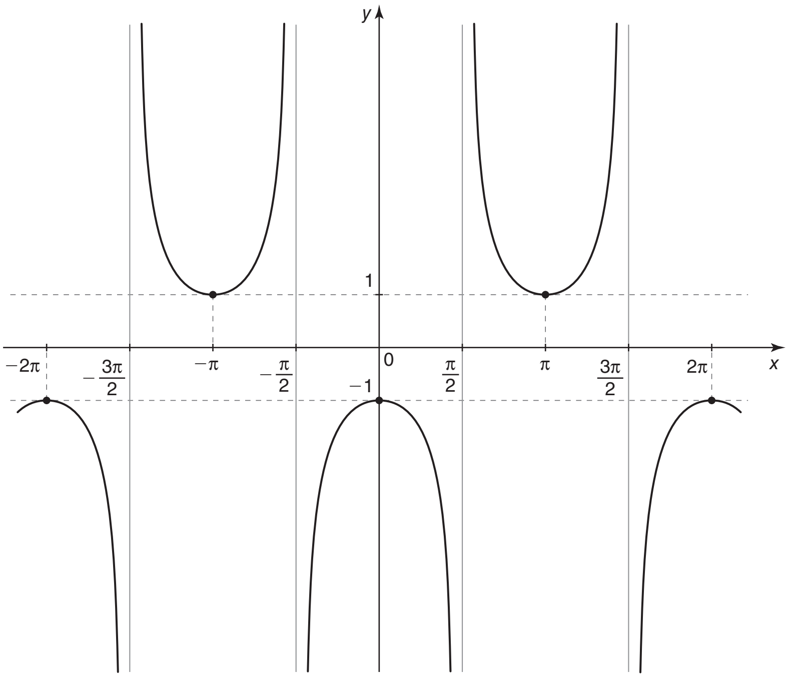
Esse gráfico é uma translação vertical do gráfico da função $y = \sec x$, de duas unidades para baixo, ou seja:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im =]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$
$p = 2\pi$

b) y = −sec *x*

Esse gráfico é simétrico ao gráfico da função y = sec *x* em relação ao eixo das abscissas, ou seja:



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

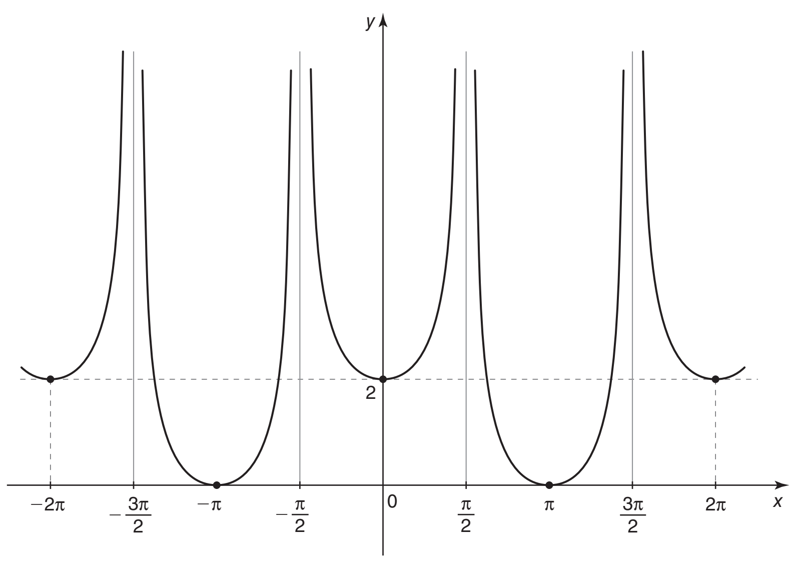
$Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$p = 2\pi$

c) y = |1 + sec *x*|

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = 1 + \sec x$.

Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função y = |1 + sec *x*|.

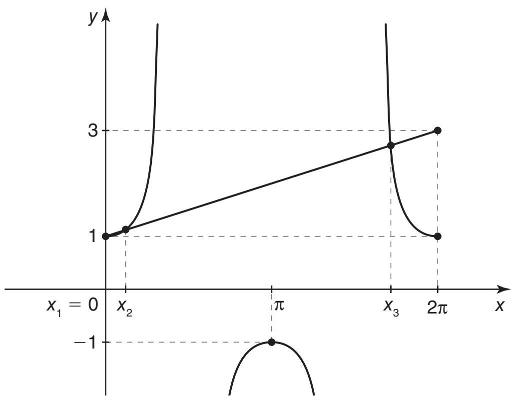


$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}_+$

$p = 2\pi$

27 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \sec x$ e $g(x) = \frac{2x}{\pi} + 1$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos:



Observamos que, no intervalo $[0, 2\pi]$, a igualdade $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para três valores de x, representados na figura por x_1, x_2 e x_3; portanto, a equação $\sec x = \frac{2x}{\pi} + 1$ possui exatamente três raízes nesse intervalo.

28 Sendo arcsen $\frac{3}{4} = \alpha$, temos sen $\alpha = \frac{3}{4}$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pela relação fundamental, temos:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\therefore \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{7}{16}$

$\therefore \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deduzimos que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Logo, $\text{sen}\left(2\,\text{arcsen}\,\frac{3}{4}\right) = \text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

29 Sendo arcsen $\frac{2}{7} = \alpha$, temos sen $\alpha = \frac{2}{7}$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Além disso, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos:

- sen $0 = 0$
- sen $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Logo, $\cos(\text{arcsen}\,0) +$

$+ \text{tg}\left(\text{arcsen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \text{sen}\left(\text{arcsen}\,\frac{2}{7}\right) =$

$= \cos 0 + \text{tg}\,\frac{\pi}{4} + \text{sen}\,\alpha = 1 + 1 + \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$.

30 Como $-1 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \text{arcsen}\left(\frac{3x}{2} + 5\right)$ é tal que:

$-1 \leqslant \frac{3x}{2} + 5 \leqslant 1$, ou seja, $-1 - 5 \leqslant \frac{3x}{2} \leqslant 1 - 5$

e, portanto, $-4 \leqslant x \leqslant -\frac{8}{3}$

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant -\frac{8}{3}\right\}$.

31 Sendo arcsen $\frac{1}{3} = \alpha$ e arcsen $\left(-\frac{2}{3}\right) = \beta$, temos:

sen $\alpha = \frac{1}{3}$, sen $\beta = -\frac{2}{3}$ e $\{\alpha, \beta\} \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pela relação fundamental, temos:

(i) $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\therefore \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$

$\therefore \cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deduzimos que

$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(ii) $\text{sen}^2\,\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\beta = 1$

$\therefore \cos^2\beta = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{5}{9}$

$\therefore \cos\beta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Como $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deduzimos que

$\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Logo, concluímos:

$\text{sen}\left[\text{arcsen}\,\frac{1}{3} + \text{arcsen}\left(-\frac{2}{3}\right)\right] =$

$= \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{9} =$

$= \frac{\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{9}$

32 Fazendo a substituição sen $x = t$, temos a equação:

$6t^2 - 7t + 1 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 49 - 24 = 25$

$\therefore t = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 6} \Rightarrow t = \frac{7 \pm 5}{12} \Rightarrow t = \frac{7 + 5}{12} =$

$= 1$ ou $t = \frac{7 - 5}{12} = \frac{1}{6}$

Voltando à variável original, temos:

(i) sen $x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

(ii) sen $x = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \text{arcsen}\,\frac{1}{6} + 2k\pi$ ou

$x = \pi - \text{arcsen}\,\frac{1}{6} + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right.$ ou

$x = \text{arcsen}\,\frac{1}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \text{arcsen}\,\frac{1}{6} + 2k\pi$,

$\left.\text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

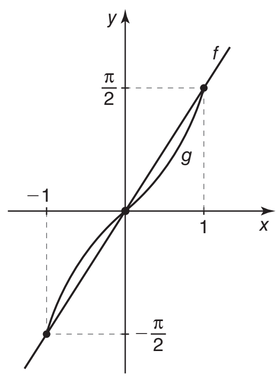
33 $\frac{\pi}{2} = \text{arcsen}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \text{sen}\,\frac{\pi}{2}$

$\therefore x - \frac{1}{2} = \mathbf{1} \Rightarrow x = \mathbf{1} - \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

34 O número de raízes da equação é o número de pontos comuns aos gráficos das funções $f(x) = \frac{\pi x}{2}$ e $g(x) = \text{arcsen } x$. Construindo esses gráficos, temos:



Como os gráficos têm 3 pontos comuns, concluímos que a equação $\frac{\pi x}{2} = \text{arcsen } x$ possui 3 raízes.

35 No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo,

$\text{arccos } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ e, portanto,

$\text{cotg}\left(2 \text{ arccos } \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{cotg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \text{cotg } \frac{\pi}{3} =$

$= \frac{1}{\text{tg } \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

36 Sendo $\text{arccos } \frac{5}{6} = \alpha$, temos $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ e $\alpha \in [0, \pi]$.

Logo, $\cos\left(2 \text{ arccos } \frac{5}{6}\right) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 =$

$= 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{25}{36} - 1 = \frac{7}{18}$.

37 No intervalo $[0, \pi]$, temos:

- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{arccos } \frac{5}{9} = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{9}$

Logo, $\text{sen (arccos 0)} + \text{cotg}\left(\text{arccos } \frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$

$+ \cos\left(\text{arccos } \frac{5}{9}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{2} + \text{cotg } \frac{\pi}{4} + \cos \alpha =$

$= 1 + 1 + \frac{5}{9} = \frac{23}{9}$

38 Como $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \text{arccos}\left(\frac{x}{4} + 2\right)$ é tal que:

$-1 \leq \frac{x}{4} + 2 \leq 1$, ou seja, $-3 \leq \frac{x}{4} \leq -1$ e, portanto,

$-12 \leq x \leq -4$

Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -12 \leq x \leq -4\}$.

39 Pela relação fundamental, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Assim, $5 \text{ sen}^2 x - 3 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x - 3 = 0$

$\therefore 5 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$

Fazendo a substituição $\cos x = t$, temos a equação:

$5t^2 + 3t - 2 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 9 + 40 = 49$

$\therefore t = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 5} \Rightarrow t = -1$ ou $t = \frac{2}{5}$

Voltando à variável original, temos:

(i) $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $\cos x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \text{arccos } \frac{2}{5} + 2k\pi$

ou $x = -\text{arccos } \frac{2}{5} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \text{arccos } \frac{2}{5} + \right.$

$\left. + 2k\pi \text{ ou } x = -\text{arccos } \frac{2}{5} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

40 a) $\frac{\pi}{4} = \text{arccos } x \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = x$

$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

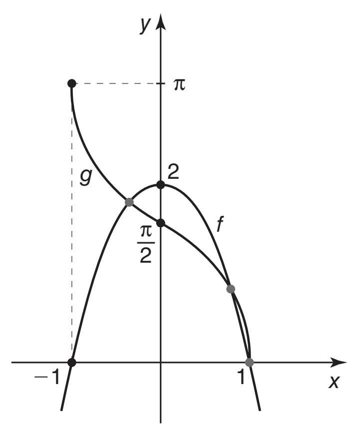
Logo, $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

b) $\frac{\pi}{3} = \text{arccos }(2x - 1) \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = 2x - 1$

$\therefore \frac{1}{2} = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

41 O número de raízes dessa equação é o número de pontos comuns aos gráficos das funções $f(x) = -2x^2 + 2$ e $g(x) = \text{arccos } x$.
Construindo esses gráficos no mesmo plano cartesiano, temos:



Como os gráficos têm exatamente três pontos comuns, concluímos que a equação $f(x) = g(x)$ possui três raízes.

42 Sendo $\text{arctg } 6 = \alpha$, temos: $\text{tg } \alpha = 6$ e

$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Logo, $\text{tg }(2 \text{ arctg } 6) = \text{tg }(2\alpha) = \frac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 \alpha} =$

$= \frac{2 \cdot 6}{1 - 6^2} = -\frac{12}{35}$.

43 Sendo $\text{arctg } 9 = \alpha$, temos: $\text{tg } \alpha = 9$ e

$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Além disso, no intervalo

$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:

- $\text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- $\text{tg } 0 = 0$

Logo, $\text{cossec}\left(\text{arctg } \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \sec(\text{arctg } 0) +$
$+ \text{tg}(\text{arctg } 9) = \text{cossec } \frac{\pi}{6} + \sec 0 + \text{tg } \alpha =$
$= 2 + 1 + 9 = 12$

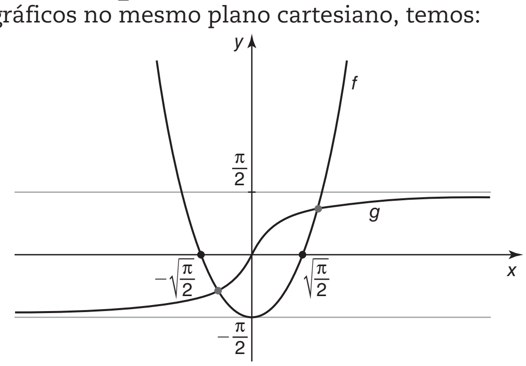
44 Temos:
$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg } 3x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -2\pi < 4 \text{ arctg } 3x < 2\pi$
Logo, a imagem de $y = 4 \text{ arctg } 3x$ é
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2\pi < y < 2\pi\}$.

45 Sendo $\text{arctg } \frac{3}{4} = \alpha$, temos $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$ e
$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Como $\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$, temos:
$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec^2 \alpha = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{4}{5}$
Como $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, deduzimos que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.
Além disso, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos: $\text{tg } 0 = 0$
e, portanto, $\text{arctg } 0 = 0$.
Logo, $\cos\left(\text{arctg } \frac{3}{4} + \text{arctg } 0\right) = \cos(\alpha + 0) =$
$= \cos \alpha = \frac{4}{5}$.

46 Fazendo a substituição $\text{tg } x = t$, temos a equação:
$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1$ ou $t = 2$
Voltando à variável original, temos:
(i) $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
(ii) $\text{tg } x = 2 \Rightarrow x = \text{arctg } 2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \text{arctg } 2 + k\pi,\right.$
$\left.\text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

47 a) $\frac{\pi}{4} = \text{arctg } x \Rightarrow \text{tg } \frac{\pi}{4} = x$
$\therefore x = 1$
Logo, $S = \{1\}$.
b) $\frac{2\pi}{3} = \text{arctg } 2x \Rightarrow \text{tg } \frac{2\pi}{3} = 2x$
$\therefore -\sqrt{3} = 2x \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
Logo, $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

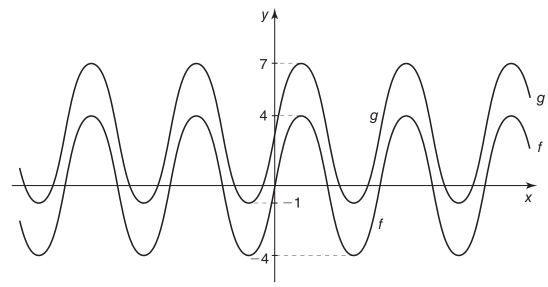
48 O número de raízes dessa equação é o número de pontos comuns aos gráficos das funções $f(x) = x^2 - \frac{\pi}{2}$ e $g(x) = \text{arctg } x$. Construindo esses gráficos no mesmo plano cartesiano, temos:



Como os gráficos têm exatamente dois pontos comuns, concluímos que a equação $f(x) = g(x)$ possui duas raízes.

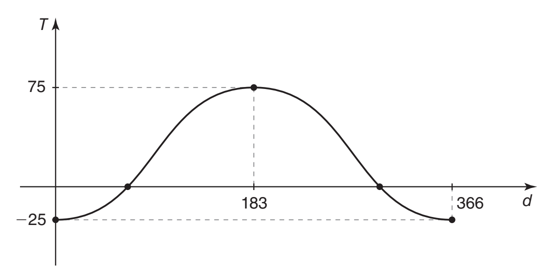
Exercícios contextualizados

49 Construindo os gráficos de f e g, temos:



Logo, a largura h, em metro, da calçada é dada por:
$h = 7 - (-4) = 11$

50 a) O período p da função é dado por:
$p = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{366}} = 366$
Os valores máximo e mínimo de T são 75 e −25.
Para $d = 0$, temos $T = -25$; para $d = 183$, temos $T = 75$.
Assim, um esboço do gráfico, para $0 \leqslant d \leqslant 366$, é:



b) O dia mais quente será o 183º dia desse ano bissexto, que corresponde ao dia 1º de julho.
c) Para $T = 0$, temos:
$50\left[\text{sen } \frac{2\pi}{366}(d - 91{,}5)\right] + 25 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen } \frac{2\pi}{366}(d - 91{,}5) = -\frac{1}{2}$
$\therefore \frac{2\pi}{366}(d - 91{,}5) = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (I)
ou
$\frac{2\pi}{366}(d - 91{,}5) = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (II)

- Da equação (I), deduzimos:
$d = 305 + 366k$, com $k \in \mathbb{Z}$
Portanto, para $k = 0$, obtemos $d = 305$.
- Da equação (II), deduzimos:
$d = 427 + 366k$, com $k \in \mathbb{Z}$
Portanto, para $k = -1$, obtemos $d = 61$.

Concluímos, então, que a temperatura será 0 °F no 61º dia e no 305º dia do ano, que correspondem, respectivamente, a 1º de março e 31 de outubro.

51 I. F, pois para $t = 0$ temos $x(0) = 4\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

II. F, pois o valor máximo x_M da função ocorre para $\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, com o qual obtemos $x_M = 4$.

III. V, pois o valor mínimo x_m da função ocorre para $\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -1$, com o qual obtemos $x_m = -4$.

IV. V, pois $4\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \Rightarrow \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\therefore\ 2t + \frac{\pi}{2} = n \cdot 2\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ t = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$

Alternativa **e**.

52 **a)** Para $S(t) = 2$ e $t = 1$, temos:

$2 = \lambda - \cos 0 \Rightarrow \lambda = 3$

Logo, a constante λ é 3.

b) Para $\lambda = 3$ e $S(t) = 3$, temos:

$$3 = 3 - \cos\frac{(t-1)\pi}{6} \Rightarrow \cos\frac{(t-1)\pi}{6} = 0$$

$$\therefore\ \frac{(t-1)\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore\ t = 4 + 6k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leqslant t \leqslant 11$, temos:

$k = 0 \Rightarrow t = 4$

$k = 1 \Rightarrow t = 10$

Assim, em cada um dos meses de maio e novembro houve 3 mil doações de sangue.

53 O período p da função é o tempo, em segundo, para a realização de uma oscilação completa.

Esse período é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}}\ \text{s} = \frac{3}{4}\ \text{s}$$

Assim, o número n de oscilações completas realizadas em 6 s é dado por:

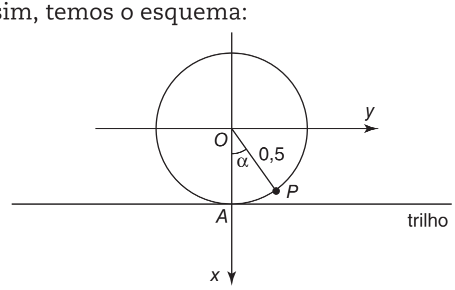
$$n = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8$$

Logo, o atleta realiza 8 oscilações completas com seu braço em 6 s.

54 Sejam:

- uma circunferência tangente ao trilho e concêntrica com a roda do trem;
- um sistema cartesiano ortogonal cuja origem O coincide com o centro da circunferência, o eixo Ox, orientado para baixo e passando pelo ponto de tangência, e o eixo Oy interceptando a circunferência e orientado no sentido oposto ao do movimento do trem;
- $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e α a medida do ângulo AÔP, sendo que P gira no sentido anti-horário.

Assim, temos o esquema:



Observamos que:

(I) Para $\cos\alpha \geqslant 0$, a altura h, do ponto P em relação ao trilho, é dada por:

$$h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha$$

(II) Para $\cos\alpha < 0$, a altura $h(t)$, do ponto P em relação ao trilho, é dada por:

$$h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot |\cos\alpha|$$

Mas, como $\cos\alpha < 0 \Rightarrow |\cos\alpha| = -\cos\alpha$, temos:

$$h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha$$

Por (I) e (II), deduzimos que para qualquer valor de α temos $h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha$.

Para concluir, devemos obter o valor de α em função de t. Basta resolver a regra de três:

Medida do ângulo (radiano)		Tempo (segundo)
2π	—	0,36
α	—	t

$$\therefore\ \alpha = \frac{50\pi t}{9}$$

Concluímos, então, que:

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{50\pi t}{9}$$

Alternativa **a**.

55 O valor mínimo de N é atingido quando $\text{sen}\,(2\pi x) = -1$.

Temos:

$\text{sen}\,(2\pi x) = -1 \Rightarrow 2\pi x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ x = \frac{3}{4} + k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo:

- para $k = 0$, obtemos $x = \frac{3}{4}$, que corresponde ao início do 4º trimestre de 2009;
- para k assumindo os valores inteiros positivos, teremos o valor de x indicando o início do 4º trimestre de cada ano.

Alternativa **e**.

56 **a)** Resolvendo em $\mathbb{R}$ a equação $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$, obtemos:

$\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4} = k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = -\frac{15}{2} + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Sob a condição $t > 0$, os valores de k que nos interessam são inteiros positivos, isto é:

$t = -\frac{15}{2} + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}_+^*$

b) As marés altas ocorrem quando $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$.

Sob a condição $t > 0$, essa equação tem como soluções:

$t = -\frac{15}{2} + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}_+^*$

Para $k = 1$, obtemos $t = \frac{9}{2}\ \text{h} = 4{,}5\ \text{h}$.

Assim, 4,5 h após o início das observações, ocorreu a primeira maré alta.

57 a) $1{,}3 = 2{,}1 + 1{,}6\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{\pi x}{6} = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

ou

$\frac{\pi x}{6} = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo:

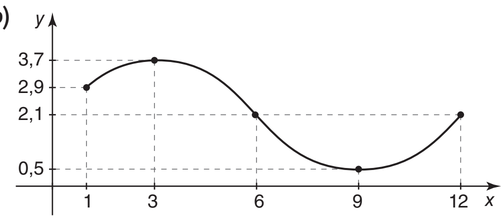
$x = 7 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

ou

$x = 11 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, obtemos $x = 7$ ou $x = 11$.

Logo, a cidade recebe 1.300 turistas em julho e novembro.

b) 

A diferença entre o maior e o menor número de turistas da cidade nesse período é:

3.700 − 500 = 3.200

58 a) A temperatura T atingirá seu valor mínimo quando $\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right] = -1$ e, portanto:

$\frac{2\pi}{365}(t - 101) = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{1.499}{4} + 365k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Para $k = -1$, obtemos $t = 9{,}75$.

Logo, a menor temperatura ocorrerá em 10 de janeiro.

b) $\frac{5}{9}(T - 32) < 0 \Rightarrow T < 32$, ou seja:

$50\ \text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right] + 7 < 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right] < \frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < \frac{2\pi}{365}(t - 101) < \frac{13\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3.037}{12} + 365k < t < \frac{5.957}{12} + 365k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, temos $\frac{3.037}{12} < t < \frac{5.957}{12}$.

Logo, o número d de dias em que se esperam temperaturas abaixo de 0 °C é dado por:

$d = \frac{5.957}{12} - \frac{3.037}{12} \approx 243{,}33$

ou seja, 243 dias por ano.

59 a) Para $P = 750$, temos:

$800 - 100\ \text{sen}\frac{(t + 3)\pi}{6} = 750 \Rightarrow \text{sen}\frac{(t + 3)\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{(t + 3)\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou

$\frac{(t + 3)\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ t = -2 + 12k$ ou $t = 2 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leqslant t \leqslant 11$, obtemos: $t = 10$ ou $t = 2$

Logo, a população atinge 750 animais em março e novembro.

b) O valor de P é mínimo quando $\text{sen}\frac{(t + 3)\pi}{6} = 1$.

Assim, temos:

$\frac{(t + 3)\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, obtemos $t = 0$.

Logo, a população é mínima em janeiro.

60 a) A distância do periélio ao Sol é, aproximadamente, o mínimo valor da função $d = 149{,}6 - 2{,}5\cos x$, em que d é expresso em milhões de quilômetros.

Esse mínimo d_m é obtido para $\cos x = 1$ e, portanto:

$d_m = 149{,}6 - 2{,}5 \cdot 1 = 147{,}1$

Logo, a menor distância entre a Terra e o Sol é 147,1 milhões de quilômetros.

b) Para $t = T \cdot \left(\frac{1}{366} + \frac{x}{2\pi}\right)$, temos:

$\frac{2\pi \cdot T \cdot \left(\frac{1}{366} + \frac{x}{2\pi}\right)}{T} = x - \frac{\pi}{183}\,\text{sen}\,x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{183} + x = x - \frac{\pi}{183}\,\text{sen}\,x$

$\therefore\ \text{sen}\,x = -1$

Para $\text{sen}\,x = -1$, temos $\cos x = 0$ e, portanto, a distância d pedida é dada por:

$d = 149{,}6 - 2{,}5 \cdot 0 = 149{,}6$

Logo, a distância entre a Terra e o Sol, sob a condição enunciada, é 149,6 milhões de quilômetros.

61 a) $h(0) = 11{,}5 + 10\,\text{sen}\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = 11{,}5 - 10\,\text{sen}\,\frac{13\pi}{6}$

$\therefore\ h(0) = 11{,}5 - 10\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = 11{,}5 - 10 \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore\ h(0) = 6{,}5$

Logo, o amigo estava à altura de 6,5 m.

b) $-1 \leqslant \text{sen}\left[\frac{\pi(t - 26)}{12}\right] \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -10 \leqslant 10\,\text{sen}\left[\frac{\pi(t - 26)}{12}\right] \leqslant 10$

$\therefore\ 1{,}5 \leqslant 11{,}5 + 10\,\text{sen}\left[\frac{\pi(t - 26)}{12}\right] \leqslant 21{,}5$

Logo, as alturas máxima e mínima que o amigo alcança são 21,5 m e 1,5 m, respectivamente.

O tempo gasto em uma volta completa é o período p da função, dado por:

$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$

Logo, a roda leva 24 s para dar uma volta completa.

62 a) F, pois os gráficos não se interceptam para $t = 48$.

b) V, pois o período p de cada função é calculado por $p = \dfrac{2\pi}{\dfrac{2\pi}{24}}$ e, portanto, $p = 24$ meses.

c) V, pois a maior população P_M de predadores é obtida quando $\text{sen}\,\dfrac{2\pi t}{24} = 1$ e, portanto:

$P_M = 10.000 + 3.000 \cdot 1 = 13.000$

d) V, pois as menores populações de predadores e presas são 7.000 e 10.000 indivíduos, respectivamente, e, portanto, a média aritmética é obtida por: $\dfrac{7.000 + 10.000}{2} = 8.500$.

e) V, pois $P(0) = 10.000 + 3.000 \cdot \text{sen}\,0 = 10.000$ e $P(0) = 15.000 + 5.000 \cdot \cos 0 = 20.000$

Alternativa **a**.

63 $A \cdot \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}t\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}t\right) = 0$

$\therefore \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}_+$

$\therefore t = (2k + 1) \cdot \dfrac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$, com $k \in \mathbb{Z}_+$

Alternativa **a**.

64 **1)** V, pois o valor máximo $N_{Máx}$ ocorre quando $\cos\dfrac{t\pi}{6} = 1$ e, portanto:

$N_{Máx} = 120 + 80 \cdot 1 = 200$

2) F, pois $N(9) = 120$ e o valor mínimo $N_{Mín}$ ocorre quando $\cos\dfrac{t\pi}{6} = -1$; portanto:

$N_{Mín} = 120 + 80 \cdot (-1) = 40$

3) V, pois $N(8) = 120 + 80\cos\dfrac{8\pi}{6} = 80$

Alternativa **c**.

65 **a)** No fim do 1º quarto do mês de abril, a abscissa é dada por: $x = 3 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{4}$

Logo:

$f\left(\dfrac{13}{4}\right) = 5 + \text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3} \cdot \dfrac{13}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) =$

$= 5 + \text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3}$

$\therefore f\left(\dfrac{13}{4}\right) = 5 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{10 - \sqrt{3}}{2}$

b) Como $\text{sen}\left(\dfrac{2\pi x}{3} - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi x}{3}\right) =$

$= -\cos\dfrac{2\pi x}{3} = -\cos\left(-\dfrac{2\pi x}{3}\right)$, a função g, com $g(x) \equiv f(x)$, pode ser representada por:

$g(x) = 5 - \cos\dfrac{2\pi x}{3}$ ou $g(x) = 5 - \cos\left(-\dfrac{2\pi x}{3}\right)$

Logo:

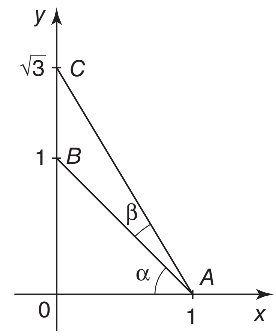
$a = 5$, $b = -1$ e $c = \dfrac{2\pi}{3}$

ou

$a = 5$, $b = -1$ e $c = -\dfrac{2\pi}{3}$

Exercícios de revisão cumulativa

1 Sendo O a origem do sistema de eixos, e α e β as medidas dos triângulos $B\hat{A}O$ e $B\hat{A}C$, respectivamente, temos:



$$\begin{cases} \text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{1} \\ \text{tg}\,(\alpha + \beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 45° \\ \alpha + \beta = 60° \end{cases}$$

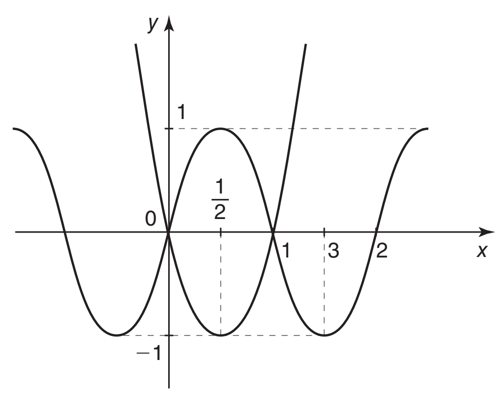
$\therefore \beta = 15°$

Logo, $m(B\hat{A}C) = 15°$.

Alternativa **e**.

2 O período p da função g é dado por: $p = \dfrac{2\pi}{|\pi|} = 2$.

Assim:



Como 0 e 1 são raízes da função f e o ponto $\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$ pertence ao gráfico de f, temos:

$$\begin{cases} f(x) = a(x - 0)(x - 1) \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 4$$

Logo, $f(x) = 4x(x - 1)$ e, portanto:

$f(3) = 4 \cdot 3 \cdot (3 - 1) = 24$

Alternativa **b**.

3 $1 - \cos^2 x - 2\cos^4 x = 0 \Rightarrow 2\cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\cos^2 x = y$, obtemos:

$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1$ ou $y = \dfrac{1}{2}$

Retornamos à variável original:

$\cos^2 x = -1$ (não convém)

ou

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, no intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

ou

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Concluímos, então, que a soma S das raízes é:

$S = \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = 4\pi$

Alternativa **c**.

4 **a)** $\text{sen } x = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \text{ sen } x$

$\cos x = \frac{\frac{b}{2}}{10} \Rightarrow b = 20 \cos x$

$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot b \cdot \text{sen } x = 5b \text{ sen } x = 100 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

b) $A = 50 \text{ sen } x \Rightarrow 5b \text{ sen } x = 50 \text{ sen } x$

$\therefore b = 10$

Assim, o triângulo apresentado possui os três lados com a mesma medida e, portanto, é equilátero. Logo, $x = \frac{\pi}{3}$ rad.

Análise da resolução

Pela fórmula de arco duplo ($\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$) e pela relação fundamental ($\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$), temos:

$\cos 2x = 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2 \text{ sen}^2 x$

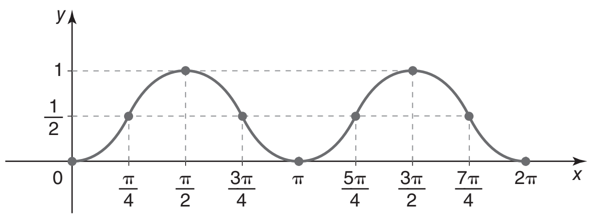
$\therefore \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$

Assim, o gráfico da função $y = \text{sen}^2 x$ é o mesmo da função $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$.

Atribuindo os valores $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π ao arco $2x$ da função $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$, obtemos a tabela:

$2x$	x	$f(x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$
π	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$
2π	π	0

Assim, um esboço do gráfico para $0 \leq x \leq 2\pi$ é:



RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

	1998	2003	2008
Brasil	65,2%	89%	91,5%
Japão	73%	82%	87,3%
Argentina	48%	80%	90,8%
Estados Unidos	67%	50%	54,2%

Exercícios propostos

1 a)

	Filé de frango (100 g)	Sardinha (100 g)	Contrafilé (100 g)
Energia (kcal)	159	164	278
Proteína (g)	32	32,2	32,4

ou

	Energia (kcal)	Proteína (g)
Filé de frango (100 g)	159	32
Sardinha (100 g)	164	32,2
Contrafilé (100 g)	278	32,4

b) $\begin{pmatrix} 159 & 164 & 278 \\ 32 & 32{,}2 & 32{,}4 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 159 & 32 \\ 164 & 32{,}2 \\ 278 & 32{,}4 \end{pmatrix}$

c) 3×2 ou 2×3

- Espera-se que os alunos percebam que os dados podem ser organizados em matrizes do tipo 2×3 ou 3×2 e que essas matrizes são transpostas. Também devem perceber que a tabela facilita a visualização dos dados.

2 a) O faturamento da loja 3 no dia 2 corresponde ao elemento a_{32} da matriz. Logo, o faturamento foi 2.800 reais ($a_{32} = 2.800$).

b) O faturamento da rede no dia 3 é dado por: $a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43} + a_{53} =$
$= 1.800 + 1.740 + 2.700 + 2.300 + 2.040 = 10.580$
Logo, o faturamento foi 10.580 reais.

c) O faturamento da loja 1 nos quatro dias é dado por: $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} =$
$= 1.950 + 2.030 + 1.800 + 1.950 = 7.730.$
Logo, o faturamento da loja 1 nos 4 dias foi 7.730 reais.

3 a) $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ $\quad a_{ij} = i + 2j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot 1 & 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 + 2 \cdot 1 & 2 + 2 \cdot 2 \\ 3 + 2 \cdot 1 & 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

b) $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$ $\quad b_{ij} = i^2 + 3j$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1^2 + 3 \cdot 1 & 1^2 + 3 \cdot 2 & 1^2 + 3 \cdot 3 \\ 2^2 + 3 \cdot 1 & 2^2 + 3 \cdot 2 & 2^2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

c) $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$ $\quad c_{ij} = 2i$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

d) $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ $\quad a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ i + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 + 2 & 1 + 3 \\ 2 + 1 & 1 & 2 + 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

e) $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ $\quad a_{ij} = (-1)^{i + j}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & (-1)^3 \\ (-1)^3 & (-1)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4 $\begin{pmatrix} x^2 - 15 & 0 \\ 0 & x - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 15 = 1 \\ x - 3 = 1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x = \pm 4 \\ x = 4 \end{cases}$

Logo: $x = 4$

5 Espera-se que os alunos respondam que a igualdade não é possível, pois as matrizes não são do mesmo tipo.

6 a) $A^t = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $(A^t)^t = A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7 $\begin{pmatrix} 3x + y - 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5x - y - 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ 5x - y - 1 = 0 \end{cases}$

$\therefore x = 1$ e $y = 4$

8 $A^t = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2 & 5 \\ x + 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} x^2 - 2 = 2 \\ x + 6 = 4 \end{cases} \Rightarrow x = -2$

Alternativa **d**.

9 a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

b) $2A - B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 16 \\ 2 & -8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 25 \\ -4 & -10 & -7 \end{pmatrix}$

c) $3A - \frac{1}{2} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 24 \\ 3 & -12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 26 \\ 3 & -15 & 5 \end{pmatrix}$

10 Temos:

$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 12 & 4 & -2 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 12 & 4 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -5 & 4 & -9 \\ -12 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

11 Adicionando, membro a membro, as duas igualdades, obtemos:

$2X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Substituindo X por $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ na 1ª igualdade, concluímos:

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

Logo, $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

12 a) A produção de arroz, em tonelada, da região A no ano 3 é representada pelo elemento $a_{13} = 4$. Logo, essa produção foi de 4 milhões de toneladas.

b) A produção de arroz, em tonelada, da região B no ano 3 é representada pelo elemento $b_{13} = 11$. Logo, essa produção foi de 11 milhões de toneladas.

c) A produção de arroz, em tonelada, das duas regiões juntas, no ano 3, é a soma: $a_{13} + b_{13} = 4 + 11 = 15$

Logo, essa produção foi de 15 milhões de toneladas.

d) A produção de soja, em tonelada, das duas regiões juntas, no ano 3, é a soma: $a_{23} + b_{23} = 6 + 18 = 24$

Logo, essa produção foi de 24 milhões de toneladas.

e) $C = A + B = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 15 \\ 19 & 25 & 24 \end{pmatrix}$

f) $D = A - B = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -7 \\ -11 & -15 & -12 \end{pmatrix}$

13 a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$ não existe o produto

c) $B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

d) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

e) $B^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ não existe o produto

14 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 26 & 26 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & 32 & 16 \\ 2 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15 a) F; observe os itens **a** e **b** do exercício 14.

b) V; observe os itens **c** e **d** do exercício 14.

c) F; observe o item **e** do exercício 14.

16 Multiplicando as matrizes, temos:

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Como $A \cdot B = B \cdot A$, as matrizes comutam na multiplicação.

17 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 + a \\ 0 & -1 + a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} -2 + a = 0 \\ -1 + a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2$

Alternativa **b**.

18 $c_{45} = a_{41} \cdot b_{15} + a_{42} \cdot b_{25} + a_{43} \cdot b_{35} + a_{44} \cdot b_{45} + a_{45} \cdot b_{55} + a_{46} \cdot b_{65} + a_{47} \cdot b_{75} + a_{48} \cdot b_{85} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 7 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \cdot 8 = 2 + 8 + 18 + 32 + 50 + 72 + 98 + 128 = 408$

19 $A_{2 \times 2} \cdot X_{p \times q} = B_{2 \times 1}$

$p = 2$ $\quad q = 1$

Sendo $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, temos:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2b \\ -3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} a + 2b = 6 \\ -3b = -15 \end{cases} \Rightarrow a = -4$ e $b = 5$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

20 a) $\begin{cases} x + 2y + 5z = 12 \\ -2x + 4y = -11 \\ 3x - 3y + z = 9 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

21 a) Supondo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de A, devemos ter:

$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 6c & 3b + 6d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 3a + 6c = 1 \\ c = 0 \\ 3b + 6d = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -2, c = 0 \text{ e } d = 1$

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a inversa de A.

b) Supondo que $B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de B, devemos ter:

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 5c & 3b + 5d \\ c + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 3a + 5c = 1 \\ a + 2c = 0 \\ 3b + 5d = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -5, c = -1, d = 3$

Logo, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de B.

c) Supondo que $C^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de C, devemos ter:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} a + c = 1 \\ a + c = 0 \\ b + d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$ equações incompatíveis (1ª e 2ª); equações incompatíveis (3ª e 4ª)

Logo, não existe matriz inversa de C.

d) Supondo que $D^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ seja a inversa de D, temos:

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore d = \frac{1}{2}, e = 0, f = 0, g = 0, h = 1, i = 0, a = 0,$ $b = 0$ e $c = 1$

Logo, a inversa D é: $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a) $A = (a_{ij})_{3 \times 3}, a_{ij} = \begin{cases} 3, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B = (b_{ij})_{2 \times 4}, b_{ij} = \begin{cases} 3, \text{ se } i \geqslant j \\ 0, \text{ se } i < j \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $C = (c_{ij})_{1 \times 5}, c_{ij} = 3j \Rightarrow$

$\Rightarrow C = [c_{11} \ \ c_{12} \ \ c_{13} \ \ c_{14} \ \ c_{15}] =$

$= [3 \cdot 1 \ \ 3 \cdot 2 \ \ 3 \cdot 3 \ \ 3 \cdot 4 \ \ 3 \cdot 5] =$

$= [3 \ \ 6 \ \ 9 \ \ 12 \ \ 15]$

d) $D = (d_{ij})_{4 \times 1}, d_{ij} = i + \text{sen}\,\frac{\pi j}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \\ 2 + \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \\ 3 + \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \\ 4 + \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

e) $E = (e_{ij})_{2 \times 4}, e_{ij} = 2j + \log_2 i \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + \log_2 1 & 2 \cdot 2 + \log_2 1 & 2 \cdot 3 + \log_2 1 & 2 \cdot 4 + \log_2 1 \\ 2 \cdot 1 + \log_2 2 & 2 \cdot 2 + \log_2 2 & 2 \cdot 3 + \log_2 2 & 2 \cdot 4 + \log_2 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

2 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} =$

$= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + n + n =$

$= 1 + 2 + \dots + n + 1 + 2 + \dots + n =$

$= \frac{n \cdot (1 + n)}{2} \cdot 2 =$

$= n^2 + n$

Alternativa **d**.

3 $O_{m \times n}$ matriz nula

a) $O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $O_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $O_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4 Sendo $A^t = (b_{ij})_{n \times n}$ e $A = (a_{ij})_{n \times n}$, temos:

I. Por definição de igualdade de matrizes:
$A^t = A \Rightarrow b_{ij} = a_{ij}$

II. Por definição de matriz transposta:
$b_{ij} = a_{ji}$

Assim, concluímos, por (I) e (II), que:
$a_{ij} = a_{ji}$

Alternativa **d**.

5 $\begin{cases} |x| - 8 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = 8 & \text{(I)} \\ x + 2y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I), obtemos $x = 8$ ou $x = -8$.

- Substituindo x por 8 em (II), temos: $y = -4$
- Substituindo x por -8 em (II), temos: $y = 4$

Assim, concluímos que há duas respostas possíveis: ($x = 8$ e $y = -4$) ou ($x = -8$ e $y = 4$).

6 $\begin{bmatrix} x^2 - 7x + 13 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 13 = 1 & \text{(I)} \\ x^2 - 3x - 4 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

- De (I), temos: $x = 4$ ou $x = 3$
- De (II), temos: $x = 4$ ou $x = -1$

Assim, o valor de x que satisfaz (I) e (II) simultaneamente é 4.
Logo, para $x = 4$, A é a matriz identidade.

7 a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -9 \\ 9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A + B - C^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

d) $2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

e) $3A + 2C^t = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 12 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 10 & 12 & 10 \end{pmatrix}$

f) $A - 2B + 4C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 \\ -10 & 0 & -4 \end{pmatrix} +$

$+ \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -4 & 12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 1 & -11 \\ 10 & 14 & 24 \end{pmatrix}$

g) $A + (-A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

h) $2 \cdot 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 12 & 18 \\ -15 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 36 \\ -30 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

8 $Y - \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore Y = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 7 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

9 Adicionando as igualdades, membro a membro, temos:

$3X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Substituindo essa matriz X na segunda equação, concluímos:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = Y$

$\therefore Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

10 $k \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 2k & 4k \\ 0 & 0 & 3k \end{pmatrix}$ é a matriz representante do triângulo $A'B'C'$, cuja base mede $2k$ e a altura, $3k$. Logo, sua área é dada por $\frac{2k \cdot 3k}{2} = 3k^2$.

Alternativa **d**.

11 Temos: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, logo:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Este produto não existe, pois o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

12 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ x + z \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 2y \\ -y + z = x + z \end{cases}$

Logo, $y = -x$ e $z = -x$, com o que concluímos:

$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = -1$

Alternativa **b**.

13 $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; logo:

$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 29 & 17 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}$

Como $B \cdot B^t \neq I$, concluímos que a matriz B não é ortogonal.

14 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 16 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}$

Logo, $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}$

15 Sendo $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2a + 3b \\ c & 2c + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} a = 2 \\ 2a + 3b = 14 \\ c = 3 \\ 2c + 3d = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = \dfrac{10}{3},\ c = 3 \text{ e } d = 1$

Logo, $X = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{10}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

16 Como as matrizes comutam na multiplicação, temos:

$\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -x^2 + 4x & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$

Logo, $x = 0$ ou $x = 4$.

17 a) $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

d) $A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A^{50} = (A^2)^{25} = (I_2)^{25} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A^{73} = A^{72} \cdot A = (A^2)^{36} \cdot A = (I_2)^{36} \cdot A = I_2 \cdot A =$

$= A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

18 a) $M^2 = M \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $M^{73} = M^{72} \cdot M = (M^2)^{36} \cdot M = M^{36} \cdot M =$

$= (M^2)^{18} \cdot M = M^{18} \cdot M = (M^2)^9 \cdot M = M^9 \cdot M =$

$= M^8 \cdot M \cdot M = (M^2)^4 \cdot M^2 = M^4 \cdot M =$

$= (M^2)^2 \cdot M = M^2 \cdot M = M \cdot M = M = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

19 a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{50} = (A^2)^{25} = (I_2)^{25} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^{79} = A^{78} \cdot A = (A^2)^{39} \cdot A = (I_2)^{39} \cdot A = I_2 \cdot A =$

$= A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

20 $A^2 = A \Rightarrow \begin{bmatrix} x + 1 & 0 \\ 0 & y - 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x + 1 & 0 \\ 0 & y - 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} x + 1 & 0 \\ 0 & y - 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} (x + 1)^2 & 0 \\ 0 & (y - 2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 1 & 0 \\ 0 & y - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 = (x + 1) \\ (y - 2)^2 = y - 2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x(x + 1) = 0 & \text{(I)} \\ y^2 - 5y + 6 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

- De (I), obtemos: $x = 0$ ou $x = -1$
- De (II), obtemos: $y = 3$ ou $y = 2$

Logo, os possíveis valores são: $x = 0$ ou $x = -1$ e $y = 2$ ou $y = 3$

21 $A^2 = 2A \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 1 & a + b \\ a + b & b^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 2 & 2b \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} a^2 + 1 = 2a \\ a + b = 2 \\ b^2 + 1 = 2b \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 1$

Assim, $a - b = 0$.

Alternativa **c**.

22 Para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) F, pois $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) V, pois $A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) V, pois $B^6 = B^2 \cdot B^2 \cdot B^2 =$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) F, pois $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(A \cdot B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$(AB)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(AB)^6 = (AB)^2 \cdot (AB)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

portanto, $(AB)^{12} = [(AB)^6]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) F, pois $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) =$

$= A^2 + AB + BA + B^2$ e $AB \neq BA$

23 Substituindo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ na segunda equação por $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 26 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Alternativa **d**.

24 $(A \cdot B)^t \cdot (C \cdot D)^t = B^t \cdot A^t \cdot D^t \cdot C^t = B^t \cdot (DA)^t \cdot C^t =$
$= B^t \cdot (I_2)^t \cdot C^t = B^t \cdot I_2 \cdot C^t = B^t \cdot C^t = (C \cdot B)^t =$
$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

Alternativa **b**.

25 **a)** Supondo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de A, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 8a + c & 8b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 4a = 1 \\ 8a + c = 0 \\ 4b = 0 \\ 8b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4},\ b = 0,\ c = -2,\ d = 1$$

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de A.

b) Supondo que $B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de B, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6a + 12c & 6b + 12d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 6a + 12c = 1 \\ 6b + 12d = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{6},\ b = -2,\ c = 0,\ d = 1$$

Logo, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de B.

c) Supondo que $C^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de C, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + 6c & 2b + 6d \\ a + 3c & b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 2a + 6c = 1 \\ a + 3c = 0 \\ 2b + 6d = 0 \\ b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3c = \frac{1}{2} \\ a + 3c = 0 \\ b + 3d = 0 \\ b + 3d = 1 \end{cases} \begin{matrix} \text{equações incompatíveis} \\ \\ \text{equações incompatíveis} \end{matrix}$$

Logo, não existe a matriz inversa de C.

d) Supondo que $D^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ seja a inversa de D, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de D.

e) Supondo que $E^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ seja a inversa de E, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore g = 1,\ h = 0,\ i = 0,\ d = 0,\ e = 1,\ f = 0,\ a = 0,\ b = 0,\ c = 1$

Logo, $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de E.

f) Supondo que $F^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ seja a inversa de F, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} g & h & i \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore g = 1,\ h = 0,\ i = 0,\ 2a = 0,\ 2b = 1,\ 2c = 0,\ d = 0,\ e = 0,\ f = 1$

Logo, $F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de F.

26 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; portanto, sendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a - c & b - d \\ a + 4c & b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a - c = 1 \\ a + 4c = 0 \\ b - d = 0 \\ b + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4}{5},\ b = \frac{1}{5},\ c = -\frac{1}{5} \text{ e } d = \frac{1}{5}$$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ é a inversa de A e, portanto:

$$(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Alternativa **d**.

27 $M^2 = M - I \Rightarrow M - M^2 = I$
$\therefore M(I - M) = I \Rightarrow I - M = M^{-1}$
$\therefore M = I - M^{-1}$
Alternativa **a**.

28 A matriz M estará determinada e será a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se existir essa inversa.

Supondo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ seja a inversa de A, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $d = 1$, $e = 0$, $f = 0$, $g = 0$, $h = 1$, $i = 0$, $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$

Logo, $M = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercícios contextualizados

29 a) $A = \begin{pmatrix} 1.100 & a_{12} & a_{13} \\ 2.400 & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a_{12} = 1.100 + 110 = 1.210 \\ a_{13} = 1.210 + 121 = 1.331 \\ a_{22} = 2.400 + 480 = 2.880 \\ a_{23} = 2.880 + 576 = 3.456 \end{cases}$$

Logo, $A = \begin{pmatrix} 1.100 & 1.210 & 1.331 \\ 2.400 & 2.880 & 3.456 \end{pmatrix}$.

b) Para $i = 1$, temos a sequência

$\underbrace{1{,}1}_{(1,\,1)^1} \cdot 1.000$; $\underbrace{1{,}21}_{(1,\,1)^2} \cdot 1.000$; $\underbrace{1{,}331}_{(1,\,1)^3} \cdot 1.000$

Portanto, $x = (1{,}1)^j \cdot 1.000$.

Para $i = 2$, temos a sequência:

$1{,}2 \cdot 2.000$; $1{,}44 \cdot 2.000$; $1.728 \cdot 2.000$

Portanto, $y = (1{,}2)^j \cdot 2.000$.

Logo, $a_{ij} = \begin{cases} (1,1)^j \cdot 1.000, \text{ se } i = 1 \\ (1,2)^j \cdot 2.000, \text{ se } i = 2 \end{cases}$

30 a) A maior temperatura foi apresentada no instante 2 do dia 4 (40,5 °C).

b) No terceiro dia, a temperatura média foi:

$$\frac{38{,}6 + 37{,}2 + 36{,}1}{3} = 37{,}3$$

Logo, a temperatura média foi 37,3 °C.

31 Como a equipe 5 foi campeã com 48 pontos e empatou pelo menos um jogo, concluímos que seu número de vitórias foi menor que 16, pois $16 \cdot 3 = 48$.

- Supondo que a equipe 5 tenha vencido 15 partidas, os outros 3 pontos só podem ter sido obtidos dos empates, pois a derrota não acrescenta nenhum ponto. Sob essa hipótese, a equipe 5 venceu 15 partidas, empatou 3 e perdeu 1.
- Supondo que a equipe 5 tenha vencido 14 partidas, os outros 6 pontos só poderiam ser obtidos dos empates, pois a derrota não acrescenta nenhum ponto.

  Sob essa hipótese, a equipe 5 venceu 14 partidas e empatou 6, o que é absurdo, pois cada equipe disputou apenas 19 jogos nesse campeonato.
- Para qualquer hipótese com menos de 15 partidas vencidas pela equipe 5, cairíamos em um absurdo como o da segunda hipótese.

Assim, concluímos que a equipe 5 venceu 15 partidas, empatou 3 e perdeu 1; portanto, na soma $\sum_{i=1}^{20} a_{i5}$:

- a parcela a_{55} é zero, conforme informa o enunciado;
- há uma parcela igual a 3, que corresponde à vitória de uma equipe diante da equipe 5;
- há três parcelas iguais a 1, que correspondem aos empates diante da equipe 5;
- há 15 parcelas iguais a zero, que correspondem às derrotas diante da equipe 5.

Logo, $\sum_{i=1}^{20} a_{i5} = 6$

Alternativa **a**.

32 a) $a_{23} = 5$

Logo, foram vendidas 5 unidades do modelo 2 no dia 3.

b) $b_{12} = 0$

Logo, não foi vendida nenhuma unidade do modelo 1 no dia 2.

c) $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

d) $A - B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

33 $\begin{bmatrix} 20 & 8 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \\ 15 \cdot 3 + 12 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 \\ 69 \end{bmatrix}$

Alternativa **c**.

34 No período considerado, a loja L_1 vendeu 30 unidades do produto P_1 ($a_{11} = 30$) e 15 unidades do produto P_2 ($a_{21} = 15$). Logo, a soma das quantidades dos produtos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

Alternativa **e**.

35 Sendo m, p e g os preços unitários, em real, do monitor, do processador e do gravador, respectivamente, temos: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ p \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.736 \\ 840 \\ 2.952 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m + p + 3g = 2.736 & \text{(I)} \\ m + 2g = 840 & \text{(II)} \\ m + 2p = 2.952 & \text{(III)} \end{cases}$$

(01) V, pois de (I) e (II) temos:

$2m + p + 3g = 2.736 \Rightarrow$

$\Rightarrow (m + 2g) + m + p + g = 2.736$

$\therefore 840 + m + p + g = 2.736 \Rightarrow$

$\Rightarrow m + p + g = 1.896$, e 1.896 é múltiplo de 8.

(02) V, pois:

- de (II) e (III), temos $m < 300 \Rightarrow g > 270$ e $p > 1.326$;
- subtraindo (III) e (II), membro a membro, obtemos $2p - 2g = 2.112 \Rightarrow p = 1.056 + g$;

- atribuindo a g um valor maior que 270, por exemplo $g = 300$, obtemos $p = 1.356$;
- substituindo, em (I), p e g por 1.356 e 300, respectivamente, obtemos $m = 240$.

Assim, uma possibilidade que comprova a veracidade da afirmação é: $m = 240$, $p = 1.356$ e $g = 300$

(04) F, pois de (II) obtemos $m = 840 - 2g$ e, portanto, g deve ser menor que 420 (caso contrário teríamos $m \leqslant 0$, o que é absurdo).

(08) F, pois para $m = 400$ obtemos, de (II) e (III), $g = 220$ e $p = 1.276$ e, portanto, $p + g = 1.496$, que não é múltiplo de 5.

(16) V, pois: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4+1+3 & 2+0+6 \\ 2+0+2 & 1+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

A soma é: $1 + 2 + 16 = 19$

36 $C \cdot A = \begin{bmatrix} 20 \\ 7 \\ 14 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

De acordo com a tabela, o nome do espião é Ramon.
Alternativa **e**.

37 $\begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75{,}90 \\ 21{,}50 \\ 411{,}00 \end{bmatrix}$

Alternativa **e**.

38 **a)** $C = A \cdot B \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 50 & 20 & 20 \\ 40 & 10 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 15 & 20 & 20 \\ 30 & 20 & 30 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1.400 & 1.800 & 1.750 \\ 1.450 & 1.600 & 1.700 \end{pmatrix}$

b) $C_{23} = 1.700$ é a quantidade, em quilograma, de fertilizante Z usado nas plantações de milho, soja e feijão na região Q.

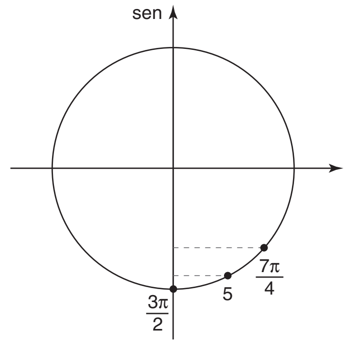
39 A matriz custo é dada por:

$C = B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$

Logo, o cartaz de menor custo terá preço de R$ 10,00.
Alternativa **d**.

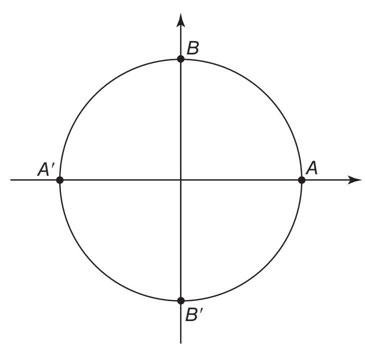
Exercícios de revisão cumulativa

1 Como $\frac{3\pi}{2} < 5 < \frac{7\pi}{4}$ e a função $y = \text{sen}\, x$ é crescente no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, concluímos que $\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} <$ $< \text{sen}\, 5 < \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}$, ou seja, $-1 < \text{sen}\, 5 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Alternativa **d**.

2 $\text{sen}^3 x - \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x(\text{sen}^2 x - 1) = 0$
$\therefore\ \text{sen}\, x = 0$ ou $\text{sen}^2 x - 1 = 0$
$\therefore\ \text{sen}\, x = 0$ ou $\text{sen}\, x = 1$ ou $\text{sen}\, x = -1$
Na circunferência trigonométrica a seguir, $\text{sen}\, x = 0$ se x estiver associado aos pontos A ou A'; $\text{sen}\, x = 1$ se x estiver associado ao ponto B; e $\text{sen}\, x = -1$ se x estiver associado ao ponto B':



Concluímos, assim, que o conjunto solução S da equação é dado por:

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Alternativa **d**.

3
- O primeiro e o segundo membros da igualdade estão definidos em U.
- Partindo do primeiro membro, temos:

$1^{\underline{o}}$ membro $= \text{tg}^4 x - \sec^4 x = \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^4 x} =$

$= \frac{\text{sen}^4 x - 1}{\cos^4 x} = \frac{(\text{sen}^2 x + 1)(\text{sen}^2 x - 1)}{\cos^4 x} =$

$= \frac{(\text{sen}^2 x + 1)(-\cos^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{(\text{sen}^2 x + 1)(-1)}{\cos^2 x} =$

$= \frac{(1 - \cos^2 x + 1)(-1)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 2}{\cos^2 x} =$

$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos^2 x} = 1 - 2\sec^2 x = 2^{\underline{o}}$ membro

4 Pela lei dos senos, temos:

$\frac{AB}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{AB}{\text{sen}\, 45°} = 2$

$\therefore\ \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$

Alternativa **a**.

Análise da resolução

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab \\ ac & bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 & \text{(I)} \\ ab = 0 & \text{(II)} \\ ac = 0 & \text{(III)} \\ bc = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

De (IV), obtemos: $b = 0$ ou $c = 0$

- Para $b = 0$, deduzimos de (I) que $a = 0$.
  Para $b = 0$ e $a = 0$, as equações (III) e (IV) são satisfeitas para qualquer valor real de c.
  Assim, para $b = 0$, a matriz X tem a forma:
  $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, com $c \in \mathbb{R}$
- Para $c = 0$, deduzimos de (I) que $a = 0$
  Para $c = 0$ e $a = 0$, as equações (II) e (IV) são satisfeitas para qualquer valor real de b.
  Assim, para $c = 0$, a matriz X tem a forma:
  $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, com $b \in \mathbb{R}$

  Concluímos, então, que todas as matrizes X são da forma:
  $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, com $\{b, c\} \subset \mathbb{R}$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 Temos:
$(2 \cdot 3) + (3 \cdot 1) + (5 \cdot 0) = 9$
Logo, o total de pontos da equipe A é 9.

2 Sabemos que:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 12 \\ 3x + 1y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - y & \text{(I)} \\ 3x + y = 14 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo a equação (I) na equação (II), obtemos:
$3\,(10 - y) + y = 14 \Rightarrow y = 8$
Substituindo o valor de y na equação (I), obtemos:
$x = 2$
Logo, a equipe B empatou 8 vezes e venceu 2 jogos.

Exercícios propostos

1 **a)** Para $x = 3$, temos: $3 \cdot 3 - 2y = 20 \Rightarrow y = -\dfrac{11}{2}$

b) Para $x = -7$, temos: $3 \cdot (-7) - 2y = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -\dfrac{41}{2}$

c) sim
d) infinitos

2 **a)** **I.** V, pois: $2 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) - (-1) = 7$
II. F, pois: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 \neq 7$
b) $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - p = 7 \Rightarrow p = 0$
$2 \cdot (-1) + 3q - 3 = 7 \Rightarrow q = 4$
c) Para $x = 5$ e $y = 0$, temos:
$2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 - z = 7 \Rightarrow z = 3$
Para $x = 1$ e $z = 5$, temos:
$2 \cdot 1 + 3 \cdot y - 5 = 7 \Rightarrow y = \dfrac{10}{3}$
Logo, duas outras soluções são
$(5, 0, 3)$ e $\left(1, \dfrac{10}{3}, 5\right)$.

3 **a)** V, pois $-3 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 9$.
b) F, pois $2 \cdot 0 + 3 - (-2) = 5 \neq 1$.
c) V, pois $0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0$.
d) V, pois para cada valor atribuído a x obtemos y tal que o par (x, y) é solução da equação $x + 2y = 5$.
e) V, pois para qualquer valor inteiro atribuído a y, obtemos um valor inteiro para x.
f) F, pois para quaisquer valores inteiros de x e y a soma $x + 2y$ é um número inteiro.

4 Para $x = 4$ e $y = -1$, tem-se: $4 + 2 \cdot (-1) + z = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 3$.
Para $x = 4$ e $y = 0$, tem-se: $4 + 2 \cdot 0 + z = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 1$.
Para $x = 4$ e $y = 1$, temos:
$4 + 2 \cdot 1 + z = 5 \Rightarrow z = -1$.
Assim, três soluções distintas da equação para $x = 4$ são $(4, -1, 3)$, $(4, 0, 1)$ e $(4, 1, -1)$.

5 **1º modo**
Sendo x, y e z as quantidades de cédulas de R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 50,00, respectivamente, que a pessoa deve receber, temos:
$200 = 5x + 10y + 50z$
Como a quantidade de cédulas de R$ 50,00 deve ser máxima, com pelo menos uma cédula de cada um dos outros valores, temos $z = 3$.
Assim, podemos escrever:
$200 = 5x + 10y + 50 \cdot 3 \Rightarrow x = 10 - 2y$
Como $\{x, y\} \subset \mathbb{N}^*$ e $y \leqslant 4$, podemos construir a tabela:

x	y	z
2	4	3
4	3	3
6	2	3
8	1	3

A primeira linha mostra o número mínimo de cédulas:
$2 + 4 + 3 = 9$
Logo, o número mínimo de cédulas que ela poderá receber é 9.
2º modo
O número mínimo de cédulas é obtido quando os números de cédulas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 são máximos. Como as maiores quantidades de cédulas de R$ 10,00 e R$ 50,00 são 4 e 3, respectivamente, concluímos que duas cédulas de R$ 5,00 completam a troca.
Alternativa **b**.

6 Sendo *a* e *b* os números de parafusos produzidos pelas máquinas A e B, respectivamente, temos:
$4a + 3b = 3a + 5b \Rightarrow 4a - 3a = 5b - 3b$
$\therefore\ a = 2b$
Logo, podemos afirmar que a produção de A é o dobro da de B, num mesmo intervalo de tempo.
Alternativa **c**.

7 Sendo x a massa do caminhão vazio e y a massa da carga, temos:
$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2y \Rightarrow y = \dfrac{2x}{9}$
Logo, a massa da carga é $\dfrac{2}{9}$ da massa do caminhão vazio.
Alternativa **a**.

8 Sendo u, d e c as quantidades de notas de 1, 2 e 5 reais, respectivamente, temos:
$u + 2d + 5c = 20 \Rightarrow u = 20 - 2d - 5c$ com $u < 20$, $d < 10$ e $c < 4$.
Atribuindo os valores 1, 2 e 3 a c, obtemos:

c	d	u
1	1	13
1	2	11
1	3	9
1	4	7
1	5	5
1	6	3
1	7	1
2	1	8
2	2	6
2	3	4
2	4	2
3	1	3
3	2	1

Logo, a troca pode ser feita de 13 maneiras diferentes.
Alternativa **e**.

9 O terno (1, 2, 3) é solução de todas as equações que compõem o sistema; logo, ele é solução do sistema.
Alternativa **c**.

10 Observando que $(3, -1, 0)$ não é solução da equação $x + 3y + z = 3$, concluímos que esse terno não é solução do sistema.
Alternativa **e**.

11 a) SPD, pois o sistema tem apenas uma solução, que é o par (3, 1).
b) SI, pois é impossível a soma de dois mesmos números ter dois resultados diferentes.
c) SPI, pois o sistema tem mais de uma solução; algumas delas são (1, 3), (2, 2), (3, 1).
d) SI, pois a equação $0x + 0y = 3$ não tem solução.

12 a) O sistema linear é homogêneo para $3k - 2 = 0$, ou seja, $k = \frac{2}{3}$.
b) Para $k = \frac{2}{3}$, temos o sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & \text{(I)} \\ 6x - 2y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Como as equações que compõem o sistema são equivalentes — multiplicando por 2 ambos os membros da primeira equação obtemos a segunda —, temos que toda solução de uma dessas equações também é solução da outra. Logo, o sistema é possível e indeterminado, pois tem infinitas soluções.

13 Substituindo x, y e z, respectivamente, por 1, p e $4p$, obtemos:

$$\begin{cases} 1 + 2p + 4p = 13 \\ 2 - p + 4p = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ p = 1 \end{cases}$$

Logo, não existe p que satisfaça as duas equações simultaneamente.

14 a) Para qualquer valor de k, com $k \neq 0$, temos $y = \frac{3}{k}$ e $x = \frac{5}{2} - \frac{9}{2k}$. Logo, para qualquer valor real não nulo de k o sistema é possível e determinado (SPD).
b) Para $k = 0$, qualquer par de números reais da forma $(x, x - 4)$ é solução do sistema.
Assim, para $k = 0$ o sistema é possível e indeterminado (SPI).
c) Para $k = 0$, a segunda equação é impossível; portanto, o sistema é impossível (SI).

15 Para quaisquer valores reais dos coeficientes a, b, c, d, e e f, o sistema linear é homogêneo; logo, o terno (0, 0, 0) é solução trivial do sistema. Como o terno $(1, 4, -5)$ também é solução, concluímos que o sistema é possível e indeterminado, pois admite mais de uma solução.
Alternativa **d**.

16 a) SPD, pois é um sistema linear escalonado do 1º tipo:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 & \text{(I)} \\ 4y + 5z = 19 & \text{(II)} \\ 2z = 6 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (III), temos: $z = 3$
Substituímos z por 3 em (II):
$4y + 5 \cdot 3 = 19 \Rightarrow y = 1$
Substituímos z por 3 e y por 1 em (I):
$x + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1 \Rightarrow x = 2$
$\therefore S = \{(2, 1, 3)\}$
b) SPI, pois é um sistema linear escalonado do 2º tipo:

$$\begin{cases} x - 5y + 3z = 2 & \text{(I)} \\ y + 3z = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $y = 1 - 3z$
Substituímos y por $1 - 3z$ em (I):
$x - 5(1 - 3z) + 3z = 2 \Rightarrow x = 7 - 18z$
$\therefore S = \{(7 - 18z, 1 - 3z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$
c) SPI, pois é um sistema escalonado do 2º tipo:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 1 & \text{(I)} \\ 3z = 6 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $z = 2$
Substituímos z por 2 em (I):
$2x - y + 4 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{y - 7}{2}$
$\therefore S = \left\{\left(\frac{y - 7}{2}, y, 2\right), \text{ com } y \in \mathbb{R}\right\}$

d) SPD, pois é um sistema linear escalonado do 1º tipo:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 & \text{(I)} \\ 5y + z = 0 & \text{(II)} \\ z = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (III) em (II), obtemos: $5y + 0 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 0$

Substituindo y e z por 0 na equação (I), obtemos:

$x - 2 \cdot 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$

Logo, $S = \{(0, 0, 0)\}$.

e) SPI, pois é um sistema linear escalonado do 2º tipo:

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 0 & \text{(I)} \\ y - z = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos: $y = z$

Substituindo y por z na equação (I), obtemos:

$-x + 3z + z = 0 \Rightarrow x = 4z$

Logo, $S = \{(4z, z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$.

17 Indicando por m, f e q o número de professores de Matemática, Física e Química, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} m + f + q = 152 \\ f = 2q \end{cases} \Rightarrow m = 152 - 3q$$

O menor número natural m que satisfaz essa última igualdade é obtido fazendo-se $q = 50$.

Logo, o menor número possível de professores de Matemática que participam do congresso é 2.

18
$$\begin{cases} x + 2y - t + 3z = 2 \\ y + t - 3z = 1 \end{cases}$$

$y = 1 - t + 3z \Rightarrow x + 2(1 - t + 3z) - t + 3z = 2$

$\therefore x = 3t - 9z$

Logo, o conjunto solução do sistema é

$S = \{(t, 3t - 9z, 1 - t + 3z, z), \text{ com } t, z \in \mathbb{R}\}$.

19 A e A' são equivalentes; logo, seus conjuntos soluções são iguais. Como o conjunto solução de A é $S_A = \{(2, 1)\}$, temos:

$x + 2y = k \Rightarrow 2 + 2 \cdot 1 = k = 4$

Assim, para $k = 4$, os sistemas A e A' são equivalentes.

20 **a)**
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 5z = 7 \\ 3x + 7y - 6z = 12 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y + z = 5 \\ y + 3z = 9 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

$\therefore S = \{(1, 3, 2)\}$

Classificação: SPD

b)
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 8y - 2z = 7 \\ 4x + 10y - 3z = 9 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2y + z = 4 \\ 2y + z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2y + z = 4 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

$\therefore S = \varnothing$

Classificação: SI

c)
$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 5x + 6y + 14z = 15 \\ 3x + 4y + 8z = 11 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - z = 5 \\ y - z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - z = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\therefore S = \{(-3 -4z, 5 + z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$

Classificação: SPI

d)
$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 3y - 2z = 2 \\ 8x + 7y + 10z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 8z = 0 \\ -y - 2z = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 8z = 0 \\ 6z = -3 \end{cases}$$

$\therefore S = \left\{\left(-\dfrac{11}{4}, 4, -\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

Classificação: SPD

e)
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 5y = 1 \\ 5x + 9y = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -y = -8 \\ -y = -8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -y = -8 \end{cases}$$

$\therefore S = \{(-13, 8)\}$

Classificação: SPD

f)
$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 5y = 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -y = -13 \\ -y = -9 \end{cases}$$

$\therefore S = \varnothing$

Classificação: SI

g)
$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -5x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$$

$\therefore S = \{(0, 0)\}$

Classificação: SPD

h)
$$\begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ -x - 15y + 5z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ -11y + 4z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, em função da variável livre z, obtemos $y = \dfrac{4z}{11}$ e $x = -\dfrac{5z}{11}$.

$\therefore S = \left\{\left(-\dfrac{5z}{11}, \dfrac{4z}{11}, z\right), \text{ com } z \in \mathbb{R}\right\}$

Classificação: SPI

i) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$

$\therefore S = \{(0, 0)\}$
Classificação: SPD

j) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -8y + 6z = 0 \end{cases}$

Resolvendo, em função da variável livre z, obtemos $y = \dfrac{3z}{4}$ e $x = -\dfrac{z}{4}$.

$\therefore S = \left\{\left(-\dfrac{z}{4}, \dfrac{3z}{4}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$
Classificação: SPI

21 Sendo x e y as distâncias, em quilômetro, percorridas com carro e ônibus, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y = 4.000 \\ 1 \cdot \dfrac{x}{1.000} + 5 \cdot \dfrac{y}{1.000} = 16 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x + y = 4.000 \\ x + 5y = 16.000 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 4.000 & \text{(I)} \\ -4y = -12.000 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos: $y = 3.000$
Substituindo y por 3.000 na equação (I), obtemos:
$x + 3.000 = 4.000 \Rightarrow x = 1.000$
Concluímos, então, que o ecologista percorreu 1.000 km de carro e 3.000 km de ônibus.
Alternativa **e**.

22 Sendo V o número de ingressos para o setor verde, A para o azul e B para o branco, temos:

$$\begin{cases} 12V + 18A + 25B = 620.000 \\ V + A + B = 38.000 \\ V - 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = 10.000$, $B = 8.000$ e $V = 20.000$
Logo, 20.000 torcedores pagaram ingresso para o setor verde.
Alternativa **b**.

23 Sendo, respectivamente, x, y e z os preços, em real, por quilograma de arroz, feijão e açúcar, temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 9{,}20 \\ 4x + 2y + 6z = 15{,}20 \\ x + y + z = \alpha \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 12x + 18y + 6z = 55{,}20 \\ 8x + 16y = 40 \\ x + 2y = 9{,}20 - \alpha \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 12x + 18y + 6z = 55{,}20 \\ 8x + 16y = 40 \\ 0x + 0y = 8(9{,}20 - \alpha) - 40 \end{cases} \sim$$

Para que o sistema seja possível, devemos ter:
$8(9{,}20 - \alpha) - 40 = 0 \Rightarrow -8\alpha + 73{,}60 - 40 = 0$
$\therefore \alpha = 4{,}20$
Logo, Neuza gastou R$ 4,20.
Alternativa **c**.

24 Temos: $\dfrac{x}{18} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 18y \\ 2x = 18z \\ 2y = 6z \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 9z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 9z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 3y = 0 & \text{(I)} \\ 3y - 9z = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Da equação (II), obtemos $y = 3z$. Substituindo y por 3z em (I), obtemos: $x = 9z$
Concluímos, então, que todos os termos ordenados de números reais positivos que satisfazem o sistema do item **a** são da forma $(9z, 3z, z)$, com $z \in \mathbb{R}^*_+$.

25 a) Isolando a variável y em cada uma das equações do sistema, obtemos:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{3} \\ y = -4x + 6 \end{cases}$$

Observando que as duas equações representam funções afins com coeficientes diferentes de x, concluímos que as retas representadas por essas funções são concorrentes.

b) Isolando a variável y em cada uma das equações do sistema, obtemos:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3x}{5} + \dfrac{1}{5} \\ y = -\dfrac{3x}{5} + \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Observando que as duas equações representam funções afins com coeficientes iguais de x e termos independentes iguais, concluímos que as retas representadas por essas funções são paralelas coincidentes.

c) Isolando a variável y em cada uma das equações do sistema, obtemos:

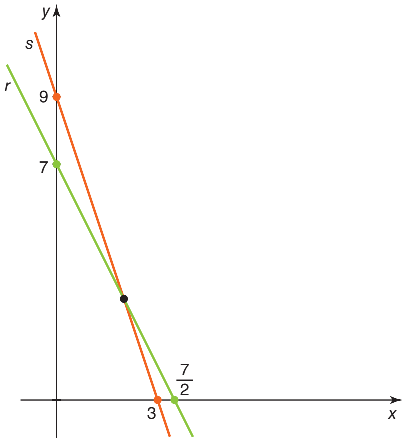
$$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{4} \\ y = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

Observando que as duas equações representam funções afins com coeficientes iguais de x e termos independentes diferentes, concluímos que as retas representadas por essas funções são paralelas distintas.

26 a) Para construir a reta *r* representada pela equação $2x + y = 7$, basta representar dois de seus pontos distintos e traçar a reta determinada por eles. Por exemplo, atribuindo o valor 0 para x obtemos $y = 7$, e atribuindo o valor 0 para y obtemos $x = \dfrac{7}{2}$; portanto, a reta *r* é determinada pelos pontos (0,7) e $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$.

Analogamente, para construir a reta s de equação $3x + y = 9$, atribuímos o valor 0 para x, obtendo $y = 9$, e atribuímos o valor 0 para y, obtendo $x = 3$; portanto, a reta s é determinada pelos pontos (0, 9) e (3, 0).

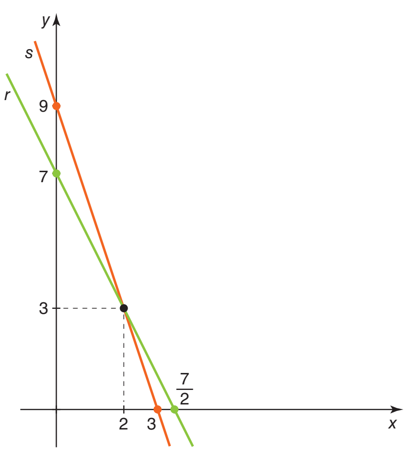
Assim, temos r e s no plano cartesiano:



b) O ponto comum às retas r e s construídas no item **a** é a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

que é (2, 3). Assim, temos:



27 Isolando a variável y em cada uma das equações do sistema, obtemos:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{ax}{6} + \dfrac{b}{6} \end{cases}$$

Assim, temos:

a) F, pois para $a = 4$ e $b = 8$ as funções afins representadas pelas equações do sistema têm coeficientes iguais de x e termos independentes diferentes, portanto representam retas paralelas distintas e, consequentemente, o sistema é impossível.

b) V, pois para $a = 5$ as funções afins representadas pelas equações do sistema têm coeficientes diferentes de x, portanto representam retas concorrentes e, consequentemente, o sistema é possível e determinado.

c) V, pois para $a = 4$ e $b = 10$ as funções afins representadas pelas equações do sistema têm coeficientes iguais de x e termos independentes iguais, portanto representam retas paralelas coincidentes e, consequentemente, o sistema é possível e indeterminado.

d) V, pois para $a = 4$ e $b = 12$ as funções afins representadas pelas equações do sistema têm coeficientes iguais de x e termos independentes diferentes, portanto representam retas paralelas distintas e, consequentemente, o sistema é impossível.

e) V, pois para $a = 0$ e $b = 0$ a segunda equação representa o eixo das abscissas que concorre com a reta representada pela primeira equação e, consequentemente, o sistema é possível e determinado.

f) F, pois para $a = 2$ e $b = 5$ as funções afins representadas pelas equações do sistema têm coeficientes diferentes de x, portanto representam retas concorrentes e, consequentemente, o sistema é possível e determinado.

28 **a)** $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 12 = 18$

Logo, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 9 + 8 - 6 - 6 + 2 = 6$

Logo, o sistema é possível e determinado (SPD).

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 40 - 16 - 12 = 0$

(SPI ou SI)

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 5y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 5y - z = 1 \\ -14y + 4z = 1 \end{cases}$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 1 - 3 + 14 = 0$ (SPI ou SI)

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ x - 7y + 3z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 0z = -4 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível (SI).

e) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -13$

Logo, o sistema é possível e determinado (SPD).

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 14 - 8 = 0$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ -7y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -7y + 2z = 0 \end{cases}$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

29 $\begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow m \neq 4$ e $m \neq -4$

Logo, o sistema é possível e determinado se, e somente se, $m \neq 4$ e $m \neq -4$.

Alternativa **c**.

30 Para que o sistema seja possível e determinado, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema deve ser não nulo; então:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -k - 6 \neq 0$$

$\therefore k \neq -6$

Logo, para $k \neq -6$, o sistema é SPD.

31 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 0 & -2 \end{vmatrix} = 10 - 2k$

O sistema homogêneo admite somente a solução trivial se, e somente se, é possível e determinado, ou seja, $D \neq 0$.

$10 - 2k \neq 0 \Rightarrow k \neq 5$

Logo, o sistema admite apenas a solução trivial para qualquer valor real k, com $k \neq 5$.

32 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = -52 - 13a$

O sistema homogêneo admite soluções além da trivial se, e somente se, é possível e indeterminado, ou seja, $D = 0$.

$-52 - 13a = 0 \Rightarrow a = -4$

Logo, o sistema admite soluções além da trivial para $a = -4$.

33 O sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} kx + y + 0z = 1 \\ 0x + ky + z = 4 \\ x + 0y - z = -3 \end{cases}$$

Uma condição necessária (mas não suficiente) para que o sistema seja impossível é que o determinante D da matriz dos coeficientes seja nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ ou } k = -1$$

- Substituindo k por 1 e escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ 0x + y + z = 4 \\ x + 0y - z = -3 \end{cases} \times(-1) \sim \begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ 0x + y + z = 4 \\ 0x - y - z = -4 \end{cases} \times(1) \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ 0x + y + z = 4 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

Assim, para $k = 1$ o sistema é possível e indeterminado.

- Substituindo k por -1 e escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} -x + y + 0z = 1 \\ 0x - y + z = 4 \\ x + 0y - z = -3 \end{cases} \times(1) \sim \begin{cases} -x + y + 0z = 1 \\ 0x - y + z = 4 \\ 0x + y - z = -2 \end{cases} \times(1) \sim$$

$$\sim \begin{cases} -x + y + 0z = 1 \\ 0x - y + z = 4 \\ 0x + 0y + 0z = 2 \end{cases}$$

Assim para $k = -1$ o sistema é impossível.

Alternativa **b**.

34 a) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 9 & 3x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 27 = 0$

$\therefore x = 3$ ou $x = -3$

Logo: $S = \{3, -3\}$

b) $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow 5x^2 - 7x - 6 = 0$

$\therefore x = 2$ ou $x = -\dfrac{3}{5}$

Logo: $S = \left\{2, -\dfrac{3}{5}\right\}$

35 a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$ (SPD)

Logo, as retas r e s são concorrentes.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (SPI ou SI)

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y = -3 \\ 0x + 0y = -2 \end{cases} \text{(SI)}$$

Logo, as retas são paralelas distintas.

c) As equações podem ser representadas por: (r) $4x - 2y = 6$ e (s) $2x - y = 3$. Assim, temos:

$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (SPI ou SI)

Escalonando o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \text{(SPI)}$$

Logo, as retas r e s são coincidentes.

36 a) Seja: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k & 6 \end{vmatrix} -6 - 3k$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$6 - 3k \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$

Portanto: $k \neq 2 \Rightarrow$ SPD

Para $k = 2$, temos:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 2 \end{cases} \times(-2) \sim \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \sim x + 3y = 1$$

Portanto: $k = 2 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $k \neq 2 \Rightarrow$ SPD, $k = 2 \Rightarrow$ SPI

b) Seja: $D = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 5 + k$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$5 + k \neq 0 \Rightarrow k \neq -5$

Portanto: $k \neq -5 \Rightarrow$ SPD

Para $k = -5$, temos:

$$\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -5x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x - y = 3 \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$$

Portanto: $k = -5 \Rightarrow$ SI

Resumindo: $k \neq -5 \Rightarrow$ SPD, $k = -5 \Rightarrow$ SI

c) $D = \begin{vmatrix} k & 5 \\ 5 & k \end{vmatrix} = k^2 - 25$

Como o sistema é homogêneo, temos $D \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ SPD e $D = 0 \Rightarrow$ SPI, ou seja:
$k^2 - 25 \neq 0 \Rightarrow$ SPD e $k^2 - 25 = 0 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $\begin{cases} k \neq 5 \text{ e } k \neq -5 \Rightarrow \text{SPD} \\ k = 5 \text{ ou } k = -5 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

37 a) Seja: $D = \begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3m + 3$

Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:
$3m + 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$
Portanto: $m \neq -1 \Rightarrow$ SPD
Para $m = -1$, temos:

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 2y + 5z = 7 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} -x - y + 2z = 1 \\ \quad - y + 5z = 4 \\ \quad - 3y + 15z = 12 \end{cases} \sim \begin{cases} -x - y + 2z = 1 \\ \quad - y + 5z = 4 \end{cases}$$

Portanto: $m = -1 \Rightarrow$ SPI
Resumindo: $m \neq -1 \Rightarrow$ SPD, $m = -1 \Rightarrow$ SPI

b) Seja: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 3 & 1 & 3 \\ m & -2 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2$

Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:
$-m^2 + 3m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$ e $m \neq 1$
Portanto: $m \neq 2$ e $m \neq 1 \Rightarrow$ SPD
Para $m = 2$, temos:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ \quad - 8y - 3z = -2 \\ \quad - 8y - 3z = -1 \end{cases}$$

equações incompatíveis

Portanto: $m = 2 \Rightarrow$ SI
Para $m = 1$, temos:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ \quad - 8y = -2 \\ \quad - 5y = 0 \end{cases}$$

equações incompatíveis

Portanto: $m = 1 \Rightarrow$ SI
Resumindo: $m \neq 2$ e $m \neq 1 \Rightarrow$ SPD, $m = 2$ ou $m = 1 \Rightarrow$ SI

38 Seja: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & p & p \\ 5 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 15p - 30$

Como o sistema é homogêneo, temos $D \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ SPD e $D = 0 \Rightarrow$ SPI, ou seja:
$15p - 30 \neq 0 \Rightarrow$ SPD e $15p - 30 = 0 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $\begin{cases} p \neq 2 \Rightarrow \text{SPD} \\ p = 2 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

39 a) Seja: $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m & 9 \end{vmatrix} = 18 - 3m$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:
$18 - 3m \neq 0 \Rightarrow m \neq 6$
Portanto: $m \neq 6 \Rightarrow$ SPD
Para $m = 6$, temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x + 9y = n \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = n - 3 \end{cases}$$

Logo: $n - 3 \neq 0 \Rightarrow$ SI
$\qquad n - 3 = 0 \Rightarrow$ SPI
Resumindo: $m \neq 6 \Rightarrow$ SPD
$\qquad m = 6$ e $n \neq 3 \Rightarrow$ SI
$\qquad m = 6$ e $n = 3 \Rightarrow$ SPI

b) Seja: $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:
$-m^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ e $m \neq -1$

- Para $m = 1$, temos:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = n \end{cases} \sim \begin{cases} x - y = 1 \\ 0x + 0y = n - 1 \end{cases}$$

Logo: $n - 1 \neq 0 \Rightarrow$ SI
$\qquad n - 1 = 0 \Rightarrow$ SPI

- Para $m = -1$, temos:

$$\begin{cases} -x - y = 1 \\ x + y = n \end{cases} \sim \begin{cases} -x - y = 1 \\ 0x + 0y = n + 1 \end{cases}$$

Logo: $n + 1 \neq 0 \Rightarrow$ SI
$\qquad n + 1 = 0 \Rightarrow$ SPI
Resumindo: $m \neq 1$ e $m \neq -1 \Rightarrow$ SPD
$\qquad m = 1$ e $n \neq 1 \Rightarrow$ SI
$\qquad m = 1$ e $n = 1 \Rightarrow$ SPI
$\qquad m = -1$ e $n \neq -1 \Rightarrow$ SI
$\qquad m = -1$ e $n = -1 \Rightarrow$ SPI

40 a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 6x + 3z = 30 \\ x = y + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 9 \\ 6x + 3z = 30 \\ x - y = k \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 3 + 3 = 0$

c) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 6x + 3z = 30 \\ x - y = k \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 9 \\ -6y - 3z = -24 \\ 0z = 3k - 3 \end{cases}$

Como esse sistema é possível, devemos ter:
$3k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1$
Assim, cada borracha custou R\$ 1,00 a mais que o lápis.

41 a) $\begin{cases} x + 3y + mz = 1 & (-2) \\ 2x + 6y + 4z = -1 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 3y + mz = 1 \\ 0x + 0y + (4 - 2m)z = -3 \end{cases}$

Logo: $4 - 2m \neq 0 \Rightarrow$ SPI

$4 - 2m = 0 \Rightarrow$ SI

$\therefore\ m \neq 2 \Rightarrow$ SPI; $m = 2 \Rightarrow$ SI

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 4 & (-2) \\ 2x - 2y + mz = 2m \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 0x + 0y + (m - 4)z = 2m - 8 \end{cases}$

Logo:

$m - 4 \neq 0 \Rightarrow$ SPI

$m - 4 = 0 \Rightarrow$ SPI (pois $2m - 8$ também será igual a zero)

Assim, temos que o sistema é possível e indeterminado para qualquer valor real de m.

42 a) $\begin{cases} x + 3y = -2 & (-2)\ (-4) \\ 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = a \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 0x - 7y = 7 & (-1) \\ 0x - 7y = 8 + a \end{cases} \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 0x - 7y = 7 \\ 0x + 0y = 1 + a \end{cases}$

Logo: $1 + a = 0 \Rightarrow$ SPD

$1 + a \neq 0 \Rightarrow$ SI

$\therefore\ a = -1 \Rightarrow$ SPD; $a \neq -1 \Rightarrow$ SI

b) $\begin{cases} x + 2y = 5 & (-6)\ (-5) \\ 6x - y = 4 \\ 5x + ay = -1 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - 13y = -26 & \left(\frac{1}{13}\right) \\ 0x + (a - 10)y = -26 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - y = -2 & (a - 10) \\ 0x + (a - 10)y = -26 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - y = -2 \\ 0x + 0y = -6 - 2a \end{cases}$

Logo: $-6 - 2a = 0 \Rightarrow$ SPD

$-6 - 2a \neq 0 \Rightarrow$ SI

$\therefore\ a = -3 \Rightarrow$ SPD; $a \neq -3 \Rightarrow$ SI

43 $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 3x + py - 6z = q \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 0x + (p - 9)y + 0z = q - 12 \end{cases}$

Observamos que:

- para $p - 9 \neq 0$, o sistema é possível e indeterminado
- para $p - 9 = 0$ e $q - 12 = 0$, o sistema é possível e indeterminado
- para $p - 9 = 0$ e $q - 12 \neq 0$, o sistema é impossível

Resumindo:

para $p \neq 9$, o sistema é possível e indeterminado
para $p = 9$ e $q = 12$, o sistema é possível e indeterminado
para $p = 9$ e $q \neq 12$, o sistema é impossível

44 a) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 8 = 10$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 40 + 2 + 30 + 4 = 76$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 2A_{21} + 0A_{31} + 2A_{41}$

Calculando os cofatores A_{11}, A_{21} e A_{41}, temos:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 19$

e $A_{41} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -24$

Logo: det A $= -3 + 38 + 0 - 48 = -13$

45 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Aplicando o teorema de Laplace na 2ª coluna, temos:

det A $= (-1) \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42}$, em que:

$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10$ e

$A_{42} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$

Logo: det A $= (-1) \cdot 10 + (-1) \cdot 6 = -16$

46 Aplicando o teorema de Laplace na 1ª coluna do determinante D da matriz dos coeficientes, temos:

$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot$

$\cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot (-10) + 1 \cdot (-1)^3 \cdot$

$\cdot (-1) = -19$

Como $D \neq 0$, concluímos que o sistema é possível e determinado.

47 a) $6a = 8b = 9c = 12d \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 6a = 8b \\ 6a = 9c \\ 6a = 12d \\ 9c = 12d \end{cases} \sim \begin{cases} 6a - 8b + 0c + 0d = 0 \\ 6a + 0b - 9c + 0d = 0 \\ 6a + 0b + 0c - 12d = 0 \\ 0a + 0b + 9c - 12d = 0 \end{cases}$

b) $D = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 9 & -12 \end{vmatrix} = -8A_{12}$, em que:

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \\ 0 & 9 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, $D = 0$ e, portanto, o sistema é possível e indeterminado.

48 **a)** Pela P1, os determinantes de uma matriz e de sua transposta são iguais.

Logo: $\begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix} = 4$

b) Pela P3, permutando duas filas paralelas de uma matriz, obtém-se uma matriz B tal que $\det B = -\det A$.

Logo: $\begin{vmatrix} m & n & p \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -4$

c) Pela P4, temos:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 8$$

d) Pela P4, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3m & 3n & 3p \\ 5x & 5y & 5z \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 60$$

e) Pela P4, temos:

$$\begin{vmatrix} 3a & 6b & 3c \\ m & 2n & p \\ x & 2y & z \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 24$$

f) Aplicando sucessivamente as propriedades P4 e P1, temos:

$$\begin{vmatrix} a & 6m & -x \\ b & 6n & -y \\ c & 6p & -z \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) \cdot 4 = -24$$

g) $\begin{vmatrix} c & 5b & a \\ 2p & 10n & 2m \\ z & 5y & x \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} c & b & a \\ p & n & m \\ z & y & x \end{vmatrix} =$

$$= 10 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10 \cdot (-1) \cdot 4 = -40$$

49 **a)** Pela P2, se os elementos de uma fila são nulos, o determinante da matriz é nulo; logo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

b) Pela P5, se uma matriz tem duas filas paralelas iguais, seu determinante é nulo; logo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

c) Pela P6, se uma matriz tem duas filas paralelas múltiplas, seu determinante é nulo; logo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 & (2 \cdot 2) \\ 0 & 3 & 1 & (2 \cdot 3) \\ 1 & 4 & 2 & (2 \cdot 4) \\ 2 & 5 & 1 & (2 \cdot 5) \end{vmatrix} = 0$$

d) Pela P7, o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal; logo:

$$\begin{vmatrix} 2 & \pi & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 5 & 9 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 40$$

e) Pela P7, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 1 & 0 & 0 \\ 47 & 75 & 2 & 0 \\ 64 & 78 & 93 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

50 Pela P7, temos: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & x^2 - 1 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & x + 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & x - 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x^2 - 1)(x + 2)(x - 4) = 0$

$\therefore x^2 - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$\therefore x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = -2$ ou $x = 4$

Logo, $S = \{-2, -1, 1, 4\}$.

51 Para que a equação tenha uma única solução, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & (k - 1) & 4 & -6 \\ 0 & 0 & (k - 2) & 9 \\ 0 & 0 & 0 & (k + 5) \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2(k - 1)(k - 2)(k + 5) \neq 0$

$\therefore k - 1 \neq 0$ e $k - 2 \neq 0$ e $k + 5 \neq 0$

$\therefore k \neq 1$ e $k \neq 2$ e $k \neq -5$

Logo, a equação tem solução única para qualquer valor real de k, com $k \neq 1$ e $k \neq 2$ e $k \neq -5$.

52 Pela P3, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Logo, $2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ e, portanto, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$.

53 Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, temos

$5A = \begin{bmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 5d & 5e & 5f \\ 5g & 5h & 5i \end{bmatrix}$ e, portanto, pela P4:

$$\det (5A) = \begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 5d & 5e & 5f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$= 5^3 \cdot \det A$

$\therefore \det (5A) = 5^3 \cdot 4 = 500$

54 Pela P8, temos:

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 10 \\ 3 & 7 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5+8 \\ 4 & 2 & 6+10 \\ 3 & 7 & 9+12 \end{vmatrix}$$

Assim, $x = 13$, $y = 16$ e $z = 21$.
Logo, a solução é (13, 16, 21).

55 Pela P8, temos:

$$\begin{vmatrix} a & d & 4 \\ b & e & 6 \\ c & f & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 2 \\ c & f & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d & 3 \\ b & e & 4 \\ c & f & 6 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7$$

56 Aplicando sucessivamente as propriedades P8 e P4, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & x & 2x+p \\ 1 & b & y & 2y+p \\ 1 & c & z & 2z+p \\ 1 & d & w & 2w+p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & a & 2x \\ 1 & y & b & 2y \\ 1 & z & c & 2z \\ 1 & w & d & 2w \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & x & a & p \\ 1 & y & b & p \\ 1 & z & c & p \\ 1 & w & d & p \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & a & x \\ 1 & y & b & y \\ 1 & z & c & z \\ 1 & w & d & w \end{vmatrix} +$$

$$+ p \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & a & 1 \\ 1 & y & b & 1 \\ 1 & z & c & 1 \\ 1 & w & d & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 + p \cdot 0 = 0$$

57 a) $\begin{cases} 5a + 2b = 26 \\ 4a + 6b = 34 \\ 3a + \ \ b = 15 \\ 2a + 4b = 20 \end{cases} \Rightarrow a = 4 \text{ e } b = 3$

Logo, a combinação linear pode ser descrita por:
$m_{2j} = 4m_{1j} + 3m_{3j}$, com $1 \leq j \leq 4$

b) Pela propriedade P9, temos: $\det M = 0$

58 a) $(-2)\ (-3)\ (-4)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 12 & 6 \\ 3 & 8 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \cdot (2 + 2) = 4$$

b) $(-1)\ (-3)\ (-2)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 14 & 9 & 16 \\ 6 & 20 & 11 & 22 \\ 2 & 6 & 5 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 5 & 8 \\ 0 & 11 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 11 & 5 & 10 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^2 \cdot (240 + 264 + 150 - 120 - 240 - 330) =$$
$$= 2 \cdot 1 \cdot (-36) = -72$$

c) $(-5)\ (-2)\ (-3)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 23 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 \cdot (-4 + 14) = -10$$

59 (-1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 64$$

$\therefore (x - 1)^3 = 64 \Rightarrow x - 1 = 4$
$\therefore x = 5$
Logo, o conjunto solução é $S = \{5\}$.

60 Pela propriedade P11 (teorema de Cauchy), a alternativa correta é **b**.

61 Pelas propriedades P7 e P12, temos:

$$\begin{cases} \det A = 2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5 = -30 & \text{(I)} \\ \det (AB) = \det A \cdot \det B = 30 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:
$-30 \cdot \det B = 30 \Rightarrow \det B = -1$

62 $\det (A^3) = \det (A \cdot A \cdot A)$
Assim, pela propriedade P12, temos:
$\det (A^3) = \det A \cdot \det A \cdot \det A = (\det A)^3$
Logo:
$\det (A^3) = 6 \Rightarrow (\det A)^3 = 6$
$\therefore \det A = \sqrt[3]{6}$

63 Pela propriedade P12, temos:
$\det (A^2) + \det A = 0 \Rightarrow (\det A)^2 + \det A = 0$
$\therefore \det A (\det A + 1) = 0 \Rightarrow \det A = 0 \text{ ou } \det A + 1 = 0$
$\therefore \det A = 0 \text{ ou } \det A = -1$

64 a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 8 - 3 - 8 - 8 = -1$

Como $\det A \neq 0$, concluímos que A é invertível.
Calculando os cofatores dos elementos de A, temos:

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 8 = -4$

$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 8) = 0$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1$

$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$

$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 1) = 0$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$

$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 6) = -2$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$

Logo:

$$\text{cof } A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos:

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}}{\det A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1$; portanto, B é invertível.

Calculando os cofatores dos elementos de B, temos:

$$B_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$B_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$B_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

$$B_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$B_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Logo:

$$\text{cof } B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos:

$$B^{-1} = \frac{\overline{B}}{\det B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

65 $A^{-1} \cdot X = B \Rightarrow X = A \cdot B$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 26 \end{bmatrix}$$

66 No exercício resolvido 24, provamos que $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$. Assim, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow x^2 - 4x = -4$$

$\therefore x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 Para que o terno ordenado $(2, p, 3)$ seja solução da equação $3x + 2y - z = 8$, devemos ter:

$3 \cdot 2 + 2p - 3 = 8 \Rightarrow p = \dfrac{5}{2}$

Logo, $p = \dfrac{5}{2}$.

2 Sendo, respectivamente, a e b os algarismos das dezenas e das unidades do número n procurado, temos $n = 10a + b$. Assim:

$10a + b + 178 = 100a + 10b + 7 \Rightarrow 90a + 9b = 171$

$\therefore 9(10a + b) = 171 \Rightarrow 10a + b = 19$

$\therefore n = 19$

Logo, o número procurado é 19.

3 O terno $(1, 2, 3)$ não é solução do sistema, pois:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 = 9 \neq 5 \end{cases}$$

Alternativa **e**.

4 Substituindo x, y e z por p, $2p - 1$ e 1, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} p + 2(2p - 1) - 3 = 5 \\ 2p + 5(2p - 1) - 2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5p = 10 \\ 12p = 24 \end{cases}$$

$\therefore p = 2$

Como existe um único valor de p satisfazendo as duas equações, concluímos que existe um único terno, nas condições estabelecidas, que é solução do sistema. Esse terno é $(2, 2 \cdot 2 - 1, 1)$, ou seja, $(2, 3, 1)$.

5 Substituindo x, y e z por $3 - p$, p e $p - 2$, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 2(3 - p) + p + p - 2 = 4 \\ 4(3 - p) + 3p + p - 2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 10 = 10 \end{cases}$$

Como essas substituições resultaram em identidades, concluímos que para qualquer p real o terno $(3 - p, p, p - 2)$ é solução do sistema.

Logo:

- para $p = 0$, temos a solução $(3, 0, -2)$
- para $p = 1$, temos a solução $(2, 1, -1)$

6 Para $p \in \mathbb{R}^*$, as duas equações são possíveis e têm uma única solução comum. Logo, o sistema é possível e determinado para qualquer p real não nulo.

7 Para $m = 0$, a segunda equação não tem solução; portanto, para $m = 0$ o sistema é impossível.

8 Para $q = 0$, toda solução da primeira equação também será solução da segunda. Logo, para $q = 0$ o sistema é possível e indeterminado.

9 a) Substituindo x e y por -6 e 4, respectivamente, na segunda equação, temos:

$a \cdot (-6) + 6 \cdot 4 = 0 \Rightarrow a = 4$

b) A solução trivial desse sistema é $(0, 0)$.

c) As equações do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$ são equivalentes. Logo, qualquer solução de uma delas é solução da outra. Atribuindo o valor 2 para x, obtemos $y = -\dfrac{4}{3}$, e atribuindo o valor 3 para x obtemos $y = -2$. Assim, duas outras soluções são $\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ e $(3, -2)$.

10 a) $\begin{cases} x + 3y - 2t + z = 5 \\ y + t - 2z = 4 \\ 2t - 5z = 4 \\ 3z = 12 \end{cases}$ Sistema escalonado do 1º tipo, SPD

- $3z = 12 \Rightarrow z = 4$
- $2t - 5 \cdot 4 = 4 \Rightarrow t = 12$
- $y + 12 - 2 \cdot 4 = 4 \Rightarrow y = 0$
- $x + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 12 + 4 = 5 \Rightarrow x = 25$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(12, 25, 0, 4)\}$.

b) $\begin{cases} a + 2b - c = 5 \\ c = 4 \end{cases}$ Sistema escalonado do 2º tipo, SPI

$c = 4 \Rightarrow a + 2b = 9$
$\therefore a = 9 - 2b$
Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(9 - 2b, b, 4)\}$, com $b \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} p + 2q + r - s = 3 \\ q - 2r + s = 1 \\ r - 3s = 0 \end{cases}$ Sistema escalonado do 2º tipo, SPI

- $r = 3s$
- $q - 2 \cdot 3s + 5 = 1 \Rightarrow q = 1 + 5s$
- $p + 2(1 + 5s) + 3s - s = 3 \Rightarrow p = 1 - 12s$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(1 - 12s, 1 + 5s, 3s, s)$, com $s \in \mathbb{R}\}$.

11 Efetuando a multiplicação e aplicando a definição de igualdade de matrizes, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x + 0y + 0z = 3 \\ 2x + y + 0z = 7 \\ -x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

Logo:
- $x = 3$
- $2 \cdot 3 + y = 7 \Rightarrow y = 1$
- $-3 + 2 \cdot 1 + 2z = -1 \Rightarrow z = 0$

$\therefore S = \{(3, 1, 0)\}$
Alternativa **e**.

12 a) V, por definição de sistemas equivalentes.
b) V, pois, por definição, dois sistemas são equivalentes se têm o mesmo conjunto solução.
c) F, pois, por exemplo, são equivalentes os sistemas

A: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ e A': $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$

sendo $(1, -1)$ solução de A, $(2, -2)$ solução de A' e $(1, -1) \neq (2, -2)$.

d) F, pois, por definição, dois sistemas são equivalentes se têm o mesmo conjunto solução.
e) F, pois se ambos forem impossíveis eles terão o mesmo conjunto solução e, portanto, serão equivalentes.

13 Para que os sistemas sejam equivalentes, seus conjuntos soluções devem ser iguais. Como o conjunto solução de $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ é $S = \{(1, 2)\}$, este também é o conjunto solução de $\begin{cases} ax - 3y = 2 \\ x - by = 5 \end{cases}$ e, portanto:

$$\begin{cases} a \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 2 \\ 1 - b \cdot 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 8 \text{ e } b = -2$$

14 a) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 10 \\ x + 3y + 2z = 7 \\ 3x + y - 14z = 5 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 7 \\ 2x + 4y - z = 10 \\ 3x + y - 14z = 5 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 7 \\ -2y - 5z = -4 \\ -8y - 20z = -16 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 7 \\ -2y - 5z = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore S = \left\{\left(\frac{11z + 2}{2}, \frac{4 - 5z}{2}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$$

Classificação: SPI

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + 3y + 2z = 3 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 1 \\ -5y - 5z = -5 \\ -9y - 11z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 1 \\ -5y - 5z = -5 \\ -10z = 50 \end{cases}$$

$\therefore S = \{(-1, 6, -5)\}$
Classificação: SPD

c) $\begin{cases} 5x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - 2y - 6z = 1 \\ 3x + 4y + 8z = 2 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} 5x + 2y + 2z = 1 \\ -14y - 34z = 3 \\ 14y + 34z = 7 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 5x + 2y + 2z = 1 \\ -14y - 34z = 3 \\ 0 = 10 \end{cases}$$

$\therefore S = \varnothing$
Classificação: SI

d) $\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 7y + 8z = 3 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 \\ 13y + 12z = 1 \\ 13y + 12z = 1 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 \\ 13y + 12z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\therefore S = \left\{\left(\frac{8 - 5z}{13}, \frac{1 - 12z}{13}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$

Classificação: SPI

e) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ -19y = -1 \\ -19y = -1 \end{cases} \quad \therefore S = \left\{\left(\frac{11}{19}, \frac{1}{19}\right)\right\}$

Classificação: SPD

f) $\begin{cases} x + y + 2t + z = 4 \\ 2x + 4y + 5t - z = 4 \\ 3x + 3y + 7t + 2z = 10 \\ 6x + 6y - t + z = 14 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y + 2t + z = 4 \\ 2y + t - 3z = -4 \\ t - z = -2 \\ -13t - 5z = -10 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y + 2t + z = 4 \\ 2y + t - 3z = -4 \\ t - z = -2 \\ -18z = -36 \end{cases}$

$\therefore S = \{(0, 1, 1, 2)\}$
Classificação: SPD

g) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8$

Como $D \neq 0$, o sistema homogêneo admite apenas a solução trivial. Assim, concluímos que o conjunto solução é $S = \{(0, 0)\}$.
Classificação: SPD

h) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 38$

Como $D \neq 0$, o sistema homogêneo admite apenas a solução trivial. Assim, concluímos que o conjunto solução é $S = \{(0, 0, 0)\}$.
Classificação: SPD

i) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \sim x + y = 0$

$\therefore S = \{(-y, y), \text{com } y \in \mathbb{R}\}$
Classificação: SPI

j) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \\ 5x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -3y + 10z = 0 \\ -3y + 10z = 0 \\ -6y + 20z = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 & \text{(I)} \\ -3y + 10z = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo em função da variável livre z:

- De (II), temos $y = \frac{10z}{3}$
- Substituindo y por $\frac{10z}{3}$ em (I), obtemos: $x = -\frac{11z}{3}$

$\therefore S = \left\{\left(-\frac{11z}{3}, \frac{10z}{3}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$

Classificação: SPI

15 a) $\begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ 4x - 10y + 2z = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

b) $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ -17y + 8z = 0 \end{cases}$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

16 Escalonando o sistema, temos:

$\begin{cases} x + 8y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 5x + 4y - 2z = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 8y + 2z = 0 \\ -15y - 5z = 0 \\ -36y - 12z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 8y + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$

Logo, o sistema linear é possível e indeterminado, com uma incógnita arbitrária.
Alternativa **b**.

17 $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} - z = -\frac{7}{4} \\ x + \frac{y - z}{2} = -1 \\ x - y = 5 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y - 4z = -7 \\ 2x + y - z = -2 \\ x - y + 0z = 5 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y - 4z = -7 \\ -3y + 7z = 12 \\ -3y + 4z = 12 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y - 4z = -7 \\ -3y + 7z = 12 \\ -3z = 0 \end{cases}$

$\therefore S = \{(1, -4, 0)\}$

18 $\begin{cases} 2x + y - z = -4 \\ x + 3y - 2z = -4 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y - 2z = -4 \\ 2x + y - z = -4 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 3y - 2z = -4 \\ -5y + 3z = 4 \\ -11y + 9z = 16 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 3y - 2z = -4 \\ -5y + 3z = 4 \\ 12z = 36 \end{cases} \quad \therefore S = \{(-1, 1, 3)\}$

Alternativa **b**.

19 $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \\ -y - 3z = -1 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \\ -4z = -1 \end{cases} \quad \therefore S = \left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$

20 a) Atribuindo a z o valor 4, obtemos:

$\begin{cases} x + y + 4 = 6 \\ 3x + 4y + 8 = 17 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = 3$

Logo, uma solução possível é $(-1, 3, 4)$.

b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + 4y + 2z = 17 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = -1 \end{cases}$

$\therefore S = \{(7 - 2z, z - 1, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + 4y + 2z = 17 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 3x + 3y + 3z = 18 \\ 6x + 8y + 4z = 34 \end{cases}$

Adicionando membro a membro essas duas últimas equações, obtemos: $9x + 11y + 7z = 52$

21 $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ x + 0y + z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2y = 4 \\ y - 3z = -7 \\ -y = -2 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - 3z = -7 \\ y = 2 \end{cases} \quad \therefore S = \{(1, 2, 3)\}$

Alternativa **d**.

22 Sob as condições apresentadas, podemos isolar a variável y em cada uma das equações, obtendo:

$\begin{cases} y = -\dfrac{ax}{b} + \dfrac{c}{b} \\ y = -\dfrac{dx}{e} + \dfrac{f}{e} \end{cases}$

As equações do sistema representam funções afins; logo:

a) Se os coeficientes de x forem diferentes, então o sistema será possível e determinado, isto é:

$-\dfrac{a}{b} \neq -\dfrac{d}{e} \Rightarrow$ SPD. Logo, se $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{d}{e}$, então o sistema é possível e determinado.

b) Se os coeficientes de x forem iguais e os termos independentes forem iguais, então o sistema será possível e indeterminado, isto é:

$-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{d}{e}$ e $\dfrac{c}{b} = \dfrac{f}{e} \Rightarrow$ SPI.

Logo: $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f} \Rightarrow$ SPI

c) Se os coeficientes de x forem iguais e os termos independentes forem diferentes, então o sistema será impossível, isto é:

$-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{d}{e}$ e $\dfrac{c}{b} \neq \dfrac{f}{e} \Rightarrow$ SI.

Logo: $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} \neq \dfrac{c}{f} \Rightarrow$ SI

23 a) $\dfrac{12}{3} = \dfrac{8}{2} = \dfrac{4}{1} \Rightarrow$ SPI

b) $\dfrac{5}{1} \neq \dfrac{-3}{2} \Rightarrow$ SPD

c) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{15} \neq \dfrac{2}{4} \Rightarrow$ SI

24 a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Concluímos, assim, que ocorre apenas uma das alternativas: SPI ou SI. Para determinar qual delas ocorre, escalonamos o sistema:

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}$

Logo, o sistema é impossível.

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Concluímos, assim, que ocorre apenas uma das alternativas: SPI ou SI. Para determinar qual delas ocorre, escalonamos o sistema:

$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -9x + 3y = -15 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$

Logo, o sistema é possível e determinado.

25 a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 0$

Logo, o sistema homogêneo é possível e indeterminado.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$

Logo, o sistema é possível e determinado.

26 $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = -4 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5y - 2z = -12 \\ 10y - 4z = -24 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5y - 2z = -12 \quad \text{SPI} \\ 0z = 0 \end{cases}$

Alternativa **c**.

27 $D = \begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 8 \end{vmatrix} = 16 - m^2$

O sistema é possível e determinado se, e somente se, $D \neq 0$, ou seja: $16 - m^2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 4$ e $m \neq -4$
Alternativa **c**.

28 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & -3 & -5 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14m - 42$

O sistema admite uma única solução se, e somente se, $D \neq 0$, ou seja: $14m - 42 \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$

29 $D = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 18 & k \end{vmatrix} = k^2 - 36$

Para que o sistema admita soluções próprias (soluções diferentes da trivial), devemos ter $D = 0$:
$k^2 - 36 = 0 \Rightarrow k = 6$ ou $k = -6$

30 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -k & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2k^2 - 5k - 2$

Para que o sistema admita soluções diferentes da trivial, devemos ter $D = 0$:
$-2k^2 - 5k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2$ ou $k = -\frac{1}{2}$

31 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & m \end{vmatrix} = -5m + 10$

O sistema admite soluções não nulas se, e somente se, $D = 0$, ou seja: $-5m + 10 = 0 \Rightarrow m = 2$

32 Uma condição necessária (mas não suficiente) para que as retas sejam paralelas coincidentes é que o determinante D da matriz dos coeficientes seja nulo, isto é:

$\begin{vmatrix} m+1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = -2$

Essa condição não é suficiente, porque para $D = 0$ podem ocorrer duas classificações: SPI ou SI.
Substituindo m por -2, obtemos:

$\begin{cases} -x - y = 2 \\ 3x + 3y = 2n \end{cases}$

Observe que a classificação depende de n.
Escalonando o sistema, obtemos:

$\begin{cases} -x - y = 2 \\ 0x + 0y = 2n + 6 \end{cases}$

Para que as retas sejam paralelas e coincidentes, o sistema deve ser possível e indeterminado.
Assim $m = -2$ e $n = -3$
Alternativa **e**.

33 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\,\text{sen}\,\alpha - 1$

O sistema admite mais de uma solução se, e somente se, $D = 0$, ou seja: $2\,\text{sen}\,\alpha - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

34 $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x + 5y \\ 3x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} x + 5y = \lambda x \\ 3x - y = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)x - 5y = 0 \\ -3x + (1 + \lambda)y = 0 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -3 & 1 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16$

A equação matricial admite mais de uma solução se, e somente se, $D = 0$, ou seja:
$\lambda^2 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$ ou $\lambda = -4$
Alternativa **c**.

35 Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes, temos:

$D = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 8 \end{vmatrix} = 16 - a^2$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de a para que o sistema seja possível e determinado:
$16 - a^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 4$ e $a \neq -4$
Logo, $a \neq 4$ e $a \neq -4 \Rightarrow$ SPD.
Para $a = 4$ ou $a = -4$, temos $D = 0$; nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. A classificação correta é revelada pelo escalonamento do sistema para cada um desses valores de a:

- Para $a = 4$, temos:

  $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 8y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

  Logo, $a = 4 \Rightarrow$ SPI.
- Para $a = -4$, temos:

  $\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ -4x + 8y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$

  Logo, $a = -4 \Rightarrow$ SI.

Resumindo:
$a \neq 4$ e $a \neq -4 \Rightarrow$ SPD
$a = 4 \Rightarrow$ SPI
$a = -4 \Rightarrow$ SI

36 Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes, temos:

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & k \end{vmatrix} = 40 - 4k$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de a para que o sistema seja possível e determinado:
$40 - 4k \neq 0 \Rightarrow k \neq 10$
Logo, $k \neq 10 \Rightarrow$ SPD
Para $k = 10$, temos $D = 0$; nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. A classificação correta é revelada pelo escalonamento do sistema para $k = 10$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 0y - z = 3 \\ x + 6y + 10z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 0x - 4y - 7z = -1 \\ 0x + 4y + 7z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 0x - 4y - 7z = -1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Logo, $k = 10 \Rightarrow$ SPI
Resumindo:
$k \neq 10 \Rightarrow$ SPD
$k = 10 \Rightarrow$ SPI

37 a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & p & -2 \\ p & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2p^2 - 4p + 2$

Como o sistema é homogêneo, temos:
$D \neq 0 \Rightarrow$ SPD e $D = 0 \Rightarrow$ SPI, ou seja:
$2p^2 - 4p + 2 \neq 0 \Rightarrow$ SPD e
$2p^2 - 4p + 2 = 0 \Rightarrow$ SPI
Resolvendo a equação $2p^2 - 4p + 2 = 0$, obtemos a raiz 1; portanto:

$$\begin{cases} p \neq 1 \Rightarrow \text{SPD} \\ p = 1 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$$

b) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ p & 2 & -1 \\ 8 & p & -5 \end{vmatrix} = p^2 + 7p - 44$

Como o sistema é homogêneo, temos:
$D \neq 0 \Rightarrow$ SPD e $D = 0 \Rightarrow$ SPI, ou seja:
$p^2 - 7p - 44 \neq 0 \Rightarrow$ SPD e
$p^2 - 7p - 44 = 0 \Rightarrow$ SPI
Resolvendo a equação $p^2 - 7p - 44 = 0$, obtemos as raízes 11 e -4; portanto:

$$\begin{cases} p \neq 4 \text{ e } p \neq -11 \Rightarrow \text{SPD} \\ p = 4 \text{ ou } p = -11 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$$

38 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & m & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6m + 4 + 12 - 6m - 4 - 12 = 0$

Com $D = 0$ para qualquer valor real de m, concluímos que o sistema é possível e indeterminado para todo m, com $m \in \mathbb{R}$.

39 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & p \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 5p + 2 - 5p - 20 - 1 = -9$

Com $D \neq 0$ para qualquer valor real de p, concluímos que o sistema é possível e determinado para todo p, com $p \in \mathbb{R}$.

40 Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ 5x + 10y - 5z = k \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0z = 0 \\ 0z = k - 5 \end{cases}$$

Para que esse sistema seja possível e indeterminado, devemos ter $k - 5 = 0$, ou seja, $k = 5$.
Alternativa **d**.

41 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 2a - 4$

O sistema é possível e determinado se, e somente se, $2a - 4 \neq 0$, ou seja, $a \neq 2$.
Logo, $a \neq 2 \Rightarrow$ SPD
Para $a = 2$, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = b \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 0x + 0y = b - 10 \end{cases}$$

Observamos que:
- para $b - 10 = 0$, o sistema é possível e indeterminado
- para $b - 10 \neq 0$, o sistema é impossível

Resumindo:

$$\begin{cases} \text{para } a \neq 2 \text{, o sistema é possível e determinado} \\ \text{para } a = 2 \text{ e } b = 10 \text{, o sistema é possível e indeterminado} \\ \text{para } a = 2 \text{ e } b \neq 10 \text{, o sistema é impossível} \end{cases}$$

Assim, concluímos: a) V, b) F, c) F, d) F

42 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ a & 4 & 4 \end{vmatrix} = 10a - 20$

Para o sistema ser impossível, é necessário que $D = 0$, ou seja: $10a - 20 = 0 \Rightarrow a = 2$
Substituindo a por 2 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -3 \\ 3x + y + 6z = -9 \\ 2x + 4y + 4z = b \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 2z = -3 \\ -5y = 0 \\ 0z = b + 6 \end{cases}$$

Observamos que, para esse sistema ser impossível, devemos ter $b + 6 \neq 0$, ou seja, $b \neq -6$.
Concluímos, então, que o sistema apresentado é impossível para $a = 2$ e $b \neq -6$.
Alternativa **e**.

43 $D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 3\alpha - 6$

O sistema é possível e determinado se, e somente se, $D \neq 0$, ou seja: $3\alpha - 6 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 2$

Substituindo α por 2 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ -x - 7y + 5z = \beta \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ -x - 7y + 5z = \beta \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ -5y + 4z = 5 \\ -5y + 4z = \beta - 2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ -5y + 4z = 5 \\ 0z = \beta - 7 \end{cases}$$

Observamos que:

- para $\beta - 7 = 0$, o sistema é possível e indeterminado
- para $\beta - 7 \neq 0$, o sistema é impossível

Resumindo:

$$\begin{cases} \text{para } \alpha \neq 2\text{, o sistema é possível e determinado} \\ \text{para } \alpha = 2 \text{ e } \beta = 7\text{, o sistema é possível e indeterminado} \\ \text{para } \alpha = 2 \text{ e } \beta \neq 7\text{, o sistema é impossível} \end{cases}$$

Alternativa **d**.

44 Para que as retas sejam paralelas distintas, o sistema a seguir deve ser impossível:

$$\begin{cases} px - y = -2 \\ 3x - y = -q \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -p + 3$$

Para o sistema ser impossível, é necessário que $D = 0$, ou seja: $-p + 3 = 0 \Rightarrow p = 3$

Substituindo p por 3 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x - y = -q \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 0y = 2 - q \end{cases}$$

Para esse sistema ser impossível, devemos ter: $2 - q \neq 0$, ou seja, $q \neq 2$

Concluímos, então, que as retas são paralelas distintas se, e somente se, $p = 3$ e $q \neq 2$.

45 $D = \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 7m - 4$

Para o sistema ser possível e indeterminado, é necessário que $D = 0$, ou seja:

$7m - 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{7}$

Substituindo m por $\frac{4}{7}$ no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x + \frac{4y}{7} - z = 1 \\ 2x - y + z = n \\ 3x + y - 2z = 2n \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 7x + 4y - 7z = 7 \\ 2x - y + z = n \\ 3x + y - 2z = 2n \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 7x + 4y - 7z = 7 \\ 15y - 21z = 14 - 7n \\ 5y - 7z = 21 - 14n \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 7x + 4y - 7z = 7 \\ 15y - 21z = 14 - 7n \\ 0z = \dfrac{49 - 35n}{3} \end{cases}$$

Esse sistema terá infinitas soluções se, e somente se, $\frac{49 - 35n}{3} = 0$, ou seja, $n = \frac{7}{5}$.

Concluímos, então, que o sistema apresentado tem infinitas soluções para $m = \frac{4}{7}$ e $n = \frac{7}{5}$.

Alternativa **d**.

46
$$\begin{cases} x + 2y - t + z = 5 \\ x + y + 2t - z = 1 \\ 3x + 4y + at - z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - t + z = 5 \\ -y + 3t - 2z = -4 \\ -2y + (a + 3)t - 4z = -14 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - t + z = 5 \\ -y + 3t - 2z = -4 \\ (a - 3)t = -6 \end{cases}$$

Observamos que:

- para $a - 3 = 0$, o sistema é impossível
- para $a - 3 \neq 0$, o sistema é possível e indeterminado

Resumindo:

$$\begin{cases} a = 3 \Rightarrow \text{SI} \\ a \neq 3 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$$

47 Resolvemos o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtendo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 4$$

Obtemos, então, o valor de k de modo que o par (1, 4) também seja solução da terceira equação.

$k \cdot 1 + k \cdot 4 = 20 \Rightarrow k = 4$

Assim, concluímos:

$$\begin{cases} k = 4 \Rightarrow \text{SPD} \\ k \neq 4 \Rightarrow \text{SI} \end{cases}$$

Alternativa **a**.

48 Resolvemos o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtendo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 1$$

Obtemos, então, os valores de k de modo que o par (0, 1) seja também solução da terceira equação:
$0 + k^3 \cdot 1 = k \Rightarrow k^3 - k = 0$
$\therefore\ k(k^2 - 1) = 0 \Rightarrow k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = -1$

Assim, concluímos:

$$\begin{cases} k = 0 \text{ ou } k = 1 \text{ ou } k = -1 \Rightarrow \text{SPD} \\ k \neq 0 \text{ e } k \neq 1 \text{ e } k \neq -1 \Rightarrow \text{SI} \end{cases}$$

Alternativa **a**.

49 Resolvemos o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtendo:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 5y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = -1$$

Obtemos, então, o valor de k de modo que o par (2, −1) também seja solução da terceira equação:
$2 - 3 \cdot (-1) = k \Rightarrow k = 5$

Assim, concluímos:

$$\begin{cases} k = 5 \Rightarrow \text{SPD} \\ k \neq 5 \Rightarrow \text{SI} \end{cases}$$

Alternativa **b**.

50 Resolvemos o sistema formado pelas três primeiras equações, obtendo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1 \text{ e } z = 1$$

Obtemos, então, o valor de m de modo que o terno (0, 1, 1) também seja solução da quarta equação:
$-2 \cdot 0 - 9 \cdot 1 + m \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = 9$

Assim, concluímos:

$$\begin{cases} m = 9 \Rightarrow \text{SPD} \\ m \neq 9 \Rightarrow \text{SI} \end{cases}$$

51 As retas terão um único ponto comum se, e somente se, o sistema abaixo for possível e determinado.

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x - y = -1 \\ x - y = -k \end{cases}$$

Resolvemos o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtendo:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 7$$

Obtemos, então, o valor de k de modo que o par (2, 7) também seja solução da última equação:
$2 - 7 = -k \Rightarrow k = 5$
Assim, concluímos que as retas terão um único ponto em comum para $k = 5$.

52 a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$

b) $\begin{vmatrix} \text{sen}\,\frac{\pi}{5} & -\cos\frac{\pi}{5} \\ \cos\frac{\pi}{5} & \text{sen}\,\frac{\pi}{5} \end{vmatrix} = \text{sen}^2\,\frac{\pi}{5} + \cos^2\frac{\pi}{5} = 1$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -16 + 16 + 10 = 10$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{31} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot (-19) = -57$

53 $\begin{vmatrix} 0 & y & z & w \\ x & 0 & 0 & w \\ x & 0 & z & 0 \\ x & y & 0 & 0 \end{vmatrix} = wA_{14} + wA_{24}$, em que:

$A_{14} = xyz$ e $A_{24} = 2xyz$

Portanto, $\begin{vmatrix} 0 & y & z & w \\ x & 0 & 0 & w \\ x & 0 & z & 0 \\ x & y & 0 & 0 \end{vmatrix} = wxyz + w2xyz = 3wxyz$

Alternativa **d**.

54 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2A_{21} = 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot (-1)^3 \cdot \left[3 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \right.$

$\left. + 1 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right] =$

$= 2 \cdot (-1)^3 \cdot [3 \cdot (-1)^6 \cdot (-24) + 1 \cdot (-1)^7 \cdot (-8)] = 128$

55 Para que o sistema seja possível e determinado, basta que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema seja não nulo, isto é:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & m & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow mA_{13} + 1 \cdot A_{23} \neq 0$, em que:

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ e

$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Assim:
$m \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$
Logo, o sistema é possível e determinado para qualquer valor real de m, com $m \neq \frac{1}{2}$.

56 Para que o sistema seja possível e indeterminado, basta que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema seja nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2A_{24} + kA_{44} = 0, \text{ em que:}$$

$$A_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ e}$$

$$A_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Assim:
$-2A_{24} + kA_{44} = 0 \Rightarrow k = -2$
Logo, para $k = -2$, o sistema admite soluções diferentes da trivial.

57 $$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = 5A_{41} + pA_{44}, \text{ em que:}$$

$$A_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \text{ e}$$

$$A_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -20$$

Assim:
$D = 5A_{41} + pA_{44} = -20 - 20p$
Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de p para que o sistema seja possível e determinado:
$-20 - 20p \neq 0 \Rightarrow p \neq -1$
Logo, $p \neq -1 \Rightarrow$ SPD
Para $p = -1$, temos $D = 0$; nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado.
Substituindo p por -1 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 2t + z = 1 \\ 2x - y - t - z = 2 \\ x - 3y + t - 2z = 1 \\ 5x + 0y + 0t - z = 5 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 2t + z = 1 \\ -5y - 5t - 3z = 0 \\ -5y - t - 3z = 0 \\ -10y - 10t - 6z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 2t + z = 1 \\ -5y - 5t - 3z = 0 \quad \text{(SPI)} \\ 4t + 0z = 0 \end{cases}$$

Logo, $p = -1 \Rightarrow$ SPI

Resumindo: $\begin{cases} p \neq -1 \Rightarrow \text{SPD} \\ p = -1 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$

58 Para $a_{ij} = j(i - 1)$, temos que para $i = 1$ (1ª linha) todos os elementos são nulos; pela P2, temos: det $A = 0$.

59 Para $a_{ij} = i(j + 1)$, temos que as linhas da matriz são múltiplas; pela P6, temos: det $A = 0$.

60 Pela P4, temos:

$$\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4D \text{ e } \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = 3D$$

Então:
$4D = 3D \Rightarrow D = 0$
Logo, $D = 0$.

61 As matrizes A e B são transpostas; pela P1, temos det A = det B.

62 Pela P4, temos:
det $(2A) = 2^4$ det $A = 16 \cdot 5 = 80$
Logo, det $(2A) = 80$.

63 Pela P4, temos:
det $(kA) = k^4 \cdot$ det A
Assim:
$245 = k^4 \cdot 5 \Rightarrow k^4 = 49$
$\therefore k = \pm\sqrt{7}$
Logo, $k = \pm\sqrt{7}$.

64 Pela P4, temos:
det $(2A) = 2^n$ det $A \Rightarrow 2^n$ det $A = 32$ det A
Como det $A \neq 0$, temos:
$2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5$
Logo, $n = 5$.

65 Pela P4, temos: det $(-B) = (-1)^4$ det B
Assim:
det $(-B)$ = det $B \Rightarrow$ det $B = 3$
Logo, det $B = 3$.

66 Pela P4, temos: det $(-C) = (-1)^3$ det $C \Rightarrow$
$\Rightarrow$ det $(-C) = -$det C
$\therefore 6 = -$det $C \Rightarrow$ det $C = -6$
Logo, det $C = -6$.

67 Pela P4, temos: det $(-A) = (-1)^n$ det A
Assim:
det $(-A)$ = det $A \Rightarrow$ det $A = (-1)^n$ det A
$\therefore (-1)^n = 1 \Rightarrow n$ é par
Alternativa **a**.

68 Sendo $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, com $b_{ij} = \dfrac{2a_{ij}}{3}$, temos:

$$B = \left(\frac{2 \cdot 2a_{ij}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot A$$

Logo, det B = det $\left(\dfrac{2}{3} \cdot A\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \cdot$ det A =

$= \dfrac{16}{81} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{4}{27}$.

Alternativa **b**.

69 **a)** A coluna 4 é combinação linear das colunas 1 e 2. Essa combinação linear pode ser descrita por:
$a_{i4} = 2a_{i1} + a_{i2}$, com $1 \leq i \leq 4$
b) Pela propriedade P9, temos det $A = 0$.

70 $$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 10 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 10 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 10 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot (-5 + 80 + 40 - 20) = 95$$

71 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1) = 15$$

72 $$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 & 0 \\ 2 & a+4 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & b+9 & 0 \\ 5 & 12 & 16 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & b & 0 \\ 5 & 2 & 1 & c \end{vmatrix} = abc$$

Alternativa **e**.

73 $$A \cdot B^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\therefore A \cdot B^t = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B^t = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

74 Pelo teorema de Binet, $\det (AB) = \det A \cdot \det B$.

$$\det (AB) = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 94 \text{ e } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 27$$

Logo, $\det B = \frac{94}{27}$.

75 $A^2 = A \Rightarrow \det (A^2) = \det A$
$\therefore (\det A)^2 = \det A \Rightarrow (\det A)^2 - \det A = 0$
$\therefore \det A(\det A - 1) = 0 \Rightarrow \det A = 0$ ou $\det A - 1 = 0$
Logo, $\det A = 0$ ou $\det A = 1$.
Alternativa **c**.

76 $A^2 - 3A = 0 \Rightarrow A^2 = 3A$
$\therefore \det (A^2) = \det (3A) \Rightarrow (\det A)^2 = 3^4 \cdot \det A$
$\therefore \det A = 3^4 = 81$
Alternativa **c**.

77 $A^3 - 2A = 0 \Rightarrow A^3 = 2A$
$\therefore \det (A^3) = \det (2A) \Rightarrow (\det A)^3 = 2^3 \cdot \det A$
$\therefore (\det A)^2 = 8 \Rightarrow \det A = \pm 2\sqrt{2}$

78 Uma matriz é invertível se, e somente se, seu determinante é diferente de zero. A única alternativa que apresenta uma matriz invertível é a **e**, pois:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Alternativa **e**.

79 Para que uma matriz seja invertível, basta que seu determinante seja não nulo:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & x & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 5x + 15 \neq 0$

$\therefore\ x \neq -3$

Logo, para que A seja invertível, devemos ter $x \neq -3$.

80 Para que a matriz admita inversa, basta que seu determinante seja diferente de zero:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 5 \\ x^2 & 4 & 25 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 \neq 0$

$\therefore\ x \neq 2$ e $x \neq 5$

Alternativa **c**.

81 Calculando o determinante da matriz, temos:

$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & x \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5(x + 1) + 5x - 10x - 2 = 3$

Como, independentemente de x, o determinante é não nulo, a matriz é invertível para qualquer valor de x.

82 Calculando o determinante da matriz, temos:

$\begin{vmatrix} 1 & x+2 & 2 \\ 1 & x+5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Assim, para qualquer valor de x, a matriz não admite inversa.

83 a) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -8$

Portanto, B é invertível, e sua inversa é dada por:

$B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \cdot \overline{B}$, em que $\overline{B}$ é a matriz adjunta.

Cálculo de $\overline{B}$:

$B_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$　　$B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$

$B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$　　$B_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$

$B_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$　　$B_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$B_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$　　$B_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$

$B_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

Assim: $\overline{B} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 7 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ e portanto:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \overline{B} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

b) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$

Portanto, C é invertível, e sua inversa é dada por:

$C^{-1} = \dfrac{1}{\det C} \cdot \overline{C}$

Cálculo de $\overline{C}$:

$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$　　$C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$　　$C_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$C_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$　　$C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$　　$C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$

Assim: $\overline{C} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 \\ 4 & 8 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ e portanto:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$

Logo, B não é invertível.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$ C é invertível.

Calculando os cofatores dos elementos de C, temos:

$C_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -16$

$C_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$

$C_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2$

$C_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -3$

$C_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$

$C_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$C_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = 13$

$C_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = -5$

$C_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1$

Logo cof C $= \begin{bmatrix} -16 & 7 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 13 & -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{C} = \begin{bmatrix} -16 & -3 & 13 \\ 7 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Concluímos, então:

$C^{-1} = \dfrac{\overline{C}}{\det C} = \begin{bmatrix} -16 & -3 & 13 \\ 7 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercícios contextualizados

84 **a)** $3x + 5y + 10z = 48$

b) Para $x = 1$ e $y = 1$, temos:
$3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 10z = 48 \Rightarrow z = 4$
Para $x = 1$ e $y = 3$, temos:
$3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 10z = 48 \Rightarrow z = 3$
Para $x = 11$ e $y = 3$, temos:
$3 \cdot 11 + 5 \cdot 3 + 10z = 48 \Rightarrow z = 0$
Para $x = 6$ e $y = 4$, temos:
$3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 10z = 48 \Rightarrow z = 1$
Assim, quatro soluções da equação são:
(1, 1, 4), (1, 3, 3), (11, 3, 0) e (6, 4, 1)

85 Sendo V e E, respectivamente, os números de vitórias e de empates dessa equipe, temos: $3V + E = 12$
Os possíveis valores de V e E são dados nas linhas da tabela:

V	E
0	12
1	9
2	6
3	3
4	0

Logo, a equipe pode ter realizado 4, 6, 8, 10 ou 12 partidas.

86 **a)** $5x + 10y + 15z = 40$

b) Da equação do item **a**, temos: $x = 8 - 2y - 3z$
Os possíveis valores de y, z e x são dados nas linhas da tabela:

y	z	x
1	1	3
2	1	1

Logo, Priscila pode ter retirado nessa jogada 1 vareta verde, 2 azuis e 1 amarela, ou 3 verdes, 1 azul e 1 amarela.

87 Sendo, respectivamente, s e c as quantidades de lâmpadas de 60 watts e de 100 watts compradas por Pedro, temos:
$0{,}65s + 1{,}50c = 9{,}50 \Rightarrow 65s + 150c = 950$

$\therefore\ s = \dfrac{950 - 150c}{65}$

Observamos que:
- $s > 0$; portanto, devemos ter $c < \dfrac{950}{150} = 6{,}333...$
- s e c são números naturais não nulos

Assim, atribuindo a c os valores naturais 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e obtendo os respectivos valores de s, constatamos que apenas uma solução nos interessa: $c = 2$ e $s = 10$. (As outras tentativas não convêm porque resultam em um número não natural como valor de s.)
Alternativa **e**.

88 **a)** A batata e a soja possuem, respectivamente, 19% e 35% de carboidratos. Assim, temos:
$0{,}19 \cdot 400 + 0{,}35y = 300 \Rightarrow y = 640$
Logo, o adulto deverá consumir 640 g de soja.

b) $0{,}19x + 0{,}35y = 300 \Rightarrow 19x + 35y = 30.000$

89 Indicando por x e y os preços, em real, do arroz e do açúcar, respectivamente, temos:
- compra de Cordeiro: $x + 2y = 3{,}10$ (I)
- compra de Conceição: $8x + 16y + 8 \cdot 0{,}54$, ou seja, $8(x + 2y) + 4{,}32$ (II)

Substituindo (I) em (II), concluímos que Conceição gastou $8 \cdot 3{,}10 + 4{,}32 = 29{,}12$; portanto, ela gastou R$ 26,02 a mais que Cordeiro.

90 Sendo x e y os números de copos de leite e de colheres de aveia, respectivamente, que satisfaçam as necessidades enunciadas, temos:

$$\begin{cases} 6{,}4x + 0{,}8y = 8{,}8 \\ 10x + 2y = 16 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 1$ e $y = 3$.
Alternativa **b**.

91 Sendo L e C, respectivamente, os números de lançamentos e de catálogos da videolocadora, temos:

$$\begin{cases} L + C = 1.000 \\ \dfrac{4L}{5} + \dfrac{C}{5} = 260 \end{cases} \Rightarrow L = 100 \text{ e } C = 900$$

Logo, o número de DVDs de catálogos locados foi um quinto de 900, ou seja, 180.
Alternativa **e**.

92 $$\begin{cases} \dfrac{NV}{NF} + \dfrac{NA}{NV} = 1{,}2 \\ \dfrac{NV}{2NF} + \dfrac{NA}{NV} = 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{NV}{NF} = 0{,}4 \text{ e } \dfrac{NA}{NV} = 0{,}8$$

Adicionando 1 a ambos os membros da igualdade $\dfrac{NA}{NV} = 0{,}8$, obtemos:

$\dfrac{NA + NV}{NV} = 1{,}8$

Como $NA + NV = 3.600$, temos:

$\dfrac{3.600}{NV} = 1{,}8 \Rightarrow NV = 2.000$

Substituindo NV por 2.000 na equação $\dfrac{NV}{NF} = 0{,}4$, concluímos:

$\dfrac{2.000}{NV} = 0{,}4 \Rightarrow NF = 5.000$

Alternativa **c**.

93 Sendo a, b e c, respectivamente, as quantidades, em milímetro cúbico, dos poluentes A, B e C contidas em cada litro da amostra, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ a = 2b \\ c = \dfrac{3b}{4} \end{cases} \Rightarrow a = 8,\ b = 4 \text{ e } c = 3$$

Logo, cada litro da amostra continha 3 mm^3 do poluente C.

94 Sendo m, p e l, respectivamente, as quantidades de caixas de maçãs, peras e laranjas transportadas pelo caminhão, temos:

$$\begin{cases} m + p + l = 140 \\ 50m + 60p + 100l = 10.000 \\ 20m + 40p + 10l = 3.300 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} m + p + l = 140 \\ 5m + 6p + 10l = 1.000 \\ 2m + 4p + l = 330 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m = 40$, $p = 50$ e $l = 50$

Assim, concluímos que:

- a quantidade de maçãs é $50 \cdot 40 = 2.000$
- a quantidade de peras é $60 \cdot 50 = 3.000$
- a quantidade de laranjas é $100 \cdot 50 = 5.000$

95 Sendo q a quantia disponível e sendo a e b os preços de cada carro dos modelos A e B, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} q + 10.000 = 5a + 2b \\ q - 29.000 = 3a + 3b \\ q = 8b \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow q = 200.000$, $a = 32.000$ e $b = 25.000$

Logo, o comerciante dispõe de R$ 200.000,00.

96 Sendo u, c e d, respectivamente, as quantidades de células de um, cinco e dez reais que o comerciante necessita, temos:

$$\begin{cases} u + c + d = 92 \\ u + 5c + 10d = 500 \\ u = d \end{cases} \Rightarrow u = 40,\ c = 12 \text{ e } d = 40$$

Logo, são necessárias 12 cédulas de cinco reais.
Alternativa **a**.

97 Sendo v, c e d, respectivamente, as quantidades de cédulas de vinte, cinco e dez reais que Fernando sacou, temos:

$$\begin{cases} v + d + c = 14 \\ 20v = 10d \\ 20v = 5c \\ 10d = 5c \end{cases} \Rightarrow v = 2,\ d = 4 \text{ e } c = 8$$

Logo, a quantia sacada, em real, é dada por
$20 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 8$, ou seja, R$ 120,00.
Alternativa **a**.

98 Sendo x, y e z, respectivamente, os comprimentos, em quilômetro, dos trechos concedidos à primeira, segunda e terceira empresas, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1.040 \\ x = 0{,}6(y + z) \\ y = 0{,}3(x + y) \end{cases} \Rightarrow x = 390,\ y = 240 \text{ e } z = 410$$

Logo, o trecho concedido à terceira empresa é de 410 km.
Alternativa **c**.

99 Sendo, a, l e m as quantias, em real, de Amélia, Lúcia e Maria, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a - 3 = l + 3 \\ l + \dfrac{m}{3} = a + 6 \\ a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow a = 24,\ l = 18 \text{ e } m = 36$$

Assim, concluímos que Amélia possui R$ 24,00, Lúcia R$ 18,00 e Maria R$ 36,00.

100 Sendo, a, b e c os números de pontos correspondentes às regiões A, B e C, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} b = \dfrac{a}{2} \\ c = \dfrac{b}{5} \\ 5a + 2b + 2c = 62 \end{cases} \Rightarrow a = 10,\ b = 5 \text{ e } c = 1$$

Logo, o número de pontos feitos por Pedro foi:
$8 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 97$

101 Sendo t, d e s os preços, em real, do televisor, do DVD e do aparelho de som, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} t + d = 1.110 \\ d + s = 1.400 \\ t + s = 1.600 \end{cases} \Rightarrow t = 650,\ d = 450 \text{ e } s = 950$$

Logo, o preço, em real, dos três produtos juntos é dado por $650 + 450 + 950$, ou seja, R$ 2.050,00.
Alternativa **c**.

102 Sendo, respectivamente, x, y e z os custos mensais, em real, para a manutenção dos rebanhos bovino, ovino e caprino, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 126.000 \\ x = 1{,}1(y + z) \\ y = \dfrac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 66.000$, $y = 22.000$ e $z = 38.000$

Assim, concluímos:

a) C, pois $y = 22.000$ reais.

b) E, pois $z = 38.000$ reais.

c) C, pois o quociente de 66.000 por 110 é 600.

d) E, pois o montante M obtido com essa aplicação é $M = 126.000(1{,}01)^{12} = 126.000[(1{,}01)^4]^3 = 126.000 \cdot (1{,}04)^3 \approx 141.732$. Portanto, o juro produzido, que é de 15.732, é menor que 80% de 22.000.

103 Sendo a, b e c, respectivamente, as quantidades, em litro, dos sucos A, B e C, sob as condições estabelecidas, temos:

$$\begin{cases} 5a + 4b + 2c = 27 \\ 20a + 30b + 30c = 180 \\ 30a + 20b + 50c = 230 \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ b = 2 \text{ e } c = 2$$

Logo, o volume total, em litro, é dado por:
$3 + 2 + 2 = 7$.
Alternativa **b**.

104 Sendo e, s e r, respectivamente, os preços unitários, em real, das esmeraldas, safiras e rubis, temos:

$$\begin{cases} 24e = 12r \\ 24e = 8s \\ 4e + 6r + 4s = 350.000 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow e = 12.500$, $s = 37.500$ e $r = 25.000$

Concluímos, então, que a esmeralda custa R$ 12.500,00, a safira R$ 37.500,00 e o rubi R$ 25.000,00.

105 Sendo a, b e c as quantias, em milhares de real, aplicadas nos fundos A, B e C, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 50 & \text{(I)} \\ b = c + 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$a + c + 2 + c = 50 \Rightarrow a + 2c = 48$

$\therefore c = \dfrac{48 - a}{2} \Rightarrow c = 24 - \dfrac{a}{2}$

Como $a > 0$, temos $c < 24$.

Alternativa **c**.

106 Sendo a e b, respectivamente, as áreas dos municípios A e B, e t a área total da fazenda, temos:

$$\begin{cases} 0{,}08a + 0{,}01b = t & \text{(I)} \\ b = 10a & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$0{,}08a + 0{,}01 \cdot 10a = t \Rightarrow 0{,}18a = t$

$\therefore \dfrac{a}{t} = \dfrac{1}{0{,}18} \Rightarrow \dfrac{a}{t} = \dfrac{50}{9}$

Multiplicando ambos os membros por 0,08, concluímos:

$0{,}08 \cdot \dfrac{a}{t} = 0{,}08 \cdot \dfrac{50}{9} \Rightarrow \dfrac{0{,}08a}{t} = \dfrac{4}{9}$

Logo, a razão entre a parte da fazenda que está em A e a área total da fazenda é $\dfrac{4}{9}$.

Alternativa **c**.

107 Sendo x, y e z, respectivamente, as quantidades compradas de lápis, cadernos e canetas, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0{,}50x + 10y + 3z = 100 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 100 & \text{(I)} \\ 19y + 5z = 100 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $z = \dfrac{100 - 19y}{5}$

Como x, y e z são números naturais, os únicos valores possíveis que satisfazem essa última igualdade são $y = 5$ e $z = 1$. Substituindo esses valores em (I), concluímos que $x = 94$.

Logo, foram comprados 94 lápis.

108 Sendo M, V, C e N, respectivamente, os valores das liras de Módena, Veneza, Corfu e Negroponte, temos:

$$\begin{cases} 100M = 115V \\ 180V = 150C \\ 240C = 360N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = \dfrac{115V}{100} & \text{(I)} \\ V = \dfrac{150C}{180} & \text{(II)} \\ C = \dfrac{360N}{240} & \text{(III)} \end{cases}$$

(II) em (I) $\Rightarrow M = \dfrac{115}{100} \cdot \dfrac{150C}{180}$ (IV)

(III) em (IV) $\Rightarrow M = \dfrac{115}{100} \cdot \dfrac{150}{180} \cdot \dfrac{360N}{240}$

$\therefore M = \dfrac{23N}{16}$

Multiplicando ambos os membros por $666 \cdot \dfrac{16}{23}$, obtemos:

$666 \cdot \dfrac{16}{23} \cdot M = 666 \cdot \dfrac{16}{23} \cdot \dfrac{23N}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow 666\ N = \dfrac{10.656M}{23} \approx 463M$

Alternativa **e**.

109 Sendo a, b e c as quantidades, em tonelada, de areia, brita e cimento, respectivamente, que compõem as 40 toneladas de concreto, das quais 15% são constituidas de água, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 34 \\ 60a + 30b + 150c = 2.040 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c = 34 \\ -30b + 90c = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema, concluímos que $\dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{3}$.

Alternativa **b**.

110 **a)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 23 \\ x + y + 4z = 25 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 23 & \text{(I)} \\ 0x - y + z = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos: $y = z - 2$

Substituindo y por $z - 2$ em (I), obtemos: $x = 27 - 5z$

b) Como x, y e z devem ser números inteiros, com $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $y = z - 2$ e $x = 27 - 5z$, concluímos que z é inteiro e $3 \leqslant z \leqslant 5$. Assim:

- para $z = 3$, temos $y = 1$ e $x = 12$
- para $z = 4$, temos $y = 2$ e $x = 7$
- para $z = 5$, temos $y = 3$ e $x = 2$

Concluímos, então, que Pedro deseja comprar 12 borrachas, 1 lápis e 3 canetas; ou 7 borrachas, 2 lápis e 4 canetas; ou 2 borrachas, 3 lápis e 5 canetas.

111 Sendo s, r e t, respectivamente, os preços unitários, em real, do sanduíche, do refrigerante e da torta, temos:

$$\begin{cases} t + 3s + 7r = 22{,}50 \\ t + 4s + 10r = 30{,}50 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} t + 3s + 7r = 22{,}50 & \text{(I)} \\ s + 3r = 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvemos o sistema em função da variável livre r:

- De (II), obtemos: $s = 8 - 3r$
- Substituindo s por $8 - 3r$, em (I), obtemos: $t + 3(8 - 3r) + 7r = 22{,}50 \Rightarrow t = 2r - 1{,}50$

Assim, concluímos:

$s + r + t = 8 - 3r + r + 2r - 1{,}50 = 6{,}50$

Alternativa **b**.

112 Sendo x, y e z, respectivamente, os números de atletas classificados com 18, 19 e 20 pontos, temos:

$$\begin{cases} 18x + 19y + 20z = 116 & \text{(I)} \\ \quad\quad\quad y + \quad z = 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvemos o sistema em função da variável livre z:

- De (II), obtemos: $y = 4 - z$
- Substituindo y por $4 - z$ em (I), obtemos:

$$18x + 19(4 - z) + 20z = 116 \Rightarrow x = \frac{40 - z}{18}$$

Como x, y e z são números naturais, com $y \leqslant 4$ e $z \leqslant 4$, o único valor possível para z é 4.

$$z = 4 \Rightarrow x = \frac{40 - 4}{18} = 2$$

Substituindo x e z por 4 e 2, respectivamente, em (I), obtemos: $18 \cdot 4 + 19y + 20 \cdot 4 = 116 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 0$

Logo, o número de atletas classificados é dado por: $2 + 0 + 4 = 6$.

113 a) Para que as retas sejam paralelas distintas, o sistema abaixo deve ser impossível:

$$\begin{cases} 0{,}05x - y = -5.000 \\ (k - 0{,}05)x - y = 5.000 \end{cases}$$

Uma condição necessária para que esse sistema seja impossível é que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo:

$$\begin{vmatrix} 0{,}05 & -1 \\ k - 0{,}05 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 0{,}1$$

Substituímos k por 0,1 no sistema:

$$\begin{cases} 0{,}05x - y = -5.000 \\ 0{,}05x - y = 5.000 \end{cases}$$ equações incompatíveis

Logo, para $k = 0{,}1$ o sistema é impossível e, portanto, as retas são paralelas distintas.

b) $L(x) > 0 \Rightarrow (0{,}1 - 0{,}05)x - 5.000 > 0$

$\therefore\ 0{,}05x > 5.000 \Rightarrow x > 100.000$

Logo, o fabricante ganhará algum dinheiro se forem vendidas mais de 100.000 garrafas.

114 a) Como a vazão é constante, temos:

$$\frac{x}{k} = \frac{y}{2k - 6} \Rightarrow (2k - 6)x - ky = 0$$

Indicando por c a capacidade do tanque, temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = c \\ (2k - 6)x - ky = 0 \end{cases}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2k - 6 & -k \end{vmatrix} = -3k + 6$

O sistema terá solução única se, e somente se, $D \neq 0$, ou seja: $-3k + 6 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$

Logo, o sistema terá solução única para $k \in \mathbb{R}^*_+$, com $k \neq 2$.

115 a) Como a velocidade foi constante, temos:

$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3k} = \dfrac{z}{2k}$ e, portanto,

$$\begin{cases} 3kx - 4y = 0 \\ 2kx - 4z = 0 \\ 2ky - 3kz = 0 \end{cases}$$

b) $D = \begin{vmatrix} 3k & -4 & 0 \\ 2k & 0 & -4 \\ 0 & 2k & -3k \end{vmatrix} = 0$

Como $D = 0$, o sistema homogêneo é possível e indeterminado para qualquer valor real positivo de k.

116 Sendo x e y, respectivamente, os preços por quilograma do café e do açúcar, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + ny = 15 \\ 3x + (n + 1)y = 22 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 8 \\ (n - 4)y = -1 \\ (n - 5)y = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = \dfrac{-1}{n - 4} \\ y = \dfrac{-2}{n - 5} \end{cases}$$

Para que o sistema seja possível e determinado, devemos ter:

$$\frac{-1}{n - 4} = \frac{-2}{n - 5} \Rightarrow n = 3$$

Alternativa **c**.

117 Como o rendimento é diretamente proporcional ao tempo, temos:

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{10} = \frac{c}{15} = \frac{d}{k}$$

Então:

a) $\begin{cases} 10a = 8b \\ 15b = 10c \\ kc \ = 15d \\ ka \ = 8d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a - 8b + 0c + 0d = 0 \\ 0a + 15b - 10c + 0d = 0 \\ 0a + 0b + kc - 15d = 0 \\ ka + 0b + 0c - 8d = 0 \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} 10 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & k & -15 \\ k & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 10A_{11} + kA_{41}$, em que:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 15 & -10 & 0 \\ 0 & k & -15 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -120k$$

$$A_{41} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 15 & -10 & 0 \\ 0 & k & -15 \end{vmatrix} = 1.200$$

Portanto: $\begin{vmatrix} 10 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & k & -15 \\ k & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 0$

Logo, a classificação do sistema é SPI.

118 Sendo p, m, g e e os preços dos pacotes de tamanhos pequeno, médio, grande e extragrande, respectivamente, e r_1, r_2, r_3 e r_4 as receitas obtidas nos dias 1, 2, 3 e 4, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 12p + 7m + 2g + 4e = r_1 \\ 15p + 8m + g + 3e = r_2 \\ 10p + 6m + 2g + ke = r_3 \\ 13p + 7m + g + ke = r_4 \end{cases}$$

Seja D o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 12 & 7 & 2 & 4 \\ 15 & 8 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & 2 & k \\ 13 & 7 & 1 & k \end{vmatrix} = 4A_{14} + 3A_{24} + kA_{34} + kA_{44},$$

em que:
$A_{14} = 0$; $A_{24} = 0$; $A_{34} = 0$; $A_{44} = 0$

Portanto: $D = \begin{vmatrix} 12 & 7 & 2 & 4 \\ 15 & 8 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & 2 & k \\ 13 & 7 & 1 & k \end{vmatrix} = 0$

Logo, o sistema é possível e indeterminado e, portanto, não é possível saber o preço de cada tipo de ração a partir desses dados.

Exercícios de revisão cumulativa

1 A distância, em metro, percorrida em cada volta é 2.000π. Logo, cada vez que o carro passar por P a medida x, em metro, registrada no velocímetro será:
$x = 2.000 + 2.000\pi \cdot k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \leq 29$
$\therefore\ x = 2.000(1 + k\pi)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \leq 29$
Alternativa **b**.

2 a) $a_{21} = 1 \cdot (1{,}02)^2 = (1{,}02)^2$
$a_{22} = 1 \cdot (1{,}03)^2 = (1{,}03)^2$
$a_{31} = 1 \cdot (1{,}02)^3 = (1{,}02)^3$
$a_{32} = 1 \cdot (1{,}03)^3 = (1{,}03)^3$

Logo, $A = \begin{bmatrix} 1{,}02 & 1{,}03 \\ (1{,}02)^2 & (1{,}03)^2 \\ (1{,}02)^3 & (1{,}03)^3 \end{bmatrix}$

b) $a_{ij} = \begin{cases} (1{,}02)^i, \text{ se } j = 1 \\ (1{,}03)^i, \text{ se } j = 2 \end{cases}$

3 $\begin{bmatrix} \text{sen } x & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \text{sen } x \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \text{ sen } x \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ sen } x \\ 2 \end{bmatrix}$

A equação é impossível, pois os elementos correspondentes 4 e 2 são diferentes. Logo, o conjunto solução é $S = \varnothing$.

4 O ponto (0, 3) pertence ao gráfico da função; portanto:
$3 = a + \text{sen } (b \cdot 0) \Rightarrow a = 3$

O período da função é π; portanto:

$\frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2$

Logo, $a = 3$ e $b = 2$.

Análise da resolução

Indicando por a, b e c os números de gols marcados pelos jogadores A, B e C, respectivamente, sem considerar o último jogo, temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 25 & \text{(I)} \\ a = c + 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos:
$c + 1 + b + c = 25 \Rightarrow 2c = 24 - b$

$\therefore\ c = \frac{24 - b}{2} = 12 - \frac{b}{2}$ (III)

Como a, b e c devem ser números naturais, concluímos da equação (III) que b é natural par menor ou igual a 24. Atribuindo a b esses possíveis valores, temos:

b	c	a
0	12	13
2	11	12
4	10	11
6	9	10
8	8	9
10	7	8
12	6	7
14	5	6
16	4	5
18	3	4
20	2	3
22	1	2
24	0	1

Observando a tabela, constatamos que com apenas um gol só poderia ocorrer empate nas cinco primeiras linhas numéricas dessa tabela, e em qualquer uma delas o jogador A seria um dos artilheiros.
Alternativa **a**.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 Resposta pessoal.

2 Analisando o infográfico, percebemos que a segunda senha mais utilizada é 12345.

3 Com os caracteres %, $ e @, podemos formar as seguintes senhas, sem repetição:

% $ @	@ % $	$ @ %
% @ $	@ $ %	$ % @

Portanto, nessas condições, podemos formar 6 senhas.

Exercícios propostos

1 a)

	1	2	3	4	5	6
Cara	(1, cara)	(2, cara)	(3, cara)	(4, cara)	(5, cara)	(6, cara)
Coroa	(1, coroa)	(2, coroa)	(3, coroa)	(4, coroa)	(5, coroa)	(6, coroa)

b)

face no dado	face na moeda
6	2

Logo, o número de resultados possíveis desse experimento é dado por: $6 \cdot 2 = 12$

2

cor	letra	número
4	26	45

Logo, o número de cadeiras destinadas aos espectadores é dado por: $4 \cdot 26 \cdot 45 = 4.680$

3 a)

milhar	centena	dezena	unidade
6	6	6	6

Logo, o total de números que podem ser representados é dado por: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1.296$

b)

milhar	centena	dezena	unidade
6	5	4	3

Logo, o total de números que podem ser representados é dado por: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

4

1º colocado	2º colocado	3º colocado
10	9	8

Logo, o total de maneiras diferentes de ocorrer a classificação dos três primeiros colocados é dado por: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

5 a)

milhares	centenas	dezenas	unidades
4	5	5	5

Logo, o total de números naturais de quatro algarismos que podemos representar é dado por: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$

b)

milhares	centenas	dezenas	unidades
4	4	3	2

Logo, o total de números naturais de quatro algarismos que podemos representar é dado por: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$

6 a) Para que o número seja par, a casa das unidades deve ser ocupada por um algarismo par. Como, entre os algarismos 1, 3, 4, 5, 7 e 9, apenas o 4 é par, fixamos esse algarismo na última casa, obtendo:

			4
Números de possibilidades →	6	6	1

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, concluímos que o total de números nas condições enunciadas é $6 \cdot 6 \cdot 1 = 36$

b) Para que o número seja par, a casa das unidades deve ser ocupada por um algarismo par. Como, entre os algarismos 1, 3, 4, 5, 7 e 9, apenas o 4 é par, fixamos esse algarismo na última casa, obtendo:

			4
Números de possibilidades →	5	4	1

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, concluímos que o total de números nas condições enunciadas é $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$

7 a)

ir de A para B	ir de B para C
2	3

Logo, o número de escolhas do usuário, nas condições estabelecidas, é dado por: $2 \cdot 3 = 6$

b)

ir de A para B	ir de B para C	retornar de C para B	retornar de B para A
2	3	2	1

Logo, o número de escolhas do usuário, nas condições estabelecidas, é dado por: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

8

1º bit	2º bit	3º bit	4º bit	5º bit	6º bit	7º bit	8º bit
2	2	2	2	2	2	2	2

Logo, o número máximo de caracteres que podem ser representados é dado por:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$
Alternativa **e**.

9 Sendo n o total de senhas possíveis, temos:

1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.	5º alg.
9	8	7	6	5

$n = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$
O tempo máximo t, necessário para que o arquivo seja aberto, é dado por:
$t = 15.120 \cdot 5$ s $= 75.600$ s, ou seja, $t = 21$ h
Alternativa **c**.

10 a) Sendo t o total de placas que podem ser formadas, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
4	4	4	5	5	5	5

$t = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4^3 \cdot 5^4 = 40.000$

Logo, podem ser formadas 40.000 placas nas condições estabelecidas.

b) Sendo k o total de placas que podem ser formadas, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
4	3	2	5	4	3	2

$k = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2.880$

Logo, podem ser formadas 2.880 placas nas condições estabelecidas.

c) Sendo n o total de placas que podem ser formadas, com quaisquer letras e quaisquer algarismos, inclusive o zero, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
26	26	26	10	10	10	10

$n = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4 =$
$= 175.760.000$

Sendo m o número de placas que contêm apenas algarismos nulos, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	0	0	0	0
26	26	26	1	1	1	1

$n = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 26^3 = 17.576$

A diferença $m - n$ é a quantidade de placas que podem ser formadas com pelo menos um algarismo não nulo:

$m - n = 175.760.000 - 17.576 = 175.742.424$

11 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow n(A \cup B) = 25 + 29 - 10 = 44$

12 Sendo A o conjunto das pessoas da amostra que dormem menos que quatro horas por noite e B o conjunto das pessoas da amostra que dormem mais de duas horas por noite, temos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow 80 = 56 + 28 - n(A \cap B)$
$\therefore\ n(A \cap B) = 4$

Logo, precisamente quatro pessoas da amostra dormem mais de duas e menos de quatro horas por noite.

13 3, 5, 7 ou 8

4	5	4

Calculando a quantidade de números de três algarismos nas condições enunciadas, temos: $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$

1 ou 2

2	5	4	3

Calculando a quantidade de números de quatro algarismos nas condições enunciadas, temos: $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$

Como esses conjuntos de 80 e 120 números são disjuntos, temos que o total de números, nas condições enunciadas, é: $80 + 120 = 200$

14 4

1	3	4	3

Para o algarismo 4 na primeira casa da esquerda (unidade de milhar), temos: $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

5, 6 ou 7

3	5	4	3

Para os algarismos 5, 6 ou 7 na primeira casa da esquerda, temos: $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$

Como esses conjuntos de 36 e 180 números são disjuntos, temos que o total de números, nas condições enunciadas, é: $36 + 180 = 216$

15 0

6	5	4	1

Para o algarismo zero na última casa (unidades), temos:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 120$

2 ou 4

5	5	4	2

Para os algarismos 2 ou 4 na última casa, temos:

$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 200$

Como esses conjuntos de 120 e 200 números são disjuntos, temos que o total de números, nas condições enunciadas, é:

$120 + 200 = 320$

16 Lembrando que um número inteiro é múltiplo de 5 se o algarismo das unidades é 0 ou 5, temos:

0

5	4	1

Calculando a quantidade de números com algarismo final 0, temos: $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$

5

4	4	1

Calculando a quantidade de números com algarismo final 5, temos: $4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$

Logo, o total de números, nas condições enunciadas, é: $20 + 16 = 36$

Alternativa **b**.

17 (I) Sendo n o total de sequências com quatro algarismos e duas letras, temos:

1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.	1ª letra	2ª letra
6	5	4	3	4	3

$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 4.320$

(II) Sendo k o total de sequências com cinco algarismos e duas letras, temos:

1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.	5º alg.	1ª letra	2ª letra
6	5	4	3	2	4	3

$k = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 8.640$

Como o conjunto das sequências que satisfazem a condição mencionada no item (I) e o conjunto das sequências que satisfazem a condição mencionada no item (II) são disjuntos, a soma $n + k$ é o número de sequências distintas que podem ser formadas nas condições estabelecidas:

$n + k = 4.320 + 8.640 = 12.960$

Logo, o número máximo de aparelhos que podem ter esse lote é 12.960.

18 (I) Sendo n o número de placas que podem ser formadas, sendo as três letras vogais, temos:

1ª letra vogal	2ª letra vogal	3ª letra vogal	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
3	3	3	6	6	6	6

$n = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 34.992$

(II) Sendo k o número de placas que podem ser formadas, sendo as três letras consoantes, temos:

1ª letra cons.	2ª letra cons.	3ª letra cons.	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
4	4	4	6	6	6	6

$k = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 82.944$

Como o conjunto das placas que satisfazem a condição mencionada no item (I) e o conjunto das placas que satisfazem a condição mencionada no item (II) são disjuntos, a soma $n + k$ é o número de placas distintas que podem ser formadas nas condições estabelecidas:

$n + k = 34.992 + 82.944 = 117.936$

19 Indicando por P e C um peixe qualquer e um cavalo-marinho qualquer, respectivamente, e por n o número de maneiras de distribuir os animais pelos aquários, nas condições enunciadas, temos:

C	P	C	P	C	P	C	P
4	4	3	3	2	2	1	1

ou

P	C	P	C	P	C	P	C
4	4	3	3	2	2	1	1

ou

C	P	P	C	P	C	P	C
4	4	3	3	2	2	1	1

ou

C	P	C	P	P	C	P	C
4	4	3	3	2	2	1	1

ou

C	P	C	P	C	P	P	C
4	4	3	3	2	2	1	1

$n = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 +$
$+ 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 +$
$+ 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.880$

20 a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$

c) $4! - 3! = 24 - 6 = 18$

d) $1! + 2! = 1 + 2 = 3$

e) $0! \cdot 3! = 1 \cdot 6 = 6$

f) $\dfrac{4!}{3! + 2!} = \dfrac{24}{6 + 2} = \dfrac{24}{8} = 3$

21 a) F, pois $2! + 3! = 2 + 6 = 8$, e $8 \neq 5!$.

b) F, pois $2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$, e $12 \neq 6!$.

c) V, pois $2 \cdot 3! = (1 + 1) \cdot 3! = 3! + 3!$.

d) V, pois para que exista $(n - 5)!$ devemos ter $(n - 5) \in \mathbb{N}$ e $n - 5 \geqslant 0$, ou seja, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 5$.

e) F, pois para $n = 2$ o número $(n - 4)$ não é natural e, portanto, não existe $(n - 4)!$.

f) F, pois, sendo $(n - 5)$ e $(n - 8)$ números naturais, temos $n - 5 > n - 8$ e, portanto, $(n - 5)! > (n - 8)!$.

g) V, pois, sendo $(n - 9)$ e $(n - 12)$ números naturais, temos $n - 9 > n - 12$ e, portanto, $(n - 9)! > (n - 12)!$.

h) V, pois, como existem todos os fatoriais envolvidos, para $n \geqslant 2$, a igualdade é obtida pela propriedade fundamental dos fatoriais.

i) F, pois para $n = 0$ não existe pelo menos um dos fatoriais relacionados na igualdade.

22 a) $\dfrac{8!}{7!} = \dfrac{8 \cdot 7!}{7!} = 8$

b) $\dfrac{7!}{10!} = \dfrac{7!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!} = \dfrac{1}{720}$

c) $\dfrac{6! \cdot 9!}{3! \cdot 11!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 9!}{3! \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!} = \dfrac{12}{11}$

d) $\dfrac{n!}{(n - 1)!} = \dfrac{n \cdot (n - 1)!}{(n - 1)!} = n$

e) $\dfrac{(n - 2)!}{n!} = \dfrac{(n - 2)!}{n(n - 1)(n - 2)!} = \dfrac{1}{n^2 - n}$

f) $\dfrac{(n - 1)!}{(n + 1)!} = \dfrac{(n - 1)!}{(n + 1)\, n\, (n - 1)!} = \dfrac{1}{n^2 + n}$

g) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = n^2 + 5n + 6$

h) $\dfrac{(n-4)!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-4)!}{(n-2)(n-3)(n-4)!} =$
$= \dfrac{1}{n^2 - 5n + 6}$

23 Multiplicando e, ao mesmo tempo, dividindo o segundo membro da igualdade por 6!, a igualdade se mantém; logo:

$x = \dfrac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 20}{6!} = \dfrac{20!}{6!}$

Alternativa **b**.

24 $\dfrac{101! + 102!}{100!} = \dfrac{101 \cdot 100! + 102 \cdot 101 \cdot 100!}{100!} =$

$= \dfrac{100!(101 + 102 \cdot 101)}{100!} = 101 + 102 \cdot 101 =$
$= 10.403$

Alternativa **e**.

25 $\dfrac{n! + (n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} = \dfrac{n(n-1)! + (n+1)n(n-1)!}{2 \cdot (n-1)!} =$

$= \dfrac{(n-1)!(n + n^2 + n)}{2 \cdot (n-1)!} = \dfrac{n^2 + 2n}{2} = \dfrac{n^2}{2} + n$

Alternativa **b**.

26 a) $\dfrac{(n+7)!}{(n+6)!} = 15 \Rightarrow \dfrac{(n+7)\cancel{(n+6)!}}{\cancel{(n+6)!}} = 15$

$\therefore n + 7 = 15 \Rightarrow n = 8$

Como, para $n = 8$, existem todos os fatoriais relacionados na equação proposta, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{8\}$.

b) $\dfrac{(n-6)!}{(n-5)!} = \dfrac{1}{32} \Rightarrow \dfrac{\cancel{(n-6)!}}{(n-5)\cancel{(n-6)!}} = \dfrac{1}{32}$

$\therefore n - 5 = 32 \Rightarrow n = 37$

Como, para $n = 37$, existem todos os fatoriais relacionados na equação proposta, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{37\}$.

c) $\dfrac{(n-2)!}{(n-4)!} = 6 \Rightarrow \dfrac{(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}} = 6$

$\therefore n^2 - 5n + 6 = 6 \Rightarrow n^2 - 5n = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 0$ ou $n = 5$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que apenas o número 5 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{5\}$.

d) $\dfrac{(n+1)! + n!}{(n+2)!} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \dfrac{(n+1)n! + n!}{(n+2)(n+1)n!} = \dfrac{1}{9}$

$\therefore \dfrac{\cancel{n!}(n+1+1)}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \dfrac{\cancel{n+2}}{\cancel{(n+2)}(n+1)} = \dfrac{1}{9}$

$\therefore n + 1 = 9 \Rightarrow n = 8$

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para $n = 8$, concluímos que 8 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{8\}$.

27 $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)! - n!} = \dfrac{1}{81} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(n-1)!}{(n+1)\,n\,(n-1)! - n(n-1)!} = \dfrac{1}{81}$

$\therefore \dfrac{(n-1)!}{(n-1)!(n^2 + n - n)} = \dfrac{1}{81} \Rightarrow \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{81}$

$\therefore n = 9$ ou $n = -9$

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que apenas o número 9 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{9\}$.

Alternativa **c**.

28 Decompondo em fatores primos o número 40.320, temos:

40.320	2
20.160	2
10.080	2
5.040	2
2.520	2
1.260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Assim, acrescentando o fator 1 ao número 40.320, podemos escrever:

$40.320 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) =$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8!$

Alternativa **c**.

29 Acrescentando o fator 1 ao segundo membro da igualdade, temos:

$n! = 1 \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 =$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot$
$\cdot (5 \cdot 2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$
$\therefore n = 10$

30 Indicando os pratos principais por P_1, P_2, P_3, os acompanhamentos por A_1, A_2, A_3, e as sobremesas por S_1, S_2 e S_3, temos que o número n de maneiras diferentes como o garçom poderia distribuir os pedidos entre os três fregueses é dado por:

P_1	P_2	P_3	A_1	A_2	A_3	S_1	S_2	S_3
3	2	1	3	2	1	3	2	1

$n = 3! \cdot 3! \cdot 3! = (3!)^3$

Alternativa **a**.

31 a) Como a ordem dos números escolhidos não altera a aposta, temos que o agrupamento dos seis números é uma combinação.

b) A classificação dos quatro primeiros colocados é uma sequência de quatro times e, portanto, é um arranjo.

c) Como os dois alunos terão o mesmo cargo, a comissão formada não depende da ordem de escolha e, portanto, o agrupamento dos alunos é uma combinação.

d) Um número de telefone é uma sequência de algarismos e, portanto, é um arranjo de algarismos.

e) Como os dois alunos terão cargos distintos, a comissão formada depende da ordem de escolha e, portanto, o agrupamento dos alunos é um arranjo.

f) Qualquer que seja a ordem de três vértices escolhidos, fica determinado o mesmo triângulo. Logo, o agrupamento dos três vértices é uma combinação.

32 a) $A_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$; $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d)

c) (a, b, c), (a, b, d), (a, b, e), (c, b, a), (c, b, d), (c, b, e), (d, b, a), (d, b, c), (d, b, e), (e, b, a), (e, b, c), (e, b, d)

33 a)

1º elemento	2º elemento	3º elemento
6	5	4

Assim, temos: $A_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

b)

1º elemento	2º elemento
10	9

Assim, temos: $A_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$

c)

1º elemento	2º elemento	3º elemento	4º elemento	5º elemento	6º elemento	7º elemento
7	6	5	4	3	2	1

Assim, temos: $A_{7,7} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$

34 a) $A_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

b) $A_{6,2} = \dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30$

c) $A_{8,4} = \dfrac{8!}{(8-4)!} = \dfrac{8!}{4!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 1.680$

35 O número de maneiras diferentes de distribuir os dez hóspedes nos quartos é igual ao número de sequências de dez elementos distintos que podem ser formadas com vinte elementos distintos, ou seja: $A_{20,10}$
Alternativa **d**.

36 O número de maneiras diferentes de distribuir as medalhas é igual ao número de sequências de três elementos distintos que podem ser formadas com n elementos distintos, ou seja: $A_{n,3}$
Alternativa **a**.

37 a) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$

$A_{n,2} = 20 \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} = 20$

$\therefore \dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 20 \Rightarrow n(n-1) = 20$

$\therefore n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow n = 5$ ou $n = -4$ (não convém)

Logo, $S = \{5\}$.

b) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 4$

$A_{n,2} = A_{n-2,2} + 14 \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-2)!}{(n-4)!} + 14$

$\therefore \dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = \dfrac{(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}} + 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow n(n-1) = (n-2)(n-3) + 14$

$\therefore n^2 - n = n^2 - 5n + 6 + 14 \Rightarrow n = 5$

Logo, $S = \{5\}$.

38 $A_{n,2} = n + 8$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$

$A_{n,2} = n + 8 \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} = n + 8$

$\therefore \dfrac{n \cdot (n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n + 8 \Rightarrow n^2 - n = n + 8$

$\therefore n^2 - 2n - 8 = 0$

Então, resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos:

$n = -2$ ou $n = 4$

Apenas $n = 4$ satisfaz a condição de existência; logo, há quatro lugares vagos.

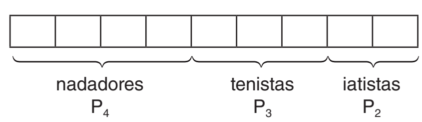
39 a) $P_5 = 5! = 120$

b) BDFGC, BDGFC, BFDGC, BFGDC, BGDFC e BGFDC.

40 $P_7 = 7! = 5.040$

41 $P_5 = 5! = 120$

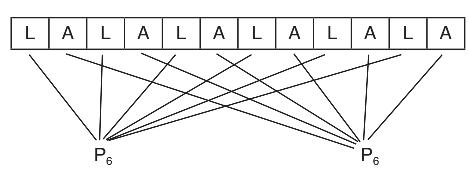
42 Considerando como um único elemento cada equipe de nadadores (N), tenistas (T) e iatistas (I), são possíveis P_3 possibilidades de formação para esses três elementos: NTI, NIT, INT, ITN, TIN e TNI. Para cada uma dessas possibilidades, podemos permutar entre si os elementos de uma mesma equipe; por exemplo, considerando a primeira possibilidade, temos:



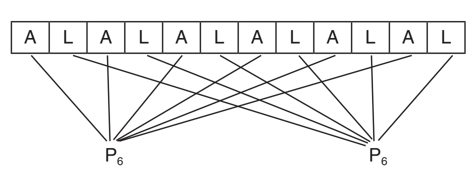
Como esse resultado é obtido para qualquer uma das possibilidades, concluímos que o número n de sequências diferentes com que a fila de atletas pode ser formada, nas condições estabelecidas, é dado por:

$n = P_3 \cdot (P_4 \cdot P_3 \cdot P_2) = 3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 1.728$

43 Indicando por A e L um algarismo e uma letra quaisquer, respectivamente, temos:



ou



Logo, o número n possível de chaves de instalação é dado por:

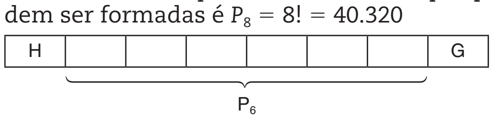
$n = P_6 \cdot P_6 + P_6 \cdot P_6 = 2(P_6)^2 = 2 \cdot (6!)^2$

Alternativa **e**.

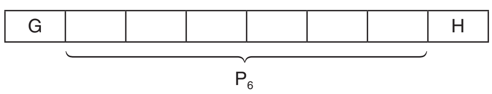
44 Indicando por M, F, Q, H, G, B, P e I os livros de Matemátiva, Física, Química, História, Geografia, Biologia, Português e Inglês, respectivamente, temos:

a) O número de sequências diferentes que podem ser formadas é $P_8 = 8! = 40.320$

b)



ou



Logo, o número *n* de sequências que apresentam os livros de História e Geografia nos extremos é dado por:

$n = P_6 + P_6 = 6! + 6! = 1.440$

c) Considerando o bloco MFQ como um único elemento a ser permutado com os demais, o número de permutações dos seis elementos MFQ, H, G, B, P, I é dado por:

$P_6 = 6! = 720$

Logo, existem 720 sequências possíveis dos livros, nas condições enunciadas.

d) Nesse caso, um bloco composto de M, F, Q pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: MFQ, MQF, FMQ, FQM, QFM e QMF. Para cada um desses seis blocos, podemos formar $P_6 = 6! = 720$ sequências diferentes de livros, conforme vimos no item **c**. Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 720 = 4.320$ sequências, ou seja, o número de sequências diferentes de livros que podem ser formadas, nas condições enunciadas, é dado por:

$P_3 \cdot P_6 = 3! \cdot 6! = 6 \cdot 720 = 4.320$

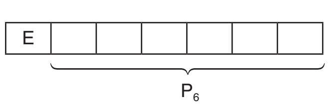
e) Esse número é a diferença entre os resultados obtidos nos itens **a** e **d**, isto é:

$P_8 - P_3 \cdot P_6 = 40.320 - 4.320 = 36.000$

45 **a)** O número de anagramas da palavra FUTEBOL é igual ao número de permutações simples de 7 letras distintas, isto é:

$P_7 = 7! = 5.040$

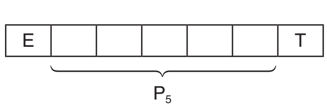
b) Fixando a letra E na primeira posição, sobram 6 letras para serem distribuídas nas seis posições posteriores:



$P_6 = 6! = 720$

Logo, há 720 anagramas que começam por E.

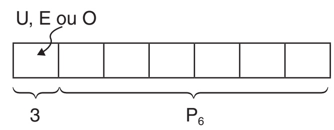
c) Fixando a letra E na primeira posição e a letra T na última, sobram 5 letras para serem distribuídas nas cinco posições intermediárias:



$P_5 = 5! = 120$

Portanto, há 120 anagramas que começam por E e terminam por T.

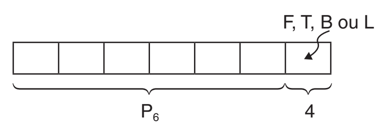
d) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira casa: U, E ou O. Para cada vogal fixada na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas posições posteriores:



$3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 3 \cdot 720 = 2.160$

Assim, há 2.160 anagramas que começam por consoante.

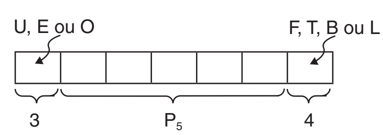
e) Há quatro possibilidades para o preenchimento da última (sétima) casa: F, T, B ou L. Para cada consoante fixada na última posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas posições anteriores:



$P_6 \cdot 4 = 6! \cdot 4 = 720 \cdot 4 = 2.880$

Assim, há 2.880 anagramas que terminam por consoante.

f) Há quatro possibilidades para o preenchimento da primeira posição e três possibilidades para a última (sétima). Fixadas uma vogal na primeira posição e uma vogal na última, sobram cinco letras para serem distribuídas nas posições intermediárias:



$3 \cdot P_5 \cdot 4 = 3 \cdot 5! \cdot 4 = 3 \cdot 120 \cdot 4 = 1.440$

Há, portanto, 1.440 anagramas que começam por vogal e terminam por consoante.

g) Considerando o bloco EOU como um único elemento a ser permutado com os demais, o número de permutações dos cinco elementos EOU, F, T, B e L é dado por:

$P_5 = 5! = 120$

Logo, existem 120 anagramas com as vogais em ordem alfabética.

h) Nesse caso, um bloco composto de E, O, U pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: EOU, EUO, OEU, OUE, UEO e UOE. Para cada um desses seis blocos, podemos formar $P_5 = 5! = 120$ anagramas, conforme vimos no item **g**. Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 120 = 720$ anagramas, ou seja, o número de anagramas diferentes que podem ser formados, nas condições enunciadas, é dado por:

$P_3 \cdot P_5 = 3! \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

i) Esse número é a diferença entre os resultados obtidos nos itens **a** e **h**, isto é:

$P_7 - P_3 \cdot P_5 = 5.040 - 720 = 4.320$

46 O número de anagramas que apresentam o G antes do D é igual ao número de anagramas que apresentam o D antes do G. Logo, o total n de anagramas que apresentam essas letras em ordem alfabética é dado por:

$n = \frac{P_5}{2} = \frac{5!}{2} = 60$

47 a) $P_7^{(2)} = \frac{7!}{2!} = 2.520$

b) $P_7^{(3)} = \frac{7!}{3!} = 840$

c) $P_8^{(2,\,3)} = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3.360$

d) $P_8^{(2,\,4)} = \frac{8!}{2! \cdot 4!} = 840$

48 a) $P_6^{(3)} = \frac{6!}{3!} = 120$

b) Fixando uma letra R na primeira posição, sobram as letras C, O, R, R e E, que devem ser distribuídas nas cinco posições posteriores:

$$\underbrace{\boxed{R}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_5^{(2)}}$$

Logo, o número de anagramas que começam por R é dado por:

$P_5^{(3)} = \frac{5!}{2!} = 60$

c) Fixando a letra C na primeira posição, sobram as letras O, R, R, E e R, que devem ser distribuídas nas cinco posições posteriores:

$$\underbrace{\boxed{C}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_5^{(3)}}$$

Logo, o número de anagramas que começam por C é dado por:

$P_5^{(3)} = \frac{5!}{3!} = 20$

Como o número de anagramas que começam por R é dado por $P_5^{(2)}$, concluímos que o total de anagramas que começam por consoante é dado por:

$P_5^{(2)} + P_5^{(3)} = 60 + 20 = 80$

d) Fixando a letra O na última posição, sobram as letras C, E, R, R e R, que devem ser distribuídas nas cinco posições anteriores:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_5^{(3)}}\underbrace{\boxed{O}}_{1}$$

Logo, o número de anagramas que terminam por O é dado por:

$P_5^{(3)} = \frac{5!}{3!} = 20$

Como o número de anagramas que terminam por E é dado por $P_5^{(3)}$, concluímos que o total de anagramas que terminam por vogal é dado por:

$P_5^{(3)} + P_5^{(3)} = 20 + 20 = 40$

e)

$$\underbrace{\boxed{C}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_4^{(3)}}\underbrace{\boxed{O}}_{1}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{C}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_4^{(3)}}\underbrace{\boxed{E}}_{1}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{R}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_4^{(2)}}\underbrace{\boxed{O}}_{1}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{R}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_4^{(2)}}\underbrace{\boxed{E}}_{1}$$

Concluímos, então, que o total de anagramas que começam por consoante e terminam por vogal é dado por:

$2 \cdot P_4^{(3)} + 2 \cdot P_4^{(2)} = 2 \cdot \frac{4!}{3!} + 2 \cdot \frac{4!}{2!} = 32$

f) Considerando o bloco EO como um único elemento a ser permutado com as demais letras, o número de permutações dos cinco elementos EO, C, R, R e R é dado por:

$P_5^{(3)} = \frac{5!}{3!} = 20$

Logo, existem 20 anagramas com as vogais juntas e em ordem alfabética.

g) Nesse caso, um bloco composto de E e O pode ter $P_2 = 2! = 2$ formas diferentes: EO e OE. Para cada uma delas podemos formar $P_5^{(3)} = \frac{5!}{3!} = 20$ anagramas, conforme vimos no item **f**. Logo, com os dois blocos podemos formar $2 \cdot 20 = 40$ anagramas, ou seja, o total de anagramas que podem ser formados, nas condições enunciadas, é dado por:

$2 \cdot P_5^{(3)} = 2 \cdot 20 = 40$

49 O número 1.125 é o produto dos fatores 5, 5, 5, 3 e 3, em qualquer ordem.

5	·	5	·	5	·	3	·	3	=

$P_5^{(3,\,2)}$

Logo, o número n de sequências diferentes de teclas que podem ser digitadas é o número de permutações desses fatores:

$n = P_5^{(3,\,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

Alternativa **d**.

50 a) O número n de sequências, nas condições estabelecidas, é o número de permutações dos elementos C, C, C, K e K, ou seja:

$n = P_5^{(3,\,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

b) Interessam sequências:
- com três caras e duas coroas, cujo total já foi calculado no item **a**;
- com quatro caras e uma coroa, cujo total é dado por $P_5^{(4)} = \dfrac{5!}{4} = 5$.
- com 5 caras, para a qual existe uma única possibilidade.

Assim, concluímos que o total n de sequências nas condições estabelecidas é dado por:
$P_5^{(3,\,2)} + P_5^{(4)} + 1 = 10 + 5 + 1 = 16$

c) Vamos calcular, inicialmente, o número p de resultados possíveis do experimento:

1º lance	2º lance	3º lance	4º lance	5º lance
2	2	2	2	2

Logo, $p = 2^5 = 32$
Desses 32 resultados possíveis, apenas o resultado KKKKK não apresenta a face C; logo, em 31 resultados possíveis há a face C.

51 Indicaremos por N e L cada quilômetro percorrido para o norte e para o leste, respectivamente.

a) Para ir de *O* a *A*, nas condições estabelecidas, Pedro deve percorrer 4 km para o norte e 5 km para o leste. Assim, o total de caminhos que Pedro pode percorrer é o número de permutações dos elementos N, N, N, N, L, L, L, L e L, ou seja:
$P_9^{(4,\,5)} = \dfrac{9!}{4!\cdot 5!} = 126$
Logo, há 126 caminhos possíveis que Pedro pode percorrer.

b) (I) Para ir de *O* a *C*, Luís deve percorrer 3 km para o norte e 4 km para o leste. Assim, o número de caminhos que podem ser percorridos de *O* a *C*, nas condições estabelecidas, é o número de permutações dos elementos N, N, N, L, L, L e L, ou seja:
$P_7^{(3,\,4)} = \dfrac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$

(II) Para ir de *C* a *B*, Luís deve percorrer 2 km para o norte e 2 km para o leste. Assim, o número de caminhos que podem ser percorridos de *C* a *B*, nas condições estabelecidas, é o número de permutações dos elementos N, N, L e L, ou seja:
$P_4^{(2,\,2)} = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$

(III) Por (I) e (II), temos:

Ir de *O* a *B*	Ir de *B* a *C*
35	6

Logo, o número n de caminhos que Luís pode percorrer de *O* a *B*, passando por *C*, é dado por:
$n = 35 \cdot 6 = 210$

52 Indicando por n o número de bolas pretas, temos:
$P_{n+2}^{(2,\,n)} = 21 \Rightarrow \dfrac{(n+2)!}{2!\cdot n!} = 21$
$\therefore \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} = 21 \Rightarrow n^2 + 3n - 40 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 5$ ou $n = -8$ (não convém).
Logo, a urna contém exatamente 5 bolas pretas.

53 Há exatamente 10 combinações simples dos elementos de $I = \{a, b, c, d, e\}$ tomados dois a dois. São elas:

$I_1 = \{a, b\}$	$I_6 = \{b, d\}$
$I_2 = \{a, c\}$	$I_7 = \{b, e\}$
$I_3 = \{a, d\}$	$I_8 = \{c, d\}$
$I_4 = \{a, e\}$	$I_9 = \{c, e\}$
$I_5 = \{b, c\}$	$I_{10} = \{d, e\}$

54 **a)** $C_{8,\,5} = \dfrac{8!}{5!(8-5)!} = \dfrac{8!}{5!\cdot 3!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 56$

b) $C_{7,\,3} = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!\cdot 4!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{3!\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{4}} = 35$

c) $C_{7,\,4} = \dfrac{7!}{4!(7-4)!} = \dfrac{7!}{4!\cdot 3!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 35$

55 **a)** A ordem dos dois pontos escolhidos não altera a reta determinada; por exemplo, $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$. Logo, o número de retas que podem ser determinadas é dado por $C_{7,\,2} = 21$.

b) Um triângulo fica determinado por três pontos (vértices) não colineares. Como não existem três pontos colineares entre os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* e *G*, qualquer agrupamento de três pontos distintos determina um triângulo.
A ordem dos três pontos escolhidos não altera o triângulo formado e, portanto, o número de triângulos com vértices em três pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ é dado por $C_{7,\,3} = 35$.

c) Raciocinando de modo análogo ao do item **b**, concluímos que o número de quadriláteros convexos com vértices em quatro pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ é dado por $C_{7,\,4} = 35$.

d) Raciocinando de modo análogo ao do item **b**, concluímos que o número de pentágonos convexos com vértices em cinco pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ é dado por $C_{7,\,5} = 21$.

e) Fixado o ponto *A* como um dos vértices, os demais devem ser escolhidos entre os seis pontos restantes. Logo, o número de pentágonos convexos que têm *A* como um dos vértices é dado por $C_{6,\,4} = 15$.

f) Fixado o lado $\overline{AB}$, estarão fixados os vértices *A* e *B*; logo, falta escolher três vértices entre os pontos *C*, *D*, *E*, *F* e *G*. Portanto, o número de pentágonos convexos que têm $\overline{AB}$ como um dos lados é dado por $C_{5,\,3} = 10$.

56 **a)** A ordem dos dois pontos escolhidos não altera o segmento formado; por exemplo, $\overline{AB} = \overline{BA}$. Logo, o número de segmentos que podem ser formados é dado por $C_{7,\,2} = 21$.

b) Uma diagonal do heptágono é qualquer segmento com extremos em dois vértices não consecutivos do polígono. Assim, o número d de diagonais pode ser calculado subtraindo-se o número de lados do resultado obtido no item **a**, isto é:
$d = C_{7,\,2} - 7 = 21 - 7 = 14.$

57 Raciocínio análogo ao do item **b** do exercício 56 leva-nos a concluir que o número d de diagonais de um polígono convexo de 10 vértices (ou 10 lados) é dado por:
$d = C_{10,\,2} - 10 = 45 - 10 = 35$

58 a) Vamos resolver este item de dois modos:

1º modo

Uma reta fica determinada por dois pontos distintos; logo, qualquer combinação desses dez pontos tomados dois a dois determina uma reta. Porém, entre essas combinações há retas coincidentes, por exemplo: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Assim, o cálculo do número de retas distintas pode ser feito subtraindo-se de todas as combinações dos dez pontos dois a dois as combinações dos pontos colineares dois a dois e adicionando-se 2, que são as próprias retas r e s, isto é:

$$C_{10,\,2} - \underbrace{C_{6,\,2}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos de } r}} - \underbrace{C_{4,\,2}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos de } s}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{retas}\\ r \text{ e } s}} =$$

$= 45 - 15 - 6 + 2 = 26$

2º modo

Além das retas r e s, uma reta fica determinada por um dos cinco pontos destacados em r e um dos quatro pontos destacados em s. Assim, o número de retas, nas condições enunciadas, é dado por:

$$\underbrace{2}_{\substack{\text{retas}\\ r \text{ e } s}} + \underbrace{C_{6,\,1}}_{\substack{\text{escolhas}\\ \text{de um}\\ \text{ponto em } r}} \cdot \underbrace{C_{4,\,1}}_{\substack{\text{escolhas}\\ \text{de um}\\ \text{ponto em } s}} =$$

$= 2 + 6 \cdot 4 = 26$

b) Um triângulo fica determinado por três pontos não colineares. Assim, algumas das combinações dos dez pontos tomados três a três determinam triângulos, e outras não. Por exemplo, a combinação ABG determina um triângulo, enquanto a combinação ABC não determina um triângulo. Podemos resolver esse item de dois modos:

1º modo

O número de triângulos é a diferença entre o número de combinações dos dez pontos três a três e o total de combinações dos pontos colineares três a três, isto é:

$$C_{10,\,3} - \underbrace{C_{6,\,3}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{dos pontos em } r}} - \underbrace{C_{4,\,3}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{dos pontos em } s}} =$$

$= 120 - 20 - 4 = 96$

2º modo

Um triângulo estará determinado se escolhermos dois pontos em uma das retas e um ponto na outra.

- 2 pontos em r e um ponto em s:
  $C_{6,\,2} \cdot C_{4,\,1} = 15 \cdot 4 = 60$

ou

- 1 ponto em r e dois pontos em s:
  $C_{6,\,1} \cdot C_{4,\,2} = 6 \cdot 6 = 36$

Logo, o número de triângulos é $60 + 36 = 96$.

c) Um triângulo com vértice H pode ter os outros dois vértices em r ou um vértice em r e o outro em s. Assim, o número de triângulos com vértice H é dado por:
$C_{6,\,2} + C_{6,\,1} \cdot C_{3,\,1} = 15 + 6 \cdot 3 = 33$

d) $C_{6,\,2} \cdot C_{4,\,1} = 15 \cdot 4 = 60$
Logo, há 60 triângulos com um dos lados contido em r.

e) Um quadrilátero convexo fica determinado por dois pontos escolhidos em r e dois pontos em s. Assim, o número de quadriláteros convexos é dado por:
$C_{6,\,2} \cdot C_{4,\,2} = 15 \cdot 6 = 90$

59 Um paralelogramo estará determinado se escolhermos duas retas distintas em um dos feixes de paralelas e duas retas distintas do outro feixe de paralelas. Logo, o número de paralelogramos determinados é dado por:
$C_{5,\,2} \cdot C_{6,\,2} = 10 \cdot 15 = 150$

60 Para que o produto dos números escolhidos seja positivo, devemos ter: os quatro números positivos ou os quatro negativos ou dois positivos e dois negativos. Logo, o número de escolhas possíveis é dado por:
$C_{10,\,4} + C_{20,\,4} + C_{10,\,2} \cdot C_{20,\,2} =$
$= 210 + 4.845 + 45 \cdot 190 = 13.605$

61 $C_{7,\,4} = 35$
Logo, a comissão pode ser formada de 35 modos diferentes.

62 $C_{10,\,3} = 120$
Alternativa **a**.

63 $C_{10,\,2} = 45$
Logo, o campeonato é composto de 45 jogos.

64 $C_{7,\,5} = 21$
Alternativa **d**.

65 $C_{n,\,2} = 28 \Rightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 28$

$\therefore \dfrac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0$

$\therefore n = 8$ ou $n = -7$ (não convém)

Concluímos, então, que exatamente 8 presidentes participaram da reunião.

66 O número de saladas contendo maçã, laranja e mais 2 tipos de fruta escolhidos entre quatro tipos é $C_{4,\,2} = 6$.
Logo, são possíveis 6 saladas diferentes.

67 Sendo $c_1, c_2, c_3, c_4, ..., c_{10}$ os dez cientistas, em que c_1 e c_2 são marido e mulher, o grupo escolhido pode ser formado por:

- c_1, c_2 e mais quatro cientistas escolhidos entre os oito restantes, ou
- seis cientistas escolhidos entre os oito cientistas $c_3, c_4, c_5, ..., c_{10}$.

Logo, o número n de formações distintas que pode ter o grupo escolhido é dado por:
$n = C_{8,\,4} + C_{8,\,6} = 70 + 28 = 98$

68 Sendo $c_1, c_2, c_3, c_4, ..., c_9$ as nove comissárias, em que c_1 e c_2 são irmãs, o grupo escalado pode ser formado por:

- c_1 e mais três comissárias escolhidas entre as sete comissárias $c_3, c_4, c_5, ..., c_9$ ou
- c_2 e mais três comissárias escolhidas entre as sete comissárias $c_3, c_4, c_5, ..., c_9$ ou
- quatro comissárias escolhidas entre as sete comissárias $c_3, c_4, c_5, ..., c_9$.

Logo, o número n de formações distintas que pode ter o grupo escalado é dado por:

$n = 2 \cdot C_{7,3} + C_{7,4} = 2 \cdot 35 + 35 = 105$

69 Além de José e Anita, sejam $p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_8$ as outras oito pessoas do grupo:

a) O número n de formações possíveis do júri contendo José, Anita e mais cinco pessoas escolhidas entre as oito pessoas $p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_8$ é dado por:

$n = C_{8,5} = 56$

b) O número de formações possíveis do júri, não contendo José nem Anita, é o número k de escolhas de sete pessoas entre as oito pessoas $p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_8$, que é dado por:

$k = C_{8,7} = 8$

c) O número m de formações possíveis do júri contendo Anita e mais seis pessoas escolhidas entre as oito pessoas $p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_8$ é dado por:

$m = C_{8,6} = 28$

70 a) O número de comissões de quatro alunos que podem ser formadas com os sete candidatos é $C_{7,4} = 35$.

b) O número de comissões de quatro alunos que podem ser formadas com os sete candidatos de modo que Cláudio participe de todas é $C_{6,3} = 20$.

c) O número de comissões de quatro alunos escolhidos entre os sete candidatos de modo que Cláudio não participe de nenhuma é $C_{6,4} = 15$.

71 $C_{5,2} \cdot C_{6,3} = 10 \cdot 20 = 200$

Logo, a equipe pode ser formada de 200 maneiras diferentes.

72 $C_{4,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{6,3} = 4 \cdot 10 \cdot 20 = 800$

Concluímos, então, que o número de equipes que podem ser formadas é 800.

Alternativa **d**.

73 a) $C_{4,2} \cdot C_{4,3} = 6 \cdot 4 = 24$

Logo, podem ser formados exatamente 24 *full hands* com um par de Ás e uma trinca de 3.

b) $C_{4,2} \cdot 12 \cdot C_{4,3} = 6 \cdot 12 \cdot 4 = 288$

Logo, podem ser formados exatamente 288 *full hands* com um par de Ás.

c) $13 \cdot C_{4,2} \cdot 12 \cdot C_{4,3} = 13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4 = 3.744$

Logo, podem ser formados exatamente 3.744 *full hands*.

74 a) $(x + a)^6 = \binom{6}{0}x^6a^0 + \binom{6}{1}x^5a^1 + \binom{6}{2}x^4a^2 + \binom{6}{3}x^3a^3 + \binom{6}{4}x^2a^4 + \binom{6}{5}x^1a^5 + \binom{6}{6}x^0a^6 =$

$= x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$

b) $(2x - 3)^3 = [2x + (-3)]^3 = \binom{3}{0}(2x)^3(-3)^0 + \binom{3}{1}(2x)^2(-3)^1 + \binom{3}{2}(2x)^1(-3)^2 + \binom{3}{3}(2x)^0(-3)^3 =$

$= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2x \cdot 9 + 1 \cdot (-27) =$

$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

c) $(2x + y^2)^4 = \binom{4}{0}(2x)^0(y^2)^4 + \binom{4}{1}(2x)^1(y^2)^3 + \binom{4}{2}(2x)^2(y^2)^2 + \binom{4}{3}(2x)^3(y^2)^1 + \binom{4}{4}(2x)^4(y^2)^0 =$

$= y^8 + 4 \cdot 2xy^6 + 6 \cdot 4x^2y^4 + 4 \cdot 8x^3y^2 + 16x^4 =$

$= y^8 + 8xy^6 + 24x^2y^4 + 32x^3y^2 + 16x^4$

75 $(1 + 0{,}005)^{15} \approx \binom{15}{0} \cdot 1^{15} \cdot (0{,}005)^0 + \binom{15}{1} \cdot 1^{14} \cdot (0{,}005)^1$,

ou seja, $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}075$

Alternativa **a**.

76 a) $E = \binom{3}{0} \cdot 2^0 \cdot 4^3 + \binom{3}{1} \cdot 2^1 \cdot 4^2 + \binom{3}{2} \cdot 2^2 \cdot 4^1 + \binom{3}{3} \cdot 2^3 \cdot 4^0$

$\therefore E = (2 + 4)^3 = 216$

b) $F = \binom{5}{0} \cdot 2^0 \cdot (-3)^5 + \binom{5}{1} \cdot 2^1 \cdot (-3)^4 + \binom{5}{2} \cdot 2^2 \cdot (-3)^3 + \binom{5}{3} \cdot 2^3 \cdot (-3)^2 + \binom{5}{4} \cdot 2^4 \cdot (-3)^1 + \binom{5}{5} \cdot 2^5 \cdot (-3)^0 = (2 - 3)^5$

$\therefore F = (-1)^5 = -1$

c) $G = \binom{5}{0} \cdot 3^0 + \binom{5}{1} \cdot 3^1 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 + \binom{5}{3} \cdot 3^3 + \binom{5}{4} \cdot 3^4 + \binom{5}{5} \cdot 3^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow G = \binom{5}{0} \cdot 3^0 \cdot 1^5 + \binom{5}{1} \cdot 3^1 \cdot 1^4 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 \cdot 1^3 + \binom{5}{3} \cdot 3^3 \cdot 1^2 + \binom{5}{4} \cdot 3^4 \cdot 1^1 + \binom{5}{5} \cdot 3^5 \cdot 1^0$

$\therefore G = (3 + 1)^5 = 1.024$

d) $H = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow H = \binom{6}{0} \cdot 1^0 \cdot 1^6 + \binom{6}{1} \cdot 1^1 \cdot 1^5 + \binom{6}{2} \cdot 1^2 \cdot 1^4 + \binom{6}{3} \cdot 1^3 \cdot 1^3 + \binom{6}{4} \cdot 1^4 \cdot 1^2 + \binom{6}{5} \cdot 1^5 \cdot 1^1 + \binom{6}{6} \cdot 1^6 \cdot 1^0$

$\therefore H = (1 + 1)^6 = 2^6 = 64$

77 $\sum_{p=0}^{10} \binom{10}{p} 5^p \cdot 2^{10-p} = (5 + 2)^{10} = 7^{10}$

Alternativa **d**.

78 $\sum_{p=0}^{45} \binom{45}{p} 7^p \cdot (-8)^{45-p} = (7 - 8)^{45} = (-1)^{45} = -1$

Alternativa **e**.

79 $\sum_{p=0}^{20}\binom{20}{p}3^p = \sum_{p=0}^{20}\binom{20}{p}3^p \cdot 1^{20-p} = (3+1)^{20} = 4^{20} =$
$= (4^2)^{10} = 16^{10}$
Alternativa **a**.

80 $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}1^p \cdot 1^{20-p} = (1+1)^n = 2^n$
Alternativa **d**.

81
$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5 = -32 \Rightarrow \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 4 \\ (x+y)^5 = -32 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x + 3y = 4 & \text{(I)} \\ x + y = -2 & \text{(II)} \end{cases}$$
Subtraímos (I) e (II), membro a membro, obtendo:
$2y = 6 \Rightarrow y = 3$
Substituímos então y por 3 em (I), concluindo:
$x + 3 \cdot 3 = 4 \Rightarrow x = -5$
Logo, $S = \{(-5, 3)\}$.

82 Atribuindo o valor 1 à variável x, temos:
$(5 \cdot 1 - 4)^{35} = 1^{35} = 1$
Logo, a soma dos coeficientes é 1.

83 Para expoentes crescentes de x, o termo geral é:
$T = \binom{8}{p}2^p \cdot x^{2p+8}$
Fazendo $p = 2$, obtemos o terceiro termo:
$T = \binom{8}{2} \cdot 2^2 \cdot x^{2\cdot 2+8} \Rightarrow T = 28 \cdot 4 \cdot x^{12}$
Logo, o terceiro termo é $112x^{12}$.

84 Para expoentes decrescentes de x, o termo geral é:
$T = \binom{7}{p}(-2)^p \cdot x^{14-p}$
Fazendo $p = 3$, obtemos o quarto termo:
$T = \binom{7}{3} \cdot (-2)^3 \cdot x^{14-3} \Rightarrow T = 35 \cdot (-8) \cdot x^{11}$
Logo, o quarto termo é $-280x^{11}$.

85 Para expoentes decrescentes de x, o termo geral é dado por: $T = \binom{10}{p}x^{10-p}\,1^p$
Fazendo $p = 6$, obtemos o 7º termo:
$T = \binom{10}{6}x^4 1^6 = \frac{10!}{4!6!}x^4 = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 210x^4$
Alternativa **a**.

86 O termo geral pode ser representado por:
$T = \binom{10}{p}(2a)^p \cdot 1^{10-p}$
Fazendo $p = 8$, temos:
$T = \binom{10}{8}(2a)^8 = 45 \cdot 2^8 \cdot a^8 \Rightarrow T = 11.520a^8$
Logo, o coeficiente de a^8 é 11.520.

87 O termo geral pode ser representado por:
$T = \binom{8}{p}(-2k)^p \cdot (k^3)^{8-p}$, ou seja,
$T = \binom{8}{p} \cdot (-2)^p \cdot k^{24-2p}$
Igualando a 18 o expoente de k, temos:
$24 - 2p = 18 \Rightarrow p = 3$
Assim, concluímos:
$T = \binom{8}{3} \cdot (-2)^3 \cdot k^{24-2\cdot 3} = 56 \cdot (-8) \cdot k^{18} = -448k^{18}$
Logo, o coeficiente de k^{18} é -448.

88 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6 = [2x + (-x^{-1})]^6$
O termo geral pode ser representado por:
$T = \binom{6}{p}(2x)^p\,(-1)^{6-p}\,(x^{-1})^{6-p}$, ou seja:
$T = \binom{6}{p}2^p \cdot (-1)^{6-p} \cdot x^{2p-6}$
Igualando a 2 o expoente de x, temos:
$2p - 6 = 2 \Rightarrow p = 4$
Assim, concluímos:
$T = \binom{6}{4} \cdot 2^4 \cdot (-1)^{6-4} \cdot x^{2\cdot 4-6} =$
$= 15 \cdot 16 \cdot 1 \cdot x^2 = 240x^2$
Alternativa **e**.

89 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6 = (x^2 + x^{-1})^6$
O termo geral pode ser representado por:
$T = \binom{6}{p} \cdot (x^2)^p \cdot (x^1)^{6-p}$, ou seja, $T = \binom{6}{p} \cdot x^{3p-6}$
Igualando a zero o expoente de x, temos:
$3p - 6 = 0 \Rightarrow p = 2$
Assim, concluímos:
$T = \binom{6}{2} \cdot x^{3\cdot 2-6} = 15x^0 = 15$
Alternativa **b**.

90 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^8 = [2x + (-x^{-1})]^8$
O termo geral pode ser representado por:
$T = \binom{8}{p}(-1)^p \cdot (x^{-1})^p \cdot (2x)^{8-p}$, ou seja,
$T = \binom{8}{p} \cdot 2^{8-p} \cdot x^{8-2p} \cdot (-1)^p$
Igualando a zero o expoente de x, temos:
$8 - 2p = 0 \Rightarrow p = 4$
Assim, concluímos:
$T = \binom{8}{4} \cdot 2^{8-4} \cdot x^{8-2\cdot 4} = 70 \cdot 16 \cdot x^0 = 1.120$
Logo, o termo independente é 1.120.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a) $\frac{12!}{13!} = \frac{12!}{13 \cdot 12!} = \frac{1}{13}$

b) $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 72$

c) $\dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$

d) $\dfrac{8! \cdot 10!}{6! \cdot 9!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6! \cdot 10 \cdot 9!}{6! \cdot 9!} = 560$

e) $\dfrac{5! \cdot 9!}{3! \cdot 12!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 9!}{3! \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!} = \dfrac{1}{66}$

f) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{n!} = n^2 + 3n + 2$

g) $\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!} = \dfrac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = n^2 - 7n + 12$

2 $(n-1)! \cdot [(n+1)! - n!] = (n-1)! \cdot [(n+1)n! - n!] = (n-1)! \cdot n!\,[(n+1) - 1] = (n-1)! \cdot n! \cdot n = n! \cdot n! = (n!)^2$

Alternativa **d**.

3 a) $\dfrac{(n+5)!}{(n+4)!} = 12 \Rightarrow \dfrac{(n+5)\cancel{(n+4)!}}{\cancel{(n+4)!}} = 12$

$\therefore\ n + 5 = 12 \Rightarrow n = 7$

Como, para $n = 7$, existem todos os fatoriais relacionados na equação proposta, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{7\}$.

b) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30$

$\therefore\ n^2 - n = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, encontramos $n = 6$ ou $n = -5$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que apenas o número 6 é raiz da equação. Logo o conjunto solução é $S = \{6\}$.

c) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!} = 20 \Rightarrow \dfrac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot \cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+2)!}} = 20$

$\therefore\ n^2 + 7n + 12 = 20 \Rightarrow n^2 + 7n - 8 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 1$ ou $n = -8$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que apenas o número 1 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{1\}$.

d) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{42} \Rightarrow \dfrac{\cancel{(n-1)!}}{(n+1)\,n\,\cancel{(n-1)}} = \dfrac{1}{42}$

$\therefore\ \dfrac{1}{n^2 + n} = \dfrac{1}{42} \Rightarrow n^2 + n - 42 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 6$ ou $n = -7$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que apenas o número 6 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{6\}$.

e) $\dfrac{n!}{n+1} - n! = \dfrac{4(n+1)!}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{n!}{n+1} - n! = \dfrac{4(n+1)n!}{9}$

$\therefore\ \dfrac{1}{n+1} - 1 = \dfrac{4(n+1)}{9} \Rightarrow 4n^2 + 17n + 4 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = -\dfrac{1}{4}$ ou $n = -4$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que nenhum deles é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \varnothing$.

f) $n! + (n+1)! = n!\,(n+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow n!\,(n+1)n! = n!\,(n+2)$

$\therefore\ 1 + n + 1 = n + 2$

$\therefore\ 0 = 0$

Concluímos, então, que a igualdade se verifica para qualquer valor de n desde que existam os fatoriais relacionados na equação. Como esses fatoriais existem para qualquer valor natural de n, o conjunto solução é $S = \mathbb{N}$.

4 $(x+1)! = x! + 6x \Rightarrow (x+1)x! - x! - 6x = 0$

$\therefore\ x!(x + 1 - 1) - 6x = 0 \Rightarrow x! \cdot x - 6x = 0$

$\therefore\ x(x! - 6) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de x, concluímos que 0 e 3 são as raízes da equação. Logo, a soma e o produto das raízes são 3 e 0, respectivamente.

Alternativa **d**.

5 $\dfrac{n! + 2(n-1)!}{(n-2)!} = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)! + 2(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 18$

$\therefore\ \dfrac{\cancel{(n-2)!}[n(n-1) + 2(n-1)]}{\cancel{(n-2)!}} = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + n - 20 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 4$ ou $n = -5$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que apenas o número 4 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{4\}$.

Alternativa **c**.

6 $P = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot ... \cdot (2 \cdot 50) \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2)}_{2^{50}}\underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 50)}_{50!}$

$\therefore\ P = 2^{50} \cdot 50!$

Alternativa **b**.

7 Um número natural n é primo se, e somente se, n possui exatamente dois divisores naturais distintos, que são 1 e n.

Um número natural k é composto se, e somente se, k possui pelo menos três divisores naturais distintos.

Observando que

$50! + 11 = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot ... \cdot 11 \cdot 10! + 11 =$

$= 11(50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot ... \cdot 12 \cdot 10! + 1)$

concluímos que 11 é divisor de $50! + 11$. Assim, o número $50! + 11$ é composto, pois os números naturais 1, $50! + 11$ e 11 são três divisores distintos de $50! + 11$.

8 O número 23! possui os fatores 2 e 5; logo, $23! = 10k$, para algum número natural k.
Assim:
$23! - 243 = 10k - 10 \cdot 24 - 3 = 10(k - 24) - 3$
Observando que $23! > 243$, temos que $10(k - 24)$ é positivo.
Como a diferença entre um múltiplo positivo de 10 e 3 é um número terminado em 7, concluímos que a diferença $23! - 243$ é um número cujo algarismo das unidades é 7.
Alternativa **e**.

9 **a)** Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$$A_{n,\,2} = 3n + 12 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 3n + 12$$

$$\therefore \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 3n + 12 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n^2 - 4n - 12 = 0$
Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 6$ ou $n = -2$.
Apenas o número 6 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{6\}$.

b) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

$$A_{n,\,3} = 3A_{n,\,2} \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{3n!}{(n-2)!}$$

$$\therefore \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = \frac{3\cancel{n}(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}$$

(Observe que a condição de existência permite a divisão de ambos os membros por n.)
$\therefore n^2 - 6n + 5 = 0$
Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 1$ ou $n = 5$.
Apenas o número 5 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{5\}$.

c) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$$A_{n+1,\,2} = A_{n,\,2} \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\therefore \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow n^2 + n = n^2 - n$
$\therefore n = 0$
Como esse valor de n não satisfaz a condição de existência, o conjunto solução da equação é $S = \varnothing$.

d) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 0$
$A_{n+3,\,3} = 2A_{n+3,\,2} + 3A_{n+2,\,2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(n+3)!}{n!} = \frac{2(n+3)!}{(n+1)!} + \frac{3(n+2)!}{n!}$$

$$\therefore \frac{(n+3)(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} =$$

$$= \frac{2(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} + \frac{3(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}$$

$\therefore (n+3)\cancel{(n+2)}(n+1) =$
$= 2(n+3)\cancel{(n+2)} + 3\cancel{(n+2)}(n+1)$

(Observe que a condição de existência permite a divisão de ambos os membros por $n + 2$.)
$\therefore n^2 - n - 6 = 0$
Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 3$ ou $n = -2$.
Apenas o número 3 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{3\}$.

10 Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$
$A_{n,\,3} = n \cdot A_{n,\,2} - 2n(n-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n \cdot n!}{(n-2)!} - 2n(n-1)$$

$$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} =$$

$$= \frac{n \cdot n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} - 2n(n-1)$$

$\therefore \cancel{n}\cancel{(n-1)}(n-2) = \cancel{n} \cdot n\cancel{(n-1)} - 2\cancel{n}\cancel{(n-1)}$
(Observe que a condição de existência permite a divisão de ambos os membros por $n(n-1)$.)
$\therefore n - 2 = n - 2 \Rightarrow 0 = 0$
Concluímos, então, que a igualdade se verifica para qualquer valor de n desde que seja satisfeita a condição de existência. Logo, o conjunto solução é
$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 3\}$.

11 Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, é obedecida a seguinte condição para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f:
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Em outras palavras, elementos distintos do domínio de f devem ter imagens distintas.
Assim, o número de funções injetoras que podem ser definidas de $A = \{-2, 0, 2, 4\}$ em $B = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$ é igual ao número de sequências de quatro elementos distintos que podem ser formadas com os seis elementos de B. Esse número é $A_{6,\,4}$.
Podemos resolver esse problema pelo princípio fundamental de contagem:

elemento -2 de A	elemento 0 de A	elemento 2 de A	elemento 4 de A
6	5	4	3

Assim, temos: $A_{6,\,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
Alternativa **a**.

12 Condição de existência: $x \in N^*$
$P_n = 5.040n \Rightarrow n! = 5.040n$
$\therefore \cancel{n}(n-1)! = 5.040\cancel{n}$
(Observe que a condição de existência permite a divisão de ambos os membros por n.)
$\therefore (n-1)! = 5.040 \Rightarrow n = 8$
Logo, $S = \{8\}$.

13 Uma função f: $A \rightarrow B$ é bijetora se, e somente se, f é injetora e sobrejetora.
Em outras palavras, elementos distintos do domínio de f devem ter imagens distintas, e todo elemento do contradomínio é imagem de algum elemento do domínio.

Assim, o número de funções bijetoras que podem ser definidas de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ em $B = \{a, e, i, o, u\}$ é igual ao número de sequências de cinco elementos distintos que podem ser formadas com os cinco elementos de B. Esse número é $A_{5,5} = P_5 = 5! = 120$.

Podemos resolver esse problema pelo princípio fundamental de contagem:

elemento 1 de *A*	elemento 2 de *A*	elemento 3 de *A*	elemento 4 de *A*	elemento 5 de *A*
5	4	3	2	1

Assim, temos: $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

14 $P_5^{(3,2)} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 10$

Logo, existem exatamente dez números naturais nas condições enunciadas.

15 a) $C_{8,2} + C_{6,0} + C_{0,0} = \dfrac{8!}{2! \cdot 6!} + \dfrac{6!}{0! \cdot 6!} + \dfrac{0!}{0! \cdot 0!} =$

$= 28 + 1 + 1 = 30$

b) $C_{5,4} + A_{6,2} + P_3 = \dfrac{5!}{4! \cdot 1!} + \dfrac{6!}{4!} + 3! =$

$= 5 + 30 + 6 = 41$

16 Condição de existência: $x \in \mathbb{N}$ e $x \geqslant 3$

$x^3 + A_{x,2} - 6 \cdot C_{x,3} = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 + \dfrac{x!}{(x-2)!} - \dfrac{6 \cdot x!}{3!(x-3)!} = 27$

$\therefore\ x^3 + \dfrac{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} -$

$- \dfrac{\cancel{6} \cdot x(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{(x-3)!}} = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 + x^2 - x - x^3 + 3x^2 - 2x = 27$

$\therefore\ 4x^2 - 3x - 27 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos:

$x = 3$ ou $x = -\dfrac{9}{4}$.

Apenas o número 3 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{3\}$.

17 $\displaystyle\sum_{p=0}^{80} \binom{80}{p} 5^p \cdot (-5)^{80-p} = (5-5)^{80} = 0$

Alternativa **e**.

18 $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p \cdot 3^{n-p} = 625^{n-3} \Rightarrow (2+3)^n = 625^{n-3}$

$\therefore\ 5^n = (5^4)^{n-3} \Rightarrow 5^n = 5^{4n-12}$

$\therefore\ n = 4n - 12 \Rightarrow 3n = 12$

$\therefore\ n = 4$

19 $\displaystyle\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 3^p = 256 \Rightarrow \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 3^p \cdot 1^{m-p} = 256$

$\therefore\ (3+1)^m = 256 \Rightarrow 4^m = 256$

$\therefore\ 2^{2m} = 2^8 \Rightarrow 2m = 8$

$\therefore\ m = 4$

Alternativa **b**.

20 $\displaystyle\sum_{p-0}^{n} \binom{n}{p} = 1.024 \Rightarrow \sum_{p-0}^{n} \binom{n}{p} 1^p \cdot 1^{n-p} = 1.024$

$\therefore\ (1+1)^n = 1.024 \Rightarrow 2^n = 2^{10}$

Logo, $n = 10$.

21 $\displaystyle\sum_{p=2}^{20} \binom{20}{p} = 2^{20} - \binom{20}{0} - \binom{20}{1} = 2^{20} - 1 - 20 =$

$= 2^{20} - 21$

Alternativa **c**.

22 $S = \dbinom{30}{0} - \dbinom{30}{1} + \dbinom{30}{2} - \dbinom{30}{3} + \ldots + \dbinom{30}{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \dbinom{30}{0} \cdot 1^0 \cdot (-1)^{30} + \dbinom{30}{1} \cdot 1^1 \cdot (-1)^{29} +$

$+ \dbinom{30}{2} \cdot 1^2 \cdot (-1)^{28} + \ldots + \dbinom{30}{30} \cdot 1^{30} \cdot (-1)^0$

$\therefore\ S = [1 + (-1)]^{30} = 0^{30} = 0$

Alternativa **a**.

23 $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x^5 - \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 - \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}x^1y^4 - y^5 = -32 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ (x-y)^5 = -32 \end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 1$ e $y = 3$

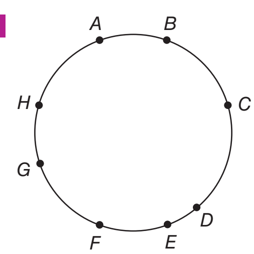
24 $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 16 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ (x+y)^4 = 16 \end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ e $y = \dfrac{1}{2}$

Alternativa **e**.

25



Os 8 pontos determinam triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos e um octógono. Assim, sendo n o número de polígonos convexos, temos:

$n = \dbinom{8}{3} + \dbinom{8}{4} + \dbinom{8}{5} + \dbinom{8}{6} + \dbinom{8}{7} + \dbinom{8}{8} =$

$= (1+1)^8 - \dbinom{8}{0} - \dbinom{8}{1} - \dbinom{8}{2}$

$n = 2^8 - 1 - 8 - 28 = 219$

Logo, os 8 pontos determinam 219 polígonos convexos.

26 Sendo A um conjunto de n elementos e p um número natural, com $p \leqslant n$, o número de subconjuntos de A com p elementos é $C_{n,p}$. Assim, o total de subconjuntos de A é:

$\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_{n,p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

27 $T = \binom{5}{p} x^p \cdot 2^{5-p}$

Para $p = 4$, temos:

$T = \binom{5}{4} x^4 \cdot 2^{5-4} = 5 \cdot x^4 \cdot 2 = 10x^4$

Alternativa **d**.

28 $(x^4 + 2)^{10} \cdot (x^4 - 2)^{10} = [(x^4 + 2)(x^4 - 2)]^{10} =$
$= (x^8 - 4)^{10}$

$T = \binom{10}{p} (x^8)^p \cdot (-4)^{10-p} \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \binom{10}{p} x^{8p} \cdot (-4)^{10-p}$

Para $8p = 64$, temos $p = 8$; logo:

$T = \binom{10}{8} \cdot x^{8 \cdot 8} \cdot (-4)^{10-8} = 45 \cdot x^{64} \cdot (-4)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow T = 720x^{64}$

Concluímos, então, que o coeficiente de x^{64} é 720.

29 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6 = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}\right)^6$

O termo geral pode ser representado por:

$T = \binom{6}{p} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^p \cdot (x^{-1})^{6-p}$, ou seja,

$T = \binom{6}{p} \cdot x^{\frac{3p}{2} - 6}$

Igualando a -3 o expoente de x, temos:

$\frac{3p}{2} - 6 = -3 \Rightarrow p = 2$

Assim, concluímos:

$T = \binom{6}{2} \cdot x^{\frac{3 \cdot 2}{2} - 6} = 15x^{-3}$

Alternativa **d**.

30 $\left(x + \frac{k}{x}\right)^{10} = (x + kx^{-1})^{10}$

O termo geral pode ser representado por:

$T = \binom{10}{p} \cdot (kx^{-1})^p \cdot x^{10-p}$, ou seja, $T = \binom{10}{p} \cdot k^p \cdot x^{10-2p}$

Igualando a 4 o expoente de x, temos:
$10 - 2p = 4 \Rightarrow p = 3$
Assim, obtemos:

$T = \binom{10}{3} \cdot k^3 \cdot x^{10 - 2 \cdot 3} = 120k^3x^4$

Para que o coeficiente de x^4 seja 15, devemos ter:

$120k^3 = 15 \Rightarrow k^3 = \frac{1}{8}$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

Alternativa **a**.

31 $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8 = [x^3 + (x^{-1})]^8$

O termo geral pode ser representado por:

$T = \binom{8}{p} (x^{-1})^p \cdot (x^3)^{8-p}$, ou seja:

$T = \binom{8}{p} x^{24-4p}$

Igualando a zero o expoente de x, temos:
$24 - 4p = 0 \Rightarrow p = 6$
Assim, concluímos:

$T = \binom{8}{6} x^{24 - 4 \cdot 6} = 28x^0 = 28$

Logo, o termo independente é 28.

32 $\left(2x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^7 = [2x^4 + (-x^{-3})]^{-7}$

O termo geral pode ser representado por:

$T = \binom{7}{p} \cdot (2x^4)^p \cdot (-x^{-3})^{7-p}$, ou seja,

$T = \binom{7}{p} \cdot 2^p \cdot (-1)^{7-p} \cdot x^{7p-21}$

Igualando a zero o expoente de x, temos:
$7p - 21 = 0 \Rightarrow p = 3$
Assim, concluímos:

$T = \binom{7}{3} \cdot 2^3 \cdot (-1)^{7-3} \cdot x^{7 \cdot 3 - 21} =$

$= 35 \cdot 8 \cdot (-1)^4 \cdot x^0 = 280$

Logo, o termo independente é 280.

33 Aplicando o termo geral, temos:

$T = \binom{n}{p} (x)^p (x^{-5})^{n-p}$

Para que o termo seja independente de x, o expoente de x deverá ser zero.
$x^p \cdot x^{-5n+5p} = x^0$
$6p - 5n = 0$
Como p é um número inteiro, n deve ser um número múltiplo de 6. O maior múltiplo de 6 menor que 100 é o 96; logo, $n = 96$ e $p = 80$.

$T = \binom{96}{80} x^{80} (x^{-5})^{16} = \binom{96}{80}$

Logo, o maior valor de n é 96.

Exercícios contextualizados

34

1ª listra	2ª listra	3ª listra	4ª listra
7	6	5	4

Logo, o número de maneiras como o painel pode ser pintado é dado por: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$
Alternativa **b**.

35 Os caminhos possíveis de a até d são:

$a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{6} d$

ou

$a \xrightarrow{4} b \xrightarrow{3} c \xrightarrow{2} d$

ou

$a \xrightarrow{5} c \xrightarrow{2} d$

ou

$a \xrightarrow{7} d$

Logo, o número n de rotas possíveis é dado por:
$n = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \Rightarrow n = 65$
Alternativa **b**.

36

cetáceos	primatas	roedores
2	20	33

Logo, o número de conjuntos distintos que podem ser formados é dado por: $2 \cdot 20 \cdot 33 = 1.320$
Alternativa **a**.

37 **a)** Para que o número seja ímpar, a casa das unidades deve ser ocupada pelo algarismo 1 ou pelo algarismo 3; portanto, essa casa tem exatamente duas possibilidades de preenchimento. Assim:

milhar	centena	dezena	unidade (1 ou 3)
5	5	5	2

Logo, o total de números que podem ser formados é dado por: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 250$

b) Para que o número seja ímpar, a casa das unidades deve ser ocupada pelo algarismo 1 ou pelo algarismo 3; portanto, essa casa tem exatamente duas possibilidades de preenchimento. Assim:

milhar	centena	dezena	unidade (1 ou 3)
4	3	2	2

Logo, o total de números que podem ser formados é dado por: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$

38 **a)** Um número natural é divisível por 4 quando seus dois últimos algarismos (dezenas e unidades) formam, nessa ordem, um número divisível por 4. Assim, temos as possibilidades:

| | | 1 | 2 | → $6 \times 6 = 36$
| | | 4 | 4 | → $6 \times 6 = 36$
| | | 1 | 6 | → $6 \times 6 = 36$
| | | 5 | 2 | → $6 \times 6 = 36$
| | | 2 | 4 | → $6 \times 6 = 36$
| | | 5 | 6 | → $6 \times 6 = 36$
| | | 3 | 2 | → $6 \times 6 = 36$
| | | 6 | 4 | → $6 \times 6 = 36$
| | | 3 | 6 | → $6 \times 6 = 36$

Logo, o total de números múltiplos de 4 é $9 \cdot 36$, ou seja, 324.

b) Um número natural é múltiplo de 3 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é um número múltiplo de 3. Os subconjuntos de C formados por três algarismos cuja soma é um múltiplo de 3 são:

$C_1 = \{1, 2, 3\}$ $C_5 = \{2, 3, 4\}$
$C_2 = \{1, 2, 6\}$ $C_6 = \{2, 4, 6\}$
$C_3 = \{1, 3, 5\}$ $C_7 = \{3, 4, 5\}$
$C_4 = \{1, 5, 6\}$ $C_8 = \{4, 5, 6\}$

O total de números com três algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos de cada um dos subconjuntos é dado por:

$3 \times 2 \times 1 = 6$

Logo, o total de múltiplos de 3 que podem ser formados é $8 \cdot 6$, ou seja, 48.

39 Como o vigarista decorou a sequência de algarismos, falta, para completar a senha, a sequência de letras. Sabendo que a 1ª, a 2ª e a 3ª letras da sequência de letras estão, respectivamente, no 1º, 2º e 3º retângulos, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra
5	5	5

Logo, o total de senhas que o vigarista pôde obter é dado por: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
Alternativa **b**.

40

1º filme	2º filme	3º filme	4º filme	5º filme	6º filme
6	5	4	3	2	1

Logo, o total de sequências diferentes em que os filmes podem ser apresentados é dado por:
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

41

1ª col.	2º esp.	2ª col.	2º esp.	3ª col.	3º esp.	4ª col.	4º esp.	5ª col.
3	2	3	2	3	2	3	2	3

Logo, o número total de preços que podem ser representados é dado por:
$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 3^5 \cdot 2^4 = 3.888$
Alternativa **d**.

42

1º alg.	2º alg.	3º alg.	1ª letra	2ª letra
10	10	10	26	26

Logo, o maior número possível de clientes do banco é dado por:
$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 10^3 \cdot 26^2 = 676.000$
Alternativa **c**.

43 Indicando por H e M as posições a serem ocupadas por homens e mulheres, respectivamente, temos:

H	M	H	M	H	M	H
4	3	3	2	2	1	1

Logo, o número total de sequências diferentes em que os candidatos podem ser dispostos é dado por:
$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 144$
Alternativa **d**.

44

1ª ponte	2ª ponte	3ª ponte	4ª ponte	5ª ponte	6ª ponte	7ª ponte	8ª ponte
4	3	3	3	3	3	3	3

Logo, o número de fragmentos diferentes que podem ser obtidos é dado por:
$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3^7 = 8.748$.

45 Cada ponto pode se destacar ou não; logo, para cada ponto há duas possibilidades. Porém, o retângulo em que nenhum ponto se destaca não representa caractere. Portanto, o número de caracteres é $2^6 - 1$, ou seja, 63.
Alternativa **d**.

46 (I) Sendo t o total de números naturais de quatro algarismos que podem ser formados com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, temos:

milhar	centena	dezena	unidade
5	5	5	5

$t = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

(II) Sendo k o total de números naturais de quatro algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, temos:

milhar	centena	dezena	unidade
5	4	3	2

$k = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

(III) A diferença $t - k$ é a quantidade de números naturais de quatro algarismos, com pelo menos dois iguais, que podem ser formados com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9:

$t - k = 625 - 120 = 505$

Alternativa **a**.

47 (I) Sendo t o total de resultados possíveis da prova, temos:

1º colocado	2º colocado	3º colocado
9	8	7

$t = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

(II) Sendo k o número de resultados possíveis em que não se classifica nenhum brasileiro, temos:

1º colocado	2º colocado	3º colocado
5	4	3

$k = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

(III) A diferença $t - k$ é o número de resultados possíveis com pelo menos um brasileiro classificado:

$t - k = 504 - 60 = 444$.

Logo, são possíveis 444 resultados com pelo menos um brasileiro entre os três primeiros colocados.

48

3	dígito da 1ª fileira	dígito da 1ª fileira	dígito da 2ª fileira	dígito da 2ª fileira	dígito da 3ª fileira	dígito da 3ª fileira	0
1	3	3	3	3	3	3	1

$N = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 3^6 = 729$

Alternativa **d**.

49 a) • O número de possibilidades de colorir o país P é 4;
• Fixada uma cor para o país P, o número de possibilidades de colorir o país S é 3;
• Fixadas as cores dos países P e S, o número de possibilidades de colorir cada um dos países R e Q é 2:

4	2
P	Q
R	S
2	3

Logo, o número n de maneiras de colorir o mapa, nas condições estabelecidas, é dado por:

$n = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$

b) • O número de possibilidades de colorir o país P é 4;
• Fixada uma cor para o país P, o número de possibilidades de colorir o país S é 1;
• Fixadas as cores dos países P e S, o número de possibilidades de colorir cada um dos países R e Q é 3:

4	3
P	Q
R	S
3	1

Logo, o número k de maneiras de colorir o mapa, nas condições estabelecidas, é dado por:

$k = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 36$

50 Sendo n o número máximo de tentativas, temos:

1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.	0	0	0	0
4	3	2	1	1	1	1	1

$n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 24$

Alternativa **b**.

51 a) Sendo n o número de maneiras distintas de dois passageiros se sentarem numa mesma fila do avião, temos:

fila	1º lugar escolhido	2º lugar escolhido
20	6	5

$n = 20 \cdot 6 \cdot 5 = 600$

b) Designando por "bloco" cada grupo de três poltronas juntas, e por k o número de maneiras de um casal sentar-se em duas poltronas vizinhas, temos:

bloco	par de poltronas vizinhas no bloco escolhido	maneiras possíveis de o casal ocupar as poltronas escolhidas
40	2	2

$k = 40 \cdot 2 \cdot 2 = 160$

c) Designando por "bloco" cada grupo de três poltronas juntas; por A um dos casais; por B o outro casal; e por m o número de maneiras de os casais se sentarem de modo que cada um fique em duas poltronas vizinhas, temos:

bloco escolhido pelo casal A	par de poltronas vizinhas no bloco escolhido pelo casal A	maneiras possíveis de o casal A ocupar as poltronas escolhidas
40	2	2

bloco escolhido pelo casal B	par de poltronas vizinhas no bloco escolhido pelo casal B	maneiras possíveis de o casal B ocupar as poltronas escolhidas
39	2	2

$m = 40 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 39 \cdot 2 \cdot 2 = 24.960$

52 Sendo n o total de senhas que podem ser formadas, nas condições estabelecidas, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
5	5	5	5	4	3	2

$n = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 15.000$

Alternativa **c**.

53 Sendo S o conjunto das pessoas da amostra que tiveram variação acentuada na pressão sistólica, e D o conjunto das pessoas da amostra que tiveram variação acentuada na pressão diastólica, temos:

$n(S \cup D) = n(S) + n(D) - n(S \cap D) \Rightarrow$

$\Rightarrow 30 = 18 + 20 - n(S \cap D)$

$\therefore n(S \cap D) = 8$

Logo, 8 pacientes tiveram a classificação SD.

54 (I) Total n de números que começam por 2 ou 4 ou 6 ou 8 e terminam por 1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9.

centenas (2 ou 4 ou 6 ou 8)	dezenas	unidades (1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9)
4	8	5

$n = 4 \cdot 8 \cdot 5 = 160$

(II) Total k de números que começam por 1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9 e terminam por 1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9.

centenas (1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9)	dezenas	unidades (1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9)
5	8	4

$k = 5 \cdot 8 \cdot 4 = 160$

Como o conjunto de números que satisfazem a condição mencionada no item (I) e o conjunto de números que satisfazem a condição mencionada no item (II) são disjuntos, a soma $n + k$ é o total de números naturais que obedecem às condições estabelecidas:

$n + k = 160 + 160 = 320$

Alternativa **a**.

55 **a)** Sendo n o número de maneiras diferentes de ocorrer a distribuição da pontuação, temos:

1º colocado	2º colocado	3º colocado
15	14	13

$n = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2.730$

b) Sendo k o número de maneiras diferentes de ocorrer a distribuição da pontuação, sendo o carro da equipe A o primeiro colocado, temos:

1º colocado (carro da equipe A)	2º colocado	3º colocado
1	14	13

$k = 1 \cdot 14 \cdot 13 = 182$

c) Sendo p o número de maneiras diferentes de ocorrer a distribuição da pontuação, sendo o carro da equipe A o segundo colocado, temos:

1º colocado	2º colocado (carro da equipe A)	3º colocado
14	1	13

$p = 14 \cdot 1 \cdot 13 = 182$

d) O número q de maneiras diferentes de ocorrer a distribuição da pontuação, sendo o carro da equipe A o primeiro ou segundo colocado, é a soma dos resultados obtidos em **b** e **c**:

$q = 182 + 182 = 364$

56 Sendo n o número de sequências de dois algarismos distintos formadas pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, temos:

9	8

$n = 9 \cdot 8 = 72$

Porém, cada pedra $\{p, q\}$ do dominó é igual à pedra $\{q, p\}$; por exemplo, as duas figuras a seguir representam a mesma pedra:

Logo, o número de pedras que apresentam quantidades diferentes de pontos nas duas bandas é dado por: $\frac{n}{2} = 36$

Para completar o cálculo, acrescentamos as 9 pedras que apresentam quantidades iguais de pontos em cada banda.

Assim, concluímos que, em um dominó cuja maior peça é o "duplo 8", são empregadas 36 + 9 peças, ou seja, 45 peças.

Alternativa **e**.

57 (I) Sendo n o número de sequências de dois algarismos distintos formadas pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, temos:

7	6

$n = 7 \cdot 6 = 42$

Repetindo o raciocínio do exercício anterior, deduzimos que o número de pedras que apresentam quantidades diferentes de pontos nas duas bandas é dado por: $\frac{n}{2} = 21$

Para completar o cálculo, acrescentamos as 7 pedras que apresentam quantidades iguais de pontos nas duas bandas.

Assim, concluímos que, em um dominó cuja maior peça é o "duplo 6", são empregadas 21 + 7 peças, ou seja, 28 peças.

(II) Sendo k o número de sequências de dois algarismos distintos formadas pelos algarismos 0, 5 e 6, temos:

3	2

$k = 3 \cdot 2 = 6$

Logo, o número de pedras do dominó que apresentam 0, 5 ou 6 nas duas casas, sem repetição, é dado por $\frac{k}{2} = 3$. Acrescentando a esse resultado as pedras $\{0, 0\}$, $\{5, 5\}$ e $\{6, 6\}$, temos que 6 pedras têm em uma das casas 0, 5 ou 6 pontos.

(III) A diferença d entre o resultado obtido no item (I) e o resultado obtido no item (II) é a quantidade de pedras que apresentam 1, 2, 3 ou 4 pontos em uma das casas:
$d = 28 - 6 = 22$

58 Sendo n o número de sequências de um ou dois ou três ou quatro ou cinco algarismos, formadas com algarismos 0 e 1, temos:

$$\underbrace{\boxed{}}_{2}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{2}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{2}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{2}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{2}$$

$n = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$
$= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$

Logo, o número máximo de palavras, com cinco ou menos letras, que podem ser formadas com esse código é 62.
Alternativa **b**.

59 Sendo n o número de maneiras de as pessoas se sentarem, nas condições estabelecidas, temos:

$$\underbrace{\boxed{}}_{3}\boxed{}\underbrace{\boxed{}}_{2}\boxed{}\underbrace{\boxed{}}_{1}\boxed{}$$

ou

$$\boxed{}\underbrace{\boxed{}}_{3}\boxed{}\underbrace{\boxed{}}_{2}\boxed{}\underbrace{\boxed{}}_{1}$$

$n = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$
Alternativa **d**.

60 (I) Seja n o total de números que não começam por 1 nem por 2:

$$\underbrace{\boxed{}}_{5}\underbrace{\boxed{}}_{6}\underbrace{\boxed{}}_{5}$$

$n = 5 \cdot 6 \cdot 5 = 150$

(II) Seja k_1 o total de números que começam por 1 e não contêm o algarismo 7:

$$\underbrace{\boxed{1}}_{1}\underbrace{\boxed{}}_{5}\underbrace{\boxed{}}_{4}$$

$k_1 = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$

(III) Seja k_2 o total de números que começam por 1 e contêm o algarismo 7 na segunda posição, não na última:

$$\underbrace{\boxed{1}}_{1}\underbrace{\boxed{7}}_{1}\underbrace{\boxed{}}_{5}$$

$k_2 = 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$

(IV) Seja k_3 o total de números que começam por 1 e contêm o algarismo 7 na última posição, não na segunda:

$$\underbrace{\boxed{1}}_{1}\underbrace{\boxed{}}_{5}\underbrace{\boxed{7}}_{1}$$

$k_3 = 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$

(V) Entre os números que começam por 1, falta ainda considerar o 177. Assim, adicionando 1 aos resultados obtidos em (II), (III) e (IV) obtemos o total k de números que começam por 1:
$k = k_1 + k_2 + k_3 + 1 = 20 + 5 + 5 + 1 = 31$

(VI) Repetindo para o algarismo 2 o raciocínio aplicado para o algarismo 1 nos itens de (I) a (V), deduzimos que o total p de números que começam por 2 é dado por:
$p = 20 + 5 + 5 + 1 = 31$

(VII) Concluímos, assim, que o total de números que podem ser formados sob a regra estabelecida é dado pela soma $n + k + p$:
$n + k + p = 150 + 31 + 31 = 212$
Alternativa **e**.

61 a) F, pois, sendo n o total de números formados, temos:

$$\underbrace{\boxed{}}_{9}\underbrace{\boxed{}}_{9}\underbrace{\boxed{}}_{8}\underbrace{\boxed{}}_{7}\underbrace{\boxed{}}_{6}$$

$n = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27.216$

b) F, pois, sendo k o total de números pares formados, temos:

$$\underbrace{\boxed{}}_{9}\underbrace{\boxed{}}_{8}\underbrace{\boxed{}}_{7}\underbrace{\boxed{0}}_{1}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{8}\underbrace{\boxed{}}_{8}\underbrace{\boxed{}}_{7}\underbrace{\boxed{}}_{4}$$

2 ou 4 ou 6 ou 8

$\therefore\ k = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 2.296$

c) V, pois, sendo p o total de números formados, temos:

1 ou 2

$$\underbrace{\boxed{}}_{2}\underbrace{\boxed{}}_{9}\underbrace{\boxed{}}_{8}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{3}}_{1}\underbrace{\boxed{}}_{4}\underbrace{\boxed{}}_{8}$$

$\therefore\ p = 2 \cdot 9 \cdot 8 + 1 \cdot 4 \cdot 8 = 176$

d) V, pois os algarismos de valor ímpar de A são 1, 3, 5, 7 e 9 e, portanto, sendo q o total de números formados, temos:

5	4	3

$\therefore\ q = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

e) F, pois, sendo r o total de números formados, temos:

		0
9	8	1

ou

		5
8	8	1

$\therefore\ r = 9 \cdot 8 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 1 = 136$

62 (I) Seja n o total de números naturais de oito algarismos que se podem formar com 1, 2 e 3:

3	3	3	3	3	3	3	3

$n = 3^8$

(II) Seja k o total de números naturais de oito algarismos que se podem formar com 1 e 2:

2	2	2	2	2	2	2	2

$k = 2^8$

(III) Seja p o total de números naturais de oito algarismos que se podem formar com 1 e 3:

2	2	2	2	2	2	2	2

$p = 2^8$

(IV) Seja q o total de números naturais de oito algarismos que se podem formar com 2 e 3:

2	2	2	2	2	2	2	2

$q = 2^8$

(V) Seja r o total de números naturais de oito algarismos iguais que se podem formar com 1, 2 e 3:

$r = 3$

(VI) O total de números nas condições estabelecidas no enunciado do problema é a diferença:

$n - (k + p + q + r) =$
$= 3^8 - (2^8 + 2^8 + 2^8 + 3) =$
$= 3^8 - 3 \cdot 2^8 - 3$

Alternativa **c**.

63 O número de maneiras diferentes de serem ocupados os postos é igual ao número de sequências de n elementos distintos que podem ser formadas com p elementos distintos, ou seja: $A_{p,\,n}$.
Alternativa **c**.

64 O total n de números que podem ser formados nas condições estabelecidas é dado por:

ímpar	ímpar	ímpar	par	par	par
	$A_{5,\,3}$			$A_{5,\,3}$	

$n = A_{5,\,3} \cdot A_{5,\,3} = (A_{5,\,3})^2$
Alternativa **c**.

65 O total n de sequências que podem ser formadas nas condições estabelecidas é dado por:

vogal	vogal	vogal	consoante	consoante	consoante	consoante
	$A_{5,\,3}$			$A_{6,\,4}$		

ou

consoante	consoante	consoante	consoante	vogal	vogal	vogal
	$A_{6,\,4}$				$A_{5,\,3}$	

$n = A_{5,\,3} \cdot A_{6,\,4} + A_{5,\,3} \cdot A_{6,\,4} = 2 \cdot A_{5,\,3} \cdot A_{6,\,4}$
Alternativa **a**.

66 O total n de sequências que podem ser formadas nas condições estabelecidas é dado por:

1ª etiqueta	2ª etiqueta	3ª etiqueta 5	4ª etiqueta	5ª etiqueta	6ª etiqueta

$A_{99,\,5}$

ou

1ª etiqueta	2ª etiqueta	3ª etiqueta	4ª etiqueta 5	5ª etiqueta	6ª etiqueta

$A_{99,\,5}$

$n = A_{99,\,5} + A_{99,\,5} = 2 \cdot A_{99,\,5}$
Alternativa **c**.

67 Um dos n algarismos não nulos é 5, necessariamente. Fixando o algarismo 5 na casa das unidades, temos:

	...	centenas	dezenas	unidades 5

$\underbrace{\qquad\qquad}_{A_{n\,-\,1,\,p\,-\,1}}$

Logo, o total k é dado por: $k = A_{n\,-\,1,\,p\,-\,1}$
Alternativa **a**.

68 (I) O total k de sequências de cores que podem ser formadas, com ou sem repetição, é dado por:

n	n	n	n	n	n	n	n

$k = n^8$

(II) O total p de sequências de cores diferentes que podem ser formadas é dado por:

$\underbrace{\qquad\qquad}_{A_{n,\,8}}$

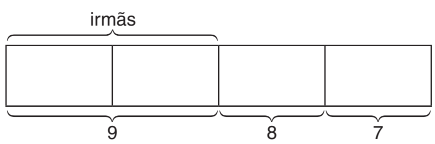
$p = A_{n,\,8}$

(III) A diferença $n - p$ é o total de sequências de cores que podem ser formadas, com pelo menos uma cor repetida:
$n - p = n^8 - A_{n,\,8}$
Alternativa **d**.

69 $P_6 = 6! = 720$

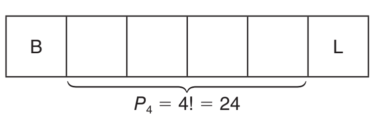
70 O total n de sequências é igual ao produto do número de permutações dos cinco primeiros carros pelo número de permutações dos 15 seguintes:
$n = P_5 \cdot P_{15} = 5! \cdot 15!$
Alternativa **e**.

71 O número possível de escolhas de duas cadeiras juntas e outras duas quaisquer é dado por:



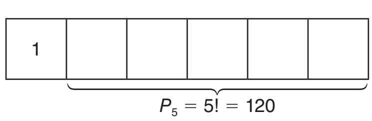
$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
Como, para cada uma dessas escolhas, os irmãos podem se acomodar de P_2 maneiras diferentes, concluímos que o número n de possibilidades de proceder à acomodação das pessoas, nas condições estabelecidas, é dado por:
$n = P_2 \cdot 504 = 2 \cdot 504 = 1.008$
Alternativa **c**.

72 Fixando a letra B na primeira posição e a letra L na última (sexta posição), sobram 4 letras para serem distribuídas nas posições intermediárias:



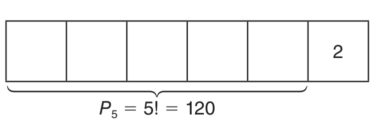
Alternativa **a**.

73 **a)** Fixando o algarismo 1 na primeira posição, sobram 5 algarismos para serem distribuídos nas posições posteriores:



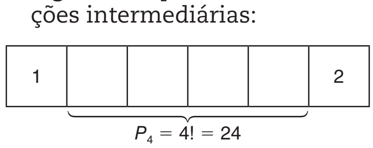
Logo, podemos formar 120 números.

b) Fixando o algarismo 2 na última posição, sobram 5 algarismos para serem distribuídos nas posições anteriores:



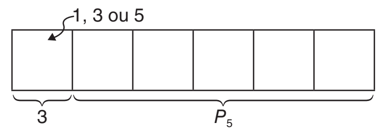
Logo, podemos formar 120 números.

c) Fixando o algarismo 1 na primeira posição à esquerda e o algarismo 2 na última, sobram 4 algarismos para serem distribuídos nas posições intermediárias:



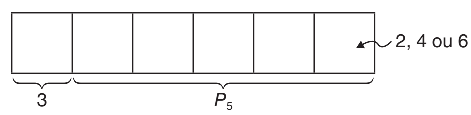
Logo, podemos formar 24 números.

d) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira casa à esquerda: 1, 3 ou 5. Para cada algarismo ímpar fixado na primeira posição, sobram cinco algarismos para serem distribuídos nas posições posteriores:



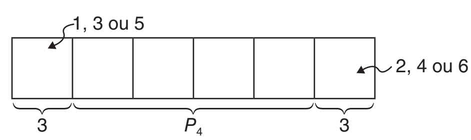
$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5! = 3 \cdot 120 = 360$
Assim, há 360 números que começam por algarismo ímpar.

e) Há três possibilidades para o preenchimento da última casa à direita: 2, 4 ou 6. Para cada algarismo par fixado na última posição, sobram cinco letras para serem distribuídas nas posições anteriores:



$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5! = 3 \cdot 120 = 360$
Assim, há 360 números que terminam por algarismo par.

f) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição à esquerda e três possibilidades para a última. Fixados um algarismo ímpar na primeira posição e um algarismo par na última, sobram quatro algarismos para serem distribuídos nas posições intermediárias:



$3 \cdot P_4 \cdot 3 = 3 \cdot 4! \cdot 3 = 3 \cdot 24 \cdot 3 = 216$
Há, portanto, 216 números que começam por algarismo ímpar e terminam por algarismo par.

g) Considerando o bloco 245 como um único elemento a ser permutado com os demais, o número de permutações dos quatro elementos 245, 1, 3 e 6 é dado por:
$P_4 = 4! = 24$
Logo, existem 24 números nas condições estabelecidas.

h) Nesse caso, um bloco composto de 2, 4, 5 pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: 245, 254, 425, 452, 524 e 542. Para cada um desses seis blocos, podemos formar $P_4 = 4! = 24$ números, conforme vimos no item **g**. Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 24 = 144$ números. Ou seja, o total de números naturais diferentes que podem ser formados, nas condições enunciadas, é dado por:
$P_3 \cdot P_4 = 3! \cdot 4! = 6 \cdot 24 = 144$

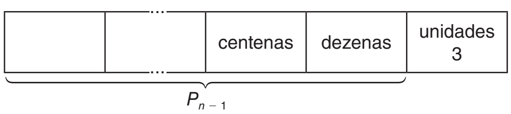
i) Para cada número formado com 1 à esquerda do 2, podemos associar um único número com o 2 à esquerda do 1, bastando, para isso, permutar apenas os algarismos 1 e 2; por exemplo:
- associa-se o número 123.456 ao número 213.456

- associa-se o número 561.432 ao número 562.431

Assim, deduzimos que a quantidade n de números que apresentam o 1 antes do 2 é igual à quantidade de números que apresentam o 2 antes do 1. Como o total de números naturais de seis algarismos distintos que podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 é P_6, concluímos que:

$$n = \frac{P_6}{2} = \frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360$$

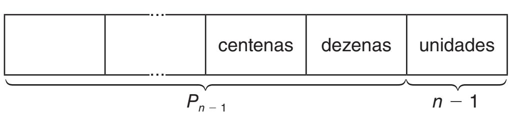
74 a) Fixando o algarismo 3 na casa das unidades, sobram $n - 1$ algarismos para serem distribuídos nas casas restantes:



Logo, o total de números que podem ser formados nas condições estabelecidas é dado por:

$P_{n-1} = (n - 1)!$

b) Para a casa das unidades, há $n - 1$ possibilidades. Fixada uma delas, sobram $n - 1$ algarismos para serem distribuídos nas casas restantes:



Logo, o total de números que podem ser formados nas condições estabelecidas é dado por:

$(n - 1) \cdot P_{n-1} = (n - 1) \cdot (n - 1)!$

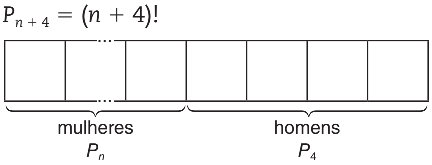
Outro modo

Do total de números que podem ser formados com os n algarismos, subtraímos o total de números que terminam por 3:

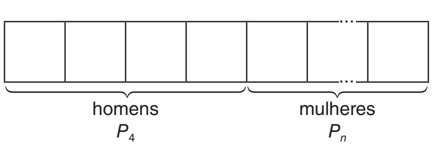
$n! - (n - 1)! = n(n - 1)! - (n - 1)! =$
$= (n - 1) \cdot (n - 1)!$

75 a) $P_{n+4} = (n + 4)!$

b)



ou



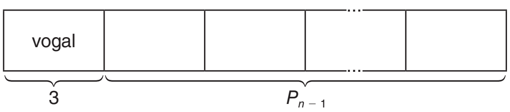
Logo, o número de sequências diferentes em que as pessoas podem ocupar as cadeiras de modo que os homens fiquem juntos e as mulheres fiquem juntas é dado por:

$P_n \cdot P_4 + P_4 \cdot P_n = 48 \cdot n!$

c) Fixada uma determinada ordem para os homens, que devem estar juntos, podemos considerá-los como um único elemento a ser permutado com as n mulheres. Assim, para que os homens fiquem juntos, na ordem prefixada, o número de sequências em que as pessoas podem ocupar as cadeiras é dado por P_{n+1}. Como os homens podem ficar juntos em P_4 sequências diferentes, concluímos que o número de sequências em que as pessoas podem ocupar as cadeiras, estando os homens juntos em qualquer ordem, é dado por:

$P_4 \cdot P_{n+1} = 4!(n + 1)! = 24(n + 1)!$

76 Fixando uma vogal na primeira posição, restam $n - 1$ letras para serem distribuídas nas posições posteriores:



Logo:

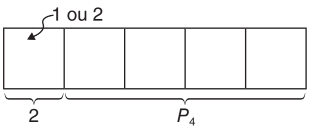
$3 \cdot P_{n-1} = 2.160 \Rightarrow 3(n - 1)! = 2.160$

$\therefore (n - 1)! = 720 \Rightarrow n = 7$

77 a) $P_5 = 5! = 120$

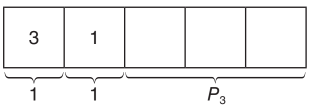
b) Para que um número formado seja menor que 34.215, devemos ter:

- o algarismo da casa das dezenas de milhar deve ser 1 ou 2:

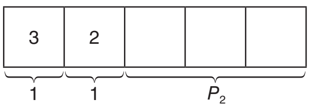


ou

- fixando o 3 na casa das dezenas de milhar, o algarismo dos milhares pode ser 1 ou 2:

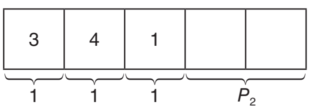


ou



ou

- fixando o 3 e o 4 nas casas das dezenas de milhar e dos milhares, respectivamente, o algarismo das centenas só pode ser 1:

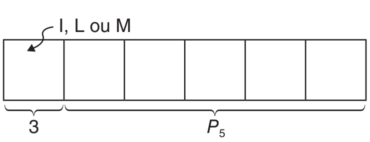


Logo, o total n de números menores que 34.215 que podem ser formados é dado por:

$n = 2 \cdot P_4 + 2 \cdot P_3 + P_2 = 2 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2! = 62$

c) No item **b**, mostramos que, entre os 120 números que podem ser formados, existem exatamente 62 menores que 34.215. Logo, colocados em ordem crescente os 120 números, o número 34.215 ocupará a 63ª posição.

78 Calculamos o total de anagramas que começam por I, L ou M:



$3 \cdot P_5 = 360$

Calculamos o total de anagramas cujas duas primeiras letras são O e I, nessa ordem:

$$\underbrace{\boxed{O}}_{1}\underbrace{\boxed{I}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_4}$$

$P_4 = 24$

Calculamos o total de anagramas cujas três primeiras letras são O, I e L, nessa ordem:

$$\underbrace{\boxed{O}}_{1}\underbrace{\boxed{I}}_{1}\underbrace{\boxed{L}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_3}$$

$P_3 = 6$

Calculamos o total de anagramas cujas três primeiras letras são O, I e M, nessa ordem:

$$\underbrace{\boxed{O}}_{1}\underbrace{\boxed{I}}_{1}\underbrace{\boxed{M}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_3}$$

$P_3 = 6$

Até aqui já obtivemos, em ordem alfabética, 396 anagramas. Os próximos quatro, em ordem alfabética, são: OIRLMU, OIRLUM, OIRMLU e OIRMUL. Concluímos, então, que o 400º anagrama é OIRMUL, cuja quinta letra, da esquerda para a direita, é U.

Alternativa **b**.

79 a) $P_9^{(4)} = \dfrac{9!}{4!} = 15.120$

b) $P_8^{(3,\,2,\,2)} = \dfrac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1.680$

80 a) $P_8^{(3,\,2)} = \dfrac{8!}{3! \cdot 2!} = 3.360$

b) Fixando uma letra R na primeira posição, sobram as letras A, M, A, D, U, R e A, que devem ser distribuídas nas sete posições posteriores:

$$\underbrace{\boxed{R}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_7^{(3)}}$$

Logo, o número de anagramas que começam por R é dado por:

$P_7^{(3)} = \dfrac{7!}{3!} = 840$

c) Fixando a letra M na primeira posição, sobram as letras A, R, A, D, U, R e A, que devem ser distribuídas nas sete posições posteriores:

$$\underbrace{\boxed{M}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_7^{(3,2)}}$$

Logo, o número de anagramas que começam por M é dado por:

$P_7^{(3,\,2)} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$

Fixando a letra D na primeira posição, sobram as letras A, R, M, A, U, R e A, que devem ser distribuídas nas sete posições posteriores:

$$\underbrace{\boxed{D}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_7^{(3,2)}}$$

Logo, o número de anagramas que começam por D é dado por:

$P_7^{(3,\,2)} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$

Como o número de anagramas que começam por R é dado por $P_7^{(3)}$, concluímos que o total de anagramas que começam por consoante é dado por:

$P_7^{(3)} + 2P_7^{(3,\,2)} = 840 + 2 \cdot 420 = 1.680$

d) Fixando uma letra A na última posição, sobram as letras A, R, M, A, D, U e R, que devem ser distribuídas nas sete posições anteriores:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_7^{(2,2)}}\underbrace{\boxed{A}}_{1}$$

Logo, o número de anagramas que terminam por A é dado por:

$P_7^{(2,\,2)} = \dfrac{7!}{2! \cdot 2!} = 1.260$

e) Fixando a letra U na última posição, sobram as letras A, R, M, A, D, R e A, que devem ser distribuídas nas sete posições anteriores:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_7^{(3,2)}}\underbrace{\boxed{U}}_{1}$$

Logo, o número de anagramas que terminam por U é dado por:

$P_7^{(3,\,2)} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$

Como o número de anagramas que terminam por A é dado por $P_7^{(2,\,2)}$, concluímos que o total de anagramas que terminam por vogal é dado por:

$P_7^{(2,\,2)} + P_7^{(3,\,2)} = 1.260 + 420 = 1.680$

f)

$$\underbrace{\boxed{R}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6^{(2)}}\underbrace{\boxed{A}}_{1}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{R}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6^{(3)}}\underbrace{\boxed{U}}_{1}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{D}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6^{(2,\,2)}}\underbrace{\boxed{A}}_{1}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{D}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6^{(3,\,2)}}\underbrace{\boxed{U}}_{1}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{M}}_{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6^{(2,\,2)}}\underbrace{\boxed{A}}_{1}$$

ou

M							U

$\underbrace{\ }_{1}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{P_6^{(3,\,2)}}\ \underbrace{\ }_{1}$

Concluímos, então, que o total de anagramas que começam por consoante e terminam por vogal é dado por:

$P_6^{(2)} + P_6^{(3)} + 2 \cdot P_6^{(2,\,2)} + 2 \cdot P_6^{(3,\,2)} =$

$= \dfrac{6!}{2!} + \dfrac{6!}{3!} + 2 \cdot \dfrac{6!}{2! \cdot 2!} + 2 \cdot \dfrac{6!}{3! \cdot 2!} =$

$= 360 + 120 + 360 + 120 = 960$

g) Considerando o bloco MD como um único elemento a ser permutado com as demais letras, o número de permutações dos 4 elementos MD, A, R, A, U, R e A é dado por:

$P_7^{(3,\,2)} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$

Logo, existem 420 anagramas com as letra M e D juntas e nessa ordem.

h) Nesse caso, um bloco composto de M e D pode ter $P_2 = 2! = 2$ formas diferentes: MD e DM. Para cada uma delas, podemos formar

$P_7^{(3,\,2)} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$ anagramas, conforme vimos no item **g**. Logo, com os dois blocos podemos formar $2 \cdot 420 = 840$ anagramas. Ou seja, o total de anagramas que podem ser formados, nas condições enunciadas, é dado por:

$2 \cdot P_7^{(3,\,2)} = 2 \cdot 420 = 840$

81

$6 \times \underbrace{\qquad}_{P_6^{(2)}} \times 5 = 30 \cdot \dfrac{6!}{2!} = 10.800$

Alternativa **e**.

82 O número n de *bytes*, nas condições estabelecidas, é o total de permutações dos oito elementos: 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ou seja:

$n = P_8^{(3,\,5)} = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

83 Indicando por A, B e C as barras de larguras 1,5 mm, 0,5 mm e 0,25 mm, respectivamente, o total de preços diferentes que podem ser representados por esse sistema de códigos é o número de permutações dos 9 elementos A, A, A, A, B, B, B, C e C, ou seja:

$P_9^{(4,\,3,\,2)} = \dfrac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1.260$

84 Para ir do ponto A ao ponto B, o cursor deve deslocar-se 11 unidades para a direita e 4 unidades para cima. Assim, o número n de sequências diferentes de digitações das teclas $\rightarrow$ e $\uparrow$ que levam o cursor de A a B é o número de permutações dos 15 elementos:

$\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow$, e $\uparrow$

ou seja:

$P_{15}^{(11,\,4)} = \dfrac{15!}{11! \cdot 4!} = 1.365$

85 Cada um dos 5 investidores I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5 adquiriu pelo menos uma cota. Assim, temos:

I_1 comprou $1 + x$ cotas;

I_2 comprou $1 + y$ cotas;

I_3 comprou $1 + z$ cotas;

I_4 comprou $1 + w$ cotas;

I_5 comprou $1 + t$ cotas,

com $x + y + z + w + t = 4$

O número de soluções (x, y, z, w, t), com x, y, z, w e t naturais, dessa equação é o número de permutações dos símbolos ++++||||, em que cada barra representa uma cota. Esse número é dado por:

$P_8^{(4,\,4)} = \dfrac{8!}{4!\,4!} = 70$

Alternativa **b**.

86 $C_{8,2} = \dfrac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$

Alternativa **e**.

87 $C_{28,\,7} \cdot C_{21,\,7} \cdot C_{14,\,7} \cdot C_{7,\,7} =$

$= \dfrac{28!}{7! \cdot \cancel{21!}} \cdot \dfrac{\cancel{21!}}{7! \cdot \cancel{14!}} \cdot \dfrac{\cancel{14!}}{7! \cdot 7!} \cdot \dfrac{\cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 0!} = \dfrac{28!}{(7!)^4}$

Alternativa **c**.

88 Sendo n o número de times, temos:

$C_{n,\,2} = 55 \Rightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 55$

$\therefore \dfrac{n(n-1)}{2} = 55 \Rightarrow n^2 - n - 110 = 0$

$\therefore\ n = 11$ ou $n = -10$ (não convém)

Assim, concluímos que exatamente 11 times participam do campeonato.

89 $C_{40,3} \cdot C_{15,1} = \dfrac{40!}{3! \cdot 37!} \cdot 15$

Alternativa **c**.

90 Sendo $m_1, m_2, m_3, m_4, ..., m_{10}$ as dez matérias das quais m_1 e m_2 são obrigatórias, temos que o número de escolhas contendo m_1, m_2 e mais quatro matérias escolhidas entre as oito restantes é $C_{8,\,4} = 70$.

Logo, a escolha pode ser feita de 70 maneiras diferentes.

91 A comissão formada pode não conter Gustavo nem Danilo, ou conter Gustavo e não Danilo, ou conter Danilo e não Gustavo. Assim, o total de comissões é dado por:

$$C_{6,4} + C_{6,3} + C_{6,3} = 55$$

Outro modo

Do total de comissões de 4 integrantes que podem ser formadas com as 8 pessoas, subtraímos o número de comissões que incluiriam Gustavo e Danilo:

$$C_{8,4} - C_{6,2} = 55$$

Alternativa **d**.

92 Sejam: Andrea, Manoel, Alberto, $p_1, p_2, p_3, ..., p_6$ os nove alunos da classe. Uma comissão de cinco alunos de modo que os membros tenham um bom relacionamento entre si pode ser formada por:

- Andrea e mais quatro alunos escolhidos entre $p_1, p_2, p_3, ..., p_6$ ou
- Manoel e mais quatro alunos escolhidos entre $p_1, p_2, p_3, ..., p_6$ ou

- Alberto e mais quatro alunos escolhidos entre $p_1, p_2, p_3, ..., p_6$ ou
- Manoel e Alberto e mais três alunos escolhidos entre $p_1, p_2, p_3, ..., p_6$ ou
- Cinco alunos escolhidos entre $p_1, p_2, p_3, ..., p_6$.

Assim, nessas condições, o número n de comissões possíveis é dado por:
$n = 3 \cdot C_{6,4} + C_{6,3} + C_{6,5} = 3 \cdot 15 + 20 + 6 =$
$= 65 + 6 = 71$
Alternativa **a**.

93 $C_{6,3} \cdot C_{6,2} = 20 \cdot 15 = 300$
Assim, o grupo pode ter exatamente 300 formações diferentes.

94 $C_{6,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{8,5} = 20 \cdot 6 \cdot 56 = 6.720$
Logo, podem ser formadas exatamente 6.720 provas diferentes.

95 $C_{4,1} \cdot C_{6,3} = 4 \cdot 20 = 80$
Portanto, podem ser formadas exatamente 80 equipes diferentes.
Alternativa **b**.

96 $C_{12,4} \cdot C_{8,3} = 495 \cdot 56 = 27.720$
Logo, a comissão pode ser formada de exatamente 27.720 maneiras diferentes.
Alternativa **a**.

97 O composto pode ser formado por 3 vitaminas, ou por 2 vitaminas e 1 sal mineral, ou por 1 vitamina e 2 sais minerais. Logo, o número de compostos que poderão ser preparados é dado por:

$$C_{4,3} + C_{4,2} \cdot C_{3,1} + C_{4,1} \cdot C_{3,2} = 34$$

Outro modo
Do total de compostos de 3 nutrientes que podem ser preparados com os 7 nutrientes disponíveis, subtraímos o número de compostos que seriam preparados com 3 sais minerais.

$$C_{7,3} + C_{3,3} = 34$$

Alternativa **c**.

98 A comissão pode ser formada por, no máximo, 2 suspeitos. Logo, o número n de comissões que podem ser formadas é dado por:
$n = C_{6,1} \cdot C_{4,4} + C_{6,2} \cdot C_{4,3} = 6 \cdot 1 + 15 \cdot 4 = 66$

99 $C_{9,3} \cdot C_{6,3} = 84 \cdot 20 = 1.680$
Assim, podem resultar dessa pintura exatamente 1.680 figuras diferentes.
Alternativa **b**.

100 A comissão pode ser formada por 1 moça e 4 rapazes ou 2 moças e 3 rapazes ou 3 moças e 2 rapazes ou 4 moças e 1 rapaz. Logo, o número n de comissões que podem ser formadas é dado por:
$n = C_{4,1} \cdot C_{5,4} + C_{4,2} \cdot C_{5,3} + C_{4,3} \cdot C_{5,2} + C_{4,4} \cdot C_{5,1} =$
$= 4 \cdot 5 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 5 = 125$
Outro modo: $C_{9,5} - C_{5,5} = 125$

101 $C_{7,5} \cdot C_{2,2} = 21 \cdot 1 = 21$
Logo, o total de maneiras como as bolas podem ser distribuídas nas duas caixas é 21.

102 $C_{10,5} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2} = 2.520$
Logo, os documentos podem ser distribuídos nas gavetas de 2.520 maneiras diferentes.

103

1ª coluna	2ª coluna	3ª coluna
$C_{6,2}$	$C_{4,2}$	$C_{2,2}$

Assim, pelo princípio fundamental de contagem, concluímos que o número n de modos de pintar os quadrinhos, sob a condição estabelecida, é dado por:
$n = C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = 15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$

104 Sejam:
- t o total de comissões de quatro pessoas que podem ser formadas pelas dez pessoas, isto é:
  $t = C_{10,4} = 210$
- k o número de comissões de quatro pessoas que podem ser formadas com os cinco homens, isto é:
  $k = C_{5,4} = 5$
- n o número de comissões, entre o total t, que contenham pelo menos uma mulher em cada uma.
  Temos, então:
  $n = t - k = 210 - 5 = 205$

Logo, podem ser formadas exatamente 205 comissões sob as condições estabelecidas.

105 O número de modos de escolher dois trabalhos quaisquer entre os 4 é $C_{4,2} = 6$.
Assim, temos:

empresa 1	empresa 2	empresa 3
$C_{4,2}$	2	1

ou

empresa 1	empresa 2	empresa 3
2	$C_{4,2}$	1

ou

empresa 1	empresa 2	empresa 3
2	1	$C_{4,2}$

Logo, o número n de maneiras de serem distribuídos os trabalhos é dado por:
$n = 3 \cdot 2 \cdot C_{4,2} = 36$
Alternativa **c**.

106 **a)** $C_{25,7} = 480.700$
b) Basta subtrair do resultado do item **a** o número de comissões formadas apenas por professores de português, isto é:
$C_{25,7} - C_{15,7} = 480.700 - 6.435 = 474.265$
c) A comissão pode ser formada por 2 professores de Matemática e 5 de Português ou 3 de Matemática e 4 de Português ou 4 de Matemática e 3 de Português.
Logo, o número n de comissões nessas condições é dado por:
$C_{10,2} \cdot C_{15,5} + C_{10,3} \cdot C_{15,4} + C_{10,4} \cdot C_{15,3} =$
$= 15 \cdot 7 \cdot 13(120 + 70 + 99) = 394.485$

Exercícios de revisão cumulativa

1 a) Sendo $M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a inversa de M, temos:

$$M \cdot M^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2a + 2c & 2b + 2d \\ -3a + 3c & -3b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 2c = 1 \\ -3a + 3c = 0 \\ 2b + 2d = 0 \\ -3b + 3d = 1 \end{cases}$$

$$\therefore\ a = \frac{1}{4}, b - \frac{1}{6}, c = \frac{1}{4} \text{ e } d = \frac{1}{6}$$

Assim, concluímos:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

b) $Q = EM^{-1}P \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, o ponto pedido é (1, 0).

2 a) • O período p da função é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

• O conjunto imagem $Im(f)$ pode ser obtido do seguinte modo:

$$-1 \leqslant \text{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + 1 \leqslant \underbrace{1 + \text{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)}_{f(x)} \leqslant 1 + 1$$

Logo, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

b) $y = 1 \Rightarrow 1 + \text{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\therefore\ \text{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\pi x - \frac{\pi}{2} = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo os valores 0 e 1 para k, obtemos $x = \frac{1}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$, respectivamente. Esses são os únicos valores possíveis de x, sob as condições estabelecidas.

3 Sendo x, y e z as frações de 1 kg das rações I, II e III, respectivamente, que devem ser ingeridas pelos animais, temos o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 5y + 15z = 60 \\ 8x + 4y + 8z = 40 \\ 4x + 3y + 8z = 32 \end{cases} \text{ equivalente a}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 12 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 4x + 3y + 8z = 32 \end{cases} \text{ e, portanto:}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 12 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 4x + 3y + 8z = 32 \end{cases} \begin{matrix} \times(-2) \\ \times(-4) \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 12 \\ -y - 4z = -14 \\ -y - 4z = 8 \end{cases}$$ equações incompatíveis

Concluímos, então, que o sistema é impossível.
Alternativa **a**.

4 Para que o sistema $\begin{cases} y = x + 5 \\ y = 3x + 2 \\ y = 4x + m \end{cases}$ seja possível e determinado, a solução comum às duas primeiras equações deve ser também solução da terceira equação.

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtemos $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{13}{2}$. Substituindo esses valores na terceira equação, obtemos:

$$\frac{13}{2} = 4 \cdot \frac{3}{2} + m \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Concluímos, então, que as retas terão um único ponto em comum se $m = \frac{1}{2}$.

Análise da resolução

Sejam H e G os conjuntos dos anagramas da palavra DESAFIO tais que:

H = {anagramas que começam por vogal}

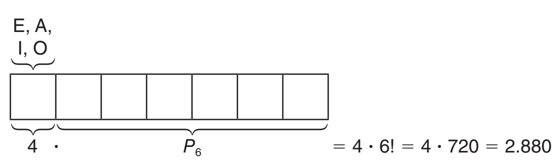
G = {anagramas que terminam por consoante}

Assim, temos:

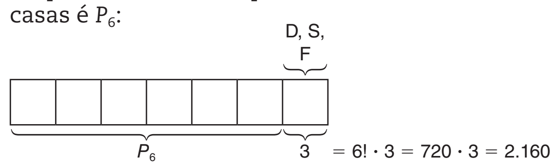
$H \cap G$ = {anagramas que começam por vogal e terminam por consoante}

$H \cup G$ = {anagramas que começam por vogal ou terminam por consoante}

• Calculando o número de elementos de H:
Como os anagramas devem começar por vogal, há quatro possibilidades para a primeira casa: E, A, I ou O. Fixada uma dessas possibilidades, o número de possibilidades de preenchimento das demais casas é P_6:



• Calculando o número de elementos de G:
Como os anagramas devem terminar por consoante, há três possibilidades para a última casa: D, S ou F. Fixada uma dessas possibilidades, o número de possibilidades de preenchimento das demais casas é P_6:



- Calculando o número de elementos de $H \cap G$:
  Como os anagramas devem começar por vogal e terminar por consoante, temos:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{}}^{\text{E, A, I, O}}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_5} \underbrace{\overbrace{\boxed{}}^{\text{D, S, F}}}_{3} = 4 \cdot 5! \cdot 3 = 4 \cdot 120 \cdot 3 = 1.440$$

  Logo, $n(H \cap G) = 1.440$
- Calculando $n(H \cup G)$, concluímos:
  $n(H \cup G) = n(H) + n(G) - n(H \cap G) \Rightarrow$
  $\Rightarrow n(H \cup G) = 2.880 + 2.160 - 1.440 = 3.600$

Logo, o número de anagramas da palavra DESAFIO que começam por vogal ou terminam por consoante é 3.600.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 $P = \dfrac{100 \cdot 100}{5.000.000} = 0{,}002\%$

2 $0{,}002\% = 0{,}00002$

Exercícios propostos

1 $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{5}{8} = 62{,}5\%$

Alternativa **e**.

2 $E = \{1, 2, 3, ..., 200\}$, $n(E) = 200$
$A = \{x \in E \mid x > 80\} = \{81, 82, 83, ..., 200\}$, $n(A) = 120$
Logo:
$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{120}{200} = 60\%$
Portanto, a probabilidade de se obter um número maior que 80 é 60%.

3 $E = \{x \mid x$ é lâmpada da caixa$\}$, $n(E) = 120$
a) $A = \{y \in E \mid y$ é lâmpada perfeita$\}$, $n(A) = 84$

$\therefore\ P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{84}{120} = 70\%$

b) $B = \{z \in E \mid z$ é lâmpada queimada$\}$, $n(B) = 36$

$\therefore\ P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{36}{120} = 30\%$

4 O espaço amostral E é o conjunto:
E = {permutações das letras da sigla PUCRS},
$n(E) = 5! = 120$
Queremos a probabilidade de ocorrer um elemento do evento A dado por:
A = {permutações das letras da sigla PUCRS, que começam por P e terminam por C},
$n(A) = 3! = 6$
Temos:
$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{6}{120} = \dfrac{1}{20}$
Alternativa **d**.

5 $E = \{0, 1, 2, 3, ..., 36\}$, $n(E) = 37$
a) $A = \{10\}$, $n(A) = 1$

$\therefore\ P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{1}{37}$

Logo, a probabilidade de o número 10 ser premiado é $\dfrac{1}{37}$.

b) $B = \{x \in E \mid x < 10\} = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $n(B) = 10$

$\therefore\ P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{10}{37}$

Logo, a probabilidade de ser premiado um número menor que 10 é $\dfrac{10}{37}$.

c) $C = \{y \in E \mid y > 10\} = \{11, 12, 13, ..., 36\}$, $n(C) = 26$

$\therefore\ P(C) = \dfrac{n(C)}{n(E)} = \dfrac{26}{37}$

Logo, a probabilidade de ser premiado um número maior que 10 é $\dfrac{26}{37}$.

6 $E = \{(c, c), (c, k), (k, c), (k, k)\} \Rightarrow n(E) = 4$
a) $A = \{(c, k), (k, c)\}$, $n(A) = 2$

$\therefore\ P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

Logo, a probabilidade de se obterem uma cara e uma coroa é $\dfrac{1}{2}$ ou 50%.

b) $B = \{(c, c)\}$, $n(B) = 1$

$\therefore\ P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{1}{4} = 25\%$

Logo, a probabilidade de se obterem duas caras é $\dfrac{1}{4}$ ou 25%.

c) $C = \{(c, k), (k, c), (c, c)\}$, $n(C) = 3$

$\therefore\ P(C) = \dfrac{n(C)}{n(E)} = \dfrac{3}{4} = 75\%$

Logo, a probabilidade de se obter pelo menos uma cara é $\dfrac{3}{4}$ ou 75%.

7 $E = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, k, k), (k, c, c), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)\}$, $n(E) = 8$
a) $A = \{(c, c, c)\}$, $n(A) = 1$

$\therefore\ P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{1}{8} = 12{,}5\%$

Logo, a probabilidade de se obterem três caras é $\dfrac{1}{8}$ ou 12,5%.

b) $B = \{(c, c, k), (c, k, c), (k, c, c)\}$, $n(B) = 3$

$\therefore\ P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{3}{8} = 37{,}5\%$

Logo, a probabilidade de se obterem 2 caras e uma coroa é $\dfrac{3}{8}$ ou 37,5%.

c) $C = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, k, k), (k, c, c), (k, c, k), (k, k, c)\}$, $n(C) = 7$

$\therefore\ P(C) = \dfrac{n(C)}{n(E)} = \dfrac{7}{8} = 87{,}5\%$

Logo, a probabilidade de se obter pelo menos uma cara é $\dfrac{7}{8}$ ou 87,5%.

d) $D = \{(c, k, k), (k, c, c), (k, c, k), (k, k, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, c, c)\}$, $n(D) = 7$

$\therefore\ P(D) = \dfrac{n(D)}{n(E)} = \dfrac{7}{8} = 87{,}5\%$

Logo, a probabilidade de se obterem no máximo duas coroas é $\dfrac{7}{8}$ ou 87,5%.

8 $E = \left\{\begin{matrix}(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),\\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),\\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),\\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),\\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),\\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\end{matrix}\right\}$, $n(E) = 36$

a) $A = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$, $n(A) = 4$

$\therefore\ P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

Logo, a probabilidade de a soma dos pontos ser igual a 9 é $\dfrac{1}{9}$.

b) $B = \{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\}$, $n(B) = 3$

$\therefore\ P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

Logo, a probabilidade de a soma dos pontos ser igual a 10 é $\dfrac{1}{12}$.

c) $C = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$, $n(C) = 6$

$\therefore\ P(C) = \dfrac{n(C)}{n(E)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

Logo, a probabilidade de a soma dos pontos ser maior que 9 é $\dfrac{1}{6}$.

d) $D = \varnothing$

$\therefore\ P(D) = \dfrac{n(D)}{n(E)} = \dfrac{0}{36} = 0$

e) Todos os pares ordenados do espaço amostral satisfazem essa condição; logo:

$P(E) = \dfrac{n(E)}{n(E)} = 1$

9 $E = \left\{\begin{matrix}(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),\\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),\\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),\\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),\\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),\\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\end{matrix}\right\}$, $n(E) = 36$

$A = \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (5, 3), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$, $n(A) = 20$

$\therefore\ P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$

Logo, a probabilidade de o produto dos números de pontos apresentados ser múltiplo de 3 é $\dfrac{5}{9}$.

10 Sejam a, b, c as cartas que deveriam ser entregues aos destinatários A, B, C, respectivamente. Para uma entrega aleatória, temos o espaço amostral:

$E = \{(aA, bB, cC), (aA, cB, bC), (bA, cB, aC), (bA, aB, cC), (cA, aB, bC), (cA, bB, aC)\}$, $n(E) = 6$

Assim:

a) O evento F formado pelos termos de E em que nenhuma das cartas foi entregue corretamente é:

$F = \{(bA, cB, aC), (cA, bB, aC)\}$, $n(F) = 2$

Logo, $P(F) = \dfrac{n(F)}{n(E)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

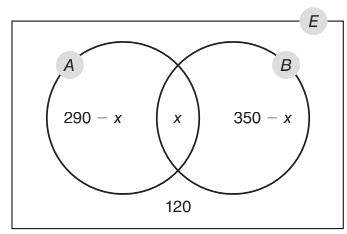
b) O evento G formado pelos termos de E em que exatamente uma carta foi entregue corretamente é:

$G = \{(aA, cB, bC), (cA, bB, aC), (bA, aB, cC)\}$

$n(G) = 3$

Logo, $P(G) = \dfrac{n(G)}{n(E)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

11 Sejam: E o conjunto de todos os alunos entrevistados, A o conjunto dos alunos que se vacinaram contra a febre amarela e B o conjunto dos que se vacinaram contra a gripe H1N1. Indicando por x o número de alunos que tomaram as duas vacinas, temos:



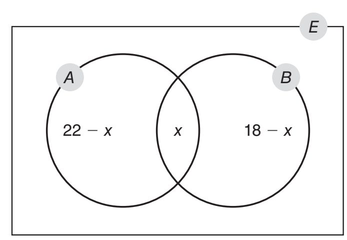
$290 - \cancel{x} + \cancel{x} + 350 - x + 120 = 500 \Rightarrow x = 260$

Como $n(A \cap B) = 260$ e $n(E) = 500$, concluímos:

$P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(E)} = \dfrac{260}{500} = \dfrac{13}{25} = 52\%$

Logo, a probabilidade de o escolhido ter tomado as duas vacinas é $\dfrac{13}{25}$ ou 52%.

12 Sejam: E o conjunto dos habitantes da cidade, A o conjunto dos habitantes com menos de 25 anos e B o conjunto dos habitantes com mais de 22 anos. Indicando por x o número de milhões de habitantes com mais de 22 anos e menos de 25 anos, temos:



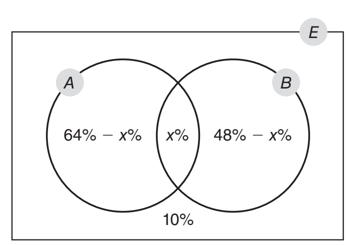
$22 - \cancel{x} + \cancel{x} + 18 - x = 30 \Rightarrow x = 10$

Como $n(A \cap B) = 10$ e $n(E) = 30$, concluímos:

$P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(E)} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

Logo, a probabilidade de o escolhido ter mais de 22 anos e menos de 25 anos é $\dfrac{1}{3}$.

13 Sejam: E o conjunto de todos os alunos da classe, A o conjunto dos alunos que leem jornal e B o conjunto dos que leem revista. Indicando por x a porcentagem dos alunos que leem jornal e revista, temos:



$64\% - \cancel{x\%} + \cancel{x\%} + 48\% - x\% + 10\% = 100\% \Rightarrow$
$\Rightarrow x\% = 22\%$
Logo, 22% dos alunos leem jornal e revista.
Portanto, a probabilidade de o escolhido ser leitor de jornal e de revista é 22%.

14 O espaço amostral E é formado por todos os pares ordenados (x, y) em que x é candidato à presidência e y à vice-presidência:

presidência	vice-presidência
5	6

Logo, pelo princípio fundamental de contagem:
$n(E) = 5 \cdot 6 = 30$
Sendo $A = \{(x, y) \in E \mid x \text{ é homem e } y \text{ é mulher}\}$, temos:

presidência (homem)	vice-presidência (mulher)
3	4

Logo, pelo princípio fundamental de contagem:
$n(A) = 3 \cdot 4 = 12$
Concluímos, então, que:
$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5} = 40\%$
Alternativa **a**.

15 O espaço amostral E é formado por todas as quíntuplas ordenadas de faces da moeda:

2	2	2	2	2

Logo, pelo princípio fundamental de contagem:
$n(E) = 2^5 = 32$
Sendo $A = \{(ccckk), (cckck), (cckkc), (ckcck), (ckckc), (ckkcc), (kccck), (kcckc), (kckcc), (kkccc)\}$, $n(A) = 10$, temos:
$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{16} = 31{,}25\%$
Logo, a probabilidade de se obterem 3 caras e 2 coroas é $\dfrac{5}{16}$ ou 31,25%.

16 **a)** V, pois a maior probabilidade possível é a do espaço amostral: $P(E) = 1$.
b) V, pois a menor probabilidade possível é a do evento vazio: $P(\varnothing) = 0$.
c) F, pois para $n = 4$ temos $P(A) = \dfrac{7}{6} > 1$ e a maior probabilidade possível é 1.
d) F, pois $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}2$.

17 $\begin{cases} P(A) = \dfrac{n-5}{8} \\ 0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{n-5}{8} \leqslant 1$

$\therefore 0 \leqslant n - 5 \leqslant 8$
Logo, $5 \leqslant n \leqslant 13$.
Alternativa **a**.

18 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(E) = 6$
a) $M = \{x \in E \mid x \text{ é múltiplo de 5 e de 3}\} = \varnothing$, ou seja, M é o evento impossível.
$\therefore P(M) = \dfrac{n(M)}{n(E)} = \dfrac{0}{6} = 0$
b) $D = \{y \in E \mid y \text{ é divisor de } 720\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$, ou seja, E é um evento certo.
$\therefore P(D) = \dfrac{n(D)}{n(E)} = \dfrac{6}{6} = 1$

19 Seja E o espaço amostral formado por todas as sequências em que podem ser colocadas as etiquetas:

1ª etiqueta	2ª etiqueta	3ª etiqueta
3	2	1

Assim, pelo princípio fundamental de contagem:
$n(E) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
a) $A = \{(1, 2, 3)\}$, $n(A) = 1$
$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{1}{6}$
Logo, a probabilidade de que sejam colocados os três envelopes nas posições corretas é $\dfrac{1}{6}$.
b) O evento B formado pelas sequências de envelopes com apenas dois números na posição correta é impossível, pois, se dois envelopes estiverem na posição correta, o terceiro, automaticamente, estará na posição correta.
$\therefore P(B) = 0$

20 $0 \leqslant \dfrac{n-8}{20} \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant n - 8 \leqslant 20$
Portanto: $8 \leqslant n \leqslant 28$
Concluímos, então, que o maior número possível de pessoas que podem estar na sala é 28.

21 Indicando por $P(A)$ e $P(\overline{A})$ as probabilidades de acertar e errar o alvo, respectivamente, temos:
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$

22 Sendo p a probabilidade de o piloto perder a corrida, temos que $3p$ é a probabilidade de ele vencer. Logo, $p + 3p = 1 \Rightarrow p = \dfrac{1}{4}$ e, portanto, a probabilidade de que o piloto vença a corrida, se não pode haver empate, é $\dfrac{3}{4}$.

23 Os eventos A e B determinados por "vencer a eleição" e "perder a eleição", respectivamente, são complementares e, portanto, $P(A) + P(B) = 1$
$\dfrac{x+3}{4} + \dfrac{x}{6} = 1 \Rightarrow 3(x + 3) + 2x = 12$
$\therefore 5x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{5}$
Logo, a probabilidade P de o candidato vencer a eleição é dada por:
$P = \dfrac{\frac{3}{5} + 3}{4} = \dfrac{18}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{18}{20} = 90\%$
Alternativa **e**.

24 **a)**

1ª bola	2ª bola	3ª bola
9	9	9

Assim, pelo princípio fundamental de contagem, temos:
$n(E) = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$
b) Resposta possível: (1, 3, 5)

c) Para que o produto de três números seja ímpar, os três números devem ser ímpares: 1, 3, 5, 7 ou 9.

1ª bola	2ª bola	3ª bola
5	5	5

Assim, pelo princípio fundamental de contagem, o total de ternos ordenados em que o produto dos três números é ímpar é dado por $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

d) $A = \{(x, y, z) \in E \mid xyz \text{ é ímpar}\}$, $n(A) = 125$

$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{125}{729}$

Logo, a probabilidade de o produto dos três números ser ímpar é $\dfrac{125}{729}$.

e) $B = \{(a, b, c) \in E \mid abc \text{ é par}\} = \overline{A}$ e, portanto:

$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{125}{729} = \dfrac{604}{729}$

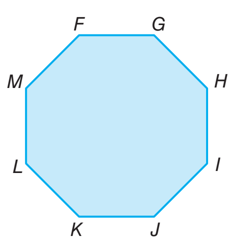
Logo, a probabilidade de o produto dos três números ser par é $\dfrac{604}{729}$.

25 O espaço amostral E do experimento é formado por todos os triângulos com vértices em três dos sete pontos dados; logo: $n(E) = C_{7,\,3} = 35$

Considerando o evento $T = \{x \in E \mid x \text{ é triângulo retângulo}\}$, temos que um triângulo pertence a T se, e somente se, possui como vértices os pontos A e B; logo: $n(T) = 5$

Devemos calcular a probabilidade do complementar de T, isto é: $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - \dfrac{5}{35} = \dfrac{30}{35} = \dfrac{6}{7}$

26 Seja o octógono regular $FGHIJKLM$:



O experimento em questão é selecionar aleatoriamente dois lados desse octógono. O número de elementos do espaço amostral E desse experimento é dado por:

$n(E) = C_{8,\,2} = 28$

Consideremos o evento A formado pelos conjuntos de dois lados paralelos desse octógono, isto é:

$A = \left\{\{\overline{FG}, \overline{JK}\}, \{\overline{GH}, \overline{KL}\}, \{\overline{HI}, \overline{LM}\}, \{\overline{MF}, \overline{IJ}\}\right\}$,

$n(A) = 4$

Assim, a probabilidade de serem selecionados dois lados não paralelos do octógono é dada por:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{4}{28} = \dfrac{6}{7}$

27 Indicando por A_i e M_j as bolas azuis e amarelas, respectivamente, temos o espaço amostral:

$E = \{A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$, $n(E) = 9$

1º modo:

$B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $n(B) = 4$

$C = \{A_1, A_3, M_1, M_3, M_5\}$, $n(C) = 5$

$B \cap C = \{A_1, A_3\}$, $n(B \cap C) = 2$

$\therefore P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) =$

$= \dfrac{4}{9} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$

Logo, a probabilidade de a bola retirada ser azul ou ter número ímpar é $\dfrac{7}{9}$.

2º modo:

$D = \{x \in E \mid x \text{ é bola azul ou tem número ímpar}\}$, ou seja, $D = \{A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_3, M_5\}$, $n(D) = 7$

$\therefore P(D) = \dfrac{n(D)}{n(E)} = \dfrac{7}{9}$

28 $E = \{1, 2, 3, ..., 30\}$, $n(E) = 30$

$A = \{x \in E \mid x \text{ é par}\} = \{2, 4, 6, ..., 30\}$, $n(A) = 15$

$B = \{y \in E \mid y \text{ é múltiplo de } 6\} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$, $n(B) = 5$

$A \cap B = \{6, 12, 18, 24, 30\}$, $n(A \cap B) = 5$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \dfrac{15}{30} + \dfrac{5}{30} - \dfrac{5}{30} = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2}$

Logo, a probabilidade de o número sorteado ser par ou múltiplo de 6 é $\dfrac{1}{2}$ ou 50%.

29 $E = \{x \mid x \text{ é filme da videoteca}\}$, $n(E) = 200$

$A = \{y \in E \mid y \text{ é filme policial}\}$, $n(A) = 60$

$B = \{z \in E \mid z \text{ é filme europeu}\}$, $n(B) = 70$

$A \cap B = \{w \in E \mid w \text{ é filme policial europeu}\}$,

$n(A \cap B) = 10$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \dfrac{60}{200} + \dfrac{70}{200} - \dfrac{10}{200} = \dfrac{120}{200} = \dfrac{3}{5}$

Logo, a probabilidade de o filme escolhido ser policial ou europeu é $\dfrac{3}{5}$ ou 60%.

30 $E = \{x \mid x \text{ é pneu em estoque}\}$, $n(E) = 2.400$

$B = \{y \in E \mid y \text{ é pneu da marca B}\}$, $n(B) = 1.200$

$T = \{z \in E \mid z \text{ é pneu de aro 13}\}$, $n(T) = 620$

$B \cap T = \{w \in E \mid w \text{ é pneu da marca B e de aro 13}\}$,

$n(B \cap T) = 300$

$\therefore P(B \cup T) = P(B) + P(T) - P(B \cap T) =$

$= \dfrac{1.200}{2.400} + \dfrac{620}{2.400} - \dfrac{300}{2.400} = \dfrac{1.520}{2.400} = \dfrac{19}{30}$

Logo, a probabilidade de o próximo pneu a ser vendido ser da marca B ou ter aro 13 é $\dfrac{19}{30}$.

Alternativa **e**.

31 $E = \{x \mid x \text{ é apartamento disponível na imobiliária}\}$

$A = \{y \in E \mid y \text{ é apartamento da zona sul}\}$

$B = \{z \in E \mid z \text{ é apartamento com mais de uma vaga de garagem}\}$

$A \cap B = \{w \in E \mid w \text{ é apartamento da zona sul com mais de uma vaga de garagem}\}$

Assim, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{3}{4}$

Logo, a probabilidade de o apartamento ser na zona sul ou ter mais de uma vaga de garagem é $\dfrac{3}{4}$ ou 75%.

32 $E = \{x \mid x$ é tubo de creme dental da gôndola$\}$
$A = \{y \in E \mid y$ é tubo com 90 g de creme$\}$
$B = \{z \in E \mid z$ é tubo de creme com própolis$\}$
$A \cap B = \{w \in E \mid w$ é tubo com 90 g de creme com própolis$\}$
Assim, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{15}$
Logo, a probabilidade de o tubo conter 90 g de creme ou conter creme com própolis é $\frac{2}{15}$.

33 $P(B / A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

34 $P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}$

35 $E = \left\{\begin{matrix} (1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), ..., (2, 6) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), ..., (6, 6) \end{matrix}\right\}, n(E) = 36$

$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}, n(A) = 5$
$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}, n(B) = 6$
$A \cap B = \{(3, 3)\}, n(A \cap B) = 1$
$P(B / A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{5}$
Logo, a probabilidade de as faces apresentarem números iguais de pontos, dado que a soma dos pontos é 6, é $\frac{1}{5}$.

36 $E = \{5, 10, 15, ..., 50\}, n(E) = 10$
$A = \{5, 15, 25, 35, 45\}, n(A) = 5$

a) $B = \{25\}, n(B) = 1$
$A \cap B = \{25\}, n(A \cap B) = 1$
$\therefore P(B / A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{5}$
Logo, a probabilidade de o número sorteado ser 25 é $\frac{1}{5}$.

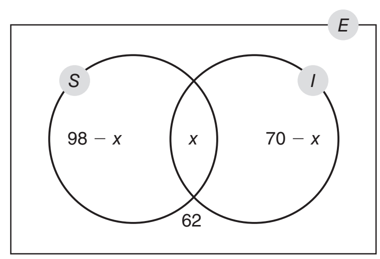
b) $C = \{20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}, n(C) = 7$
$C \cap A = \{25, 35, 45\}, n(C) = 3$
$P(C / A) = \frac{n(C \cap A)}{n(A)} = \frac{3}{5}$
Logo, a probabilidade de o número sorteado ser maior que 17 é $\frac{3}{5}$.

c) $D = \{15, 30, 45\}, n(D) = 3$
$D \cap A = \{15, 45\}, n(D \cap A) = 2$
$\therefore P(D / A) = \frac{n(D \cap A)}{n(A)} = \frac{2}{5}$
Logo, a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 3 é $\frac{2}{5}$.

37 Indicando por A_i a camisa azul de número i e por V_i a camisa vermelha de número i, temos o espaço amostral: $E = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}, n(E) = 12$
Sejam: $C = \{x \in E \mid x$ é camisa de número par$\}$, $n(C) = 6$
$D = \{y \in E \mid y$ é camisa azul$\}, n(D) = 6$
$C \cap D = \{z \in E \mid z$ é camisa azul de número par$\}$,
$n(C \cap D) = 3$
$\therefore P(D / C) = \frac{n(D \cap C)}{n(C)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Logo, a probabilidade de a camisa sorteada pertencer à equipe azul é $\frac{1}{2}$.

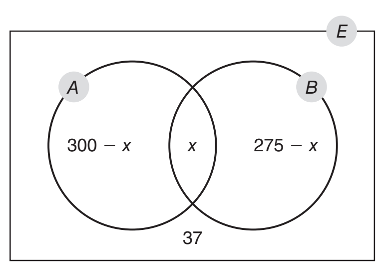
38 $E = \{1, 2, 3, ..., 300\}, n(E) = 300$
$A = \{1, 2, 3, ..., 99\}, n(A) = 99$
$B = \{21, 22, 23, ..., 39\}, n(B) = 19$
$B \cap A = \{21, 22, 23, ..., 39\}, n(B \cap A) = 19$
$P(B / A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{19}{99}$
Logo, a probabilidade de o número estar entre 20 e 40 é $\frac{19}{99}$.

39 Sejam: E o conjunto de todos os televisores testados, S o conjunto dos aparelhos que apresentaram problemas de som e I o conjunto dos aparelhos que apresentaram problemas de imagem. Indicando por x o número de aparelhos que apresentaram problemas de som e de imagem, temos:



$98 - x + 70 - x + x + 62 = 200 \Rightarrow x = 30$
Assim: $n(I) = 70$ e $n(I \cap S) = 30$
$\therefore P(S / I) = \frac{n(S \cap I)}{n(I)} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$
Logo, a probabilidade de o aparelho escolhido também apresentar problemas de som é $\frac{3}{7}$.

40 Sejam: E o conjunto das pessoas entrevistadas, A o conjunto das pessoas que já consumiram o produto A, e B o conjunto das pessoas que já consumiram o produto B. Indicando por x o número de pessoas que já consumiram os dois produtos, temos:



$300 - x + x + 275 - x + 37 = 400 \Rightarrow x = 212$
Assim: $n(A) = 300$ e $n(A \cap B) = 212$
$\therefore P(B / A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{212}{300} = \frac{53}{75}$
Logo, a probabilidade de a pessoa escolhida também ter consumido o produto B é $\frac{53}{75}$.

41 Como o cliente conhece a sequência dos três primeiros algarismos, devemos calcular a probabilidade P de ele digitar corretamente o último algarismo e a sequência das três letras. Temos, portanto:

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{26} = \frac{1}{10 \cdot 26^3} = \frac{1}{175.760}$$

42 $P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(B) = \frac{2}{3}$

Como os eventos são independentes, temos:
$P(B / A) = P(B)$ e $P(A / B) = P(A)$.

a) $P(A / B) = P(A) = \frac{3}{5}$

b) $P(B / A) = P(B) = \frac{2}{3}$

c) $P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{2}{3}}$

$\therefore\ P(A \cap B) = \frac{2}{5}$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} =$

$= \frac{9 + 10 - 6}{15} = \frac{13}{15}$

43 **a)** $E = \left\{\begin{matrix} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{matrix}\right\},$

$n(E) = 6 \cdot 6 = 36$

b) $A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) $B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$

$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

d) $P(B / A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{6}$

e) $P(A / B) = \frac{1}{6} = P(A)$

Logo, A e B são eventos independentes.

44 **a)** $E = \{(x, y) \mid x$ e y são os números das bolas da urna$\}$

1ª bola x	2ª bola y
4	3

Assim, pelo princípio fundamental de contagem, temos:
$n(E) = 4 \cdot 3 = 12$

b) $A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$

$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

c) $B = \{(1, 2), (3, 2), (4, 2)\}$

$P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

d) $P(B / A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{3}$

e) $P(B / A) = \frac{1}{3} \neq P(B)$

Logo, os eventos A e B não são independentes.

45 O espaço amostral E do experimento e os eventos I, II e III são:
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$I = \{2, 4, 6\}$
$II = \{5, 6\}$
$III = \{3, 6\}$
Assim, temos:

a) $P(II) = \frac{n(II)}{n(E)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(II/I) = \frac{n(I \cap II)}{n(I)} = \frac{1}{3}$

Como $P(II/I) = P(II)$, concluímos que I e II são eventos independentes.

b) $P(III) = \frac{n(III)}{n(E)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(III/II) = \frac{n(II \cap III)}{n(II)} = \frac{1}{2}$

Como $P(III/II) \neq P(III)$, concluímos que II e III são eventos independentes.

46 Indicando por V, P e A as cores verde, preta e azul, respectivamente, temos:

a) A probabilidade P de sair VPA, nessa ordem, é dada por:

$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{100}$

b) Há seis sequências diferentes para as cores: VPA, VAP, APV, AVP, PAV e PVA, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de sair três bolas de cores diferentes é dada por:

$P = 6 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{9}{50}$

c) A probabilidade P de sair AAA é dada por:

$P = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{125}{1.000} = \frac{1}{8}$

47 Indicando por V, P e A as cores verde, preta e azul, respectivamente, temos:

a) A probabilidade P de sair VPA, nessa ordem, é dada por:

$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{24}$

b) Há seis sequências diferentes de cores: VPA, VAP, APV, AVP, PAV e PVA, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de sair três bolas de cores diferentes é dada por:

$P = 6 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$

c) A probabilidade P de sair AAA é dada por:

$P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$

48 Indicando por A e V as cores azul e verde, respectivamente, temos:

a) Há cinco sequências possíveis de cores: AAAAV, AAAVA, AAVAA, AVAAA e VAAAA, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de sair 4 canetas de tinta azul e 1 de tinta vermelha é dada por:

$P = 5 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{10}{63}$

b) O número de permutações das letras A, A, A, V, V é dado por:

$$P_5^{(3,\,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Logo, há 10 sequências possíveis de cores, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de sair 3 canetas de tinta azul e 2 de tinta vermelha é dada por:

$$P = 10 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{10}{21}$$

c) A probabilidade P de ocorrer AAAAA é dada por:

$$P = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{126}$$

d) Os eventos F e G determinados por "pelo menos uma de tinta vermelha" e "todas de tinta azul", respectivamente, são complementares; logo:

$$P(F) = 1 - P(G) = 1 - \frac{1}{126} = \frac{125}{126}$$

49 Há seis sequências possíveis contendo 5 caras e 1 coroa: ccccck, cccckc, ccckcc, cckccc, ckcccc e kccccc, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Logo, a probabilidade P de sair 5 caras e 1 coroa é dada por:

$$P = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

50 A probabilidade de se retirarem as pérolas simultaneamente é igual à probabilidade de se retirarem uma a uma, sucessivamente, e sem reposição.
Indicando por V e F as qualidades verdadeira e falsa, respectivamente, temos:

a) Há quatro sequências possíveis contendo 3 verdadeiras e 1 falsa: VVVF, VVFV, VFVV e FVVV, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Logo, a probabilidade P de se obterem 3 pérolas verdadeiras e 1 falsa é dada por:

$$P = 4 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{10}{33}$$

b) A probabilidade P de se obter VVVV é dada por:

$$P = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{22}$$

c) Os eventos G e H determinados por "pelo menos uma falsa" e "todas verdadeiras", respectivamente, são complementares; logo:

$$P(G) = 1 - P(H) = 1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22}$$

51 A probabilidade de se retirarem os botões simultaneamente é igual à probabilidade de se retirá-los um a um, sucessivamente, e sem reposição.
Indicando por Q e D as qualidades "quatro furos" e "dois furos", respectivamente, o número de permutações das letras QQQQQD é dado por:

$$P_6^{(5)} = \frac{6!}{5!} = 6$$

Logo, há 6 sequências possíveis, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de se retirarem 5 botões de quatro furos e 1 de dois furos é dada por:

$$P = 6 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{21}$$

52 A probabilidade de se retirarem as cartas simultaneamente é igual à probabilidade de se retirá-las uma a uma, sucessivamente, e sem reposição.
Indicando por C, P e E os naipes de copas, paus e espadas, respectivamente, temos:

a) A probabilidade P de sair CCC é dada por:

$$P = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$$

b) Há três sequências possíveis de naipes: CCP, CPC e PCC, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de ocorrer 2 cartas de copas e 1 de paus é dada por:

$$P = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

c) O número de permutações das letras C, P e E é dado por:

$P_3 = 3! = 6$

Assim, há seis sequências possíveis de naipes diferentes, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Logo, a probabilidade P de sair três naipes diferentes é dada por:

$$P = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$

53 Indicando rapazes e garotas por R e G, respectivamente, temos:

a) A probabilidade P de ser sorteada a sequência RR é dada por:

$$P = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{132} = \frac{5}{22}$$

b) $RG \rightarrow P_1 = \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{36}{132} = \frac{3}{11}$

ou $GR \rightarrow P_2 = \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{36}{132} = \frac{3}{11}$

Logo, a probabilidade P pedida é:

$$P = P_1 + P_2 = 2 \cdot \frac{3}{11} = \frac{6}{11}$$

c) Ana e Rui $\rightarrow P_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{132}$

ou Rui e Ana $\rightarrow P_2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{132}$

Logo, a probabilidade P pedida é:

$$P = P_1 + P_2 = 2 \cdot \frac{1}{132} = \frac{1}{66}$$

54 A probabilidade de o primeiro vértice escolhido ser um vértice qualquer do cubo é $\frac{8}{8} = 1$; e a probabilidade de o segundo vértice escolhido estar na mesma face do primeiro escolhido é $\frac{6}{7}$.
O produto dessas duas probabilidades é a probabilidade P procurada, isto é:

$$P = 1 \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{7}$$

55 A probabilidade P de nenhuma das sementes germinar é dada por:

$P = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$

Os eventos G e N determinados por "pelo menos uma semente germinar" e "nenhuma semente germinar" são complementares; logo:

$P(G) = 1 - P(N) = 1 - 0{,}064 = 0{,}936 = 93{,}6\%$

Alternativa **d**.

56 Indicando por C e $\overline{C}$ a cura e a não cura, respectivamente, temos:

a) Devemos calcular a probabilidade P de ocorrer CC, dada por:
$P = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81 = 81\%$
Logo, a probabilidade de os dois serem curados é 81%.

b) Devemos calcular a probabilidade P de ocorrer $\overline{C}\,\overline{C}$, dada por:
$P = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01 = 1\%$
Logo, a probabilidade de nenhum deles ser curado é 1%.

c) Devemos calcular a probabilidade P de ocorrer $C\overline{C}$, dada por:
$P = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09 = 9\%$
Logo, a probabilidade de apenas João ser curado é 9%.

d) Devemos calcular a probabilidade P de ocorrer $C\overline{C}$ ou $\overline{C}C$, dada por:
$P = 2 \cdot 0{,}09 = 0{,}18 = 18\%$
Logo, a probabilidade de apenas um deles ser curado é 18%.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 $\begin{cases} P(A \cup B) = 1 \\ P(A) = 3P(B) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases} \Rightarrow 1 = 3P(B) + P(B)$

$\therefore P(B) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

Alternativa **a**.

2 $P(B / A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \dfrac{4}{n - 2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{P(A)}$

$\therefore P(A) = \dfrac{n - 2}{8} \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{n - 2}{8} \leqslant 1$

$\therefore 0 \leqslant n - 2 \leqslant 8 \Rightarrow 2 \leqslant n \leqslant 10 \quad \text{(I)}$

E, ainda:

$0 \leqslant P(B / A) \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{4}{n - 2} \leqslant 1$

$\therefore \dfrac{n - 2}{4} \geqslant 1 \Rightarrow n \geqslant 6 \quad \text{(II)}$

Logo, de (I) e (II): $6 \leqslant n \leqslant 10$. Assim:

a) O maior valor possível de n é 10.

b) O menor valor possível de n é 6.

3 $\begin{cases} P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(A / B) = P(A) \\ P(A) = \dfrac{3}{8} \\ P(A \cap B) = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3}{8} = \dfrac{\frac{1}{5}}{P(B)}$

Logo:

a) $P(B) = \dfrac{8}{15}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{8}{15} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{85}{120} = \dfrac{17}{24}$

4 **a)** Para que A e B sejam mutuamente exclusivos, devemos ter:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Logo:
$0{,}7 = 0{,}4 + x \Rightarrow x = 0{,}3$

b) Para que A e B sejam independentes, devemos ter:
$P(A / B) = P(A)$, ou seja, $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$
ou, ainda:
$\dfrac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} = P(A)$
Logo: $\dfrac{0{,}4 + x - 0{,}7}{x} = 0{,}4 \Rightarrow x = 0{,}5$

Exercícios contextualizados

5 O espaço amostral E é o conjunto dos 27 cubinhos.

a) $A = \{x \in E \mid x$ é cubinho com uma única face pintada$\}$, $n(A) = 6$
$\therefore P(A) = \dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9}$

b) $B = \{y \in E \mid y$ é cubinho com exatamente duas faces pintadas$\}$, $n(B) = 12$
$\therefore P(B) = \dfrac{12}{27} = \dfrac{4}{9}$

c) $C = \{z \in E \mid z$ é cubinho com nenhuma face pintada$\}$, $n(C) = 1$
$\therefore P(C) = \dfrac{1}{27}$

6 $E = \{(x, y, z) \mid x, y, z$ são os números de pontos da face do dado$\}$
$A = \{(a, b, c) \in E \mid abc$ é ímpar$\}$
O número de elementos de E e de A podem ser calculados pelo princípio fundamental de contagem:

1º lançamento x	2º lançamento y	3º lançamento z
6	6	6

Logo, $n(E) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

1º lançamento a	2º lançamento b	3º lançamento c
3	3	3

Logo, $n(A) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.
Concluímos, então, que:
$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{27}{216} = 12{,}5\%$

7 Sendo k o número de bolas azuis a serem colocadas na urna, temos:
$E = \{x \mid x$ é bola da urna$\}$, $n(E) = 20 + k$
$A = \{y \in E \mid y$ é bola azul$\}$, $n(A) = k$
$\therefore P(A) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{k}{20 + k} = \dfrac{2}{3} \quad \therefore k = 40$
Alternativa **e**.

8 $E = \{x \mid x$ é filho de ex-aluna$\}$,
$n(E) = 7 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 25$
$A = \{y \in E \mid y$ é filho único$\}$, $n(A) = 7$
$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{7}{25}$
Alternativa **e**.

9 O gráfico mostra que, em 2050, os países desenvolvidos terão 461 milhões de habitantes com 60 anos ou mais. Essa população corresponde a um percentual entre 30% e 35% do total de habitantes desses países. A alternativa que mais se aproxima desses percentuais é $\frac{8}{25}$, que equivale a 32%.
Alternativa **c**.

10 Sendo k o número de peras da caixa, temos que o número de maçãs é $k + 6$. Assim:
$k + k + 6 = 40 \Rightarrow k = 17$
Logo:
$E = \{x \mid x \text{ é fruta da caixa}\}$, $n(E) = 40$
$A = \{y \in E \mid y \text{ é pera}\}$, $n(A) = 17$
Concluímos, então, que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{17}{40}$$

Ou seja, a probabilidade de a fruta retirada ser pera é $\frac{17}{20}$ ou 42,5%.

11 $E = \{x \mid x \text{ é paciente com problemas respiratórios causados pelas queimadas}\}$, $n(E) = 200$
$A = \{y \in E \mid y \text{ é criança}\}$, $n(A) = 150$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{150}{200} = 75\%$$

Alternativa **e**.

12 $E = \{x \mid x \text{ é peixaria pesquisada}\}$, $n(E) = 5$
$A = \{y \in E \mid y \text{ vende peixe na temperatura ideal}\}$, $n(A) = 1$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{5}$$

Alternativa **d**.

13 O menor intervalo de tempo entre dois ônibus é 10 min, e o maior é 20 min. Assim, nesse universo de tempo, a probabilidade de Carlos chegar ao maior desses intervalos é $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, e a probabilidade de ele chegar ao menor é $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Portanto, a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa ANDABEM é o dobro da probabilidade de ele viajar na empresa BOMPASSEIO.
Alternativa **d**.

14 $E = \{1, 2, 3, ..., 50\}$, $n(E) = 50$
$A = \{12, 24, 36, 48\}$, $n(A) = 4$

$$\text{Logo: } P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{4}{50} = 8\%$$

Alternativa **a**.

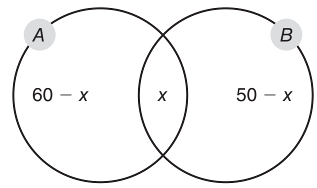
15 $$E = \left\{\begin{matrix} (1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), ..., (2, 6) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), ..., (6, 6) \end{matrix}\right\}, n(E) = 36$$

$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 6), (6, 5)\}$, $n(A) = 8$

$$\text{Logo: } P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Alternativa **a**.

16 Sejam: E o conjunto de todos os clientes entrevistados, A o conjunto dos clientes com rendimento mensal superior a R$ 2.000,00 e B o conjunto dos clientes com rendimento mensal inferior a R$ 2.800,00. Indicando por x o número de clientes com rendimento mensal superior a R$ 2.000,00 e inferior a R$ 2.800,00, temos:



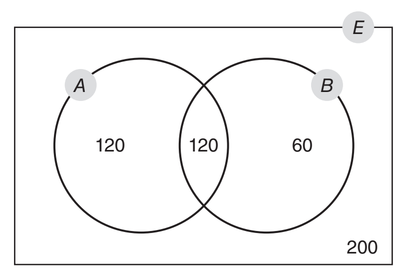
$(E = A \cup B)$

$60 - \cancel{x} + \cancel{x} + 50 - x = 80 \Rightarrow x = 30 = n(A \cap B)$

$$\therefore\ P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(E)} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$$

Logo, a probabilidade de sortear um cliente com um rendimento mensal entre R$ 2.000,00 e R$ 2.800,00 é $\frac{3}{8}$.

17 Sejam: E o conjunto de todos os alunos entrevistados, A o conjunto dos alunos que praticam algum esporte e B o conjunto dos alunos que frequentam um curso de idiomas. Assim, temos a representação:



$n(E) = 500$ e $n(A \cup B) = 120 + 120 + 60 = 300$

$$\therefore\ P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$$

Alternativa **b**.

18 O percentual de pessoas dessa cidade com curso superior é dado por:
$6\% \cdot 48\% + 7\% \cdot 27\% + 10\% \cdot 25\% =$
$= 0{,}06 \cdot 0{,}48 + 0{,}07 \cdot 0{,}27 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 =$
$= 0{,}0727 = 7{,}27\%$
Logo, a probabilidade pedida é 7,27%.
Alternativa **b**.

19 $E = \{\{x, y, z\} \mid x, y \text{ e } z \text{ são dias de } 2^{\text{a}} \text{ feira a domingo}\}$,

$$n(E) = C_{7,3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

a) $A = \{\{2^{\text{a}} \text{ feira}, 5^{\text{a}} \text{ feira}, \text{domingo}\}\}$, $n(A) = 1$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{35}$$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{1}{35}$.

b) $B = \{\{a, b, c\} \in E \mid a, b \text{ e } c \text{ são dias consecutivos}\}$, $n(B) = 5$

$$\therefore\ P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{1}{7}$.

20 $E = \{x \mid x$ é reta determinada pelos vértices do cubo$\}$, $n(E) = C_{8,\,2} = 28$
$B = \{y \in E \mid y$ é reta que passa pelo vértice $A\}$, $n(B) = C_{7,\,1} = 7$

$$\therefore\ P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

Logo, a probabilidade de que a reta sorteada passe pelo vértice A é $\frac{1}{4}$.

21 a) $C_{48,\,6} = 12.271.512$

b) $E = \{\{a, b, c, d, e, f\} \mid a, b, c, d, e, f$ são números que podem ser sorteados no jogo$\}$, $n(E) = C_{48,\,6} = 12.271.512$:
$A = \{\{a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0\} \in E \mid a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0$ são os números sorteados no jogo$\}$, $n(A) = 1$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{C_{48,6}} = \frac{1}{12.271.512}$$

Logo, a probabilidade de serem sorteados os números de um cartão com a aposta mínima é $\frac{1}{12.271.512}$.

22 a) $E = \{x \mid x$ é comissão de 4 pessoas escolhidas entre os 4 homens e as 3 mulheres$\}$, $n(E) = C_{7,\,4} = 35$

b) $A = \{y \in E \mid y$ é comissão formada por 2 homens e 2 mulheres$\}$, $n(A) = C_{4,\,2} \cdot C_{3,\,2} = 6 \cdot 3 = 18$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{18}{35}$$

Logo, a probabilidade de a comissão ser formada por 2 homens e 2 mulheres é $\frac{18}{35}$.

23 $E = \{x \mid x$ é equipe de 5 educadores escolhidos entre os 4 pedagogos e os 5 professores$\}$, $n(E) = C_{9,\,5} = 126$
$A = \{y \in E \mid y$ é equipe formada por 3 professores e 2 pedagogos$\}$, $n(A) = C_{5,\,3} \cdot C_{4,\,2} = 10 \cdot 6 = 60$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$$

Logo, a probabilidade de a equipe escolhida ser formada por 3 professores e 2 pedagogos é $\frac{10}{21}$.

24 $E = \{w \mid w$ é uma sequência de votos dos três diretores$\}$, $n(E) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$A = \{z \in E \mid z$ é a sequência de três votos para o candidato X$\}$, $n(A) = 1$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{8}$$

Logo, a probabilidade de X ser eleito com três votos é $\frac{1}{8}$ ou 12,5%.

Alternativa **a**.

25 $E = \{\{x, y\} \mid x$ e y são pessoas da sala$\}$, $n(E) = C_{12,\,2} = 66$

a) $A = \{\{a, b\} \in E \mid a$ e b são marido e mulher$\}$, $n(A) = 6$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

Logo, a probabilidade de selecionar um homem e sua esposa é $\frac{1}{11}$.

b) $B = \{\{c, d\} \in E \mid c$ e d são homens$\}$, $n(B) = C_{6,\,2} = 15$

$$\therefore\ P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}$$

Logo, a probabilidade de sortear dois homens é $\frac{5}{22}$.

26 $E = \{\{x, y\} \mid x$ e y são cartas da mesa$\}$, $n(E) = C_{100,\,2} = 4.950$
$A = \{\{a, b\} \in E \mid a$ e b são cartas iguais$\}$, $n(A) = 50$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{50}{4.950} = \frac{1}{99}$$

Alternativa **b**.

27 $E = \{\{A, B, C\} \mid A, B$ e C são vértices do hexágono$\}$, $n(E) = C_{6,\,3} = 20$
$T = \{\{X, Y, Z\} \in E \mid$ não há dois vértices consecutivos entre X, Y e $Z\}$, $n(T) = 2$

$$\therefore\ P(T) = \frac{n(T)}{n(E)} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Logo, a probabilidade de os vértices escolhidos serem vértices de um triângulo equilátero é $\frac{1}{10}$.

28 $E = \{x \mid x$ é fila formada pelos 20 alunos$\}$, $n(E) = 20!$

a) $A = \{y \in E \mid y$ é fila que contém Gabriel, Mateus e Roger juntos, em qualquer ordem$\}$, $n(A) = 3! \cdot 18!$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{3! \cdot 18!}{20!} = \frac{3}{190}$$

Logo, a probabilidade de que Gabriel, Mateus e Roger estejam juntos na fila, em qualquer ordem, é $\frac{3}{190}$.

b) $B = \{z \in E \mid z$ é fila que contém exatamente 5 alunos entre Gabriel e Mateus$\}$,
$n(B) = 14 \cdot 18! + 14 \cdot 18! = 2 \cdot 14 \cdot 18!$

$$\therefore\ P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{2 \cdot 14 \cdot 18!}{20!} = \frac{7}{95}$$

Logo, a probabilidade de que haja exatamente 5 alunos entre Gabriel e Mateus, na fila formada, é $\frac{7}{95}$.

29 Temos $\frac{1 + 2 + 3 + \dots + K}{K} = 139$, em que o numerador $1 + 2 + 3 + \dots + K$ é a soma dos termos de uma PA. Logo:

$$\frac{\frac{(1 + K)K}{2}}{K} = 139 \Rightarrow K = 277$$

Portanto, a urna contém 277 bolas numeradas de 1 a 277. A quantidade de múltiplos de 7, nesse intervalo, é o quociente natural de 277 por 7, ou seja, 39.
Assim, consideremos o espaço amostral E e o evento A:
$E = \{1, 2, 3, \dots, 277\}$, $n(A) = 277$
$A = \{7, 14, 21, \dots, 273\}$, $n(A) = 39$
Concluímos, então:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{39}{277}$$

30 a) $C_{15,\,10} = 3.003$
Logo, as 10 garrafas podem ser escolhidas de 3.003 maneiras diferentes.
b) $C_{4,\,2} \cdot C_{5,\,4} \cdot C_{6,\,4} = 450$
Logo, a escolha pode ser feita de 450 maneiras diferentes.
c) O número de elementos do espaço amostral E é dado por: $n(E) = C_{15,\,10} = 3.003$
Sendo A o evento cujos elementos são conjuntos formados por 4 garrafas da Itália e pelo menos uma garrafa de cada um dos outros países, temos:
$n(A) = C_{5,\,4} \cdot [C_{10,\,6} - C_{6,\,6}] = 1.045$
Logo: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{1.045}{3.003} = \dfrac{95}{273}$

31 a) $C_{12,\,2} = 66$
b) $E = \{x \mid x$ é comissão de dois jogadores$\}$,
$n(E) = C_{12,\,2} = 66$
$A = \{y \in E \mid y$ é comissão cuja média de idade dos componentes é menor que a média de idade de todos os jogadores$\}$
Para calcular n(A), vamos determinar a média m das idades de todos os jogadores:
$m = \dfrac{1 \cdot 22 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 26 + 1 \cdot 29 + 2 \cdot 31 + 1 \cdot 32}{12} =$
$= 27$
Assim, sendo a e b as idades dos jogadores da comissão sorteada, devemos ter:
$\dfrac{a + b}{2} < 27 \Rightarrow a + b < 54$
Temos então as seguintes possibilidades:

a	b	Número de comissões
22	25	$1 \cdot 3 = 3$
25	25	$C_{3,\,2} = 3$
22	26	$1 \cdot 4 = 4$
26	26	$C_{4,\,2} = 6$
22	29	$1 \cdot 1 = 1$
22	31	$1 \cdot 2 = 2$
25	26	$3 \cdot 4 = 12$

Logo, $n(A) = 31$ e, portanto, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{31}{66}$, ou seja, a probabilidade de a média de idade dos jogadores da comissão ser menor que a média de idade de todos os jogadores é $\dfrac{31}{66}$.

32 $E = \{(x, y, z) \mid x, y$ e z são números de pontos da face do dado$\}$, $n(E) = 8$
a) $A = \{(a, b, c) \in E \mid a + b + c > 18\} = \varnothing$, $n(A) = 0$
$\therefore\ P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{0}{8} = 0$
b) $B = \{(d, e, f) \in E \mid d + e + f < 19\} = E$, $n(B) = 8$
$\therefore\ P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{8}{8} = 1$

33 $E = \{a_n \mid a_n = 2n^2 + 5$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 20\}$,
$n(E) = 20$
a) $a_n = 455 \Rightarrow 2n^2 + 5 = 455$
$\therefore\ n^2 = 225 \Rightarrow n = \pm 15$
Como $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 20$, temos que $n = 15$.
Logo, 455 é um elemento de E. Assim, o evento $A = \{x \in E \mid x = 455\}$ é unitário e, portanto:
$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{1}{20}$
b) $a_n = 31 \Rightarrow 2n^2 + 5 = 31$
$\therefore\ n^2 = 13 \Rightarrow n = \pm\sqrt{13}$
Como $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 20$, concluímos que 31 não é elemento da sequência (a_n). Assim, o evento $B = \{y \in E \mid y = 31\}$ é vazio e, portanto:
$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{0}{20} = 0$
c) Todos os números da forma $a_n = 2n^2 + 5$ são ímpares e, portanto:
$C = \{z \in E \mid z$ é ímpar$\} = E$
Logo, $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(E)} = \dfrac{20}{20} = 1$.

34 A probabilidade P de qualquer evento é tal que $0 \leqslant P \leqslant 1$. Portanto:
$0 \leqslant \dfrac{2n - 23}{21} \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2n - 23 \leqslant 21$
$\therefore\ 23 \leqslant 2n \leqslant 44 \Rightarrow \dfrac{23}{2} \leqslant n \leqslant 22$
Logo, o menor e o maior valor de n são, respectivamente, 12 e 22.

35 A probabilidade P de qualquer evento é tal que $0 \leqslant P \leqslant 1$. Portanto:
$0 \leqslant \dfrac{27 - n}{9} \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 27 - n \leqslant 9$
$\therefore\ -27 \leqslant -n \leqslant -18 \Rightarrow 27 \geqslant n \geqslant 18$
Logo, o número mínimo de deputados do partido x que participam dessa sessão é 18.
Alternativa **d**.

36 Os eventos A e B determinados por "seja professor da rede pública de ensino" e "não seja professor da rede pública de ensino", respectivamente, são complementares. Logo:
$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$
Assim, a probabilidade de o escolhido não ser professor da rede pública é 0,88.

37 Os eventos A e B determinados por "marcar um gol em um chute de pênalti" e "não marcar um gol em um chute de pênalti", respectivamente, são complementares. Logo:
$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{18}{23} = \dfrac{5}{23}$
Assim, a probabilidade de o jogador não marcar o gol em um chute de pênalti é $\dfrac{5}{23}$.

38 Os eventos A e B determinados por "apresentar reação ao medicamento" e "não apresentar reação ao medicamento", respectivamente, são complementares. Portanto:
$P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow \dfrac{2n + 1}{3n} + \dfrac{3n - 5}{6} = 1$
$\therefore\ 2(2n + 1) + n(3n - 5) = 6n \Rightarrow 3n^2 - 7n + 2 = 0$
$\therefore\ n = \dfrac{1}{3}$ ou $n = 2$

- Para $n = \frac{1}{3}$, temos: $P(B) = \dfrac{3 \cdot \frac{1}{3} - 5}{6} = -\frac{2}{3}$ (não convém)
- Para $n = 2$, temos: $P(B) = \dfrac{3 \cdot 2 - 5}{6} = \dfrac{1}{6}$

  Logo, a probabilidade de um paciente não apresentar reação ao medicamento é $\frac{1}{6}$.

39 A probabilidade de um paciente não ter efeitos colaterais
- com três doses é dada por:
  $1 - 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \approx 27\%$
- com quatro doses é dada por:
  $1 - 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \approx 34\%$
- com cinco doses é dada por:
  $1 - 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \approx 41\%$

Logo, 4 é o maior número admissível de doses para o paciente que considera aceitável um risco de 35%

Alternativa **b**.

40 Sendo $P(M)$ e $P(G)$ as probabilidades de se obter uma camiseta de tamanhos médio e grande, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} P(M) = 9P(G) \\ P(M) + P(G) = 1 \end{cases} \Rightarrow P(G) = \frac{1}{10} \text{ e } P(M) = \frac{9}{10}$$

Logo, a probabilidade de se obter uma camiseta de tamanho grande é $\frac{1}{10}$.

41 Sendo $P(C)$ e $P(R)$ as probabilidades de o atirador acertar e errar o alvo, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} P(C) = 7P(R) \\ P(C) + P(R) = 1 \end{cases} \Rightarrow P(C) = \frac{7}{8} \text{ e } P(R) = \frac{1}{8}$$

Logo, a probabilidade de o atirador acertar o alvo no próximo tiro é $\frac{7}{8}$.

42 Sendo $P(C)$ e $P(K)$ as probabilidades de cair cara e coroa, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} P(C) = 4P(K) \\ P(C) + P(K) = 1 \end{cases} \Rightarrow P(C) = \frac{4}{5} \text{ e } P(K) = \frac{1}{5}$$

Logo, a probabilidade de cair coroa é $\frac{1}{5}$.

43 $E = \{\{x, y\} \mid x \text{ e } y \text{ são alunos que votaram}\}$,
$n(E) = C_{30,\,2} = 435$
$F = \{\{z, w\} \in E \mid z \text{ e } w \text{ votaram em B}\}$,
$n(B) = C_{10,\,2} = 45$
$\overline{F} = \{\{p, q\} \in E \mid p \text{ e } q \text{ votaram em A}\}$

$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{45}{435} = \frac{390}{435} = \frac{26}{29}$

Logo, a probabilidade de que pelo menos um dos dois alunos escolhidos tenha votado no vencedor é $\frac{26}{29}$.

44 Os eventos A e B determinados por "a partícula é desviada ou repelida" e "a partícula não sofre alteração em sua trajetória", respectivamente, são complementares. Logo:

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10^5} = \frac{10^5 - 1}{10^5} =$

$= \frac{99.999}{100.000} = 99,999\%$

Alternativa **e**.

45 $E = \{1, 2, 3, ..., 100\}$, $n(E) = 100$
$A = \{41, 42, 43, ..., 100\}$, $n(A) = 60$
$B = \{2, 4, 6, ..., 100\}$, $n(B) = 50$
$A \cap B = \{42, 44, 46, ..., 100\}$, $n(A \cap B) = 30$
$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{60}{100} + \frac{50}{100} - \frac{30}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$

Alternativa **c**.

46 $E = \{1, 2, 3, ..., 1.000\}$, $n(E) = 1.000$
$A = \{2, 4, 6, ..., 1.000\}$, $n(A) = 500$
$B = \{10, 11, 12, ..., 99\}$, $n(B) = 90$
$A \cap B = \{10, 12, 14, ..., 98\}$, $n(A \cap B) = 45$
$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{500}{1.000} + \frac{90}{1.000} - \frac{45}{1.000} = \frac{545}{1.000} = \frac{109}{200}$

Logo, a probabilidade de o número sorteado ser par ou ter 2 algarismos é $\frac{109}{200}$ ou 54,5%.

47 $E = \{x \mid x \text{ é página do livro}\}$, $n(E) = 200$
$A = \{y \in E \mid y \text{ é página com ilustração colorida}\}$,
$n(A) = 50$
$B = \{z \in E \mid z \text{ é página sem ilustração}\}$, $n(B) = 120$
$A \cap B = \varnothing$
$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{50}{200} + \frac{120}{200} - 0 = \frac{170}{200} = \frac{17}{20}$

Logo, a probabilidade de a página ter ilustração colorida ou não ter ilustração é $\frac{17}{20}$ ou 85%.

48 Os eventos A e B determinados por "aparece uma letra na tela do monitor" e "aparece um algarismo na tela do monitor", respectivamente, são mutuamente exclusivos. Portanto:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{11} + \frac{2}{11} = \frac{5}{11}$

Logo, a probabilidade de aparecer uma letra ou um algarismo na tela do monitor é $\frac{5}{11}$.

49 Sendo E o espaço amostral, A o evento formado pelos carros com freio ABS e B o evento formado pelos carros com direção hidráulica, temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{5}{8} + \frac{2}{3} - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{11}{24}$

Logo, a probabilidade de que o automóvel escolhido tenha freio ABS e direção hidráulica é $\frac{11}{24}$.

50 Sendo $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$ as probabilidades de vendas na loja A, na loja B, nas lojas A e B e nas lojas A ou B, respectivamente, temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A \cup B) = 0,75 + 0,78 - 0,62 = 0,91$

Logo, a probabilidade de venda em pelo menos uma das lojas é 91%.

51 Sendo $P(X)$, $P(F)$, $P(X \cap F)$ e $P(X \cup F)$ as probabilidades de o refrigerador escolhido ser da marca X, ser *frost free*, ser da marca X e *frost free* e ser da marca X ou *frost free*, respectivamente, temos:

$P(X \cup F) = P(X) + P(F) - P(X \cap F) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X \cup F) = \frac{3}{5} + \frac{3}{4} - \frac{7}{10} = \frac{13}{20}$

Logo, a probabilidade de que o refrigerador escolhido seja da marca X ou *frost free* é $\frac{13}{20}$.

52 Indicando por x o número de repórteres mulheres do jornal C, temos:

	Jornal A	Jornal B	Jornal C
Homens	8	6	7
Mulheres	4	9	x

Sendo $P(M)$, $P(A)$, $P(M \cap A)$ e $P(M \cup A)$ as probabilidades de o escolhido ser mulher, ser do jornal A, ser mulher e do jornal A e ser mulher ou do jornal A, respectivamente, temos:

$P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{13 + x}{34 + x} + \frac{12}{34 + x} - \frac{4}{34 + x}$

$\therefore \frac{2}{3} = \frac{21 + x}{34 + x} \Rightarrow 63 + 3x = 68 + 2x$

$\therefore x = 5$

Logo, o número de repórteres mulheres do jornal C é 5.

53
- Cálculo do total de códigos que podem ser formados:

letra	algarismo	algarismo
26	10	10

Logo, o total de códigos é dado por:
$26 \cdot 10 \cdot 10 = 2.600$

- Cálculo do número de códigos que contêm uma vogal:

letra	algarismo	algarismo
5	10	10

Logo, o número de códigos com uma vogal é dado por: $5 \cdot 10 \cdot 10 = 500$

- Cálculo do número de códigos com dois algarismos iguais:

letra	algarismo	algarismo
26	10	1

Logo, o número de códigos com dois algarismos iguais é dado por: $26 \cdot 10 \cdot 1 = 260$

- Cálculo do número de códigos formados por uma vogal e dois algarismos iguais:

letra	algarismo	algarismo
5	10	1

Logo, o número de códigos com uma vogal e dois algarismos iguais é dado por: $5 \cdot 10 \cdot 1 = 50$

Assim, consideremos o espaço amostral E e os eventos A e B, a seguir:

$E = \{x \mid x$ é código que pode ser formado$\}$, $n(E) = 2.600$

$A = \{y \in E \mid y$ é código com uma vogal$\}$, $n(A) = 500$

$B = \{z \in E \mid z$ é código com dois algarismos iguais$\}$, $n(B) = 260$

$A \cap B = \{w \in E \mid w$ é código com uma vogal e dois algarismos iguais$\}$, $n(A \cap B) = 50$

Concluímos, então, que:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{500}{2.600} + \frac{260}{2.600} - \frac{50}{2.600} =$

$= \frac{710}{2.600} = \frac{71}{260}$

Portanto, a probabilidade de o código escolhido ter uma vogal ou dois algarismos iguais é $\frac{71}{260}$.

54 a) O número total de alunos é dado por:
$4 + 5 + 3 + 1 + 2 + 5 = 20$
O número de alunos com no mínimo 19 anos é dado por:
$1 + 2 + 5 = 8$

b) $E = \{x \mid x$ é aluno do curso$\}$, $n(E) = 20$
$A = \{y \in E \mid y$ é aluno com no mínimo 19 anos$\}$, $n(A) = 8$
$B = \{z \in E \mid z$ é aluno com 16 anos$\}$, $n(B) = 4$
Os eventos A e B são mutuamente exclusivos; logo:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{8}{20} + \frac{4}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
Portanto, a probabilidade de o escolhido ter no mínimo 19 anos ou ter 16 anos é $\frac{3}{5}$.

55 Sejam $P(C)$, $P(I)$, $P(C \cap I)$ e $P(C \cup I)$ as probabilidades de o sorvete retirado ser de chocolate, da marca ICE, de chocolate e da marca ICE e de chocolate ou da marca ICE, respectivamente. Indicando por x o número de sorvetes da marca ICE, temos:

$P(C \cup I) = P(C) + P(I) - P(C \cap I) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = \frac{40}{60} + \frac{x}{60} - \frac{1}{5}$

$\therefore 60 = 40 + x - 12 \Rightarrow x = 32$

Logo, há 32 sorvetes da marca ICE no *freezer*.

56 Sejam:
- E o espaço amostral formado por todos os animais dessa espécie;
- A o evento formado pelos animais dessa espécie que vivem 30 anos ou menos;
- B o evento formado pelos animais dessa espécie que vivem 30 anos ou mais;
- $A \cap B$ o evento formado pelos animais dessa espécie que vivem 30 anos.

Temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 0{,}6 + 0{,}5 - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cap B) = 0{,}1$

Logo, a probabilidade de que o animal escolhido viva exatamente 30 anos é 0,1.

57 I) Como a soma dos percentuais correspondentes aos motivos ultrapassa 100%, concluímos que existem pessoas que declararam mais de um motivo.
Alternativa **c**.

II) $P(P \cup Q) = P(P) + P(Q) - P(P \cap Q)$
$\Rightarrow 40\% = 36\% + 16\% - P(P \cap Q)$
$\therefore P(P \cap Q) = 12\%$
Alternativa **a**.

58 $E = \{x \mid x$ é carta do baralho$\}$, $n(E) = 52$
$A = \{y \in E \mid y$ é rei$\}$, $n(A) = 4$
$B = \{z \in E \mid z$ é carta de ouros$\}$, $n(B) = 13$
$A \cap B = \{$rei de ouros$\}$, $n(A \cap B) = 1$
$\therefore P(B / A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{1}{4}$
Logo, a probabilidade de que o rei retirado seja de ouros é $\dfrac{1}{4}$.

59

	Psiquiatras	Psicólogos	Neurologistas
Homens	30	19	17
Mulheres	18	53	10

$E = \{x \mid x$ é congressista$\}$, $n(E) = 147$
$A = \{y \in E \mid y$ é mulher$\}$, $n(A) = 81$
$B = \{z \in E \mid z$ é psiquiatra$\}$, $n(B) = 48$
$A \cap B = \{w \in E \mid w$ é mulher e psiquiatra$\}$, $n(A \cap B) = 18$
$\therefore P(B / A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{18}{81} = \dfrac{2}{9}$
Logo, a probabilidade de que a mulher escolhida seja psiquiatra é $\dfrac{2}{9}$.

60

	A	B	C
Natal	70	80	90
Fortaleza	60	85	95

$E = \{x \mid x$ é passageiro$\}$, $n(E) = 480$
$T = \{y \in E \mid y$ viajou para Natal$\}$, $n(T) = 240$
$V = \{z \in E \mid z$ optou pelo pacote A$\}$, $n(V) = 130$
$T \cap V = \{w \in E \mid w$ viajou para Natal e optou pelo pacote A$\}$, $n(T \cap V) = 70$
$\therefore P(V / T) = \dfrac{n(T \cap V)}{n(T)} = \dfrac{70}{240} = \dfrac{7}{24}$
Logo, a probabilidade de que o passageiro que ia para Natal tenha optado pelo pacote A é $\dfrac{7}{24}$.

61 a) $\begin{cases} 80 + c = 800 \\ a + 40 = 200 \\ 80 + a = b \\ c + 40 = d \end{cases} \Rightarrow c = 720,\ a = 160,\ b = 240$ e $d = 760$

b) $E = \{x \mid x$ é pessoa da comunidade$\}$, $n(E) = 1.000$
$A = \{y \in E \mid y$ teve resultado positivo no teste$\}$, $n(A) = 240$
$B = \{z \in E \mid z$ é pessoa sadia$\}$, $n(B) = 800$
$A \cap B = \{w \in E \mid w$ teve resultado positivo no teste e é pessoa sadia$\}$, $n(A \cap B) = 80$
$\therefore P(B / A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{80}{240} = \dfrac{1}{3}$
Logo, a probabilidade de a pessoa que teve resultado positivo no teste ser saudável é $\dfrac{1}{3}$.

62 (I) $E = \{x \mid x$ é candidato inscrito$\}$, $n(E) = 10.000$
$A = \{y \in E \mid y$ é do sexo masculino$\}$, $n(A) = 5.500$
$B = \{z \in E \mid z$ optou por exatas$\}$, $n(B) = 2.500$
$A \cap B = \{w \in E \mid w$ é do sexo masculino e optou por exatas$\}$, $n(A \cap B) = 1.500$
$\therefore P(B \cap A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(E)} = \dfrac{1.500}{10.000} \Rightarrow p_1 = 0{,}15$

(II) $C = \{r \in E \mid r$ é do sexo feminino$\}$, $n(C) = 4.500$
$D = \{s \in E \mid s$ optou por biomédicas$\}$, $n(D) = 4.000$
$C \cap D = \{t \in E \mid t$ é do sexo feminino e optou por biomédicas$\}$, $n(C \cap D) = 1.500$
$\therefore P(C / D) = \dfrac{n(C \cap D)}{n(D)} = \dfrac{1.500}{4.000} \Rightarrow p_2 = 0{,}375$
Alternativa **d**.

63 $E = \{x \mid x$ é reta determinada pelos vértices do hexágono$\}$, $n(E) = C_{6,2} = 15$
$A = \{y \in E \mid y$ não contém lado do hexágono$\}$, $n(A) = 9$
$B = \{z \in E \mid z$ passa pelo vértice $F\}$, $n(B) = 5$
$A \cap B = \{w \in E \mid$ não contém lado do hexágono e passa pelo vértice $F\}$, $n(A \cap B) = 3$
$\therefore P(B / A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$
Logo, a probabilidade de que a reta que não contém nenhum dos lados do polígono passe pelo vértice F é $\dfrac{1}{3}$.

64 $E = \{x \mid x$ é triângulo determinado pelos pontos$\}$, $n(E) = 5 \cdot C_{4,2} + 4 \cdot C_{5,2} = 70$
$A = \{y \in E \mid y$ tem lado contido na reta $s\}$, $n(A) = 5 \cdot C_{4,2}$
$B = \{z \in E \mid z$ tem vértice no ponto $F\}$, $n(B) = C_{5,2} + C_{5,1} \cdot C_{3,1} = 35$
$A \cap B = \{w \in E \mid w$ tem lado contido em s e tem vértice $F\}$, $n(A \cap B) = C_{3,1} \cdot C_{5,1} = 15$
$\therefore P(B / A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2}$
Logo, a probabilidade de o triângulo sorteado, que tem um lado contido em s, ter vértice no ponto F é $\dfrac{1}{2}$.

65 $E = \{(x, y) \mid x$ é a primeira bola retirada e y é a segunda$\}$, $n(E) = 9 \cdot 9 = 81$

a) $A = \{(r, s) \mid r$ é bola azul$\}$, $n(A) = 3 \cdot 7 = 21$
$B = \{(v, w) \mid w$ é bola azul$\}$, $n(B) = 7 \cdot 3 = 21$
$A \cap B = \{(t, u) \mid t$ é bola azul e u é bola azul$\}$, $n(A \cap B) = 3 \cdot 3 = 9$
$\therefore P(B / A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$

b) $C = \{(g, h) \in E \mid g$ não é bola azul$\}$, $n(C) = 4 \cdot 7 = 28$
$B = \{(v, w) \in E \mid w$ é bola azul$\}$, $n(B) = 7 \cdot 3 = 21$
$C \cap B = \{(i, j) \in E \mid i$ não é bola azul e j é bola azul$\}$, $n(C \cap B) = 4 \cdot 3 = 12$
$\therefore P(B / C) = \dfrac{n(B \cap C)}{n(C)} = \dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$.

66 Sejam: $P(A)$, $P(J)$, $P(A \cap J)$ e $P(A \cup J)$, $P(J / A)$ as probabilidades de um brasileiro comer carne no almoço; no jantar; no almoço e no jantar; no almoço ou no jantar; no jantar, dado que comeu carne no almoço; respectivamente.

$$\text{Temos: } \begin{cases} P(A) = 0{,}70 & \text{(I)} \\ P(B) = 0{,}50 & \text{(II)} \\ P(J / A) = \dfrac{P(A \cap J)}{P(A)} = 0{,}60 & \text{(III)} \\ P(A \cup J) = P(A) + P(J) - P(A \cap J) & \text{(IV)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (III), obtendo:

$$\frac{P(A \cap J)}{0{,}70} = 0{,}60 \Rightarrow P(A \cap J) = 0{,}42 \quad \text{(V)}$$

Substituímos (I), (II) e (V) em (IV), concluindo:

$P(A \cup J) = 0{,}70 + 0{,}50 - 0{,}42 = 0{,}78$

Logo, a probabilidade de uma pessoa comer carne bovina no almoço ou no jantar é 0,78 ou 78%.

67 a)

1º quadradinho pintado x	2º quadradinho pintado y
9	8

Portanto: $n(E) = 9 \cdot 8 = 72$

b) $A = \begin{Bmatrix} (1, 2), (1, 3), (1, 4), ..., (1, 9) \\ (3, 2), (3, 4), (3, 5), ..., (3, 9) \\ \vdots \\ (9, 1), (9, 2), (9, 3), ..., (9, 8) \end{Bmatrix}, n(A) = 5 \cdot 8 = 40$

c) $B = \begin{Bmatrix} (2, 1), (3, 1), (4, 1), ..., (9, 1) \\ (2, 3), (4, 3), (5, 3), ..., (9, 3) \\ \vdots \\ (1, 9), (2, 9), (3, 9), ..., (8, 9) \end{Bmatrix}, n(B) = 8 \cdot 5 = 40$

d) $A \cap B = \begin{Bmatrix} (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9) \\ (3, 1), (3, 5), (3, 7), (3, 9) \\ \vdots \\ (9, 1), (9, 3), (9, 5), (9, 7) \end{Bmatrix}$

$n(A \cap B) = 5 \cdot 4 = 20$

$\therefore P(B / A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2}$

e) $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{40}{72} = \dfrac{5}{9}$

$n(A \cap B) = 5 \cdot 4 = 20$

$\therefore P(A / B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2}$

Observando que $P(B / A) \neq P(B)$, concluímos que A e B são eventos dependentes.

68 a) $E = \{(A, A), (A, V), (A, M), (A, B), (V, A), (V, V), (V, M), (V, B), (M, A), (M, V), (M, M), (M, B), (B, A), (B, V), (B, M), (B, B)\}$, $n(E) = 16$

b) $S = \{(A, V), (V, V), (M, V), (B, V)\}$, $n(S) = 4$

$\therefore P(S) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

c) $T = \{(A, A), (A, V), (A, M), (A, B)\}$, $n(T) = 4$

$\therefore P(T) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

d) $S \cap T = \{(A, V)\}$, $n(S \cap T) = 1$

$\therefore P(S / T) = \dfrac{n(S \cap T)}{n(T)} = \dfrac{1}{4}$

e) Observando que $P(S / T) = P(S)$, concluímos que S e T são eventos independentes.

69 a) $E_1 = \{(x, y) \mid x$ é a 1ª bola retirada e y é a 2ª, com reposição$\}$, $n(E_1) = 5 \cdot 5 = 25$

$A = \{(z, w) \in E_1 \mid z$ é bola vermelha$\}$,

$n(A) = 1 \cdot 5 = 5$

$B = \{(r, s) \in E_1 \mid s$ é bola vermelha$\}$,

$n(B) = 5 \cdot 1 = 5$

$A \cap B = \{(\text{vermelha, vermelha})\}$, $n(A \cap B) = 1$

$\therefore P(B / A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{1}{5}$

b) $E_2 = \{(t, u) \mid t$ é a 1ª bola retirada e u é a 2ª bola, sem reposição$\}$, $n(E_2) = 5 \cdot 4 = 20$

$C = \{(g, h) \in E_2 \mid g$ é bola vermelha$\}$,

$n(C) = 1 \cdot 4 = 4$

$D = \{(i, j) \in E_2 \mid j$ é bola vermelha$\}$,

$n(D) = 4 \cdot 1 = 4$

$C \cap D = \varnothing$, $n(C \cap D) = 0$

$\therefore P(D / C) = \dfrac{n(C \cap D)}{n(C)} = \dfrac{0}{4} = 0$

c) No item **a**, calculando $P(B)$, temos:

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E_1)} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$

Como $P(B / A) = P(B)$, concluímos que A e B são eventos independentes.

No item **b**, calculando $P(D)$, temos:

$P(D) = \dfrac{n(D)}{n(E_2)} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

Como $P(D / C) \neq P(D)$, concluímos que C e D não são eventos independentes.

70 a) $E = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (k, c, c), (c, k, k), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)\}$, $n(E) = 8$

b) $A = \{(c, c, k), (c, k, c), (k, c, c), (c, k, k), (k, c, k), (k, k, c)\}$, $n(A) = 6$

c) $B = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (k, c, c)\}$, $n(B) = 4$

d) $A \cap B = \{(c, c, k), (c, k, c), (k, c, c)\}$, $n(A \cap B) = 3$

Temos, então:

$P(B / A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Como $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ e, portanto,

$P(B) = P(B / A)$, concluímos que A e B são eventos independentes.

71 A probabilidade P de se obter a sequência (Perfeita, Perfeita, Perfeita) é dada por:

$$P = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{28}{57}$$

72 A probabilidade de a pessoa retirar as moedas simultaneamente é igual à probabilidade de retirá-las uma a uma, sucessivamente, e sem reposição. Indicando por U, C e D as moedas de R$ 1,00, R$ 0,50 e R$ 0,10, respectivamente, temos:

a) O número de permutações das letras U, C, D é $3! = 6$. Logo, existem 6 sequências possíveis de valores, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Logo, a probabilidade P de ocorrer uma sequência de moedas de valores distintos é dada por:

$$P = 6 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

b) A probabilidade P de ocorrer CCD ou CDC ou DCC é dada por:

$P = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

c) Para totalizar R\$ 1,20 devemos ter uma moeda de R\$ 1,00 e duas de R\$ 0,10.
A probabilidade P de ocorrer UDD ou DUD ou DDU é dada por:

$P = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{14}$

73 Indicando por V, A e P as cores vermelha, azul e preta, respectivamente, temos:

a) O número de permutações das letras VVVVAA é dado por:

$P_6^{(4,\,2)} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$

Assim, há 15 sequências possíveis de cores, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de sair 4 bolas vermelhas e 2 azuis é dada por:

$P = 15 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{308}$

b) O número de permutações das letras VVVVVA é 6. Assim, a probabilidade P_1 de ocorrer 5 bolas vermelhas e 1 azul é dada por:

$P_1 = 6 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{308}$

O número de permutações das letras VVVVVP é 6. Assim, a probabilidade P_2 de ocorrer 5 bolas vermelhas e 1 preta é dada por:

$P_2 = 6 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{231}$

Logo, a probabilidade P de ocorrer 5 bolas vermelhas entre as 6 bolas retiradas é dada por:

$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{308} + \frac{1}{231} = \frac{1}{132}$

74 O espaço amostral E é formado por todas as sequências (x_1, x_2, x_3, x_4) em que x_i é uma das alternativas da questão i, com $1 \leq i \leq 4$, e o evento A que nos interessa é aquele formado pelas sequências de E com apenas uma alternativa correta. Assim: $n(E) = 4^4 = 256$ e $n(A) = 4 \cdot 3^3 = 108$
Concluímos, então:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{108}{256} = \frac{27}{64}$

Alternativa **a**.

Outro modo:
O candidato pode acertar apenas a primeira questão ou apenas a segunda, apenas a terceira ou apenas a quarta. Assim, a probabilidade P pedida é:

$P = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

Alternativa **a**.

75 O espaço amostral E é formado pelos conjuntos de dois refrigerantes retirados, e o evento A que nos interessa é aquele formado pelos conjuntos de E em que os dois refrigerantes são da mesma marca. Assim:

$n(E) = C_{12,2} = 66$ e $n(A) = C_{3,2} + C_{4,2} + C_{5,2} = 19$

Concluímos, então:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{19}{66}$

Alternativa **c**.

Outro modo:
Pelos teoremas da multiplicação e da adição de probabilidades, temos que a probabilidade P pedida é:

$P = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{19}{66}$

Alternativa **c**.

76 Indicando o uso correto por C e o incorreto por I, devemos calcular a probabilidade de ocorrer:
CI ou IC ou CC
Assim, a probabilidade P pedida é dada por:

$P = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{20} = 35\%$

Alternativa **c**.

77 Tabulando os percentuais das peças de 1ª qualidade, temos:

Peça	Aproveitável	1ª qualidade
Camiseta	96%	72%
Bermuda	98%	88,2%
Calça	90%	76,5%

Assim, a probabilidade P de ocorrer a sequência (camiseta de primeira qualidade, calça não aproveitável) é dada por:

$P = 0{,}72 \cdot 0{,}10 = 0{,}072 = 7{,}2\%$

78 A probabilidade P de o participante ser premiado é dada por:

$P = \frac{2}{12} \cdot \frac{6}{15} + \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{15} = \frac{102}{180} = \frac{17}{30}$

79 Temos:

$P_1 = 3 \cdot \underbrace{\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{7}{14}}_{\text{2 bolas verdes e 1 branca}} + \underbrace{\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14}}_{\text{3 bolas verdes}} +$

$+ 3 \cdot \underbrace{\frac{4}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14}}_{\text{1 bola verde e 2 brancas}} + \underbrace{\frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14}}_{\text{3 bolas brancas}}$

$\therefore P_1 = \frac{252}{3.360} + \frac{24}{3.360} + \frac{504}{3.360} + \frac{210}{3.360} = \frac{990}{3.360}$

e

$P_2 = \underbrace{\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14}}_{\text{3 bolas verdes}} + \underbrace{\frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14}}_{\text{3 bolas azuis}} +$

$+ \underbrace{\frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14}}_{\text{3 bolas brancas}} = \frac{294}{3.360}$

Logo, $P_1 + P_2 = \frac{1.284}{3.360} \approx 0{,}382.$

Alternativa **e**.

80 A probabilidade de se sortear uma aresta qualquer do cubo é $\frac{12}{12} = 1$. Depois de sorteada uma aresta, a probabilidade de a segunda sorteada ser paralela à primeira é $\frac{3}{11}$. Assim, a probabilidade P pedida é:

$P = \underbrace{\frac{12}{12}}_{\text{aresta qualquer}} \cdot \underbrace{\frac{3}{11}}_{\text{aresta paralela à primeira}} = \frac{3}{11}$

81 a) $P_1 = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$

b) $P_2 = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

c) $P_3 = \frac{18}{40} \cdot \frac{17}{39} \cdot \frac{22}{38} = \frac{561}{4.940}$

82 Os eventos S e M determinados por "paciente sobreviver" e "paciente morrer", respectivamente, são complementares; portanto:

$P(S) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Assim, temos:

a) A probabilidade P_1 de ocorrer SSS é dada por:

$P_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}512 = 51{,}2\%$

Logo, a probabilidade de os três pacientes sobreviverem é 51,2%.

b) A probabilidade P_2 de ocorrer SSM ou SMS ou MSS é dada por:

$P_2 = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}384 = 38{,}4\%$

Logo, a probabilidade de apenas dois pacientes sobreviverem é 38,4%.

83 A probabilidade de nenhum dos dois ser escolhido é dada pelo produto $0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

Logo, a probabilidade P de pelo menos um dos dois ser escolhido é:

$P = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$

Alternativa **d**.

84 Se a probabilidade de o aparelho ser defeituoso (d) é 0,2%, então a probabilidade de o aparelho ser perfeito (p) 100% − 0,2%, ou seja, 99,8%.

Queremos calcular a probabilidade de ocorrer:

ppdd ou pdpd ou pddp ou ddpp ou dpdp ou dppd

Calculando a probabilidade P_1 da sequência ppdd, temos:

$P_1 = 99{,}8\% \cdot 99{,}8\% \cdot 0{,}2\% \cdot 0{,}2\% = (99{,}8\%)^2 \cdot (0{,}2\%)^2$

Multiplicando P_1 por 6, obtemos a probabilidade P pedida:

$P = 6 \cdot P_1 \Rightarrow P = 6 \cdot (99{,}8\%)^2 \cdot (0{,}2\%)^2$

Alternativa **c**.

85 A probabilidade de não faltar energia ao longo de um mês é $1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Assim, no período de janeiro a março, a probabilidade de faltar energia elétrica somente em março é dada por:

$P = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}128 = 12{,}8\%$

86 Sejam A, B, C e D os destinatários cujas cartas adequadas seriam a, b, c, d, respectivamente. Há 6 sequências possíveis com apenas dois destinatários recebendo cartas adequadas, conforme mostra a tabela:

A	B	C	D
a	b	d	c
a	d	c	b
a	c	b	d
d	b	c	a
c	b	a	d
b	a	c	d

Logo, a probabilidade P de exatamente dois destinatários receberem cartas adequadas é dada por:

$P = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$

Alternativa **e**.

87 Os eventos A e B determinados por "tirar nota zero" e "não tirar nota zero", respectivamente, são complementares e, portanto:

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1.023}{1.024}$

Alternativa **e**.

88 a) Pedro vence na primeira jogada em qualquer possibilidade descrita na tabela.

Número de pontos de João	Número de pontos de Pedro
1	3 ou mais
2	4 ou mais
3	5 ou mais
4	6

Logo, a probabilidade P_1 de Pedro vencer na primeira jogada é dada por:

$P_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

b) Raciocinando do mesmo modo que no item **a**, temos que a probabilidade de João vencer na primeira jogada é também $\frac{5}{18}$.

Assim, a probabilidade de haver um vencedor na primeira jogada é $\frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{5}{9}$. Logo, a probabilidade P_2 de não haver vencedor na primeira jogada é dada por:

$P_2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

c) Os eventos V e N determinados por "haver vencedor até a 4ª rodada" e "não haver vencedor até a 4ª rodada", respectivamente, são complementares; logo:

$P(V) = 1 - P(N) = 1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{6.305}{6.561}$

89 Indicando por D e R os eventos determinados por "retirar lâmpada defeituosa" e "retirar lâmpada perfeita", respectivamente, devemos calcular a probabilidade P de ocorrer:

DDR ou DRD ou RDD ou DDD

Temos, então:

$P = 3 \cdot \frac{6}{60} \cdot \frac{5}{59} \cdot \frac{54}{58} + \frac{6}{60} \cdot \frac{5}{59} \cdot \frac{4}{58} = \frac{83}{3.422}$

90 a) Indicando por M, S e G os eventos determinados por: "Márcia ser entrevistada", "um candidato a supervisor ser entrevistado" e "um candidato a gerente, que não seja Márcia, ser entrevistado", temos:

Márcia terminará até as 11 h 30 min se ocorrer uma das possibilidades descritas pelas linhas da tabela:

1ª entrevista	2ª entrevista
M	
S	M

Logo, a probabilidade P_1 de Márcia sair até as 11 h 30 min é dada por:

$$P_1 = \frac{1}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{45}$$

b) Márcia terminará até as 12 h se ocorrer uma das possibilidades descritas pelas linhas da tabela:

1ª entrevista	2ª entrevista	3ª entrevista
M		
S	M	
G	M	
S	S	M

Logo, a probabilidade P_2 pedida é dada por:

$$P_2 = \frac{1}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{43}{180}$$

91 Considerando o intervalo de 60 minutos, sejam A_L e B_L os eventos determinados por "tempo que A permanece ligado" e "tempo que B permanece ligado", respectivamente; temos:

$$P(A_L) = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

$$P(B_L) = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$$

$$P(A_L \cap B_L) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

Assim, temos:

$$P(B_L / A_L) = \frac{P(A_L \cap B_L)}{P(A_L)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{4}{5}$.

92 Indicamos por P e B as cores preta e branca, respectivamente.

a) Devemos calcular a probabilidade P de ocorrer PPB ou PBP ou BPP

$$P = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{15}{56}$$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{15}{56}$.

b) Sejam F, G e H os eventos determinados por:

F: retirar três bolas de cores diferentes
G: retirar três bolas de mesma cor
H: retirar duas bolas pretas e uma branca

Temos:

- $P(G) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{56}$
- $P(F) = 1 - P(G) = 1 - \frac{11}{56} = \frac{45}{56}$
- $F \cap H = H$

Assim:

$$P(H / F) = \frac{P(F \cap H)}{P(F)} = \frac{P(H)}{P(F)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{45}{56}} = \frac{1}{3}$$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{1}{3}$.

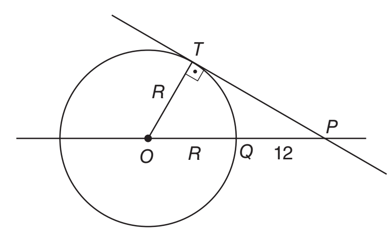
93 Como há 10 algarismos possíveis para formar a senha de 4 algarismos, o número de senhas que podem ser formadas é 10^4, ou seja, 10.000.

A probabilidade P de a pessoa errar a senha nas três primeiras tentativas é dada por:

$$P = \frac{\cancel{9.999}}{10.000} \cdot \frac{\cancel{9.998}}{\cancel{9.999}} \cdot \frac{9.997}{\cancel{9.998}} = \frac{9.997}{10.000}$$

Exercícios de revisão cumulativa

1 Sendo R a medida do raio da circunferência, temos:



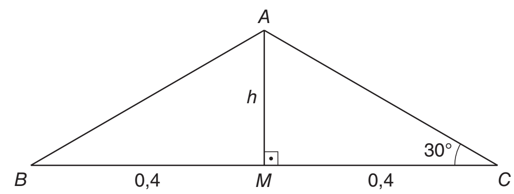
Como o triângulo OPT é retângulo em T, concluímos:

$$\text{sen } 30° = \frac{R}{R + 12} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R}{R + 12}$$

$\therefore R = 12$

Logo, o raio da circunferência mede 12 cm.

2 Sendo M o ponto médio da base $\overline{BC}$ do triângulo isósceles ABC, e h a medida, em decímetro, da altura relativa a essa base, temos:



$$\text{tg } 30° = \frac{h}{0,4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{0,4}$$

$$\therefore h = \frac{0,4\sqrt{3}}{3} \text{ dm} \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Assim, a área S desse triângulo é dada por:

$$S = \frac{8 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} \text{ cm}^2 = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

Alternativa **d**.

3

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p & 2q & 2r \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{-1} + (-2) \cdot 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{0} =$$

$$= -2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \cdot 0 = 12$$

Alternativa **d**.

4 Completando as casas em branco com quaisquer algarismos tais que os números formados em cada linha satisfaçam as condições do enunciado, esses números serão menores que 3.241.

Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
1			
2			
3	1		
3	2	1	

O total de números que podem ser formados na:
- 1ª linha é $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$;
- 2ª linha é $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$;
- 3ª linha é $2 \cdot 1 = 2$;
- 4ª linha é 1.

Assim, colocados em ordem crescente todos os números formados nas condições enunciadas, haverá exatamente $6 + 6 + 2 + 1 = 15$ números menores que 3.241; portanto, 3.241 ocupará a 16ª posição.
Alternativa **c**.

Análise da resolução

Consideremos o espaço amostral E e os eventos G, H e $G \cap H$ descrito a seguir:
$E = \{(x, y) \mid x$ é peça da caixa A e y é peça da caixa B$\}$, $n(E) = 8 \cdot 5 = 40$
$G = \{(m, n) \in E \mid$ uma das peças é perfeita e a outra é defeituosa$\}$, $n(G) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 19$
$H = \{(r, s) \in E \mid s$ é peça perfeita da caixa B$\}$,
$n(H) = 8 \cdot 3 = 24$
$G \cap H = \{(t, u) \mid t$ é peça defeituosa da caixa A e u é peça perfeita da caixa B$\}$, $n(G \cap H) = 3 \cdot 3 = 9$
Concluímos, então:

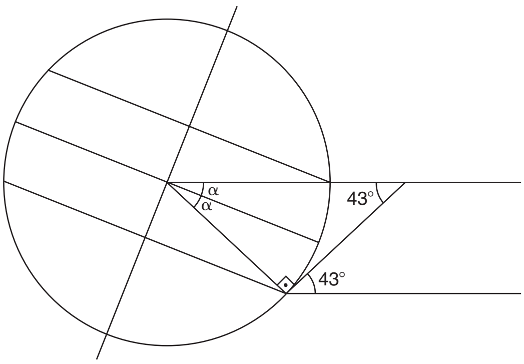
$$P(H / G) = \frac{n(G \cap H)}{n(G)} = \frac{9}{19}$$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 Resposta pessoal.

2 Analisando a incidência dos raios do Sol quando é inverno no hemisfério Sul, obtemos o esquema:



Como a soma das medidas dos ângulos internos de triângulo é 180°, temos:
$2\alpha + 43° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 23,5°$

Exercícios propostos

1 a) V, pois os conceitos de ponto, reta e plano são aceitos sem definição.

b) F, pois a reta não tem origem nem extremidade; ela é ilimitada em seus dois sentidos.

c) F, pois um plano não tem contorno; ele é ilimitado em todas as suas direções.

d) V, pois postulados ou axiomas são as verdades iniciais, aceitas sem demonstração.

e) V, pois é um postulado (P.2).

f) V, pois por dois pontos distintos passa uma única reta (P.4).

g) V, pois, se os pontos são distintos, por eles passa uma única reta (P.4); e, se são coincidentes, passam infinitas retas.

h) F, pois por P.2 existe reta e existem infinitos pontos que não pertencem à reta.

i) V, por P.3.

j) F, pois por P.3 existe ponto que não pertence ao plano; e, por T.2, por esse ponto passam infinitas retas.

k) V, pela mesma justificativa anterior.

l) V, por T.4 e pela mesma justificativa do item **j**.

m) F, pois, se A, B e C pertencem a uma mesma reta, temos, por T.8, que por essa reta passam infinitos planos.

n) V, pois, por P.5, três pontos não colineares determinam um plano.

o) V, pois, se os pontos não são colineares, temos, por P.5, que eles determinam um plano; e se são colineares temos, por T.8, que existem infinitos planos que passam por eles.

p) F, pois três deles podem não ser colineares, determinando um plano α, e o quarto ponto pode não pertencer a α, conforme P.3.

q) V, pois é um postulado (P.7).

r) F, pois, por P.7, se uma reta r e um plano α têm dois pontos distintos em comum, então $r \subset \alpha$.

s) V, pois, por definição, circunferência é o conjunto dos pontos de um plano que distam r ($r > 0$) de um ponto O desse plano.

t) F, pois não existe plano ao qual pertençam todos os pontos de um cubo.

2 a) V, pois $P \in (\overline{AC} \cup \overline{CD}) \Leftrightarrow P \in \overline{AD}$

b) F, pois $P \in (\overline{AC} \cap \overline{BD}) \Leftrightarrow P \in \overline{BC}$

c) V, pois $\overline{AB}$ é definido como a união do conjunto $\{A, B\}$ com o conjunto dos pontos entre A e B.

d) F, pela mesma justificativa do item **c**.

e) V, pois $C \in \overline{AB}$, com $C \neq A$ e $C \neq B$.

f) F, pois B é um extremo do segmento $\overline{BD}$.

g) V, pois dois segmentos são consecutivos quando têm apenas um extremo em comum.

h) F, pois esses segmentos não têm apenas um extremo em comum (eles têm infinitos pontos comuns).

i) V, pois os segmentos estão contidos em uma mesma reta.

j) F, pois $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares e, portanto, têm a mesma reta suporte.

3 a) Convexa, pois quaisquer dois pontos da reta r são extremos de um segmento de reta contido em r.

b) Convexa, pois quaisquer dois pontos do plano α são extremos de um segmento de reta contido em α.

c) Não convexa, pois quaisquer dois pontos do círculo são extremos de um segmento de reta contido no círculo.

d) Convexa, pois, por exemplo, um diâmetro da circunferência é um segmento de reta que tem extremos na circunferência mas não pertence a ela.

e) Convexa, pois quaisquer dois pontos do polígono são extremos de um segmento de reta contido no polígono.

f) Não convexa, pois existem pelo menos dois pontos do polígono que são extremos de um segmento de reta não contido no polígono.

4 a) V, pois $P \in (\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BD}) \Leftrightarrow P \in r$.

b) F, pois $P \in (\overline{BA} \cup \overrightarrow{BD}) \Leftrightarrow P \in \overrightarrow{AD}$.

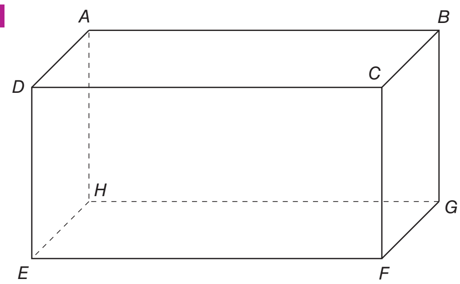
c) V, pois $P \in (\overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{CA}) \Leftrightarrow P \in \overrightarrow{BC}$.

d) V, pois C não está entre A e B e é distinto de A e de B.

e) V, pois três pontos distintos X, Y e Z pertencem à semirreta $\overrightarrow{XY}$ se, e somente se, Z está entre X e Y, ou Y está entre X e Z.

f) V, pois $P \in (\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD}) \Leftrightarrow P \in \overrightarrow{BA}$ e $P \in \overrightarrow{CD}$, e isso equivale a dizer que não existe P.

5



a) V, pois cada face desse paralelepípedo é um retângulo e, portanto, ele é um paralelogramo.
b) V, pois *DCGH* é um retângulo e, portanto, é um paralelogramo.
c) F, pois $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são retas distintas que têm em comum um ponto (ponto *F*).
d) V, pela mesma justificativa do item **c**.
e) F, pois $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{HE}$.
f) V, pois, por T.7, duas retas paralelas distintas determinam um plano.
g) V, pois não existe um plano que contenha as duas simultaneamente.
h) V, pois são retas distintas e não paralelas do plano pl(*ABC*).
i) F, pois $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{HF}$ são reversas.
j) V, pois cada face do paralelepípedo é um retângulo, que é uma figura plana.
k) F, pela mesma justificativa do item **i**.
l) V, pois não existe um plano que contenha duas simultaneamente.

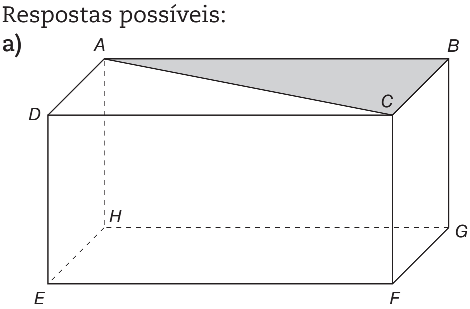
6 a) F, pois as retas podem ser paralelas coincidentes.
b) V, por definição de retas paralelas.
c) V, por definição de retas concorrentes.
d) F, pois as retas podem ser coincidentes.
e) V, pois, por P.4, *r* e *s* são coincidentes e, portanto, são paralelas coincidentes.
f) F, pois retas coincidentes têm todos os seus infinitos pontos em comum.
g) V, pois elas têm infinitos pontos em comum e, portanto, têm um ponto comum.
h) V, por P.6.
i) F, pois se as retas são reversas, não existe plano que as contém.
j) V, por definição de retas reversas.
k) F, pois as retas podem ser concorrentes.
l) V, pois *r* e *s* são paralelas distintas ou reversas.
m) V, pelo teorema T.23.

7 a) F, pois, por T.23, $r \parallel t$ e $s \parallel t \Rightarrow r \parallel s$, o que contraria a hipótese *r* e *s* serem reversas.
b) F, pois *r* e *t* podem ser paralelas.
c) V, pois, supondo que *b* não concorra com *c*, teríamos duas retas concorrentes *a* e *b*, paralelas à reta *c*, o que contraria o postulado P.6.
d) V, pois supondo que *r* não concorra com *s*, teríamos $r \parallel s$ e, consequentemente, as retas concorrentes *a* e *b* seriam paralelas a *r*, o que contraria o postulado P.6.
e) V, por P.6.
f) V, pois para qualquer ponto Q da reta *s* temos que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ concorre com *s*.
g) F, pois qualquer reta que passa por *P* e não é paralela nem concorrente com *r* é reversa a *r*.
h) F, pois *s* e *t* podem ser concorrentes.

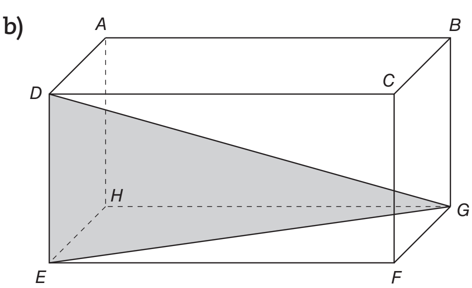
8 a) F, pois se os três pontos pertencem a uma reta *r* temos, por T.8, que existem infinitos planos que passam por *r*.
b) V, por P.5.
c) F, pois se *P* pertence a *r* temos, por T.8, que existem infinitos planos que passam por *r*.
d) V, por T.5.
e) F, pois se as retas são coincidentes temos, por T.8, que existem infinitos planos que as contêm. E se as retas são reversas não existe um plano que as contenha.
f) V, por T.6.
g) F, pois se as retas são paralelas coincidentes temos, por T.8, que existem infinitos planos que as contêm.
h) V, por T.7.
i) V, pois não há outra possibilidade para duas retas coplanares.
j) V, pois, por T.6 e T.7, quaisquer duas retas concorrentes ou paralelas distintas determinam um plano; e, por T.8, por duas retas coincidentes passam infinitos planos.
k) F, pois, por exemplo, as retas que contêm três arestas paralelas distintas de um cubo não são coplanares.
l) V, pois, por exemplo, em um trapézio, as três retas que contêm as bases e a base média são paralelas coplanares.
m) F, pois, por exemplo, em um cubo, as três retas que contêm as arestas que passam por um mesmo vértice não são coplanares.
n) F, pois, por exemplo, em um cubo, as retas que contêm duas arestas concorrentes de uma face e um vértice do cubo, que não pertença a essa face, não são coplanares.

9 Respostas possíveis:

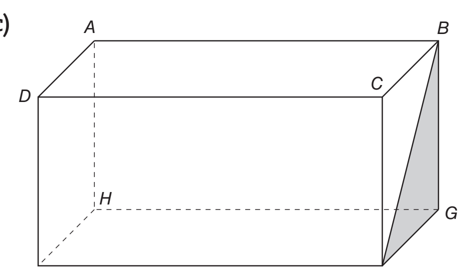
a)



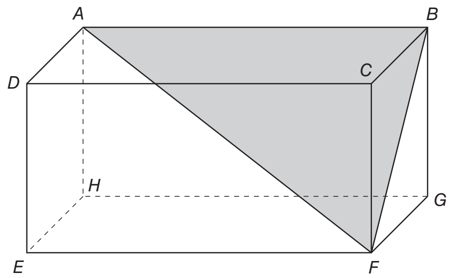
b)



c)



d)

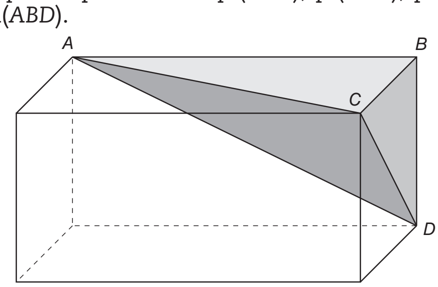


10 Se quatro pontos não são coplanares, então três quaisquer deles não são colineares. Logo, o número de planos determinados por esses pontos é dado por:

$$C_{4,\,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1} = 4$$

Uma figura possível, que represente os quatro planos determinados por quatro pontos não coplanares, pode ser obtida a partir dos vértices A, B, C e D do paralelepípedo abaixo.

Os quatro planos são: pl(ABC), pl(ACD), pl(BCD) e pl(ABD).



11 Três pontos não colineares determinam um plano. Assim, os pontos de apoio do tripé no solo estão em um mesmo plano e, por isso, dão estabilidade ao tripé.

12 a) V, pois $\overleftrightarrow{AB}$ não está contida no plano pl(FGH) e é paralela à reta $\overleftrightarrow{HG}$ contida nesse plano (T.12).
b) V, pois $\overleftrightarrow{AC}$ não está contida no plano pl(FGH) e é paralela à reta $\overleftrightarrow{HF}$ contida nesse plano (T.12).
c) F, pois $\overleftrightarrow{AC}$ tem um ponto (ponto C) em comum com o plano pl(BCG).
d) V, pois $\overleftrightarrow{AB}$ não está contida no plano pl(DCF) e é paralela à reta $\overleftrightarrow{DC}$ contida nesse plano (T.12).
e) V, pois A e B pertencem ao plano pl(HGB)(p.q).
f) F, pois há pontos da reta $\overleftrightarrow{EF}$, por exemplo, o ponto E, que não pertencem ao plano pl(FGB).
g) V, pois $\overleftrightarrow{DC}$ tem um único ponto (ponto C) em comum com o plano pl(BGF).
h) F, pois $\overleftrightarrow{AD}$ é paralela ao plano pl(HGF).
i) V, pois $\overleftrightarrow{EB}$ tem um único ponto (ponto B) em comum com o plano pl(BGF).
j) V, pois F é o único ponto comum à reta $\overleftrightarrow{CF}$ e ao plano pl(HGF).
k) F, pois D não pertence ao plano pl(AHC).
l) V, pois a reta $\overleftrightarrow{DE}$ não está contida no plano pl(AHC) e é paralela à reta $\overleftrightarrow{AH}$ contida nesse plano (T.12).

13 a) V, pois é a definição de reta secante a plano.
b) V, pelo postulado P.8.
c) F, pois r pode estar contida em α.
d) V, pelo teorema T.12.
e) F, pois ela é paralela a infinitas retas do plano α.
f) V, pois qualquer reta de α, não paralela a r, é reversa com r.
g) V, pelo postulado P.9.
h) V, por P.10 e por T.7.
i) F, pois, se $P \in \alpha$, nenhuma reta que passe por P é paralela a α.
j) V, pois qualquer reta que passe por P e esteja contida no plano paralelo a α é paralela a α.
k) F, pois t pode ser concorrente com s.
l) F, pois t pode estar contida no plano pl(r, s).

14 Faremos a demonstração por absurdo. Para isso, anexamos à hipótese a negação da tese, isto é, admitimos que A, B e C são pontos não colineares que pertencem a dois planos distintos α e β.
Como A, B e C são pontos não colineares, temos, pelo postulado P.5, que existe um único plano que passa por esses três pontos e, portanto, $\alpha \equiv \beta$. Mas isso é absurdo, pois, por hipótese, $\alpha \not\equiv \beta$.
Como a suposição de que A, B e C não são colineares nos conduziu a um absurdo, concluímos que A, B e C são colineares.
Outro modo:
Como os planos distintos α e β têm o ponto A em comum, temos pelo teorema T.10 que a intersecção de α e β é uma reta.
Logo, A, B e C pertencem a essa reta, ou seja, A, B e C são pontos colineares.

15 Por absurdo, vamos anexar à hipótese a negação da tese, isto é, vamos supor que:

$$\underbrace{r \text{ e } \alpha \text{ não têm ponto comum}}_{\text{I}} \text{ ou}$$

$$\underbrace{r \text{ e } \alpha \text{ têm mais de um ponto comum}}_{\text{II}}.$$

- I é absurdo, pois, por hipótese, $r \cap \alpha \neq \varnothing$.
- II é absurdo, pois, pelo postulado P.10, se r e α tiverem dois pontos comuns, então $r \subset \alpha$, o que contraria a hipótese de que $r \not\subset \alpha$.

Como qualquer uma das suposições, I ou II, nos conduz a um absurdo, concluímos que r e α têm um único ponto comum.

16 a) V, pois é a definição de planos secantes.
b) F, pois dois planos coincidentes possuem uma reta comum.
c) V, pois dois planos distintos que possuem uma reta comum possuem um ponto comum e, portanto, por T.10, possuem uma única reta comum.
d) V, por T.10.
e) V, pois, se r fosse reversa ou concorrente à reta comum, r seria secante a um desses planos.
f) F, pois r pode estar contida em um desses planos.
g) F, pois α e β podem ser secantes e $A \in \alpha \cap \beta$.
h) V, pois, com $B \in \alpha$ e $B \notin \beta$, temos que α e β são planos distintos que têm o ponto A em comum; logo, por T.10, esses planos são secantes.
i) F, pois a intersecção de dois planos ou é vazia ou é uma reta ou é um plano.
j) V, pois, por exemplo, cada vértice de um cubo é a intersecção de três planos das faces.
k) V, por T.8.
l) F, pois α pode ser o plano determinado por r e s.
m) V, pois, considerando uma reta que passa por esse ponto, temos, por T.8, que existem infinitos planos que contêm essa reta.
n) F, pois qualquer reta de α é paralela a β.
o) V, pois qualquer reta de α é paralela a β.

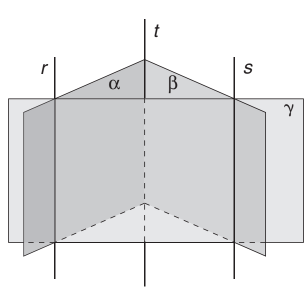
p) F, pois se α é secante a β, em r, existe reta s em α paralela à reta r e, portanto, $s \mathbin{/\!/} \beta$.
q) V, pois r e s não têm ponto comum e, portanto, são paralelas distintas ou são reversas.
r) F, pois r e s podem estar em semiespaços opostos em relação a β.
s) V, por T.20.
t) V, pois, se α fosse secante a γ, concluiríamos, por T.16, que a reta comum a α e γ seria secante a β e, portanto, α e γ seriam secantes a β, o que contraria a hipótese de que $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$ e $\beta \mathbin{/\!/} \gamma$.
u) V, pois sendo s uma reta contida em γ e secante a α, temos pelo teorema T.16 que s é secante a β. Assim, os planos γ e β são distintos e têm um ponto comum; logo, pelo teorema T.10, γ é secante a β.
v) V, pois:
- s não tem ponto em comum com r, pois, se tivesse, s coincidiria com r ou α coincidiria com β, e os dois casos contrariam a hipótese.
- s não é paralela a r, pois, se fosse, s estaria contida em um dos planos α ou β, ou seria paralela a ambas, e os dois casos contrariam a hipótese.
  Resta, portanto, apenas uma possibilidade: s é reversa a r.

17 Falsa, pois os planos podem ser paralelos coincidentes.

18 É a reta $\overleftrightarrow{AB}$.
Justificativa:
- $A \neq B$, pois A e B pertencem a retas paralelas distintas.
- Pelo postulado P.9, temos que $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$ e $\overleftrightarrow{AB} \subset \text{pl}(r, s)$.
- $\text{pl}/(r, s) \neq \alpha$

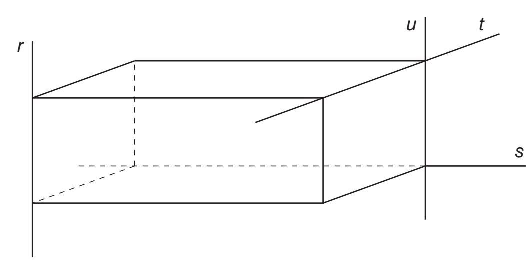
Logo, $\text{pl}(r, s) \cap \alpha = \overleftrightarrow{AB}$.

19 Não, pois α e β podem ser secantes na reta t, com $t \mathbin{/\!/} \gamma$.



20 a) F, pois a reta pode estar contida no outro plano ou ser paralela a ele.
b) V, pois, considerando um plano γ paralelo à reta comum a α e β, temos que as retas determinadas pelas intersecções $\gamma \cap \alpha$ e $\gamma \cap \beta$ são paralelas.
c) V, pois basta considerar as retas r e s concorrendo em pontos distintos com a reta comum a α e β.
d) V, pois os planos podem ser secantes ou coincidentes.
e) F, pois a intersecção de dois planos distintos é vazia ou uma reta.
f) F, pois a reta r pode ser paralela à reta comum de planos secantes α e β.
g) F, pois α e β podem ser secantes em t com r e s contidas em α e paralelas a t.
h) F, pois t e u podem ser reversas.
i) F, pois esses planos podem ter uma única reta s em comum, com $t \mathbin{/\!/} s$ e $t \neq s$. Portanto, para qualquer reta r, haverá um desses planos paralelo a r ou contendo r.
j) F, pela mesma justificativa do item **i**.
k) F, pois:
- se $r \mathbin{/\!/} t$ e $r \neq t$, essas retas determinam o plano $\text{pl}(r, t)$. Esse plano é um dos mencionados e contém t; logo, r não é paralela a $\text{pl}(r, t)$;
- se r e t são reversas, r é secante a infinitos desses planos.

21 Verdadeira.
Temos que qualquer plano paralelo a duas delas é secante à terceira. Uma figura que mostra a existência da reta u é o paralelepípedo representado abaixo:



22 Temos:
- $t \subset \text{pl}(r, t)$, $t \subset \text{pl}(s, t)$, e r e s não são coplanares; logo, $\text{pl}(r, t) \neq \text{pl}(s, t)$.
- Sendo $A \in t$, temos que o ponto A pertence aos planos distintos $\text{pl}(r, t)$ e $\text{pl}(s, t)$.

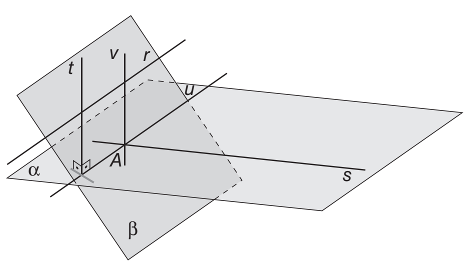
Concluímos, pelo teorema T.10, que esses planos são secantes.

23 Duas retas concorrentes determinam um plano.

24 a) V, pois a face $BCFG$ é um retângulo.
b) F, pois $\overleftrightarrow{BC}$ não concorre com $\overleftrightarrow{AH}$.
c) V, pois $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AH} = \varnothing$, $\overleftrightarrow{BC} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AH}$.
d) V, pois $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BG}$.
e) V, pois $\overleftrightarrow{BC}$ é ortogonal a $\overleftrightarrow{AH}$.
f) F, pois $\overleftrightarrow{DC} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{HG}$.
g) F, pois o ângulo $E\hat{C}F$ é agudo.
h) V, pois o ângulo $E\hat{B}G$ é agudo.
i) V, pois $\overleftrightarrow{HF} \cap \overleftrightarrow{BG} = \varnothing$, $\overleftrightarrow{HF} \subset \text{pl}(HFG)$ e $\overleftrightarrow{BG} \perp \text{pl}(HFG)$.
j) V, pois $\overleftrightarrow{DC}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ do plano $\text{pl}(BGF)$.
k) F, pois $\overleftrightarrow{AD} \perp \text{pl}(EFC)$ e $\overleftrightarrow{DG}$ concorre com $\overleftrightarrow{AD}$.
l) V, pois $\overleftrightarrow{DE}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{DA}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ do plano $\text{pl}(ABC)$, e $\overleftrightarrow{DE}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ do plano $\text{pl}(HGF)$.
m) V, pois cada uma dessas retas é perpendicular a duas retas concorrentes do plano $\text{pl}(ABC)$.

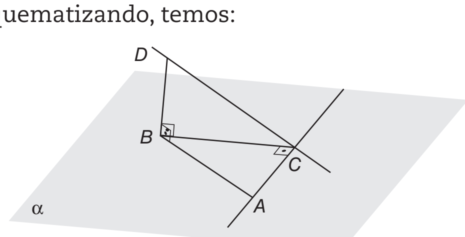
25 a) V, por definição de retas perpendiculares.
b) F, pois duas retas concorrentes são perpendiculares quando formam ângulos retos entre si.
c) V, por definição de retas ortogonais.
d) F, pois duas retas reversas são ortogonais quando formam ângulos retos entre si.
e) F, pois, por exemplo, considerando as retas r, s e t que contêm três arestas concorrentes de um cubo, elas são tais que $r \perp s$, $t \perp r$ e t não é paralela a s.
f) F, pois a reta perpendicular a uma delas pode ser reversa ou concorrente à outra.
g) V, pois, sendo as retas ortogonais r e s, consideremos:
- o plano α que contém s e é paralelo a r;
- uma reta t que passa por um ponto de r e é perpendicular a α;
- o plano $\beta = pl(r, t)$;
- a reta $u = \alpha \cap \beta$;
- o ponto A tal que $\{A\} = u \cap s$;
- a reta v que passa por A e é paralela a t.

Concluímos que v é a perpendicular comum às retas ortogonais r e s.



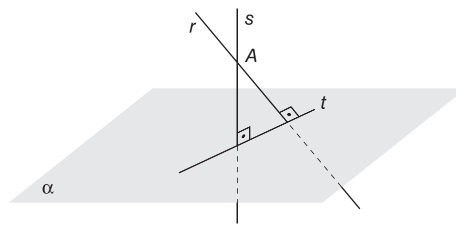
h) V, pelo teorema T.29.
i) F, pois, se essas duas retas distintas contidas em α forem paralelas, então r estará contida em α.
j) V, pelo T.30.
k) F, pois, se essas duas retas distintas contidas em α forem paralelas, então r será paralela a α.
l) F, pois r é perpendicular a infinitas retas contidas em α.
m) V, pela mesma justificativa do item l.
n) V, por definição de reta perpendicular a plano.
o) F, pois r é reversa a infinitas retas do plano α.
p) V, pois, r sendo perpendicular a α em um ponto A, ela será perpendicular a todas as retas de α que passam por A e será ortogonal a todas as retas de α que não passam por A.

26 Esquematizando, temos:



Pelo teorema das três perpendiculares (T.33), concluímos que $\overleftrightarrow{DC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$.
Alternativa **a**.

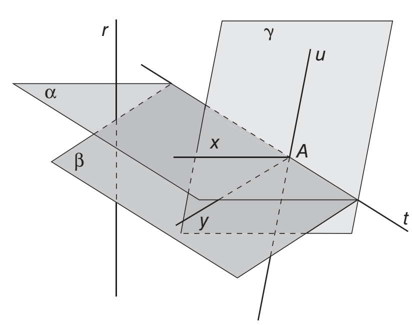
27 a) V, por T.31.
b) V, pois, admitindo, por absurdo, que r não é paralela a s, temos que ou r concorre com s ou r é ortogonal a s.
- Se r concorre com s, consideremos o plano $pl(r, s)$; a reta t comum a $pl(r, s)$ e α; e o ponto A, comum às retas r e s.



Como r e s são perpendiculares a α, teríamos r e s perpendiculares a t, ou seja, há duas retas distintas que passam por A e são perpendiculares a r, o que é um absurdo, por T.24.
- Se r e s são ortogonais e B é um ponto de r, então a reta u que passa por B e é paralela a s é perpendicular a α, por T.31.

Assim, sendo v a reta comum a $pl(u, r)$ e α, teríamos duas retas distintas passando por B e perpendiculares a v, o que é absurdo, por T.24.
Concluímos, então, que r não é concorrente com s nem ortogonal a s; logo, $r \mathbin{/\!/} s$.

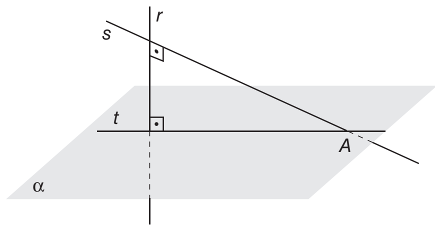
c) V, pois supondo que α seja secante a β, com $\alpha \cap \beta = t$, consideremos que passe por um ponto A de t a reta u paralela a r. Assim, u é perpendicular a α, pelo teorema T.31. Seja γ um plano que contém u, com $\gamma \cap \alpha = x$ e $\gamma \cap \beta = y$.

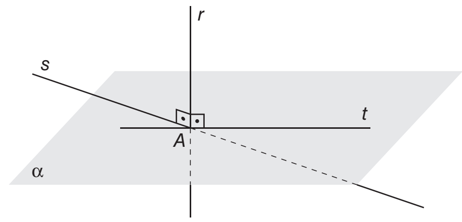


Assim, teríamos no plano γ duas retas distintas, x e y, passando pelo ponto A e perpendiculares a u, o que é absurdo.
Logo, α não pode ser secante a β e, portanto, $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$.

d) F, pois basta considerar uma reta s perpendicular a r por um ponto A que não pertence a α.
A reta s será paralela a α.
e) F, pois a reta perpendicular a r pode estar contida em α.
f) V, pois, se admitirmos, por absurdo, que s não está contida em α nem é paralela a α, temos que s é secante a α em um ponto A.

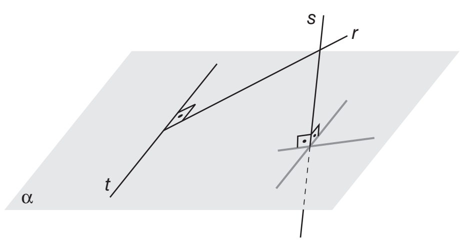
Sendo t a reta contida em α e concorrente com r, temos no plano pl(r, s) duas retas distintas, t e s, que passam por A e são perpendiculares a r, o que é absurdo.





Concluímos, então, que s não pode ser secante a α e, portanto, $s \subset \alpha$ ou $s \mathbin{/\!/} \alpha$.

28

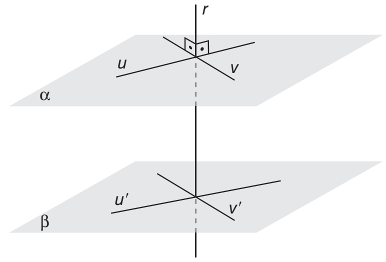


I. Como a reta s é perpendicular ao plano, ela forma ângulo reto com a reta t.

II. A reta t não pode ser concorrente com s, pois teríamos no plano pl(r, s) duas retas concorrentes, r e s, perpendiculares a t, o que é absurdo.

Por I e II, temos que t é ortogonal a s. Como t forma ângulo reto com as retas concorrentes r e s, concluímos, por T.30, que t é perpendicular ao plano pl(s, r).
Alternativa **d**.

29 Sejam u e v duas retas distintas do plano α concorrentes com r, e sejam u' e v' duas retas contidas em β, com $u \mathbin{/\!/} u'$ e $v \mathbin{/\!/} v'$.



As retas paralelas u e u' e a transversal r determinam ângulos correspondentes congruentes; logo, r é perpendicular a u'.
As retas paralelas v e v' e a transversal r determinam ângulos correspondentes congruentes; logo, r é perpendicular a v'.
Como r é perpendicular às duas retas concorrentes u' e v' do plano β, concluímos que r é perpendicular a β.

30 Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano α, então r é perpendicular a α (T.29).

31 a) V, pois o plano pl(CBG) contém a reta $\overleftrightarrow{BG}$ perpendicular ao plano pl(ABC).

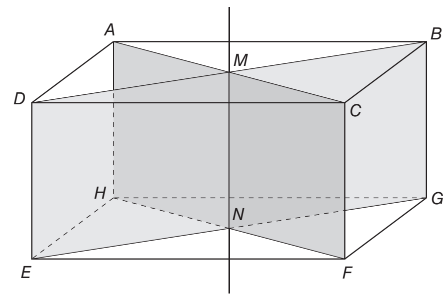
b) V, pois o plano pl(ABC) contém a reta $\overleftrightarrow{CB}$ perpendicular ao plano pl(ABG).

c) F, pois faces opostas do paralelepípedo estão contidas em planos paralelos.

d) V, pois o plano pl(ACF) contém a reta $\overleftrightarrow{CF}$ perpendicular ao plano pl(EHF).

e) F, pois não existe reta contida no plano pl(DBG) e perpendicular ao plano pl(ABG).

f) V, sendo M e N os centros das faces $ABCD$ e $EFGH$, respectivamente, temos
pl(ACF) $\cap$ pl(DBG) $= \overleftrightarrow{MN}$.



Os triângulos $\triangle ENM$, $\triangle GNM$ e $\triangle FNM$ são congruentes e, portanto, os ângulos $E\hat{N}M$, $G\hat{N}M$ e $F\hat{N}M$ são congruentes. Como $E\hat{N}M$ e $G\hat{N}M$ são, também, suplementares, temos que cada um deles é reto. Assim, concluímos que $\overleftrightarrow{MN}$ é perpendicular ao plano pl(HGF).

g) V, pelo teorema T.36.

h) F, pois como $\overleftrightarrow{BG}$ é perpendicular ao plano pl(HGF), temos que qualquer plano que contém $\overleftrightarrow{BG}$ é perpendicular ao plano pl(HGF).

32 a) F, pois α é perpendicular a β se existe uma reta r contida em α e perpendicular a β; portanto, qualquer reta do plano α, paralela a r, será perpendicular a β.

b) V, pela mesma justificativa do item **a**.

c) V, pois, sendo t a reta comum a α e β, consideremos as retas distintas de t, r e s, contidas em α e β, respectivamente, com $r \perp \gamma$ e $s \perp \gamma$, e, portanto, $r \mathbin{/\!/} \beta$ e $s \mathbin{/\!/} \alpha$.
Supondo que haja um ponto comum a t e r, temos um absurdo, pois $r \mathbin{/\!/} \beta$ e $t \subset \beta$. Como t e r são coplanares e não têm ponto comum, temos que t e r são paralelas distintas. Além disso, $r \perp \gamma$ e, portanto, $t \perp \gamma$.

d) F, pois, por exemplo, os planos que contêm duas faces adjacentes, F_1 e F_2, de um cubo são perpendiculares aos planos das faces secantes a F_1 e F_2.

e) V, pois cada um dos planos α e β contém a reta t, que é perpendicular a γ.

f) V, pois qualquer plano que contém r é perpendicular a α.

g) V, pelo teorema de T.36.

h) F, pois se $r \perp \alpha$ existem infinitos planos que contêm r e são perpendiculares a α.

33 Sendo A o ponto comum a r e t, existe uma única reta contida em β e perpendicular a r; é a reta que passa por A e é perpendicular a t.
Alternativa **b**.

34 A reta s, comum a α e β, deve ser perpendicular a γ. Para que isso ocorra, a reta r deve formar ângulo reto com s.

35 Se α é perpendicular a β e r é perpendicular a β, então ou $r \subset \alpha$ ou $r \,/\!/\, \alpha$. Como, por hipótese, r tem um ponto em comum com α, concluímos que $r \subset \alpha$.
Alternativa **a**.

36 Se $\gamma \perp \alpha$, então existe uma reta r contida em γ e perpendicular a α.
Como demonstramos no exercício 29, se α e β são planos paralelos e $r \perp \alpha$, então $r \perp \beta$. Logo, o plano γ contém a reta r perpendicular a β e, portanto, γ é perpendicular a β.

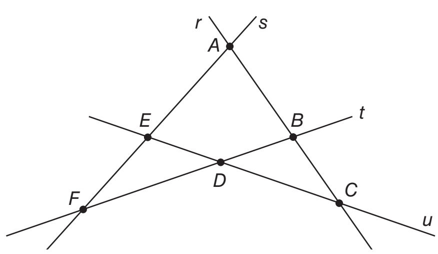
37 A projeção ortogonal de um ponto P sobre o plano α é o ponto P', com $P' \in \alpha$ e $\overleftrightarrow{PP'} \perp \alpha$.
A projeção ortogonal de uma figura qualquer sobre o plano α é o conjunto formado pelas projeções ortogonais de todos os pontos da figura sobre o plano α.
Assim, temos:
a) $\overleftrightarrow{HG}$;
b) $\overleftrightarrow{EG}$;
c) E;
d) E;
e) $\overleftrightarrow{FG}$;
f) $\overleftrightarrow{EF}$;
g) retângulo $EFGH$;
h) $\overleftrightarrow{FG}$;
i) $\overleftrightarrow{EG}$;
j) G;
k) retângulo $EFGH$.

38 a) A projeção ortogonal é o ponto de intersecção de r e α.
b) A projeção ortogonal é a reta que passa pelo ponto de intersecção de r e α e pela projeção ortogonal de outro ponto da reta sobre α.
c) A projeção ortogonal é a reta determinada pelas projeções ortogonais de dois pontos distintos de r sobre α.
d) A projeção ortogonal é a própria reta r.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 Quatro retas distintas entre si podem concorrer, duas a duas, em seis pontos distintos entre si. Um desenho que justifica essa afirmação é:



2 Pelo postulado P.2: existe reta, uma reta é um conjunto de infinitos pontos, e há infinitos pontos que não pertencem à reta. Logo, podemos considerar dois pontos distintos A e B de uma reta r e um ponto C que não pertence a r. Assim, A, B e C não são colineares.

3 Pelo postulado P.3: existe plano, um plano é um conjunto de infinitos pontos, e há infinitos pontos que não pertencem ao plano.
Pelo postulado P.5: três pontos não colineares determinam um plano.
Assim, podemos considerar três pontos não colineares A, B e C que determinam um plano α, e um ponto D que não pertence a α. Logo, A, B, C e D não são coplanares.

4 $C_{6,\,2} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$
Logo, ficam determinadas 15 retas.

5 a) F, pois os pontos do plano α localizados entre t e u não pertencem à união de spl(t, A) com spl(u, B).
b) V, pois $P \in \alpha \iff (P \in \text{spl}(t, A)$ ou $P \in \text{spl}(t, B))$.
c) F, pois $P \in \alpha \iff (P \in \text{spl}(t, B)$ ou $P \in \text{spl}(u, A))$.
d) V, pois os únicos pontos comuns a spl(t, A) e spl(t, B) são os pontos da reta t.
e) F, pois, por exemplo, os pontos da reta t pertencem a $(\text{spl}(u, A) \cap \text{spl}(t, B))$.
f) V, os pontos dessa intersecção são os pontos da reta t, da reta u e os pontos entre t e u.
g) V, pois A e B pertencem a semiplanos opostos em relação a t.
h) V, por definição de semiplano.

6 As retas r e s podem ser paralelas, reversas ou perpendiculares. Por exemplo, no retângulo da figura 1, abaixo, as retas r e s são paralelas; no paralelepípedo da figura 2, as retas r e s são reversas; e no paralelepípedo da figura 3 as retas r e s são perpendiculares.

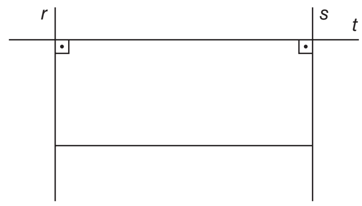


figura 1

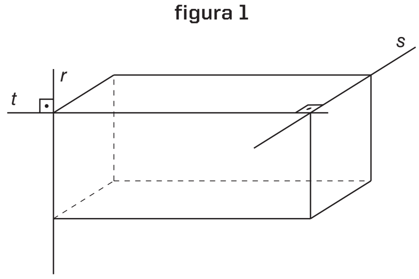


figura 2

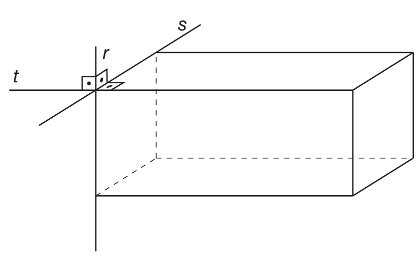


figura 3

Por essas figuras, constatamos, também, que r, s e t podem ser coplanares ou não.
Alternativa **e**.

7 Considere cinco pontos entre os quais não existam quatro coplanares. Temos que o número n de planos determinados por esses pontos é dado por:

$n = C_{5,\,3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 10$

Logo, a última afirmação é falsa.
Alternativa **e**.

8 Duas figuras F e G são coincidentes se, e somente se, todo ponto de F pertence a G e todo ponto de G pertence a F. Logo, é impossível uma reta coincidir com um plano, pois é impossível que todos os pontos de um plano pertençam a uma reta.

9 $C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

Logo, ficam determinados 20 planos.

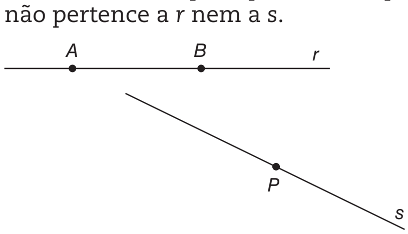
10 Seja s uma reta qualquer que passa por P e concorre com r em A, e seja Q um ponto qualquer da semirreta oposta $\overrightarrow{AP}$. Pelo postulado P.7, os pontos P e Q do plano pl(r, P) estão em semiplanos opostos em relação a r.

11 Os pontos A, B e C são distintos entre si, pois se dois deles coincidissem os três pontos seriam colineares. Pelo postulado P.4, os pontos B e C determinam a reta $\overleftrightarrow{BC}$.
Seja s uma reta qualquer que passa por A e concorre com $\overleftrightarrow{BC}$ em P, e seja D um ponto qualquer da semirreta oposta a $\overrightarrow{PA}$. Pelo postulado P.7, os pontos A e B do plano pl(ABC) estão em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{BC}$.

12 Seja t uma reta que concorre com r e s nos pontos A e B, respectivamente. As retas r e s são paralelas distintas e, portanto, pelo teorema T.7, elas determinam um plano, indicado por pl(r, s). Como A e B são pontos distintos pertencentes ao plano pl(r, s), temos pelo postulado P.9 que $t \subset$ pl(r, s). Assim, sendo um ponto P da reta t, distinto de A e B, concluímos que P pertence ao plano pl(r, s) e não pertence a r nem a s.

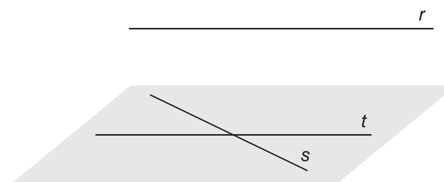
13 Seja t uma reta que concorre com r e s nos pontos distintos A e B, respectivamente. As retas r e s são concorrentes e, portanto, pelo teorema T.6, elas determinam um plano, indicado por pl(r, s). Como A e B são pontos distintos pertencentes ao plano pl(r, s), temos pelo postulado P.9 que $t \subset$ pl(r, s). Assim, sendo um ponto P da reta t, distinto de A e B, concluímos que P pertence ao plano pl(r, s) e não pertence a r nem a s.

14



Os pontos A, B e P não são colineares, pois se fossem teríamos $r \equiv s$, o que contraria a hipótese de que r e s são reversas.
Assim, o postulado P.5 garante que A, B e P determinam um plano.

15 Seja t uma reta qualquer paralela a r e concorrente com s. As retas concorrentes t e s determinam o plano pl(t, s) paralelo à reta r, de acordo com o teorema T.12.



16 Sendo $\{A\} = r \cap s$, temos que $A \in \alpha$ e $A \in \beta$.
Assim, α e β são planos distintos que têm o ponto A em comum; logo, pelo teorema T.10, concluímos que esses planos são secantes.

17
I. F, pois essa reta pode ser paralela à reta comum a dois planos secantes.
II. F, pois as retas podem ser reversas.
III. V, conforme já vimos no item **g** do exercício proposto 25.

Alternativa **c**.

18 Uma reta r é paralela a um plano α se, e somente se, $r \cap \alpha = \varnothing$.
- Qualquer plano que contém r e é secante a α determina em α uma reta s paralela a r.
- Qualquer plano secante a r e secante a α determina em α uma reta t reversa a r.

Concluímos, então, que existem em α retas paralelas a r e também existem em α retas reversas a r.
Alternativa **c**.

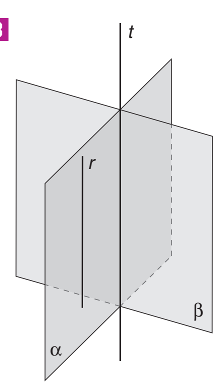
19 Consideramos o plano β que passa por P e é paralelo a α. Qualquer reta que esteja contida em β e passe por P é paralela a α. Logo, existem infinitas retas que passam por P e são paralelas a α.
Alternativa **d**.

20 Temos que $r \cap \alpha = r \Leftrightarrow r \subset \alpha$
Logo, existe reta em α que é concorrente com r.
Alternativa **b**.

21 Pelo teorema T.19, temos que, se dois planos distintos são paralelos, então toda reta contida em um deles é paralela ao outro plano. Como α e γ são planos paralelos distintos e $t \subset \alpha$, concluímos que $t \mathbin{/\mkern-5mu/} \gamma$.
Alternativa **b**.

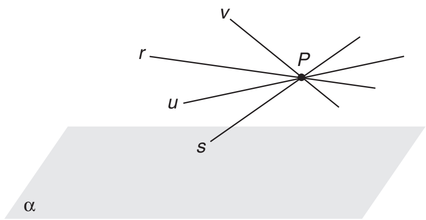
22 Se α fosse paralelo a β, teríamos pelo teorema T.16 que r seria secante a β, o que contraria a hipótese de r ser paralela a β. Logo, α e β não são paralelos, portanto são secantes.
Alternativa **c**.

23



Como $r \mathbin{/\!/} \beta$, temos que $r \cap \beta = \varnothing$ e, portanto, $r \cap t = \varnothing$, pois $t \subset \beta$.
Como r e t são coplanares e não têm ponto em comum, concluímos que r e t são retas paralelas distintas.

24



Pelo teorema T.20, os planos pl(r, s) e pl(u, v) são paralelos a α.
Como pl(r, s) e pl(u, v) têm o ponto P em comum, há apenas duas possibilidades: ou esses planos são secantes ou são coincidentes.
Supondo que pl(r, s) e pl(u, v) sejam secantes, temos que há reta t do plano pl(r, s) tal que t é secante ao plano pl(u, v). Assim, pelo teorema T.16 teríamos que a reta t também é secante a α, o que é absurdo, pois pl(r, s) $\mathbin{/\!/} \alpha$.
Logo, os planos pl(r, s) e pl(u, v) não podem ser secantes, restando apenas a possibilidade:
pl(r, s) $\equiv$ pl(u, v)

25 Como $r \mathbin{/\!/} \alpha$ e $s \mathbin{/\!/} r$, temos que ocorre apenas uma das duas possibilidades: $s \mathbin{/\!/} \alpha$ ou $s \subset \alpha$. Para cada uma dessas possibilidades, consideremos um ponto P qualquer pertencente a α. Assim, pelo teorema T.13, concluímos que a reta t que passa por P e é paralela a s está contida em α.
Alternativa **c**.

26 Seja r' uma reta concorrente com s e paralela a r, e seja s' uma reta concorrente com r e paralela a s. Pelo teorema T.6, temos que as retas r e s' determinam um plano α, e as retas s e r' determinam um plano β. Esses planos são distintos, pois r e s são reversas; logo, pelo teorema T.20, concluímos que $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$.
Alternativa **c**.

27 Seja s uma reta concorrente com r e paralela a α. Pelo teorema T.20, concluímos que o plano β determinado por r e s é paralelo a α. O plano β é unico, pois pelo teorema T.18 temos que por um ponto P qualquer passa um único plano paralelo a α.
Alternativa **e**.

28 1º caso: r é secante a α.
Se r é secante a α em um ponto A, então qualquer plano β que contém r obedece às condições: $\beta \not\equiv \alpha$ e A é ponto comum a α e β. Logo, pelo teorema T.10, os planos α e β são secantes.
2º caso: r é paralela a α.
Se r é paralela a α, então qualquer plano β determinado por r e um ponto A pertencente a α obedece às condições: $\beta \not\equiv \alpha$ e A é ponto comum a α e β. Logo, pelo teorema T.10, os planos α e β são secantes.
3º caso: r está contida em α.
Se r está contida em α, então qualquer plano β determinado por r e um ponto que não pertença a α obedece às condições: $\beta \not\equiv \alpha$ e qualquer ponto de r é comum a α e β. Logo, pelo teorema T.10, os planos α e β são secantes.

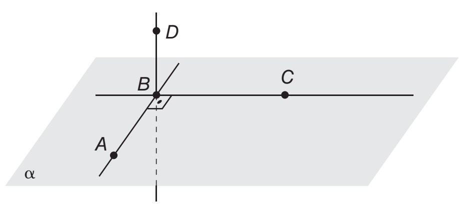
29 A reta r é ortogonal a s; portanto, pelo teorema T.27, qualquer reta t paralela a r forma ângulo reto com s.
Alternativa **d**.

30 Pelo teorema das três perpendiculares (T.33), concluímos que a reta u é perpendicular a r.
Alternativa **d**.

31 I. F, pois se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular ou ortogonal a qualquer reta desse plano.
II. V, pelo teorema T.19
III. V, pelo teorema T.29.
Alternativa **e**.

32 As retas r e s são necessariamente concorrentes, pois são perpendiculares. Logo, pelo teorema T.6, concluímos que r e s são coplanares.
Alternativa **b**.

33

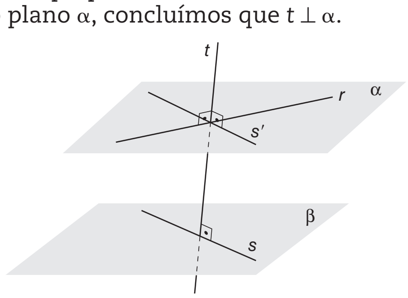


Como $\overleftrightarrow{DB}$ é perpendicular a α, temos que $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{BC}$.
Como $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DB}$, temos, pelo teorema T.29, que $\overleftrightarrow{DB} \perp$ pl(ADB).

34 Pelo teorema T.15, temos que existe um plano α que contém r e é paralelo a s; e existe um plano β que contém s e é paralelo a r. Assim, sendo P um ponto que não pertence a α nem a β, concluímos, pelo teorema T.18, que existe um plano γ que passa por P e é paralelo aos planos α e β. Logo, pelo teorema T.19, r e s são paralelas a γ.
Alternativa **a**.

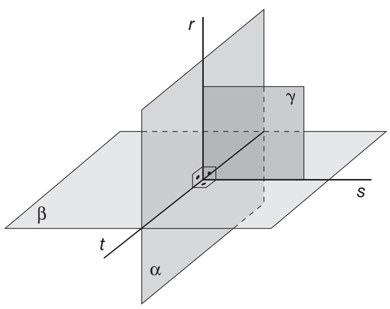
35 Sejam as retas r' e s' contidas em α e paralelas às retas r e s, respectivamente. Como a reta t forma ângulo reto com r e s, temos que t forma ângulo reto com r' e s'; logo, pelo teorema T.30, concluímos que t é perpendicular a α.
Alternativa **d**.

36 Seja s' a reta que concorre com r e t no ponto P e é paralela a s. Temos que $s' \subset \alpha$, pois, pelo teorema T.20, os planos pl(s', r) e β são paralelos e, pelo teorema T.18, existe um único plano que passa por P e é paralelo a β.
As retas paralelas s e s' formam com a transversal t ângulos correspondentes congruentes e, portanto, $t \perp s'$.
Como t é perpendicular às retas concorrentes s e s' do plano α, concluímos que $t \perp \alpha$.



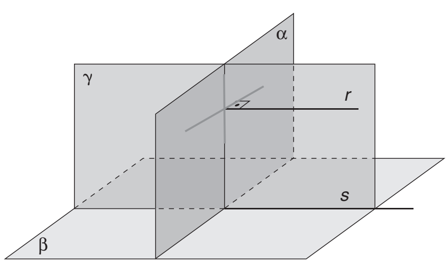
37 Seja β o plano determinado por r e s e seja s' a reta comum a α e β. Como s e s' são retas coplanares, pois estão contidas em β e são perpendiculares a r no ponto A, temos que $s' \equiv s$, portanto s está contida em α.
Alternativa **a**.

38 Sendo t a reta comum a α e β, temos, pelo teorema T.29, que $t \perp r$ e $t \perp s$.
Como $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = t$, $r \subset \alpha$ e $r \perp t$, temos, pelo teorema T.37, que $r \perp \beta$. Logo, r é perpendicular a s.



Alternativa **c**.

39 Pelo teorema T.36, temos que existe um único plano γ que contém r e é perpendicular a β. A reta s, comum a γ e β, é paralela à reta r.
Assim, pelo teorema T.31, concluímos que $s \perp \alpha$ e, portanto, $\beta \perp \alpha$.



40 Se uma reta r é perpendicular a duas retas paralelas distintas de um plano α, então r está contida em α; logo, a afirmação da alternativa **b** é falsa.
Alternativa **b**.

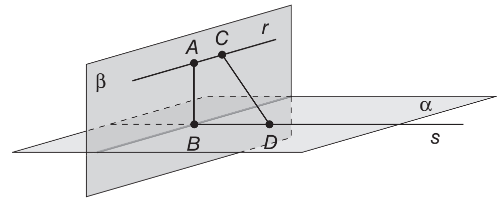
41 Pelo teorema T.32, temos que existem as retas r e s que passam por P e são perpendiculares a α e β. Como r e s são concorrentes em P, concluímos que o plano y determinado por elas passa por P e é perpendicular a cada um dos planos α e β.
Alternativa **a**.

42 Como $s \perp \beta$ e $\gamma \perp \beta$, temos, pelo teorema T.35, que $s \subset \gamma$ ou $s \mathbin{/\!/} \gamma$. Mas, como $s \cap \gamma \neq \varnothing$, pois s concorre com r e $r \subset \gamma$, temos que $s \subset \gamma$.
Alternativa **d**.

43 Mesma resolução do exercício proposto 25 (item **g**). Basta substituir a palavra "ortogonais" pela palavra "reversas".

44 Vamos supor que existam duas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ e perpendiculares às retas reversas r e s, com $\{A, C\} \subset r$ e $\{B, D\} \subset s$.
1º caso: $A \equiv C$
Se $A \equiv C$ teríamos, por um mesmo ponto A com $A \notin s$, duas retas distintas perpendiculares a s, o que é absurdo, pelo teorema T.24.

2º caso: A, B, C e D são pontos distintos entre si.
Seja α o plano que contém s e é paralelo a r, e seja β o plano que contém r e é secante a s, com $\alpha \cap \beta = t$.



Como r é paralela a α, o plano β que contém r e é perpendicular a α é único; portanto, pelo teorema T.35, temos que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ estão contidas em β ou são paralelas a β.
Mas essas retas têm os pontos A e C em comum com β, pois $\{A, C\} \subset r$ e $r \subset \beta$; logo, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ estão contidas em β, o que implica que r e s também estão contidas em β. Isto é absurdo, pois r e s são reversas.
O absurdo surgiu da suposição de que existem duas retas distintas perpendiculares comuns às retas reversas r e s. Concluímos, então, que a perpendicular comum a duas retas reversas é única.

45 Pelo teorema T.31, concluímos que cada uma das retas r e s é perpendicular aos dois planos α e β. Logo, $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$.
Alternativa **b**.

46 I. V, pelo teorema T.34.

II. F, pois, por exemplo, uma reta pode ser paralela aos dois planos simultaneamente.

III. V, pois sendo r e s duas retas perpendiculares a um plano α, com $s \cap \alpha = \{A\}$, temos, pelo teorema T.31, que a reta que passa por A e é paralela a r é perpendicular a α. Como existe uma única reta que passa por A e é perpendicular a α, concluímos que essa reta é a própria s.

Alternativa **d**.

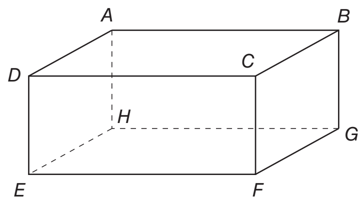
47 (01) F, pois a reta pode ser, por exemplo, paralela a α.
(02) F, pois, sendo r uma reta que passa por P e é paralela a s, qualquer plano que contém r e não contém s é paralelo a s.
(04) F, pois, dadas duas retas reversas, r e s, existe um plano que contém r e é paralelo a s.
(08) V, pois existe uma reta s perpendicular a β. Como vimos no exercício proposto 27, item **b**, se duas retas r e s são perpendiculares a um plano β, então $r \mathbin{/\!/} s$. Assim, r é paralela a uma reta de α e $r \not\subset \alpha$; logo, pelo teorema T.12, concluímos que $r \mathbin{/\!/} \alpha$.
(16) F, pois, por exemplo, a reta comum a esses planos não é perpendicular a nenhum deles.
(32) F, pois, por exemplo, três retas paralelas não coplanares determinam três planos.

- A soma é: 08.

48 I. V, pois $\overleftrightarrow{DE}$ é secante ao plano pl(ABE) e $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{BA} = \varnothing$.

II. F, pois, se uma reta r é perpendicular a um plano α, então qualquer reta de α que seja concorrente com r é perpendicular a r.

III. F, pois, por exemplo, no paralelepípedo representado abaixo o plano pl(ABC) é perpendicular aos planos perpendiculares pl(DCF) e pl(BCF), e, no entanto, pl(ABC) é secante a pl(DCF) e pl(BCF).



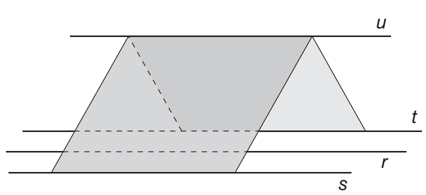
Alternativa **b**.

49 I. F, pois um plano que contém essa reta r determinaria nos planos as retas concorrentes s e t tais que r, s e t seriam concorrentes distintas e coplanares com $r \perp t$ e $s \perp t$, o que é absurdo.

II. F, pelo teorema T.32.

III. V, pois por esse ponto A do terceiro plano α existe uma reta r perpendicular a α, e qualquer plano que contém r é perpendicular a α.

IV. V, pois, por exemplo, dada uma reta r qualquer, consideremos três retas s, t, u paralelas a r tais que as quatro retas sejam distintas entre si; r, s e t sejam coplanares e u não seja coplanar com r, s e t.
Nessas condições, os planos pl(u, s) e pl(u, t) são paralelos a r.



V. F, pelo teorema T.18.
Alternativa **a**.

50 Sendo os planos paralelos distintos α e β tais que o plano λ é perpendicular a β, temos que existe uma reta r em λ que é perpendicular a β.
Assim, como demonstramos no exercício proposto 29, temos que r é perpendicular a α e, portanto, $\lambda \perp \alpha$.
Além disso, as retas determinadas pelas intersecções $\alpha \cap \lambda$ e $\beta \cap \lambda$ são coplanares, pois estão no plano λ, e não têm ponto comum, pois estão nos planos paralelos distintos α e β; logo, essas retas são paralelas distintas.
Alternativa **b**.

51 I. F, conforme justificamos no item III do exercício complementar 48.

II. V, pois pelo ponto comum à reta e ao plano passam infinitas retas desse plano.

III. F, pois é impossível um plano ser subconjunto de uma reta.
Alternativa **a**.

52 I. F, pois, se uma reta r é perpendicular a α e $\alpha \perp \beta$, então ou $r \subset \beta$ ou $r \mathbin{/\mkern-5mu/} \beta$.

II. V, por definição de planos perpendiculares.

III. V, pois sendo r uma reta do plano β, com $r \perp \alpha$, consideremos uma reta s não contida em β e paralela a r. Nessas condições, temos que $s \mathbin{/\mkern-5mu/} \beta$.
Alternativa **c**.

53 Se os planos α e β são paralelos, então todo plano λ perpendicular a α é perpendicular a β.
Se os planos α e β são secantes em r, então todo plano λ perpendicular à reta r é perpendicular a α e a β.
Concluímos então que, quaisquer que sejam os planos α e β, existe um plano perpendicular a α e β.
Alternativa **e**.

54 As projeções ortogonais de todos os pontos de β sobre α determinam a reta r comum a esses planos. Logo, a projeção ortogonal de β sobre α é a reta r, comum aos dois planos.

55 As projeções ortogonais de todos os pontos de C sobre β determinam um segmento de reta. Logo, a projeção ortogonal de C sobre β é esse segmento de reta.

56 Para que a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α seja:

a) dois pontos, é necessário e suficiente que r e s sejam distintas e perpendiculares a α.

b) uma única reta, é necessário e suficiente que r e s estejam em um plano β perpendicular a α e que pelo menos uma dessas retas não seja perpendicular a α.

c) duas retas paralelas, é necessário e suficiente que $r \subset \beta$ e $s \subset \gamma$, onde β e γ são planos distintos e perpendiculares a α, e r e s não sejam perpendiculares a α.

57
- Se uma das retas, r ou s, for perpendicular a α, então a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α é formada por uma reta t e um ponto P, com $P \notin t$.
- Se r e s forem paralelas a α, então a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α é formada por duas retas concorrentes.
- Se cada uma das retas r e s estiver em um plano perpendicular a α, tal que nenhuma delas seja perpendicular a α, então a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α é formada por duas retas paralelas distintas.

58 Para que a projeção do ângulo $A\hat{O}B$ seja congruente à sua projeção sobre o plano β, é necessário e suficiente que o plano pl(AOB) seja paralelo a β.

Exercícios contextualizados

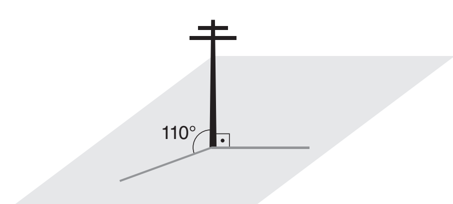
59 Os pontos distintos representados pelos orifícios da bala na porta e na parede determinam uma reta. A intersecção dessa reta com o prédio cenográfico é o ponto de onde partiu a bala.

60 Um eclipse ocorre sempre que os pontos Sol, Lua e Terra são colineares. Isto só ocorre na intersecção de α e β. Assim, a reta Sol-Lua deve estar contida em α.
Alternativa **d**.

61 Indicando por A o ponto marcado na primeira estaca e por B o ponto marcado na segunda, falta determinar um terceiro ponto C, não colinear com A e B, que esteja no mesmo plano horizontal desses pontos. Por exemplo, mantendo-se o nível da água de um extremo da mangueira no ponto A, o ponto C pode ser determinado na terceira estaca pelo nível da água do outro extremo da mangueira.

62 Nenhuma das alternativas, **a** ou **b**, pode ser a correta, porque, se uma delas fosse, a outra também seria.
Nenhuma das alternativas, **b** ou **c**, pode ser a correta, porque, se uma delas fosse, a outra também seria.
Nenhuma das alternativas, **c** ou **e**, pode ser a correta, porque, se uma delas fosse, a outra também seria.
Assim, resta apenas a alternativa **d**, que por exclusão deve ser a correta.
Alternativa **d**.

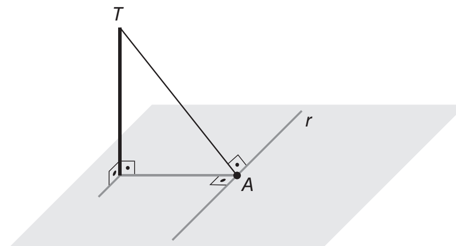
63 Apenas com essa informação não é possível concluir que o poste é perpendicular ao terreno, pois o poste poderia estar em uma rampa, sendo perpendicular à sua sombra em dado instante e ser oblíquo à sua sombra em outro instante, como sugere a figura:



Para que o poste seja perpendicular ao terreno, ele deve ser perpendicular à sua sombra quando ela ocupa posições diferentes, isto é, posições em direções concorrentes.

64 O fio de prumo representa a reta r; a parede representa o plano α, paralelo a r; e um plano horizontal qualquer representa o plano β, que poderá ser o plano do piso, se este for horizontal.

65 O cabo terá o menor comprimento possível se ele for perpendicular à linha r.
Traçando, a partir da base do mastro, uma linha perpendicular à linha r, obtemos na linha r o ponto A, cuja distância ao topo T do mastro é a menor possível.



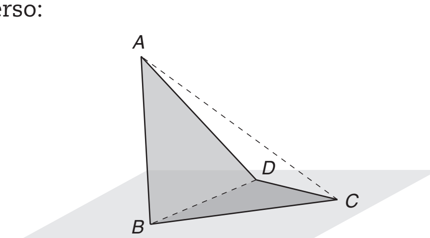
A perpendicularidade entre a reta $\overleftrightarrow{AT}$ e a linha r é garantida pelo teorema das três perpendiculares.

66 **a)** Qualquer que seja a posição de C, r e s, o plano pl(r, s) contém a reta s que é perpendicular ao plano da órbita. Logo, pl(r, s) é perpendicular ao plano da órbita para qualquer posição de C, r e s.
b) Para que o plano pl(r, C) seja perpendicular ao plano da órbita, devemos ter $s \subset$ pl(r, C).
c) Qualquer que seja a posição de C, r e s, o plano pl(s, C) contém a reta s que é perpendicular ao plano da órbita. Logo, pl(s, C) é perpendicular ao plano da órbita para qualquer posição de C, r e s.

67 Os pontos A, B e C não são colineares, pois, se fossem, teríamos $r \equiv s \equiv t$, o que contraria a hipótese segundo a qual as retas r, s e t são distintas entre si.
Sendo não colineares, os pontos A, B e C determinam o plano α = pl(ABC).
Os pontos distintos A e B da reta r pertencem ao plano α e, portanto, pelo postulado P.9, a reta r está contida em α.
Os pontos distintos A e C da reta s pertencem ao plano α e, portanto, pelo postulado P.9, a reta s está contida em α.
Os pontos distintos B e C da reta t pertencem ao plano α e, portanto, pelo postulado P.9, a reta t está contida em α.
Provamos, assim, que as retas r, s e t são coplanares, pois todas estão contidas em α.

68 Se r e s forem paralelas coincidentes, teremos que t, r e s serão representadas por duas retas concorrentes e, portanto, pelo teorema T.6, são coplanares.
Se r e s forem paralelas distintas teremos, pelo teorema T.7, que elas determinam o plano α = pl(r, s). Sendo A e B os pontos de intersecção de t com r e s, respectivamente, temos $A \not\equiv B$, pois r e s são paralelas distintas. Assim, os pontos distintos A e B de t pertencem a α e, portanto, pelo postulado P.9, $t \subset \alpha$.
Provamos, assim, que as retas r, s e t são coplanares, pois todas estão contidas em α.

69 Sejam $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ as diagonais de um quadrilátero reverso:



Por absurdo, vamos supor que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ estejam em um mesmo plano α. Assim, teríamos que os pontos A, B, C e D pertenceriam a α, o que é absurdo, pois o quadrilátero é reverso. Logo, as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ não são coplanares, isto é, são reversas.

70 Como $s \cap \alpha = \varnothing$, temos duas, e apenas duas, possibilidades para a posição relativa de s e α: ou s está contida em α ou s é secante a α.
As retas s e r são reversas e $r \subset \alpha$; logo, s não pode estar contida em α, pois retas reversas não são coplanares. Resta portanto a outra alternativa, ou seja, s é secante a α.

Exercícios de revisão cumulativa

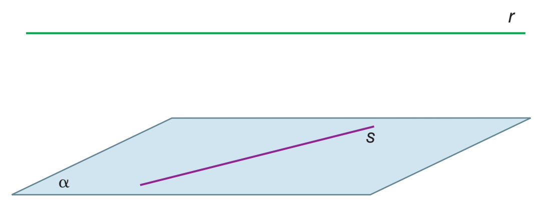
1 $\sum_{i=1°}^{360°} \text{sen } i = \text{sen } 1° + \text{sen } 2° + \text{sen } 3° + \ldots +$
$+ \text{sen } 358° + \text{sen } 359° + \text{sen } 360°$
Observando que na sequência
(sen 1°, sen 2°, sen 3°, ..., sen 358°, sen 359°, sen 360°) a soma dos extremos é zero, pois sen 359° $= -$sen 1°, e a soma de dois termos equidistantes dos extremos é zero, pois sen $(360° - x) =$
$= -$sen x, concluímos que:
$\sum_{i=1°}^{360°} \text{sen } i = \text{sen } 1° + \text{sen } 2° + \text{sen } 3° + \ldots +$
$+ \text{sen } 358° + \text{sen } 359° + \text{sen } 360° = \text{sen } 360° = 0$

2 A expressão $x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{8}$ com $k \in \mathbb{Z}$ é equivalente a $x = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{16}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Como o denominador de 2π é 16, concluímos que essa expressão representa 16 pontos da circunferência trigonométrica.

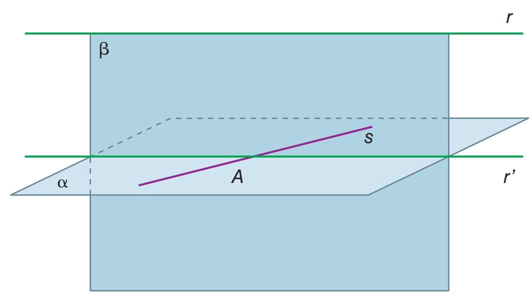
3 Como os números são primos distintos, quaisquer dois dos produtos mencionados serão diferentes. Assim, o total de produtos obtidos é dado por:
$C_{5,\,2} + C_{5,\,3} + C_{5,\,4} + C_{5,\,5} = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$
Alternativa **d**.

Análise da resolução

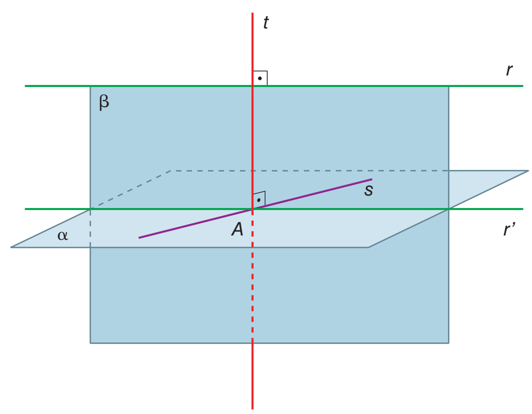
Sendo r e s duas reversas, temos, pelo teorema T.15, que existe um único plano α que contém s e é paralelo a r.



Pelo teorema T.36, existe um único plano β que contém r e é perpendicular a α.
Sejam, r' a reta comum a α e β e A o ponto comum a s e r'.



A reta t que passa por A e é perpendicular ao plano α é a reta perpendicular comum às retas r e s.



RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

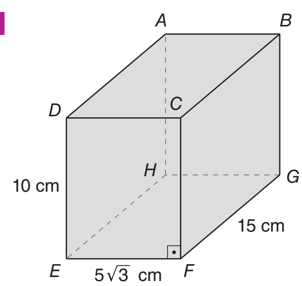
Para pensar

1 Resposta pessoal.

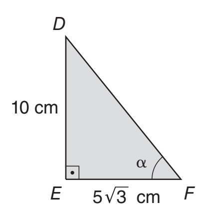
2 Cada aresta do dado ampliado terá:
8×2 cm $= 16$ cm
Assim, o volume desse dado será:
16 cm $\cdot$ 16 cm $\cdot$ 16 cm $= 4.096$ cm^3

Exercícios propostos

1

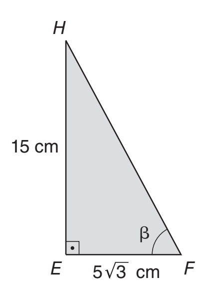


a) Sendo α a medida do referido ângulo, temos:



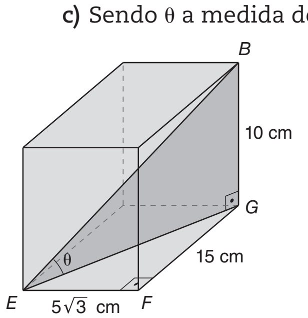
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{DE}{EF} = \frac{10}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Sendo β a medida do referido ângulo, temos:



$$\text{tg}\ \beta = \frac{HE}{EF} = \frac{15}{5\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

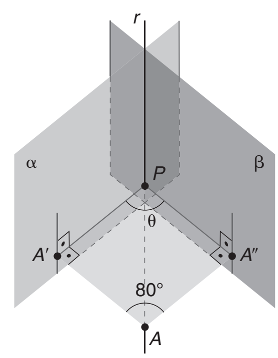
c) Sendo θ a medida do referido ângulo, temos:



$EG^2 = EF^2 + FG^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow EG^2 = 75 + 225 = 300$
$\therefore\ EG = 10\sqrt{3}$ cm

Logo:
$$\text{tg}\ \theta = \frac{BG}{EG} = \frac{10}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
Como θ é medida de um ângulo agudo, concluímos que $\theta = 30°$.

2 **a)** Sendo P o ponto comum à reta r e ao plano pl($AA'A''$), temos que os ângulos formados por α e β são os ângulos formados pelas retas $\overleftrightarrow{OA'}$ e $\overleftrightarrow{OA''}$.

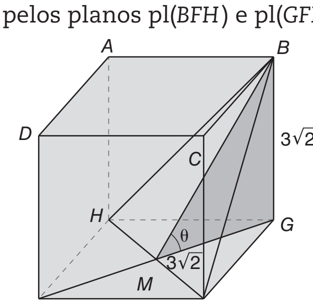


Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero plano $PAA'A''$ é 360°, temos que a medida θ do ângulo $A'\hat{P}A''$ é dada por:
$\theta + 90° + 90° + 80° = 360° \Rightarrow \theta = 100°$
Logo, um ângulo obtuso formado por α e β mede 100°.

b) Um ângulo agudo formado por α e β é suplementar de um ângulo obtuso formado por esses planos. No item **a**, concluímos que um ângulo obtuso formado por α e β é 100°; logo, um ângulo agudo formado por esses planos é 80°.

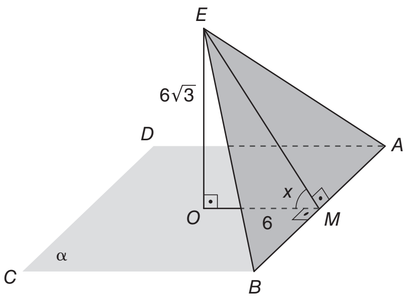
c) Sendo P o ponto comum à reta r e ao plano pl($AA'A''$), temos que o triângulo $PA'A''$ é isósceles, pois $A'P = A''P$, e, portanto, $P\hat{A}'A'' \cong P\hat{A}''A'$.
Sendo $\gamma = m(P\hat{A}'A'') = m(P\hat{A}''A')$, temos:
$100° + \gamma + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 40°$
Logo, um ângulo agudo formado por $\overleftrightarrow{A'A''}$ e α mede 40°.

3 Cada uma das diagonais do quadrado $EFGH$ mede $6\sqrt{2}$ cm, e o ponto M comum a elas é ponto médio de cada uma. Sendo θ a medida do ângulo formado pelos planos pl(BFH) e pl(GFH), temos:



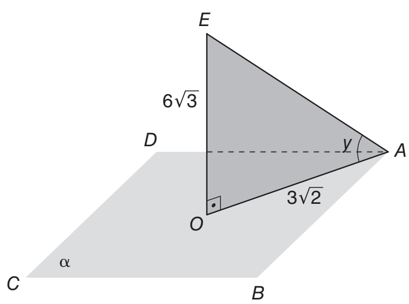
$\text{tg}\ \theta = \dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \theta = 45°$, pois θ é medida de um ângulo agudo.

4 a) Sendo M o ponto médio do lado $\overline{AB}$, temos que $E\hat{M}O$ é um ângulo agudo formado pelos planos α e pl(ABE). Assim, sendo x a medida do ângulo formado pelos planos α e pl(ABE), temos:



$\text{tg}\, x = \dfrac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60°$, pois é medida de um ângulo agudo.

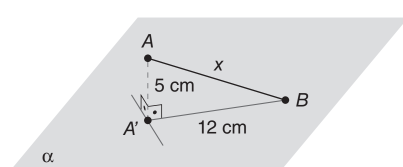
b) A medida de cada diagonal do quadrado $ABCD$ é $12\sqrt{2}$ cm e, portanto, $OA = 6\sqrt{2}$ cm. Assim, sendo y a medida de um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{EA}$ e pelo plano α, temos:



$\text{tg}\, y = \dfrac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Como x e y são ângulos agudos, com $\text{tg}\, y < \text{tg}\, x$, pois $\dfrac{\sqrt{6}}{2} < \sqrt{3}$, concluímos que $y < x$.

5



A' é projeção ortogonal de A.

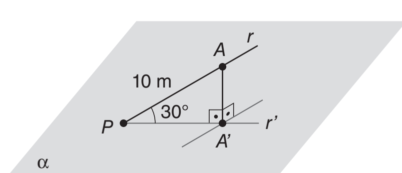
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AA'B, temos:

$x^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow x^2 = 169$

$\therefore x = 13$

Logo, $d_{AB} = 13$ cm.

6 Sendo d a distância entre o ponto A e o plano α, temos:



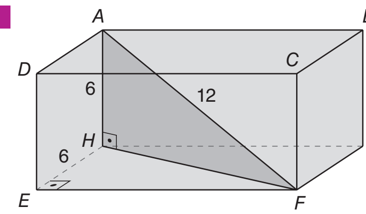
A' é a projeção ortogonal de A.

$\text{sen}\, 30° = \dfrac{d}{10} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{d}{10}$

$\therefore d = 5$

Logo, a distância entre A e α é 5 m.

7



$AF = 12$ cm
$AH = EH = 6$ m

a) $(HF)^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow (HF)^2 = 108$

$\therefore HF = 6\sqrt{3}$

Logo, a distância entre os pontos H e F é $6\sqrt{3}$ cm.

b) $\begin{cases} (EF)^2 + (HE)^2 = (HF)^2 \\ HE = 6 \\ HF = 6\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (EF)^2 + 6^2 = (6\sqrt{3})^2$

$\therefore EF = 6\sqrt{2}$

Logo, a distância entre os pontos E e F é $6\sqrt{2}$ cm.

c) A projeção ortogonal de A sobre pl(EFG) é o ponto H. Como $AH = 6$ cm, concluímos que a distância entre A e pl(EFG) é 6 cm.

d) A projeção ortogonal de B sobre pl(EFG) é o ponto G. Como $BG = AH = 6$ cm, concluímos que a distância entre B e pl(EFG) é 6 cm.

e) A projeção ortogonal de $\overline{AF}$ sobre pl(EFG) é o segmento $\overline{HF}$, cuja medida já foi calculada no item **a**: $HF = 6\sqrt{3}$ cm.

f) A projeção ortogonal de $\overline{AF}$ sobre pl(ABC) é o segmento $\overline{AC}$, cuja medida é a mesma do segmento HF, ou seja, $AC = 6\sqrt{3}$ cm.

g) $A\hat{F}H$ é um ângulo agudo que $\overleftrightarrow{AF}$ forma com pl(EFG). Sendo x a medida desse ângulo, temos:

$\text{sen}\, x = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30°$, pois x é medida de um ângulo agudo.

h) O segmento $\overline{HF}$ é perpendicular às retas paralelas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CF}$; logo, a medida $HF = 6\sqrt{3}$ cm é a distância entre essas retas.

i) O plano pl(EFG) contém $\overleftrightarrow{HF}$ e é paralelo a $\overleftrightarrow{BD}$. Assim, a distância entre o ponto B e o plano pl(EFG) é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{HF}$. Essa distância é 6 cm, conforme visto no item **d**.

j) Raciocinando como no item **i**, concluímos que essa distância é 6 cm.

k) A projeção ortogonal de $\overleftrightarrow{AF}$ sobre pl(AHG) é a reta $\overleftrightarrow{AG}$; logo, $F\hat{A}G$ é um ângulo agudo formado por $\overleftrightarrow{AF}$ e pl(AHG). Sendo θ a medida desse ângulo, temos:

$\text{tg}\, \theta = \dfrac{FG}{AG} = \dfrac{6}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30°$, pois θ é medida de um ângulo agudo.

l) As retas $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são perpendiculares à reta comum aos planos pl(AHF) e pl(AHE); logo, o ângulo $E\hat{H}F$ é o ângulo formado por esses dois planos. Sendo y a medida desse ângulo, temos:

$\text{tg}\, y = \dfrac{EF}{HE} = \dfrac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}$

m) A projeção ortogonal da reta $\overleftrightarrow{AF}$ sobre o plano pl(EFC) é a reta $\overleftrightarrow{DF}$; logo, $A\hat{F}D$ é o ângulo formado pela reta $\overleftrightarrow{AF}$ e pelo plano pl(EFC).
Sendo z a medida desse ângulo, temos:

$$\text{tg } z = \frac{AD}{FD} = \frac{6}{DF} \quad \text{(I)}$$

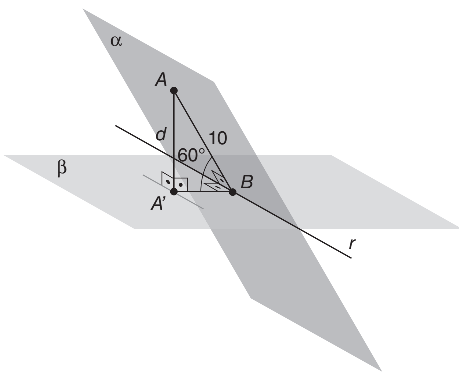
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ADF, obtemos:

$$(DF)^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow DF = 6\sqrt{3} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$\text{tg } z = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

8 Sendo A' a projeção ortogonal de A sobre β, temos que a distância d entre A e β é a medida do segmento $\overline{AA'}$:



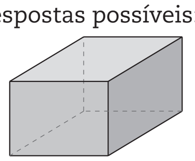
$$\text{sen } 60° = \frac{d}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{10}$$

$\therefore\ d = 5\sqrt{3}$

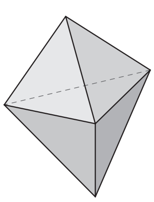
Assim, concluímos que a distância entre A e β é $5\sqrt{3}$ cm.

9 Respostas possíveis:

a)

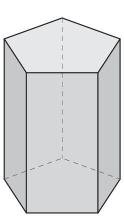


V = 8
A = 12
F = 6

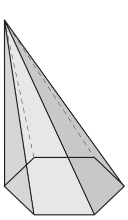


V = 5
A = 9
F = 6

b)



V = 10
A = 15
F = 7



V = 7
A = 12
F = 7

10 $A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$

Logo, o dodecaedro possui 30 arestas.

11 $A = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{2} = \frac{12 + 20}{2} = 16$

Logo, o eneaedro possui 16 arestas.

12 $A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$

Logo, o poliedro possui 30 arestas.

13 $A = \frac{10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{2} = \frac{30 + 20}{2} = 25$

Logo, o poliedro possui 25 arestas.

14 $\begin{cases} A = 21 \\ F = 15 \\ V = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 21 + 15 = 2$
$\therefore\ V = 8$
Logo, o poliedro possui 8 vértices.

15 $\begin{cases} V = 16 \\ A = 24 \\ F = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 16 - 24 + F = 2$
$\therefore\ F = 10$
Logo, o poliedro possui 10 faces.

16 $\begin{cases} V = 16 \\ F = 21 \\ A = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 16 - A + 21 = 2$
$\therefore\ A = 35$
Logo, o poliedro possui 35 arestas.

17 Para todo poliedro convexo vale a relação de Euler, ou seja, $V - A + F = 2$.
Como $20 - 18 + 12 \neq 2$, concluímos que não existe poliedro convexo com 20 vértices, 18 arestas e 12 faces.

18 $\begin{cases} F = 10 \\ V = 10 \\ A = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - A + 10 = 2$
$\therefore\ A = 18$
Logo, o decaedro possui 18 arestas.

19 $\begin{cases} F = 12 \\ A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \\ V = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 30 + 12 = 2$
$\therefore\ V = 20$
Logo, o poliedro possui 20 vértices.

20 $\begin{cases} F = 9 \\ A = \dfrac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{2} = 16 \\ V = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 16 + 9 = 2$
$\therefore\ V = 9$
Logo, o poliedro possui 9 vértices.

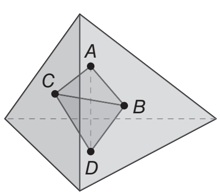
21 $\begin{cases} V = 10 \\ A = \dfrac{10 \cdot 3}{2} = 15 \\ F = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - 15 + F = 2$
$\therefore\ F = 7$
Logo, o poliedro possui 7 faces.

22 $\begin{cases} V = 7 \\ A = \dfrac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{2} = 15 \\ F = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 7 - 15 + F = 2$
$\therefore\ F = 10$
Logo, o poliedro possui 10 faces.

23 a)



O poliedro determinado pelos centros das faces de um tetraedro regular é outro tetraedro regular.

b) O conjugado regular do tetraedro regular é um tetraedro regular, conforme mostra a figura do item **a**.

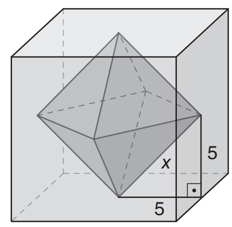
c) $\begin{cases} F = 12 \\ A = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30 \\ V = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 30 + 12 = 2$
$\therefore\ V = 20$
Logo, o conjugado regular do dodecaedro regular é um poliedro com 20 faces e 12 vértices, ou seja, é um icosaedro regular.

d) $\begin{cases} F = 20 \\ A = \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30 \\ V = ? \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 30 + 20 = 2$
$\therefore\ V = 12$
Logo, o conjugado regular do icosaedro regular é um poliedro com 12 faces e 20 vértices, ou seja, é um dodecaedro regular.

24 Sendo x a medida da aresta do octaedro, temos:



$x^2 = 5^2 + 5^2$
$\therefore\ x = 5\sqrt{2}$

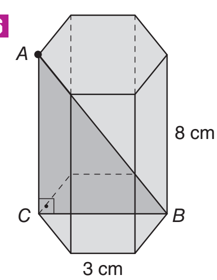
Logo, a aresta do octaedro mede $5\sqrt{2}$ cm.

25 A área A_f de cada face é a área de um triângulo equilátero de lado 6 cm; logo:

$A_f = \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

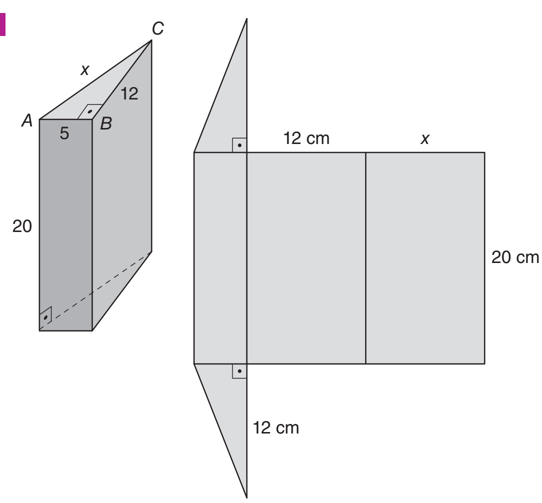
Como o icosaedro regular é constituído de 20 faces congruentes, temos que a área A de sua superfície é dada por:
$A = 20 \cdot 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 180\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

26



O triângulo ABC é retângulo em C.
$CB = 6$ cm (hexágono regular)
$(AB)^2 = (CB)^2 + (AC)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 6^2 + 8^2$
$\therefore\ AB = 10$
Logo, a maior diagonal é AB, igual a 10 cm.

27



a) x é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$x^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow x^2 = 25 + 144$
$\therefore\ x = 13$ cm

b) Cada base é um triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm; logo, a área B de cada base é dada por:

$B = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12\ \text{cm}^2 = 30\ \text{cm}^2$

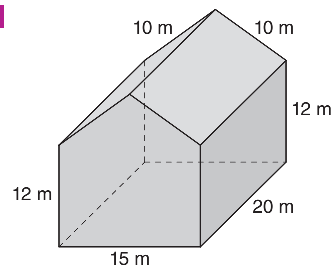
c) A superfície lateral é composta de 3 retângulos de dimensões 5 cm por 20 cm, 12 cm por 20 cm e 13 cm por 20 cm. Logo, a área lateral A_ℓ é dada por:

$A_\ell = (5 \cdot 20 + 12 \cdot 20 + 13 \cdot 20)\ cm^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_\ell = 600\ cm^2$

d) A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das bases:

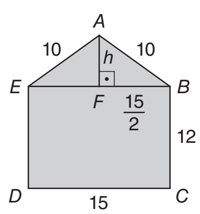
$A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow A_T = (600 + 2 \cdot 30)\ cm^2 = 660\ cm^2$

28



$A_\ell = (2 \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot 12 \cdot 20 + 15 \cdot 20)\ m^2 = 1.180\ m^2$

Cálculo da área B de uma base:



Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABF$, temos: $(AB)^2 = (AF)^2 + (FB)^2 \Rightarrow 100 = h^2 + \dfrac{225}{4}$

$\therefore\ h = \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$

Logo, $B = \left(12 \cdot 5 + \dfrac{15 \cdot 5\sqrt{7}}{2 \cdot 2}\right) m^2 \Rightarrow$

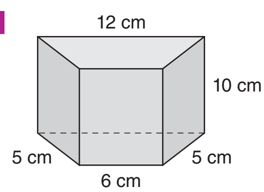
$\Rightarrow B = \dfrac{720 + 75\sqrt{7}}{4}$

Concluindo, temos que a área total A_T é dada por:

$A_T = A_\ell + 2B = \left(1.180 + 2 \cdot \dfrac{720 + 75\sqrt{7}}{4}\right) m^2 \Rightarrow$

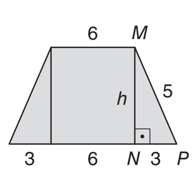
$\Rightarrow A_T = \dfrac{5\left(616 + 15\sqrt{7}\right)}{2}\ m^2$

29



a) $A_\ell = (12 \cdot 10 + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 6 \cdot 10)\ cm^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_\ell = 280\ cm^2$

b) Seja h a altura do trapézio que é base do prisma:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MNP, temos:

$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$

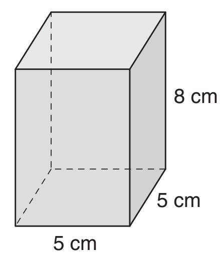
Assim, a área B de uma base é dada por:

$B = \dfrac{(6 + 12) \cdot 4}{2}\ cm^2 = 36\ cm^2$

Logo, a área total A_T do prisma é dada por:

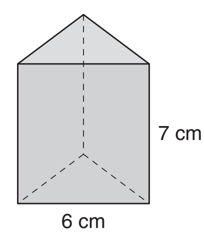
$A_T = A_\ell + 2B = (280 + 2 \cdot 36)\ cm^2 = 352\ cm^2$

30



a) $A_f = (8 \cdot 5)\ cm^2 = 40\ cm^2$
b) $B = (5 \cdot 5)\ cm^2 = 25\ cm^2$
c) $A_\ell = (4 \cdot 5 \cdot 8)\ cm^2 = 160\ cm^2$
d) $A_T = A_\ell + 2B = (160 + 2 \cdot 25)\ cm^2 = 210\ cm^2$

31

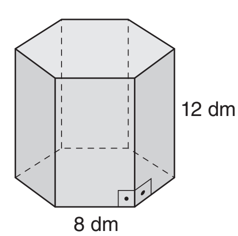


a) $A_f = (7 \cdot 6)\ cm^2 = 42\ cm^2$

b) $B = \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ cm^2 = 9\sqrt{3}\ cm^2$

c) $A_\ell = (3 \cdot 7 \cdot 6)\ cm^2 = 126\ cm^2$
d) $A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow A_T = (126 + 2 \cdot 9\sqrt{3})\ cm^2$
$\therefore\ A_T = 18(7 + \sqrt{3})\ cm^2$

32



a) $A_f = (8 \cdot 12)\ dm^2 = 96\ dm^2$

b) $B = 6 \cdot \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4}\ dm^2 = 96\sqrt{3}\ dm^2$

c) $A_\ell = (6 \cdot 12 \cdot 8)\ dm^2 = 576\ dm^2$
d) $A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow A_T = (576 + 2 \cdot 96\sqrt{3})\ dm^2$
$\therefore\ A_T = 192(3 + \sqrt{3})\ dm^2$

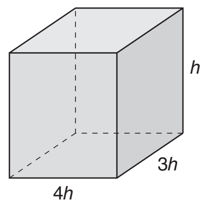
33 $D = \sqrt{6^2 + 4^2 + (2\sqrt{3})^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow D = \sqrt{36 + 16 + 12} = \sqrt{64}$

$\therefore\ D = 8$

Logo, a diagonal mede 8 dm.

34 Sendo h a altura do paralelepípedo e D a medida da diagonal, temos:



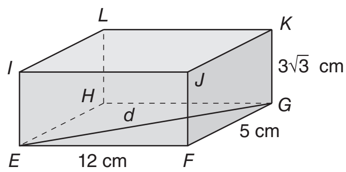
$D = 2\sqrt{26} \Rightarrow \sqrt{(4h)^2 + (3h)^2 + h^2} = 2\sqrt{26}$

$\therefore \sqrt{16h^2 + 9h^2 + h^2} = 2\sqrt{26} \Rightarrow h\sqrt{26} = 2\sqrt{26}$

$\therefore h = 2$ cm

Logo, as dimensões desse paralelepípedo são 2 cm, 6 cm, 8 cm.

35 a)



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo EFG, temos:

$d^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow d = 13$

Logo, a diagonal da base $EFGH$ mede 13 cm.

b) $D = \sqrt{12^2 + 5^2 + (3\sqrt{3})^2}$ cm $=$

$= \sqrt{196}$ cm $= 14$ cm

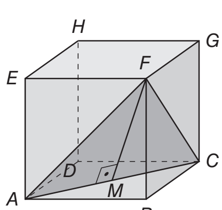
c) $A_T = 2(12 \cdot 5 + 12 \cdot 3\sqrt{3} + 5 \cdot 3\sqrt{3})$ cm^2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 2(60 + 51\sqrt{3})$ cm^2

36 Cada um dos lados da linha poligonal é hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 1 cm. Logo, cada um desses lados mede $\sqrt{2}$ cm e, portanto, o comprimento da linha poligonal é $9\sqrt{2}$ cm.

Alternativa **b**.

37



No triângulo ACF, temos $AF = FC = AC = a\sqrt{2}$.

Portanto, a área A desse triângulo equilátero é dada por:

$$A = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

38 Sendo a a medida, em centímetro, da aresta desse cubo, temos:

$12a = 60 \Rightarrow a = 5$

Assim, concluímos:

a) $D = a\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ cm

b) $A_T = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 25 = 150$ cm^2

c) $A_\ell = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot 25 = 100$ cm^2

39 Sendo a a medida, em decímetro, da aresta do cubo, temos:

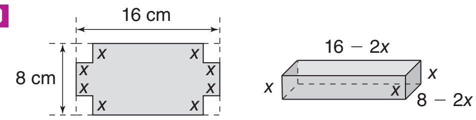
$6a^2 = 96 \Rightarrow a = 4$

Assim, concluímos:

a) $D = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ dm

b) $A_\ell = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot 4^2$ dm^2 $= 64$ dm^2

40



Sendo A_f a área da folha e A_i a área interna da caixa, temos:

$A_f = (16 \cdot 8)$ cm^2 $= 128$ cm^2

$A_i = (128 - 4x^2)$ cm^2

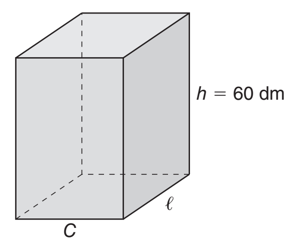
Para que $A_i = \frac{A_f}{4}$, devemos ter:

$128 - 4x^2 = \frac{128}{4} \Rightarrow x^2 = 24$

$\therefore x = 2\sqrt{6}$

Logo, a medida do lado do quadrado é $2\sqrt{6}$ cm.

41 Sendo C e ℓ o comprimento e a largura, respectivamente, temos:



$C = \frac{2}{3} \cdot 60$ dm $= 40$ dm

$\ell = \frac{4}{5} \cdot 40$ dm $= 32$ dm

Logo, o volume V é dado por:

$V = (60 \cdot 40 \cdot 32)$ dm^3 $= 76.800$ dm^3

42 Sendo c, ℓ e h o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, temos:

$\frac{c}{5} = \frac{\ell}{2} = \frac{h}{1} = k \Rightarrow c = 5k;\ \ell = 2k;\ h = k$

Sendo V o volume, temos:

$V = 80 \Rightarrow 5k \cdot 2k \cdot k = 80$

$\therefore k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

Logo, $c = 10$ dm, $\ell = 4$ dm e $h = 2$ dm e, portanto, a área total A_T é dada por:

$A_T = 2(10 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 4 \cdot 2)$ dm^2 $= 136$ dm^2

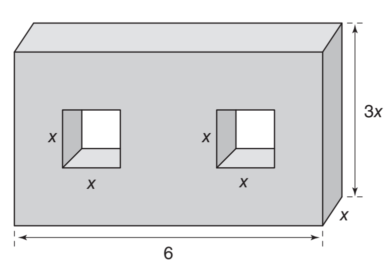
43 Sendo x a medida, em centímetro, de cada aresta do cubo, temos:

$x\sqrt{3} = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

Logo, o volume V do cubo é dado por:

$V = (\sqrt{3})^3$ cm^3 $\Rightarrow V = 3\sqrt{3}$ cm^3

44 Sendo V_{ret} e V_{rest} os volumes retirado e restante, respectivamente, temos:



$V_{ret} = 2x^3$

$V_{rest} = 6 \cdot x \cdot 3x - 2x^3 = 18x^2 - 2x^3$

$V_{ret} = \frac{1}{3} \cdot V_{rest} \Rightarrow 2x^3 = \frac{1}{3}(18x^2 - 2x^3)$

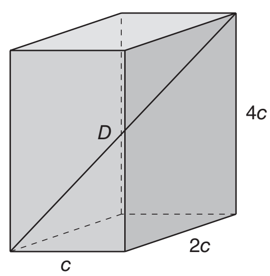
$\therefore\ 2x^3 = 6x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Rightarrow 2x^3 + \frac{2}{3}x^3 = 6x^2$

$\therefore\ \frac{8x^3}{3} = 6x^2$

Como $x \neq 0$, pois x é medida da aresta dos cubos, podemos dividir por x ambos os membros dessa igualdade, obtendo $\frac{8x}{3} = 6 \Rightarrow x = 2{,}25$

Logo, a aresta dos cubos é igual a 2,25.

45 Sendo c, $2c$ e $4c$ as dimensões, em metro, do paralelepípedo, temos:



$5\sqrt{21} = \sqrt{c^2 + (2c)^2 + (4c)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\sqrt{21} = \sqrt{c^2 + 4c^2 + 16c^2}$

$\therefore\ 5\sqrt{21} = c\sqrt{21} \Rightarrow c = 5$

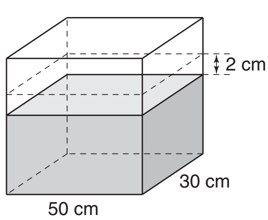
Assim, as dimensões do paralelepípedo são 5 m, 10 m e 20 m e, portanto, seu volume V é dado por:

$V = (5 \cdot 10 \cdot 20)\ m^3 = 1.000\ m^3 = 1.000.000\ dm^3$

$\therefore\ V = 1.000.000$ L

Logo, a capacidade desse tanque é 1.000.000 L.

46



O volume de água retirada é igual ao volume V de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 50 cm por 30 cm por 2 cm:

$V = (50 \cdot 30 \cdot 2)\ cm^3 = 3.000\ cm^3 = 3\ dm^3$

$\therefore$ Logo, $V = 3L$

Alternativa **a**.

47 O volume do reservatório cúbico é 27 m³, e o volume do outro reservatório é 216 m³.

O tempo x, em hora, necessário para preencher o reservatório maior é dado pela regra de três:

Volume (m³)	Tempo (hora)
27	3
216	x

$\therefore\ x = \frac{216 \cdot 3}{27} = 24$

Logo, serão necessárias 24 horas para a bomba preencher o reservatório maior.

48 Os volumes são iguais, pelo princípio de Cavalieri.

49 **a)** Sendo h a altura, em centímetro, do prisma, temos:

$\text{sen } 45° = \frac{h}{20} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{20}$

$\therefore\ h = 10\sqrt{2}$ cm

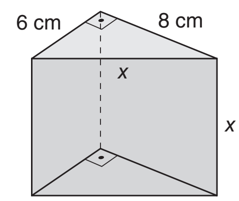
b) A área B da base é dada por:

$B = \frac{7 \cdot 10}{2}\ cm^2 = 35\ cm^2$

Assim, o volume V é dado por:

$V = (35 \cdot 10\sqrt{2})\ cm^3 = 350\sqrt{2}\ cm^3$

50 Seja x a medida, em centímetro, da aresta lateral:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 100$

$\therefore\ x = 10$ cm

A área B da base é dada por:

$B = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\right)\ cm^2 = 24\ cm^2$

Portanto, o volume V do prisma é dado por:

$V = (24 \cdot 10)\ cm^3 = 240\ cm^3$

51 A área B da base do prisma é dada por:

$B = \frac{(18 + 32) \cdot 20}{2}\ cm^2 = 500\ cm^2$

Como o volume do prisma é o produto da área da base pela altura x, temos:

$500x = 3.000 \Rightarrow x = 6$

Logo, a altura x do prisma é 6 cm.

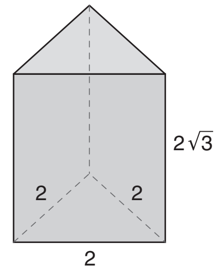
52 A área B da base do prisma é dada por:

$B = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ cm^2 = 9\sqrt{3}\ cm^2$

Portanto, o volume V desse prisma é dado por:

$V = (9\sqrt{3} \cdot 9)\ cm^3 = 81\sqrt{3}\ cm^3$

53 O prisma triangular é regular com altura $2\sqrt{3}$ e aresta da base 2:



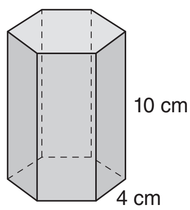
A área B da base é dada por:

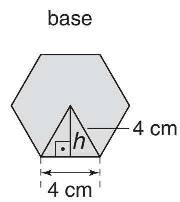
$B = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Logo, o volume V do prisma é dado por:

$V = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6$

54 A figura é a planificação de um prisma hexagonal regular de aresta da base 4 cm e altura 10 cm.





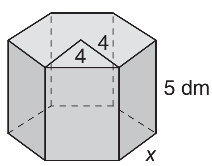
A área B da base é dada por:

$$B = \left(6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \text{cm}^2 = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Portanto, o volume V desse prisma é dado por:

$$V = (24\sqrt{3} \cdot 10)\ \text{cm}^3 = 240\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

55 Sendo x a medida, em decímetro, de cada aresta da base, temos:



$A_\ell = 120 \Rightarrow 6 \cdot 5 \cdot x = 120$

$\therefore\ x = 4$ dm

A área B da base do prisma é dada por:

$$B = \left(6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right) \text{dm}^2 = 24\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

Portanto, o volume V desse prisma é dado por:

$$V = (24\sqrt{3} \cdot 5)\ \text{dm}^3 = 120\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

56 Sendo a a medida de cada aresta desse prisma, temos que a área B de sua base é dada por:

$$B = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, o volume V desse prisma é dado por:

$$V = \frac{6 \cdot a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$$

Assim:

$$V = 324\sqrt{3} \Rightarrow \frac{3a^3\sqrt{3}}{2} = 324\sqrt{3}$$

$\therefore\ a = 6$ cm

Dessa forma, obtemos a área B da base e a área lateral A_ℓ:

$$B = \frac{6 \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 54\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \text{ e}$$

$$A_\ell = (6 \cdot 6 \cdot 6)\ \text{cm}^2 = 216\ \text{cm}^2$$

Logo, a área total A_T desse prisma é dada por:

$$A_T = (216 + 2 \cdot 54\sqrt{3})\ \text{m}^2 = 108(2 + \sqrt{3})\ \text{cm}^2$$

57 Sendo a a medida, em decímetro, de uma aresta da base, as áreas A_f e B de uma face lateral e de uma base desse prisma, respectivamente, são dadas por:

$$A_f = 2a\sqrt{3} \text{ e } B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Assim, temos:

$$A_f = B \Rightarrow 2a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$\therefore\ a = 8$

Logo, $B = \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$ e, portanto, o volume V desse prisma é dado por:

$$V = (16\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3})\ \text{dm}^3 = 96\ \text{dm}^3$$

58 A área B da base do prisma é dada por:

$$B = \frac{12 \cdot 30}{2}\ \text{cm}^2 = 180\ \text{cm}^2$$

Assim, o volume V é dado por:

$V = (180 \cdot 100)\ \text{cm}^3 = 18.000\ \text{cm}^3 = 0{,}018\ \text{m}^3$

Concluímos, então, que para a construção de 10 degraus será necessário $0{,}18\ \text{m}^3$ de concreto.

Alternativa **a**.

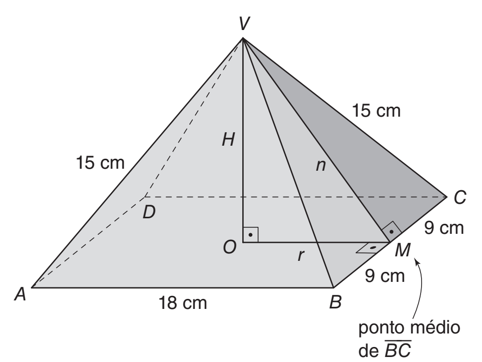
59 O volume despejado é o volume V de um prisma reto de altura 40 cm cuja base é um triângulo retângulo de catetos 8 cm e 40 cm:

$$V = \left(\frac{8 \cdot 40}{2} \cdot 40\right) \text{cm}^3 = 6.400\ \text{cm}^3 = 6{,}4\ \text{dm}^3$$

$\therefore\ V = 6{,}4$ L

Logo, foram derramados 6,4 L de água.

60 **a)** Nomeamos os vértices da pirâmide, segundo o esquema a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VMC, obtemos:

$15^2 = n^2 + 9^2 \Rightarrow n^2 = 144$

$\therefore\ n = 12$ cm

b) O apótema da base mede metade da aresta da base:

$r = 9$ cm

c) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos:

$12^2 = H^2 + 9^2 \Rightarrow H^2 = 63$

$\therefore\ H = 3\sqrt{7}$ cm

d) A área A_f de cada face lateral é dada por:

$$A_f = \frac{18 \cdot 12}{2}\ \text{cm}^2 = 108\ \text{cm}^2$$

Logo, a área lateral da pirâmide é dada por:

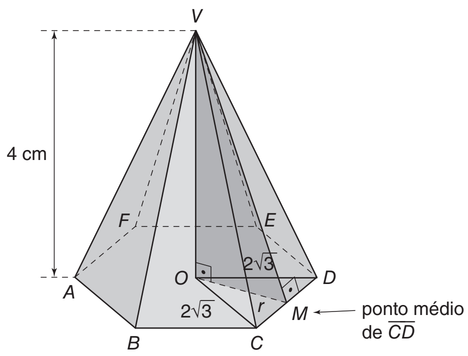
$A_\ell = 4A_f = (4 \cdot 108)\ \text{cm}^2 = 432\ \text{cm}^2$

e) $B = 18^2\ \text{cm}^2 = 324\ \text{cm}^2$

f) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = (432 + 324)\ \text{cm}^2 = 756\ \text{cm}^2$

61 Nomeamos os vértices da pirâmide segundo o esquema:



A base é um hexágono regular de lado $2\sqrt{3}$ cm; logo, a medida r do apótema da base é dada por:

$r = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm $= 3$ cm

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos:

$VM^2 = VO^2 + OM^2$

$(VM)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow (VM)^2 = 25$

$\therefore$ $VM = 5$ cm

Assim obtemos a área lateral A_ℓ e a área B da base:

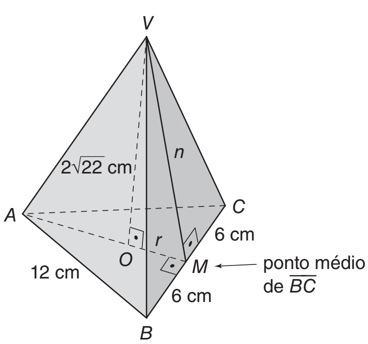
$A_\ell = 6 \cdot \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 5}{2} = 30\sqrt{3}$ cm^2 e

$B = 6 \cdot \dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}$ cm^2 $= 18\sqrt{3}$ cm^2

Portanto, a área total A_T da pirâmide é dada por:

$A_T = \left(30\sqrt{3} + 18\sqrt{3}\right)$ cm^2 $= 48\sqrt{3}$ cm^2

62 Nomeamos os vértices da pirâmide segundo o esquema:



a) Aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo ABM, obtendo:

$(AM)^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow AM = 6\sqrt{3}$

A medida r do apótema da base é a terça parte de AM:

$r = \dfrac{6\sqrt{3}}{3}$ cm $= 2\sqrt{3}$ cm

b) Aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtendo:

$n^2 = \left(2\sqrt{22}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow n^2 = 100$

$\therefore$ $n = 10$ cm

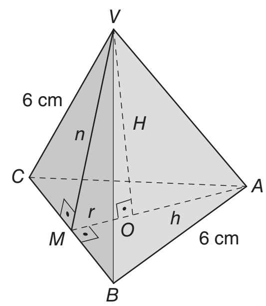
c) $A_\ell = 3 \cdot \dfrac{12 \cdot 10}{2}$ cm^2 $= 180$ cm^2

d) $B = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3}$ cm^2 $= 36\sqrt{3}$ cm^2

e) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = \left(180 + 36\sqrt{3}\right)$ cm^2

$\therefore$ $A_T = 36\left(5 + \sqrt{3}\right)$ cm^2

63 Nomeamos os vértices do tetraedro segundo o esquema:



a) Num tetraedro regular, todas as faces são triângulos equiláteros; logo, o apótema desse tetraedro é a altura de um triângulo equilátero de lado 6 cm:

$n = \dfrac{6\sqrt{3}}{2}$ cm $= 3\sqrt{3}$ cm

b) A medida r do apótema da base é a terça parte da altura de um triângulo equilátero de lado 6 cm:

$r = \dfrac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}$ cm $= \sqrt{3}$ cm

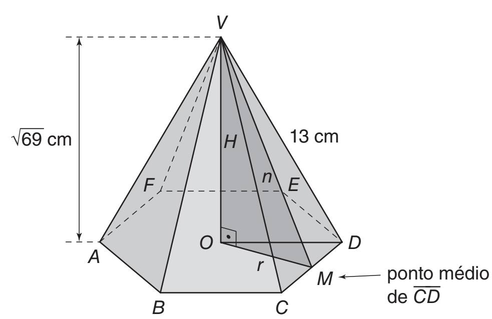
c) Aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtendo:

$27 = H^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow H^2 = 24$

$\therefore$ $H = 2\sqrt{6}$ cm

d) $A_T = 4 \cdot \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}$ cm^2 $= 36\sqrt{3}$ cm^2

64 Nomeamos os vértices da pirâmide segundo o esquema:



Aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo VOD, obtendo:

$(OD)^2 + \left(\sqrt{69}\right)^2 = 13^2 \Rightarrow (OD)^2 = 100$

$\therefore$ $OD = 10$ cm

Como o triângulo OCD é equilátero, temos que $CD = OD = 10$ cm e, portanto, $CM = MD = 5$ cm.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VMD, obtemos:

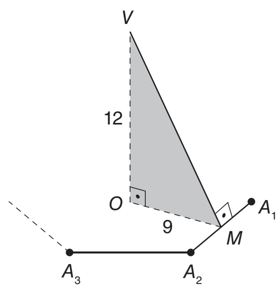
$(VM)^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow (VM)^2 = 144$

$\therefore$ $VM = 12$ cm

Assim, concluímos que a área lateral A_ℓ é dada por:

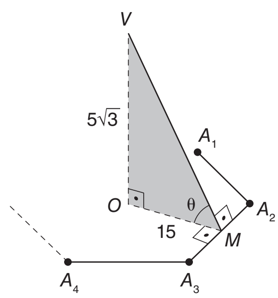
$A_\ell = 6 \cdot \dfrac{10 \cdot 12}{2}$ cm^2 $= 360$ cm^2

65 Sendo V o vértice da pirâmide, O o centro da base e M o ponto médio de uma aresta da base, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos:
$(VM)^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow (VM)^2 = 225$
$\therefore\ VM = 15$ cm
Logo, o apótema da pirâmide mede 15 cm.

66 Sendo V o vértice da pirâmide, O o centro da base, M o ponto médio de uma aresta da base e θ a medida do ângulo $V\hat{M}O$, temos:

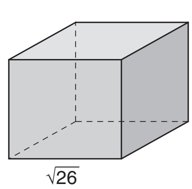


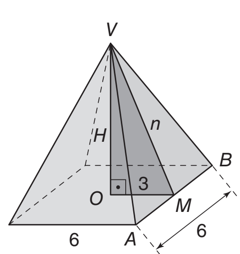
As retas $\overleftrightarrow{VM}$ e $\overleftrightarrow{OM}$ são perpendiculares à reta comum aos planos da base e de uma face lateral; logo, $V\hat{M}O$ é o ângulo agudo formado pela base e por essa face lateral. Assim, temos:

$\text{tg}\ \theta = \dfrac{5\sqrt{3}}{15} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30°$, pois θ é medida de um ângulo agudo.

Logo, cada face lateral dessa pirâmide forma um ângulo de 30° com a base.

67 Sejam H e n a altura e o apótema da pirâmide, respectivamente, e A_{TC} e A_{TP} as áreas totais do cubo e da pirâmide, respectivamente:





(O é o centro da base e M é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$)

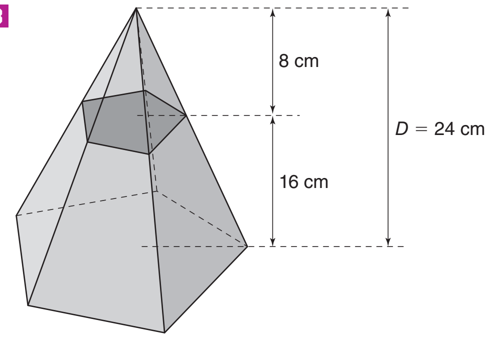
Assim, temos:

$A_{TP} = A_{TC} \Rightarrow 4 \cdot \dfrac{6 \cdot n}{2} + 6^2 = 6 \cdot (\sqrt{26})^2$

$\therefore\ n = 10$ m

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, concluímos:
$H^2 + 3^2 = 10^2 \Rightarrow H^2 = 91$
$\therefore\ H = \sqrt{91}$ m
Logo, a altura da pirâmide mede $\sqrt{91}$ m

68



Sendo b a área de secção, temos:

$\dfrac{b}{288} = \left(\dfrac{8}{24}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{b}{288} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$\therefore\ b = 32\ \text{cm}^2$

Logo, a área da secção é 32 cm².

69 a) Sendo h a distância do vértice P ao plano α, temos:

$\left(\dfrac{h}{30}\right)^2 = \dfrac{90}{250} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \dfrac{h}{30} = \dfrac{3}{5}$

$\therefore\ h = 18$ cm

b) O volume V da pirâmide de vértice P e base S é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 90 \cdot 18\ \text{cm}^3 = 540\ \text{cm}^3$

70 O volume V da pirâmide é a terça parte do volume do prisma:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 6\ \text{m}^3 = 2\ \text{m}^3$

71 A área B da base da pirâmide é dada por:
$B = 6 \cdot 4\ \text{cm}^2 = 24\ \text{cm}^2$
Logo, o volume V dessa pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 24 \cdot 10\ \text{cm}^3 = 80\ \text{cm}^3$

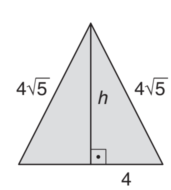
72 A área B da base da pirâmide é dada por:

$B = \dfrac{10 \cdot 6}{2}\ \text{cm}^2 = 30\ \text{cm}^2$

Logo, o volume V dessa pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 30 \cdot 12\ \text{cm}^3 = 120\ \text{cm}^3$

73 Sendo h a altura do triângulo isósceles da base da pirâmide, temos:



$h^2 = (4\sqrt{5})^2 - 4^2 \Rightarrow h^2 = 64$
$\therefore\ h = 8$ dm

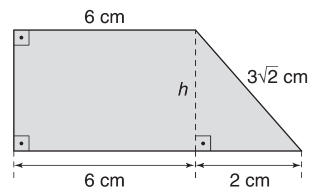
Assim, a área B desse triângulo é dada por:

$B = \dfrac{8 \cdot 8}{2}\ \text{dm}^2 = 32\ \text{dm}^2$

Logo, o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 32 \cdot 18\ \text{dm}^3 = 192\ \text{dm}^3$

74 Sendo h a altura do trapézio que é base da pirâmide, temos:



$h^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2^2 \Rightarrow h^2 = 14$

$\therefore\ h = \sqrt{14}$ cm

Assim, a área B desse trapézio é dada por:

$B = \dfrac{(6 + 8)\sqrt{14}}{2}$ cm^2 $= 7\sqrt{14}$ cm^2

Logo, o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 7\sqrt{14} \cdot 9$ cm^3 $= 21\sqrt{14}$ cm^3

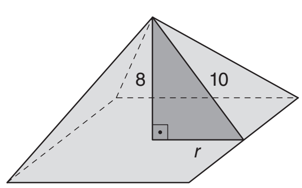
75 A área B da base da pirâmide é dada por:

$B = 3^2$ cm^2 $= 9$ cm^2

Logo, o volume V dessa pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 9 \cdot 8$ cm^3 $= 24$ cm^3

76 Sendo r a medida do apótema da base da pirâmide, temos:



$r^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 36$

$\therefore\ r = 6$

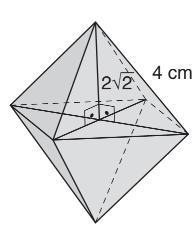
Como o apótema de um quadrado mede a metade da medida de seu lado, temos que a base dessa pirâmide é um quadrado de lado 12 cm. Assim, a área B dessa base é dada por:

$B = 12^2$ cm^2 $= 144$ cm^2

Logo, o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8$ cm^3 $= 384$ cm^3

77 O octaedro é formado por 2 pirâmides regulares de base quadrada e altura $\dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm



Assim, o volume V do octaedro é o dobro do volume dessa pirâmide, isto é:

$V = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2}$ cm^3 $= \dfrac{64\sqrt{2}}{3}$ cm^3

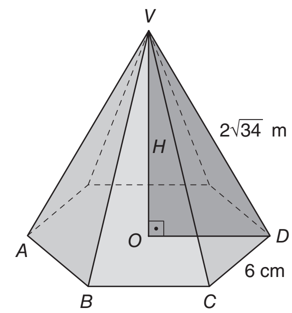
78 A área B da base da pirâmide é dada por:

$B = 6 \cdot \dfrac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ cm^2 $= 72\sqrt{3}$ cm^2

Logo, o volume V dessa pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 72\sqrt{3} \cdot 9$ cm^3 $= 216\sqrt{3}$ cm^3

79 Nomeamos os vértices e o centro O da base, conforme o esquema:



O triângulo OCD é equilátero e, portanto, $CD = OD = 6$ cm.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOD, obtemos:

$(2\sqrt{34})^2 = H^2 + 6^2 \Rightarrow H^2 = 100$

$\therefore\ H = 10$ m

A área B da base da pirâmide é dada por:

$B = 6 \cdot \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}$ m^2 $= 54\sqrt{3}$ m^2

Logo, o volume V dessa pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot 10$ m^3 $= 180\sqrt{3}$ m^3

80 A área B da base da pirâmide é dada por:

$B = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}$ cm^2 $= 9\sqrt{3}$ cm^2

Logo, o volume V dessa pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 12$ cm^3 $= 36\sqrt{3}$ cm^3

81 Sendo a a medida de uma aresta da base da pirâmide, a medida r do apótema dessa base é a terça parte da altura de um triângulo equilátero de lado a. Assim, temos:

$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\therefore\ a = 12$ dm

A área B dessa base é então dada por:

$B = \dfrac{12^2\sqrt{3}}{4}$ dm^2 $= 36\sqrt{3}$ dm^2

Portanto, o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 18$ dm^3 $= 216\sqrt{3}$ dm^3

82 O volume V_E da parte emersa é calculado por:

$V_E = \dfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 1{,}5$ km^3 $= 50$ km^3

Como esse volume corresponde a 20% do volume total V_T do *iceberg*, temos:

$V_E = 0{,}2V_T \Rightarrow V_T = \dfrac{V_E}{0{,}2}$

$\therefore\ V_T = \dfrac{50}{0{,}2}$ km^3 $= 250$ km^3

Alternativa **a**.

83 Sendo P a pirâmide original e P' a pirâmide de vértice L cuja base é a intersecção de α com P, temos que P e P' são semelhantes. Assim:

$$\frac{8}{24} = \frac{CD}{9} \Rightarrow CD = 3$$

Logo, o segmento $\overline{CD}$ mede 3 cm.

84 Sendo v o volume da pirâmide de vértice L e base S, temos:

$$\frac{48}{v} = \left(\frac{10}{5}\right)^3 \Rightarrow \frac{48}{v} = 2^3$$

$$\therefore\ v = 6\ \text{dm}^3$$

85 Sendo d a distância entre L e α, temos:

$$\frac{125}{25} = \left(\frac{20}{d}\right)^3 \Rightarrow 5 = \left(\frac{20}{d}\right)^3$$

$$\therefore\ \sqrt[3]{5} = \frac{20}{d} \Rightarrow d = \frac{20}{\sqrt[3]{5}}$$

$$\therefore\ d = 4\sqrt[3]{25}\ \text{cm}$$

Logo, a distância entre o vértice L e o plano α é $4\sqrt[3]{25}$ cm.

86 Sendo ℓ a medida do lado da secção quadrada determinada por α na pirâmide, temos:

$$\frac{\ell}{24} = \frac{12}{36} \Rightarrow \ell = 8$$

Assim, o volume V do tronco de pirâmide é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 36 - \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 12\right)\ \text{cm}^3 = 6.656\ \text{cm}^3$$

87 Sendo v o volume da pirâmide cujo vértice é o mesmo da pirâmide original P e cuja base é a secção $\alpha \cap P$, temos:

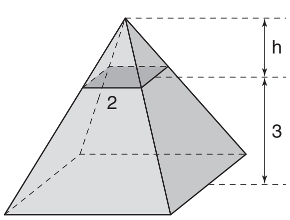
$$\frac{81}{v} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 \Rightarrow \frac{81}{v} = 3^3$$

$$\therefore\ v = 3\ \text{cm}^3$$

Logo, o volume V do tronco de pirâmide é dado por:

$$V = (81 - 3)\ \text{cm}^3 = 78\ \text{cm}^3$$

88 Prolongando as arestas laterais desse tronco de pirâmide, obtemos uma pirâmide de altura $3 + h$, em metro, conforme mostra a figura:



Assim, temos:

$$\frac{h + 3}{h} = \frac{6}{2} \Rightarrow h = 1{,}5$$

Logo, o volume V do tronco de pirâmide é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4{,}5 - \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 1{,}5\right)\ \text{m}^3 = 52\ \text{m}^3$$

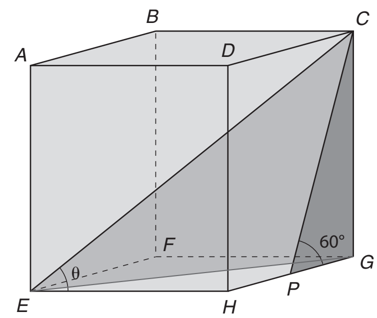
$$\therefore\ V = 52.000\ \text{dm}^3 \Rightarrow V = 52.000\ \text{L}$$

Alternativa **e**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 $\overleftrightarrow{EF} /\!/ \overleftrightarrow{HG}$; logo, o ângulo formado por $\overleftrightarrow{PC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ é congruente ao ângulo formado por $\overleftrightarrow{PC}$ e $\overleftrightarrow{HG}$ e, portanto, $m(C\hat{P}G) = 60°$.



No triângulo PCG, temos:

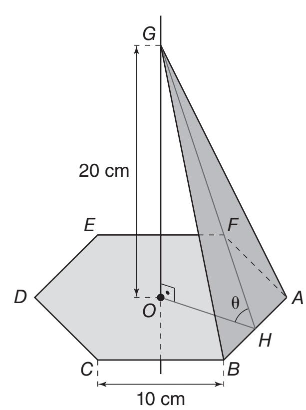
$$\text{tg}\ 60° = \frac{CG}{PG} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{CG}{8}$$

$$\therefore\ CG = 8\sqrt{3}$$

A projeção ortogonal da reta $\overleftrightarrow{EC}$ sobre o plano pl(EFG) é a reta $\overleftrightarrow{EG}$; logo, $C\hat{E}G$ é um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{EC}$ e pelo plano pl(EFG). Sendo θ a medida desse ângulo, concluímos:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{CG}{EG} = \frac{8\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30°,$$ pois θ é medida de um ângulo agudo.

2 a) Seja θ a medida do ângulo formado pelos planos pl(GAB) e α:



No hexágono regular, $\overline{OH}$ é apótema do hexágono e, portanto: $OH = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

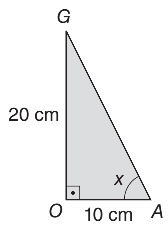
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo GOH, temos:

$$(GH)^2 = 20^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow GH = 5\sqrt{19}$$

Assim, concluímos:

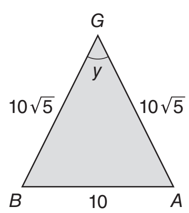
$$\text{sen}\ \theta = \frac{GO}{GH} = \frac{20}{5\sqrt{19}} = \frac{4\sqrt{19}}{19}$$

b) Seja x a medida do ângulo formado pela reta $\overleftrightarrow{GA}$ e pelo plano α:



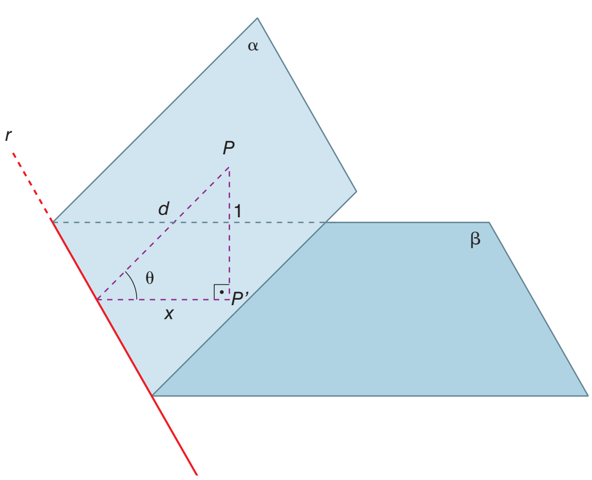
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OGA, temos:
$(GA)^2 = 20^2 + 10^2 \Rightarrow GA = 10\sqrt{5}$
Assim, concluímos:
$\text{sen } x = \dfrac{GO}{AG} = \dfrac{20}{10\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

c) Seja y a medida do ângulo $A\hat{G}B$:



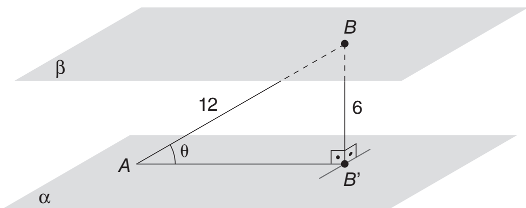
Aplicando a lei dos cossenos no triângulo AGB, temos:
$10^2 = \left(10\sqrt{5}\right)^2 + \left(10\sqrt{5}\right)^2 -$
$- 2 \cdot 10\sqrt{5} \cdot 10\sqrt{5} \cdot \cos y \Rightarrow \cos y = \dfrac{9}{10}$
Como $\cos y > 0$ e y é um ângulo interno de um triângulo, concluímos que o ângulo $A\hat{G}B$ é agudo.

3 Como a $\text{tg } \theta > 0$, temos que θ é a medida de um ângulo agudo. Assim, sendo r a intersecção de α e β, P' a projeção ortogonal de P sobre β, d a distância entre P' e r, e x a distância entre P' e r, esquematizamos:



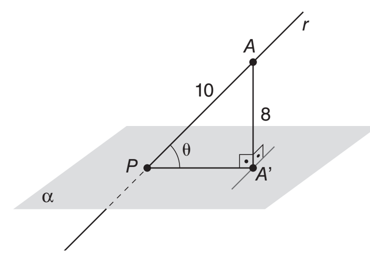
$\text{tg } \theta = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{1}{x}$
$\therefore x = \sqrt{5}$
Assim, pelo teorema de Pitágoras, concluímos:
$1^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{6}$
Alternativa **c**.

4 Sendo B' a projeção ortogonal de B sobre α e sendo θ a medida do ângulo $B\hat{A}B'$, temos:



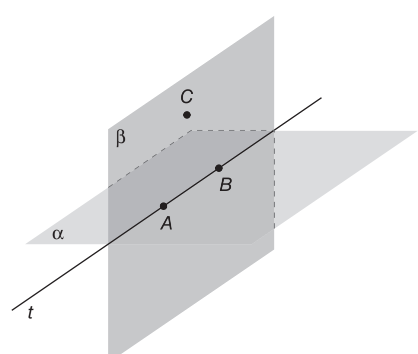
$\text{sen } \theta = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30°$, pois θ é medida de um ângulo agudo.
Logo, a medida de um ângulo obtuso formado por $\overleftrightarrow{AB}$ e α é $180° - 30°$, ou seja, $150°$.

5 Sendo A' a projeção ortogonal de A sobre α, e sendo θ a medida do ângulo $A\hat{P}A'$, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo PAA', temos:
$(PA')^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow PA' = 6$
Logo:
$\cos \theta = \dfrac{PA'}{PA} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

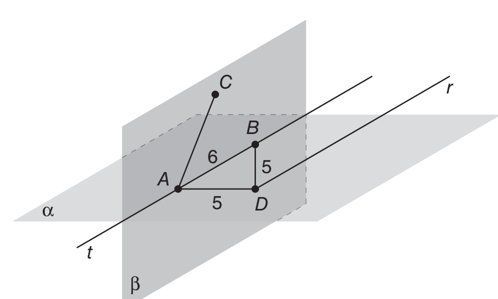
6 a)



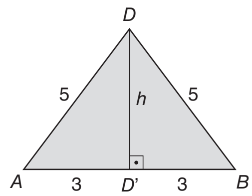
O triângulo ABC é equilátero; logo, a distância d entre C e α é a altura desse triângulo:

$d = \dfrac{6\sqrt{3}}{2}\text{ cm} = 3\sqrt{3}\text{ cm}$

b)



As retas $\overleftrightarrow{AC}$ e r são reversas. A distância entre elas é a distância h entre o ponto D e o plano β. Sendo D' a projeção ortogonal de D sobre β, temos que D' é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, pois o triângulo ADB é isósceles de base $\overline{AB}$:

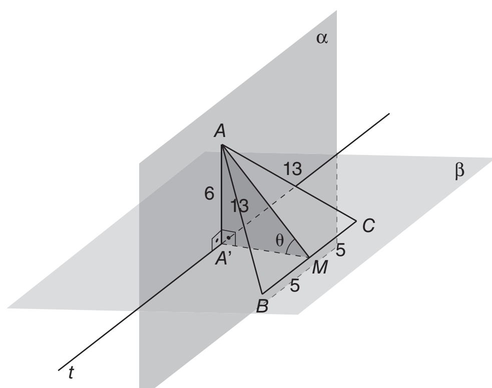


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BDD', concluímos:

$3^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$

Logo, a distância entre $\overleftrightarrow{AC}$ e r é 4 cm.

7 **a)** Sendo A' a projeção ortogonal de A sobre β, M o ponto médio de $\overline{AB}$, e θ a medida do ângulo $A\hat{M}A'$, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMC, temos:

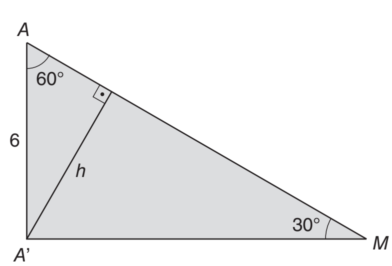
$(AM)^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow AM = 12$

Assim, obtemos:

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30°$, pois θ é medida de um ângulo agudo.

Logo, um ângulo agudo formado pelos planos $pl(ABC)$ e β mede 30°.

b) A distância d entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AM}$ e t é a medida da altura, relativa à hipotenusa, do triângulo retângulo MAA':



$\text{sen}\ 60° = \dfrac{h}{6} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{6}$

$\therefore\ h = 3\sqrt{3}$

Logo, a distância entre as retas reversas t e $\overleftrightarrow{AM}$ é $3\sqrt{3}$ cm.

8 O icosaedro possui 20 faces triangulares e, portanto, o número A de arestas é dado por:

$A = \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30$

Logo, o icosaedro em questão possui 30 arestas.

9 $A = \dfrac{10 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2} = 25$

Logo, o poliedro é constituído por 25 arestas.

10 $A = \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30$

Logo, o poliedro é constituído por 30 arestas.

11 $A = \dfrac{5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 5}{2} = 20$

Logo, o poliedro é constituído por 20 arestas.

12 $\begin{cases} F = 8 \\ A = 2V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = 8 \\ V = \dfrac{A}{2} \end{cases}$

Pela relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow \dfrac{A}{2} - A + 8 = 2$

$\therefore\ A = 12$

Logo, o poliedro possui 12 arestas.

13 O poliedro convexo é constituído por 14 faces, sendo 8 triangulares e 6 quadrangulares.

Logo, o número A de arestas do poliedro é dado por:

$A = \dfrac{8 \cdot 3 + 6 \cdot 4}{2} = 24$

Assim, pela relação de Euler, concluímos que o número V de vértices é obtido por:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 24 + 14 = 2$

$\therefore\ V = 12$

Alternativa **a**.

14 O número F de faces do poliedro convexo é dado por:

$V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - 20 + F = 2$

$\therefore\ F = 12$

Assim, sendo n o número de faces triangulares, temos que o número de faces quadrangulares do poliedro é $12 - n$; portanto:

$\dfrac{3n + 4(12 - n)}{2} = 20 \Rightarrow n = 8$

Alternativa **e**.

15 Supondo que exista tal poliedro, devemos ter:

$\begin{cases} V = A \quad \text{(I)} \\ V - A + F = 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$V - V + F = 2 \Rightarrow F = 2$ (Absurdo, pois o menor número possível de faces é 4.)

Logo, não existe poliedro convexo com número de vértices igual ao número de arestas.

16 Supondo que exista tal poliedro, devemos ter:

$\begin{cases} V + A + F = 17 \\ V - A + F = 2 \end{cases}$

Subtraindo membro a membro essas igualdades, obtemos:

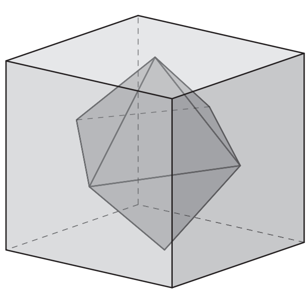
$A - (-A) = 17 - 2 \Rightarrow 2A = 15$

$\therefore A = \dfrac{15}{2}$ (Absurdo, pois o número de arestas deve ser número natural.)
Logo, não existe o suposto poliedro.

17 $\begin{cases} V = F \quad \text{(I)} \\ V - A + F = 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:
$V - A + V = 2 \Rightarrow A = 2(V - 1)$
Como $(V - 1)$ é um número natural, pois $V \in \mathbb{N}$ e $V \geqslant 4$, concluímos que $2(V - 1)$ é um número natural par. Logo, o poliedro possui um número par de arestas.

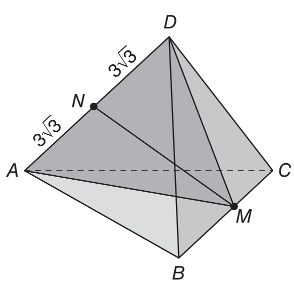
18 Dois poliedros de Platão são conjugados quando o número de vértices de qualquer um deles é igual ao número de faces do outro. Assim, o conjugado do cubo deve ter 6 vértices (pois o cubo tem 6 faces) e 8 faces (pois o cubo tem 8 vértices).
Uma maneira de determinar o conjugado do cubo é desenhar o poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo:



Assim, o conjugado do cubo é o octaedro.
Alternativa **a**.

19 Construção dos poliedros regulares em cartolina (trabalho manual).

20

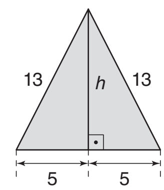


Os segmentos de reta $\overline{DM}$ e $\overline{AM}$ são alturas dos triângulos equiláteros DBC e ABC, respectivamente; logo, $DM = AM = \dfrac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9$.
O triângulo MAD é isósceles de base $\overline{AD}$; logo, a mediana $\overline{MN}$ também é altura desse triângulo. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MND, concluímos:
$(MN)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow MN = 3\sqrt{6}$
Logo, a medida do segmento $\overline{MN}$ é $3\sqrt{6}$ cm.

21 **a)** $A_\ell = (6 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 20 + 13 \cdot 20)\ \text{cm}^2 = 680\ \text{cm}^2$

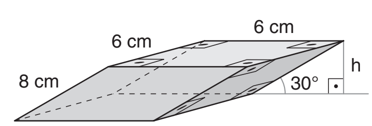
b) A área B de cada base do prisma é dada por:
$B = \dfrac{(5 + 13) \cdot 6}{2}\ \text{cm}^2 = 54\ \text{cm}^2$
Assim, a área total A_t é dada por:
$A_t = A_\ell + 2B = (680 + 2 \cdot 54)\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_t = 788\ \text{cm}^2$

22 **a)** $A_\ell = (13 \cdot 8 + 13 \cdot 8 + 10 \cdot 8)\ \text{cm}^2 = 288\ \text{cm}^2$
b) A figura a seguir é uma base desse prisma, em que h é a medida da altura relativa ao lado de 10 cm:



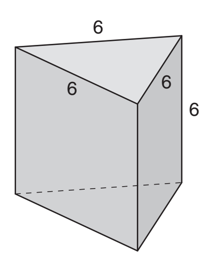
Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 144$
$\therefore h = 12$ cm
Assim, a área da base do prisma é dada por:
$B = \dfrac{10 \cdot 12}{2}\ \text{cm}^2 = 60\ \text{cm}^2$
Concluímos, então, que a área total A_t do prisma é dada por:
$A_t = A_\ell + 2B = (288 + 2 \cdot 60)\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_t = 408\ \text{cm}^2$

23 **a)** Sendo h a altura do prisma, temos:



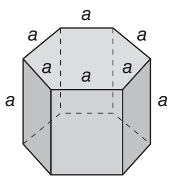
$\text{sen } 30° = \dfrac{h}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{h}{8}$
$\therefore h = 4$ cm
b) $A_\ell = (2 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 8)\ \text{cm}^2 = 144\ \text{cm}^2$
c) A área B de cada base do prisma é dada por:
$B = 6^2\ \text{cm}^2 = 36\ \text{cm}^2$
Assim, a área total A_t desse prisma é dada por:
$A_t = A_\ell + 2B = (144 + 2 \cdot 36)\ \text{cm}^2 = 216\ \text{cm}^2$

24 Sendo a a medida de cada aresta do prisma, temos que a área B de cada base é a área de um triângulo equilátero de lado a; logo:
$B = 9\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$
$\therefore a^2 = 36$
$\therefore a = 6$ m



Assim, a área total A_t desse prisma é dada por:
$A_t = A_\ell + 2B = \left(3 \cdot 6^2 + 2 \cdot \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}\right)\ \text{m}^2$
$\therefore A_t = 18\left(6 + \sqrt{3}\right)\ \text{m}^2$

25 Sendo a a medida de cada aresta do prisma, temos:



$A_\ell = 6a^2$

$A_T = A_\ell + 2B = 6a^2 + 2 \cdot \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^2\left(2 + \sqrt{3}\right)$

Logo:

$\dfrac{A_T}{A_\ell} = \dfrac{3a^2\left(2 + \sqrt{3}\right)}{6a^2} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}$

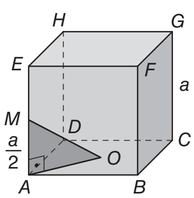
26 A distância máxima entre dois vértices do paralelepípedo reto-retângulo é a medida D de uma diagonal, ou seja:

$D = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{169}$

$\therefore\ D = 13$ cm

Logo, a distância máxima entre dois vértices desse paralelepípedo é 13 cm.

27 Sendo O o centro do quadrado $ABCD$, temos que $\overline{MO}$ é hipotenusa do triângulo retângulo MOA.



$\overline{OA}$ é a metade da diagonal da face $ABCD$; logo, $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MOA, temos:

$(MO)^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow (MO)^2 = \dfrac{3a^2}{4}$

$\therefore\ MO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Alternativa **c**.

28 Sendo a a medida da aresta do cubo de diagonal $D = \sqrt{75}$ cm, temos:

$D = \sqrt{75} \Rightarrow a\sqrt{3} = \sqrt{75}$

$\therefore\ a = \dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{25}$

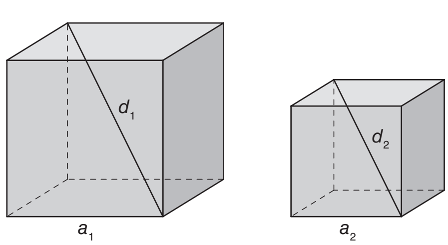
$\therefore\ a = 5$ cm

Assim, concluímos:

a) $A_T = 6 \cdot 5^2\ \text{cm}^2 = 150\ \text{cm}^2$

b) $A_\ell = 4 \cdot 5^2\ \text{cm}^2 = 100\ \text{cm}^2$

29 Sendo a_1 e a_2 as medidas das arestas dos cubos I e II, respectivamente, temos:



$\begin{cases} d_2 = 3 \\ S_1 - S_2 = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2\sqrt{3} = 3 \\ 6a_1^2 - 6a_2^2 = 54 \end{cases}$

$\therefore\ a_2 = \sqrt{3}$ m e $a_1 = 2\sqrt{3}$ m

Como $d_1 = a_1\sqrt{3}$, obtemos: $d_1 = 6$ m.

Assim, concluímos:

$\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{6}{3} = 2$

Alternativa **c**.

30 Sendo a, b e c as dimensões do paralelepípedo, temos que a área total A_t é dada por:

$A_t = 2ab + 2ac + 2bc$

Assim:

$\begin{cases} 4a + 4b + 4c = 140 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 35 & \text{(I)} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 441 & \text{(II)} \end{cases}$

Quadrando os membros da igualdade (I), obtemos:

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 1.225 \quad \text{(III)}$

Substituindo (II) em (III), obtemos:

$441 + 2ab + 2ac + 2bc = 1.225 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ab + 2ac + 2bc = 784$

Concluímos, então, que a área total A_t do paralelepípedo é 784.

Alternativa **b**.

31 Sendo c, l e h as dimensões do paralelepípedo, temos:

$\dfrac{c}{2} = \dfrac{l}{\frac{1}{3}} = \dfrac{h}{\frac{3}{2}} = k \Rightarrow c = 2k;\ l = \dfrac{k}{3};\ h = \dfrac{3k}{2}$

Assim:

$A_T = 300 \Rightarrow 2\left(\dfrac{2k^2}{3} + 3k^2 + \dfrac{k^2}{2}\right) = 300$

$\therefore\ \dfrac{4k^2 + 18k^2 + 3k^2}{6} = 150 \Rightarrow k^2 = 36$

$\therefore\ k = 6$

Logo, as dimensões do paralelepípedo são 12 cm, 2 cm e 9 cm e, portanto, o volume V desse poliedro é dado por:

$V = 12 \cdot 2 \cdot 9\ \text{cm}^3 = 216\ \text{cm}^3$

32 O volume V desse sólido pode ser calculado com a diferença dos volumes de dois paralelepípedos reto-retângulos: o maior de dimensões x cm, x cm e $\dfrac{x}{2}$ cm, e o menor de dimensões 2 cm, 3 cm e $\dfrac{x}{2}$ cm, ou seja:

$V = \left(x \cdot x \cdot \dfrac{x}{2} - 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{x}{2}\right)\ \text{cm}^3 = \dfrac{x^3 - 6x}{2}\ \text{cm}^3$

Alternativa **a**.

33 Sendo a a medida da aresta do cubo de volume $V = 1.000\ \text{cm}^3$, temos:

$V = 1.000 \Rightarrow a^3 = 1.000$

$\therefore\ a = 10$ cm

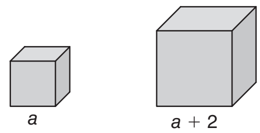
Assim, concluímos:

a) $D = 10\sqrt{3}$ cm

b) $A_T = 6 \cdot 10^2 = 600\ \text{cm}^2$

c) $A_\ell = 4 \cdot 10^2 = 400\ \text{cm}^2$

34 Sendo A_{T1} e A_{T2} as áreas totais do cubo C_1 e do cubo C_2, respectivamente, temos:

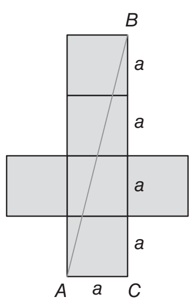


$A_{T1} = 6a^2$ $A_{T2} = 6(a + 2)^2$

a) $A_{T2} = A_{T1} + 216 \Rightarrow 6(a + 2)^2 = 6a^2 + 216$
$\therefore 6(a^2 + 4a + 4) = 6a^2 + 216 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6a^2 + 24a + 24 = 6a^2 + 216$
$\therefore a = 8$ cm
Logo, a aresta do cubo C_1 mede 8 cm.

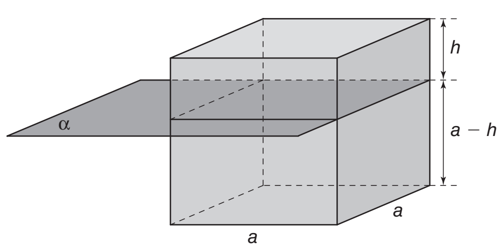
b) O volume V do cubo C_2 é dado por:
$V = (8 + 2)^3 \text{ cm}^3 = 1.000 \text{ cm}^3$

35 Sendo a a medida da aresta do cubo, temos:



Aplicamos o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, obtendo: $\left(\sqrt{68}\right)^2 = a^2 + (4a)^2 \Rightarrow 68 = 17a^2$
$\therefore a = 2$ cm
Logo, o volume V do cubo é dado por:
$V = 2^3 \text{ cm}^3 = 8 \text{ cm}^3$
Alternativa **a**.

36 Sendo a a medida de cada aresta do cubo e sendo h a distância entre α e uma face paralela do cubo, esquematizamos:



Supondo que o paralelepípedo maior seja o de altura $a - h$, temos:
$a \cdot a \cdot (a - h) = 2 \cdot a \cdot a \cdot h \Rightarrow a - h = 2h$

$\therefore h = \dfrac{a}{3}$

As áreas totais A_t e A_T dos paralelepípedos menor e maior, respectivamente, são dadas por:

$$A_t = 2\left(a \cdot a + a \cdot \frac{a}{3} + a \cdot \frac{a}{3}\right) = \frac{10a^2}{3}$$

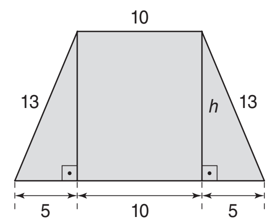
e

$$A_T = 2\left(a \cdot a + a \cdot \frac{2a}{3} + a \cdot \frac{2a}{3}\right) = \frac{14a^2}{3}$$

Logo:

$$\frac{A_t}{A_T} = \frac{\frac{10a^2}{3}}{\frac{14a^2}{3}} = \frac{5}{7}$$

37 Sendo h a altura do trapézio de uma base do prisma, temos:



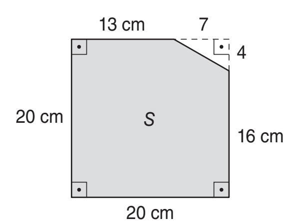
$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 144$
$\therefore h = 12$ cm

A área B desse trapézio é dada por:

$$B = \frac{(10 + 20) \cdot 12}{2} \text{ cm}^2 = 180 \text{ cm}^2$$

Logo, o volume V do prisma é dado por:
$V = 180 \cdot 15 \text{ cm}^3 = 2.700 \text{ cm}^3$

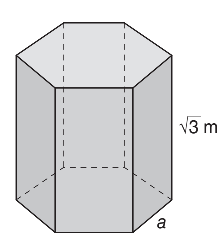
38 A área B do pentágono é a diferença entre a área de um quadrado de lado 20 cm e a de um triângulo retângulo de catetos 7 cm e 4 cm:



$$B = \left(20^2 - \frac{7 \cdot 4}{2}\right) \text{ cm}^2 = 386 \text{ cm}^2$$

Logo, o volume V do prisma é dado por:
$V = 386 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 3.860 \text{ cm}^3$

39 Sendo a a medida de uma aresta da base, temos:



A área lateral A_ℓ e a área B da base do prisma são dadas por:

$A_\ell = 6a\sqrt{3} \text{ cm}^2$ e $B = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

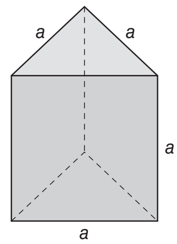
Assim:

$A_\ell = B \Rightarrow 6a\sqrt{3} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a = 4$ m

Logo, $B = \dfrac{3 \cdot 4^2\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2 = 24\sqrt{3} \text{ m}^2$ e, portanto, o volume V do prisma é dado por:
$V = 24\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \text{ m}^3 = 72 \text{ m}^3$

40 Sendo a a medida de cada aresta e V o volume do prisma, temos:



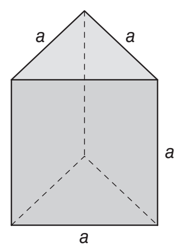
$V = 54\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = 54\sqrt{3}$

$\therefore\ a = 6$ cm

Logo, a área lateral A_ℓ desse prisma é dada por:

$A_\ell = 3 \cdot 6^2\ \text{cm}^2 = 108\ \text{cm}^2$

41 Sendo a a medida de cada aresta e A_T a área total do prisma, esquematizamos:



$A_T = 8(6 + \sqrt{3}) \Rightarrow 3a^2 + \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{4} = 8(6 + \sqrt{3})$

$\therefore\ a^2 \cdot \sqrt{3} + 6a^2 = 16(6 + \sqrt{3}) \Rightarrow$

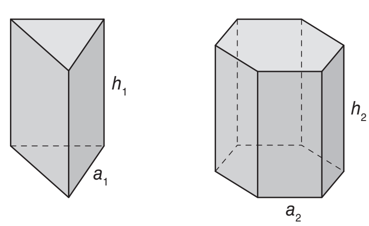
$\Rightarrow a^2(6 + \sqrt{3}) = 16(6 + \sqrt{3})$

$\therefore\ a = 4$ m

Logo, o volume V do prisma é dado por:

$V = 4\sqrt{3} \cdot 4\ \text{m}^3 = 16\sqrt{3}\ \text{m}^3$

42 Sendo a_i, h_i, B_i, A_i e V_i, respectivamente, a medida da aresta da base, a altura, a área da base, a área lateral e o volume do prisma P_i, temos:



$$\begin{cases} B_1 = B_2 \\ A_1 = A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a_2^2\sqrt{3}}{2} & \text{(I)} \\ 3a_1h_1 = 6a_2h_2 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) obtemos: $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

De (II) obtemos: $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{h_1}{2h_2}$

Logo: $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ (III)

Calculando $\dfrac{V_1}{V_2}$, temos:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\dfrac{a_1^2\sqrt{3}}{4} \cdot h_1}{\dfrac{3a_2^2\sqrt{3}}{2} \cdot h_2} \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (I) em (IV), obtemos:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

por (III)

Alternativa **b**.

43 Cada base do prisma é um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 8 cm; logo, a área B de cada base é dada por:

$B = \dfrac{6 \cdot 8}{2}\ \text{cm}^2 = 24\ \text{cm}^2$

Sendo h a altura desse prisma e V o seu volume, temos:

$V = 120 \Rightarrow 24h = 120$

$\therefore\ h = 5$ cm

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DEF, obtemos:

$(DF)^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow (DF)^2 = 100$

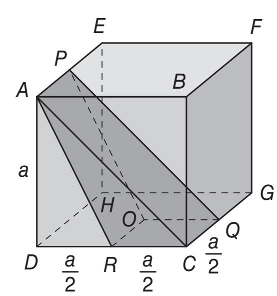
$\therefore\ DF = 10$ cm

Concluímos, então, que a área total A_T desse prisma é dada por:

$A_T = (2 \cdot 24 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 5)\ \text{cm}^2 = 168\ \text{cm}^2$

Alternativa **d**.

44 Sendo a a medida da aresta do cubo, temos:



A área S do triângulo ARC é a diferença entre as áreas dos triângulos ADC e ADR, isto é:

$S = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a \cdot a}{2 \cdot 2} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$

Assim, o volume V do prisma $ACRPQO$, em função de a, é dado por:

$V = \dfrac{a^2}{4} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{8}$

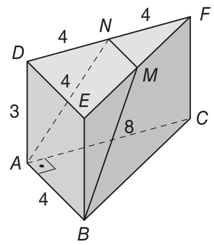
Como V = 24, concluímos:

$\dfrac{a^3}{8} = 24 \Rightarrow a = \sqrt[3]{192}$

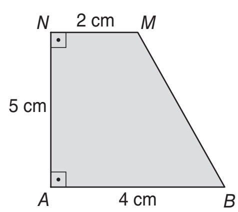
$\therefore\ a = 4\sqrt[3]{3}$ cm

Alternativa **c**.

45



a) $\overline{MN}$ é base média do triângulo FDE; logo, $\overline{MN} /\!/ \overline{DE}$ e $MN = 2$ cm.
Como $\overline{MN} /\!/ \overline{DE}$ e $\overline{DE} /\!/ \overline{AB}$, temos que $\overline{MN} /\!/ \overline{AB}$; logo, o quadrilátero $ABMN$ é um trapézio.
As retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são perpendiculares ao plano pl(ADF); logo, $\overline{MN} \perp \overline{AN}$ e $\overline{AB} \perp \overline{AN}$. Portanto, $ABMN$ é um trapézio retângulo.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ADM, obtemos:
$(AN)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow (AN)^2 = 25$
$\therefore\ AN = 5$ cm
Concluímos, então, que a área S do trapézio $ABMN$ é dada por:

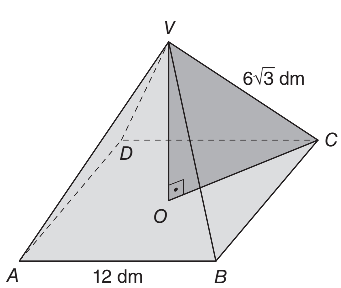


$$S = \frac{(2 + 4) \cdot 5}{2}\ \text{cm}^2 = 15\ \text{cm}^2$$

b) O volume do sólido $ABEDMN$ é metade do volume de um prisma de altura DA e base $DEMN$; logo, o volume V desse sólido é dado por:

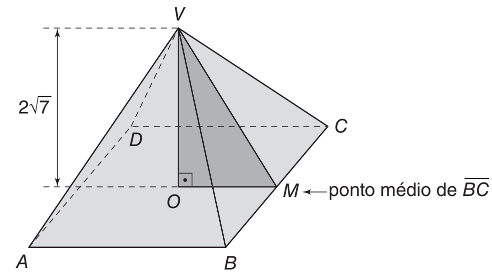
$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2 + 4) \cdot 4}{2} \cdot 3\ \text{cm}^3 = 18\ \text{cm}^3$$

46 Nomeamos os vértices e o centro O da base da pirâmide conforme o esquema:



$\overline{OC}$ é a metade da diagonal do quadrado $ABCD$; logo:
$OC = 6\sqrt{2}$ cm
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, concluímos:
$(VO)^2 + (6\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow (VO)^2 = 36$
$\therefore\ VO = 6$ dm
Logo, a altura da pirâmide é 6 dm.

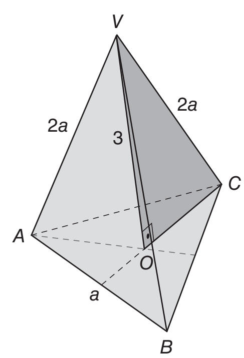
47 Nomeamos os vértices e o centro O da base da pirâmide segundo o esquema:



Sendo a a medida de uma aresta da base, temos:
$a^2 = 144 \Rightarrow a = 12$
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtemos:
$(VM)^2 = (2\sqrt{7})^2 + 6^2 \Rightarrow (VM)^2 = 64$
$\therefore\ VM = 8$ cm
Concluímos, então, que a área total A_T dessa pirâmide é dada por:

$$A_T = \left(4 \cdot \frac{12 \cdot 8}{2} + 12^2\right) \text{cm}^2 = 336\ \text{cm}^2$$

48 No esquema, nomeamos os vértices da pirâmide e o centro O da base, indicando por a a medida de cada aresta da base:



Cada altura do triângulo ABC mede $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e, portanto:

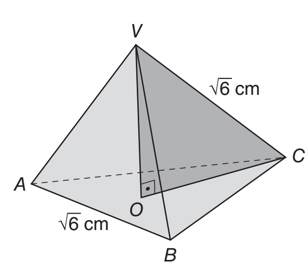
$$OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, obtemos:

$$(2a)^2 = 3^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow a^2 = \frac{27}{11}$$

$$\therefore\ a = \sqrt{\frac{27}{11}}\ \text{m}$$

49 Indicando o tetraedro por $VABC$, em que O é o centro da base ABC, temos:



Cada altura da base ABC mede $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm e, portanto: $OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm $= \sqrt{2}$ cm

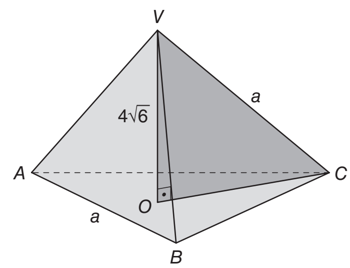
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, obtemos:

$(VO)^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 \Rightarrow (VO)^2 = 4$

$\therefore$ $VO = 2$ cm

Alternativa **d**.

50 No esquema, nomeamos os vértices da pirâmide e o centro O da base, indicando por a a medida de cada aresta:



Cada altura da base é dada por $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; logo:

$OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, obtemos:

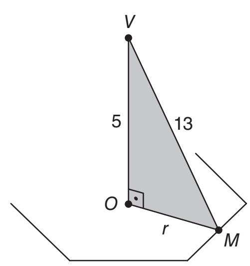
$a^2 = (4\sqrt{6})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 144$

$\therefore$ $a = 12$ cm

Assim, concluímos que a área total A_T do tetraedro é dada por:

$A_T = 4 \cdot \frac{12^3 \cdot \sqrt{3}}{4}$ cm^2 $= 144\sqrt{3}$ cm^2

51 Sendo r a medida do apótema da base da pirâmide, temos:

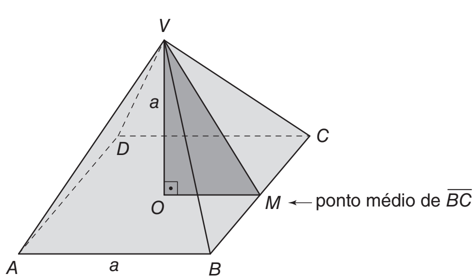


$13^2 = 5^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 144$

$\therefore$ $r = 12$ cm

Logo, o apótema da base mede 12 cm.

52 Indicando a pirâmide por $VABCD$, em que O é o centro da base $ABCD$ e a é a medida de cada aresta da base, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtemos:

$(VM)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow (VM)^2 = \frac{5a^2}{4}$

$\therefore$ $VM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Assim, a área lateral A_ℓ é dada por:

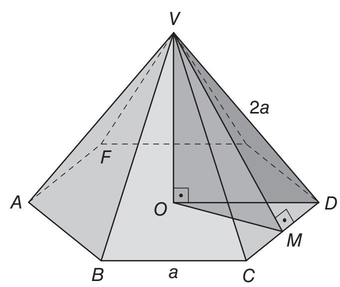
$A_\ell = 4 \cdot \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{2} = a^2\sqrt{5}$

Concluímos calculando $\frac{A_\ell}{S}$, em que S é a área da base da pirâmide:

$\frac{A_\ell}{S} = \frac{a^2\sqrt{5}}{a^2} = \sqrt{5}$

Logo, a razão $\frac{A_\ell}{S}$ é $\sqrt{5}$.

53 Indicando a pirâmide por $VABCDEF$, em que O é o centro da base $ABCDEF$, M é o ponto médio de $\overline{CD}$ e a é a medida de cada aresta da base, temos:



$\overline{OM}$ é altura do triângulo equilátero OCD; logo, $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos VOD e VOM, obtemos:

$$\begin{cases} (VO)^2 + a^2 = (2a)^2 \\ (VO)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (VM)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} VO = a\sqrt{3} & \text{(I)} \\ (VO)^2 + \frac{3a^2}{4} = (VM)^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

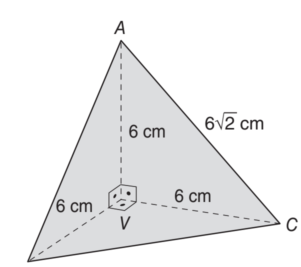
Substituindo (I) em (II), temos:

$(a\sqrt{3})^2 + \frac{3a^2}{4} = (VM)^2 \Rightarrow VM = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

Concluímos calculando a razão entre a altura e a medida do apótema dessa pirâmide:

$\frac{VO}{VM} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

54 Indicando por V o vértice do triedro trirretângulo e por A, B e C os vértices da base da pirâmide, temos:



A área lateral A_ℓ e a área S da base *ABC* são dadas por:

$$A_\ell = 3 \cdot \frac{6 \cdot 6}{2}\ \text{cm}^2 = 54\ \text{cm}^2$$

$$S = \frac{(6\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Logo, a área total A_T é dada por:

$A_T = A_\ell + S = (54 + 18\sqrt{3})\ \text{cm}^2 = 18(3 + \sqrt{3})\ \text{cm}^2$

55 Cada um dos triângulos *EHG*, *GCB* e *BAE* tem área S_R dada por:

$$S_R = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}^2 = 36\ \text{cm}^2$$

Cada face do cubo tem área S_F dada por:

$S_F = (6\sqrt{2})^2\ \text{cm}^2 = 72\ \text{cm}^2$

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos *EHG*, *GCB* e *BAE*, obtemos $BG = EG = EB = 12$ cm; logo, o triângulo equilátero *BEG* tem área S_E dada por:

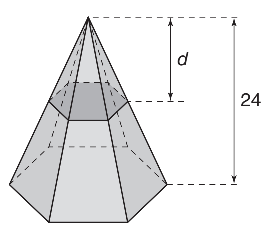
$$S_E = \frac{12^2\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Concluímos, então, que a área total S do poliedro remanescente é dada por:

$S = 3S_R + 3S_F + S_E = (3 \cdot 36 + 3 \cdot 72 + 36\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

$\therefore\ S = 36(9 + \sqrt{3})\ \text{cm}^2$

56 Sendo *d* a distância do vértice da pirâmide ao plano da secção transversal, temos:



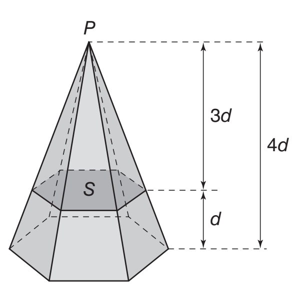
Sendo *b* a área da secção transversal, temos que a área da base é 4*b* e, portanto:

$$\frac{4b}{b} = \left(\frac{24}{d}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{24}{d}$$

$\therefore\ d = 12$ cm

Logo, o vértice da pirâmide dista 12 cm do plano da secção transversal.

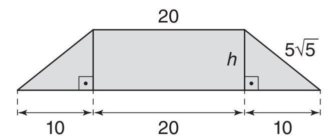
57 Sendo *d* a distância entre β e o plano da base da pirâmide, e A_S a área da secção S, temos:



$$\frac{80}{A_S} = \left(\frac{4d}{3d}\right)^2 \Rightarrow A_S = 45$$

Logo, a área da secção transversal é 45 cm².

58 Sendo *h* a altura do trapézio da base da pirâmide, temos:



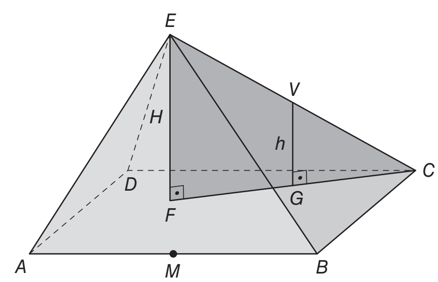
$h^2 = (5\sqrt{5})^2 - 10^2 \Rightarrow h^2 = 25$

$\therefore\ h = 5$ cm

Logo, o volume V do prisma é dado por:

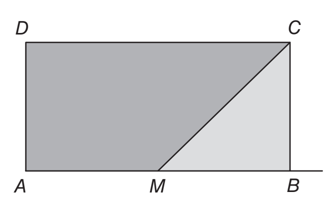
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(20 + 40) \cdot 5}{2} \cdot 30\ \text{cm}^3 = 1.500\ \text{cm}^3$$

59 Sendo F e G as projeções ortogonais de E e V sobre o plano da base da pirâmide, temos que $\overline{VG}$ é base média do triângulo *EFG* e, portanto, $VG = \frac{EF}{2}$. Assim, indicando por *H* e *h* as alturas das pirâmides *EABCD* e *VAMCD*, respectivamente, temos:



$$h = \frac{H}{2}$$

Observamos que a área S_Q do quadrilátero *AMCD* é $\frac{3}{4}$ da área S_R do retângulo *ABCD*:



Assim, indicando por U_Q e U_R os volumes das pirâmides *VAMCD* e *EABCD*, respectivamente, temos:

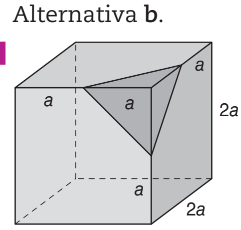
$$U_Q = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_R \cdot \frac{H}{2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_R \cdot H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_Q = \frac{3}{8} \cdot U_R$$

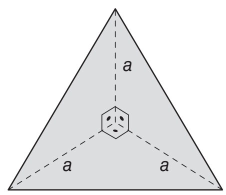
Logo, $U_Q = \frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Alternativa **b**.

60



O sólido retirado é um tetraedro com um triedro trirretangular.

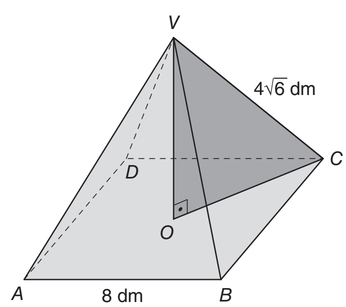


O volume V desse tetraedro é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$

Alternativa **a**.

61 Indicando a pirâmide por $VABCD$ e por O o centro da base $ABCD$, temos:



$\overline{OC}$ é metade da diagonal do quadrado $ABCD$; logo, $OC = \frac{8\sqrt{2}}{2}$ dm $= 4\sqrt{2}$ dm.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, obtemos:

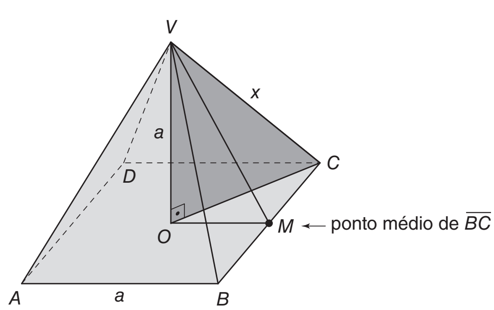
$\left(4\sqrt{6}\right)^2 = (VO)^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow (VO)^2 = 64$

$\therefore\ VO = 8$ dm

Logo, o volume V da pirâmide é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 8\ \text{dm}^3 = \frac{512}{3}\ \text{dm}^3$

62 Indicando a pirâmide por $VABCD$, em que O é o centro da base $ABCD$, a é a medida da aresta da base e x é a medida da aresta lateral, temos:



a) Como o volume V é 72 cm^3, temos:

$72 = \frac{1}{3} a^2 \cdot a \Rightarrow a^3 = 216$

$\therefore\ a = 6$ cm

$\overline{OC}$ é a metade da diagonal do quadrado $ABCD$ e, portanto, $OC = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, temos: $x^2 = 6^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 54$

$\therefore\ x = 3\sqrt{6}$ cm

Logo, cada aresta lateral da pirâmide mede $3\sqrt{6}$ cm.

b) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VMO, temos:

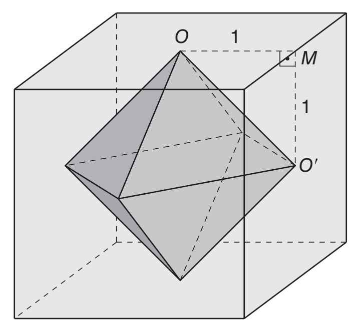
$(VM)^2 = 6^2 + 3^2 \Rightarrow (VM)^2 = 45$

$\therefore\ VM = 3\sqrt{5}$ cm

Concluímos, então, que a área total da pirâmide é dada por:

$A_T = \left(4 \cdot \frac{6 \cdot 3\sqrt{5}}{2} + 6^2\right) \text{cm}^2 = 36\left(\sqrt{5} + 1\right) \text{cm}^2$

63 Unindo os centros O e O' de duas faces adjacentes do cubo ao ponto médio M da aresta comum a essas faces, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMO', obtemos:

$(OO')^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow OO' = \sqrt{2}$

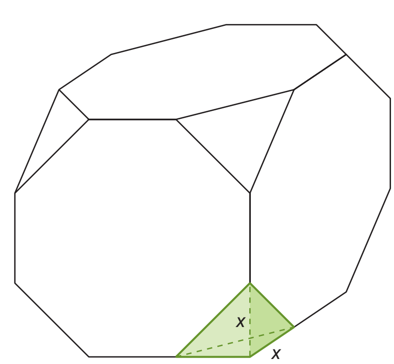
O volume V do octaedro é duas vezes o volume da pirâmide quadrangular regular da aresta da base $\sqrt{2}$ e altura 1; logo:

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{4}{3}$

Alternativa **b**.

64 **a)** Para cada face do cubo, o poliedro ficou com uma face octogonal; e para cada vértice do cubo ele ficou com uma face triangular. Assim, o poliedro é constituído por 6 faces octogonais e 8 faces triangulares, perfazendo um total de 14 faces.

b) Em cada pirâmide retirada, podemos supor como base um triângulo retângulo isósceles; portanto, a altura tem a mesma medida x dos catetos da base.



Assim, o volume V_R de cada pirâmide retirada é dado por:

$V_R = \frac{1}{3} \cdot \frac{x \cdot x}{2} \cdot x = \frac{x^3}{6}$

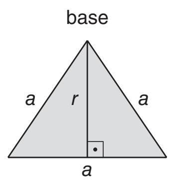
Logo, o volume V_P do poliedro é dado por:

$$V_P = a^3 - 8V_R = a^3 - \frac{4x^3}{3}$$

Como o volume do poliedro deve ser $\frac{5}{6}$ do volume do cubo, concluímos:

$$a^3 - \frac{4x^3}{3} = \frac{5a^3}{6} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

65 Sendo a a medida da aresta da base da pirâmide, temos que a medida r do apótema da base é a altura de um triângulo equilátero de lado a:



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim, temos:

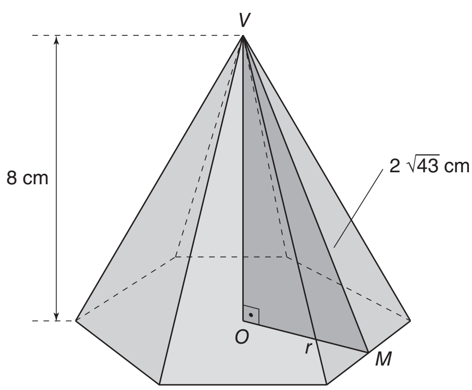
$$r = 4\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$\therefore\ a = 8$ cm

Logo, o volume V da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \text{ cm}^3 = 32\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

66 Sendo V, O e M, respectivamente, o vértice, o centro da base e o ponto médio de uma aresta da base da pirâmide, com $OM = r$, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtemos:

$$(2\sqrt{43})^2 = 8^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 108$$

$\therefore\ r = 6\sqrt{3}$ cm

Sendo a a medida de cada aresta da base da pirâmide, temos que r é a altura de um triângulo equilátero de lado a; logo:

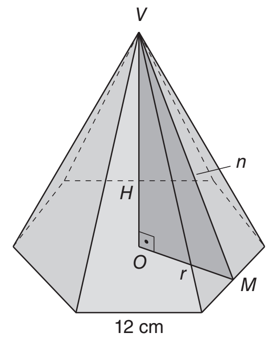
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\ a = 12$ cm

Concluímos, então, que o volume V da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 8 \text{ cm}^3 = 96\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

67 Sendo V, O e M, respectivamente, o vértice, o centro da base e o ponto médio de uma aresta da base da pirâmide, com $VO = H$, $OM = r$ e $VM = n$, temos:



$$A_\ell = 432 \Rightarrow 6 \cdot \frac{12n}{2} = 432$$

$\therefore\ n = 12$ cm

$\overline{OM}$ é o apótema da base e, portanto:

$$r = \frac{12\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtemos:

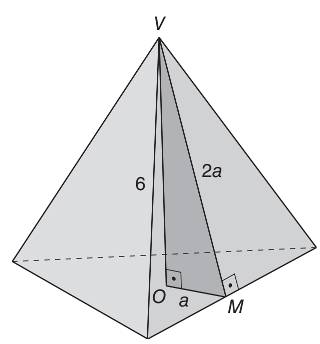
$$12^2 = H^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow H^2 = 36$$

$\therefore\ H = 6$ cm

Logo, o volume V da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \text{ cm}^3 = 72\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

68 Sendo V, O e M, respectivamente, o vértice, o centro da base e o ponto médio de uma aresta da base da pirâmide, com $OM = a$ e $VM = 2a$, temos:



$$(2a)^2 = a^2 + 6^2 \Rightarrow a^2 = 12$$

$\therefore\ a = 2\sqrt{3}$ cm

Sendo ℓ a medida de cada aresta da base, temos que a medida do apótema da base é a terça parte da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ, ou seja:

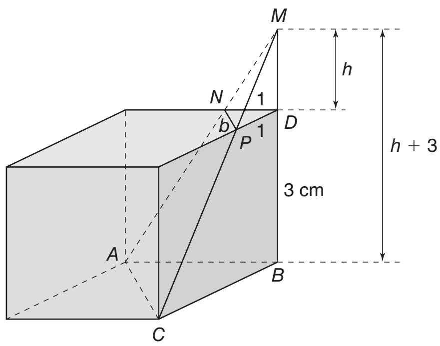
$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$$

$\therefore\ \ell = 12$ cm

Concluímos, então, que o volume V da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \text{ cm}^3 = 72\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

69 Sendo h a medida da altura da pirâmide $MNPD$, temos:



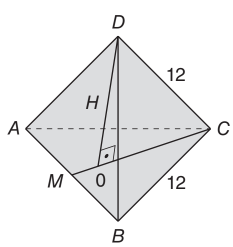
$\frac{h}{h+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow h = \frac{3}{2}$

Logo, o volume V da pirâmide $MNPD$ é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$

Alternativa **b**.

70 Seja $PABC$ o tetraedro regular de aresta 12 cm, em que O é o centro da base ABC, M é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$ e $OP = H$.



Temos:

$MC = \frac{12\sqrt{3}}{2}$ cm $= 6\sqrt{3}$ cm e

$OC = \frac{2MC}{3} = 4\sqrt{3}$ cm

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo POC, obtemos:

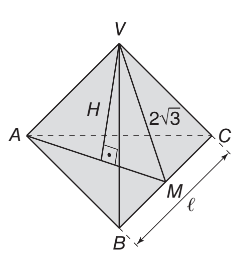
$122 = H^2 + (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow H^2 = 96$

$\therefore\ H = 4\sqrt{6}$ cm

Concluímos, então, que o volume V do tetraedro é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{6}\ \text{cm}^3 = 144\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

71 Seja $VABC$ o tetraedro regular de apótema $2\sqrt{3}$ cm, em que O é o centro da base ABC, M é o ponto médio de $\overline{BC}$, $BC = \ell = VO = H$.



O apótema do tetraedro regular é a altura do triângulo equilátero da face; logo:

$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 4$

A medida OM do apótema da base é a terça parte da medida da altura de um triângulo equilátero de lado 4 cm; logo:

$OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtemos:

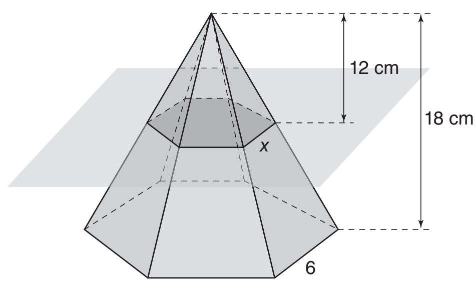
$H^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow H^2 = \frac{96}{9}$

$\therefore\ H = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm

Logo, o volume V do tetraedro é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3}\ \text{cm}^3 = \frac{16\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$

72 Sendo x a medida do lado da secção transversal, temos:



$\frac{x}{6} = \frac{12}{18} \Rightarrow x = 4$

Alternativa **c**.

73 **a)** Sendo V e v, respectivamente, os volumes da pirâmide maior e da menor, temos:

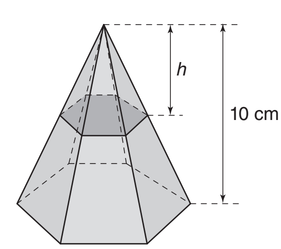
$\frac{V}{v} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^3 \Rightarrow \frac{9v}{v} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^3$

$\therefore\ \frac{A'B'}{AB} = \sqrt[3]{9}$

b) Sendo S e s, respectivamente, as áreas das faces $OA'B'$ e OAB, temos:

$\frac{S}{s} = (\sqrt[3]{9})^2 = \sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$

74 Sendo v o volume de cada um desses dois sólidos e h a distância entre o vértice da pirâmide e o plano α, temos:



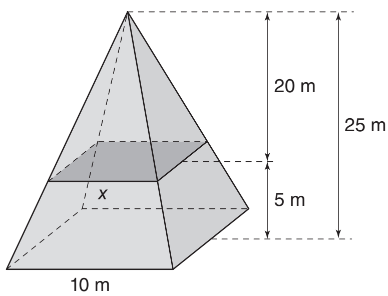
$\frac{2v}{v} = \left(\frac{10}{h}\right)^3 \Rightarrow 2 = \left(\frac{10}{h}\right)^3$

$\therefore \dfrac{10}{h} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow h = \dfrac{10}{\sqrt[3]{2}}$

$\therefore h = \dfrac{10\sqrt[3]{4}}{2}$ cm $= 5\sqrt[3]{4}$ cm

Logo, a distância entre o vértice da pirâmide e o plano α é $5\sqrt[3]{4}$ cm.

75 Sendo x a medida do lado da secção, temos:



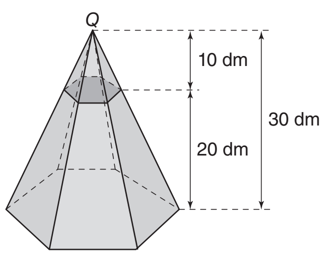
$\dfrac{x}{10} = \dfrac{20}{25} \Rightarrow x = 8$

Assim, o volume V do tronco de pirâmide é dado por:

$V = \left(\dfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 25 - \dfrac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 20\right) \text{cm}^3 = \dfrac{1.220}{3} \text{ cm}^3$

Alternativa **c**.

76 Indicando por P a pirâmide original, sejam Q o seu vértice e V o seu volume.



$V = 1.080 \text{ cm}^3$

Sendo v o volume do vértice Q cuja base é a secção que α determina em P, temos:

$\dfrac{1.080}{v} = \left(\dfrac{30}{10}\right)^3 \Rightarrow \dfrac{1.080}{v} = 27$

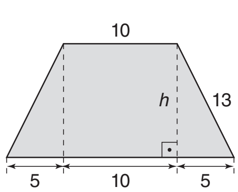
$\therefore v = 40 \text{ dm}^3$

Logo, o volume U do tronco de pirâmide é dado por:

$U = V - v \Rightarrow U = (1.080 - 40) \text{ dm}^3$

$\therefore U = 1.040 \text{ dm}^3$

77 **a)** Sendo h a altura do trapézio de uma face lateral do tronco, temos:



$h^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow h^2 = 144$

$\therefore h = 12$ cm

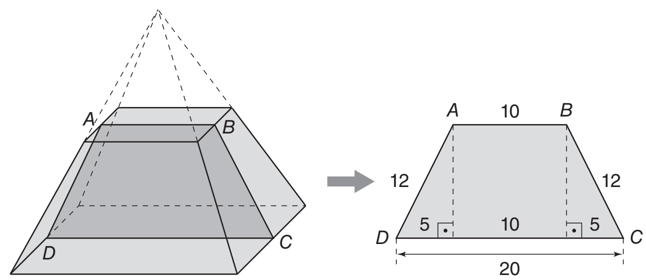
Logo, a área lateral A_ℓ do tronco é dada por:

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{(20 + 10)\,12}{2} \text{ cm}^2 = 720 \text{ cm}^2$

b) A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das bases, ou seja:

$A_T = (720 + 100 + 400) \text{ cm}^2 = 1.220 \text{ cm}^2$

c) A altura H do tronco é a altura de um trapézio isósceles de lados 10 cm, 20 cm, 12 cm e 12 cm:

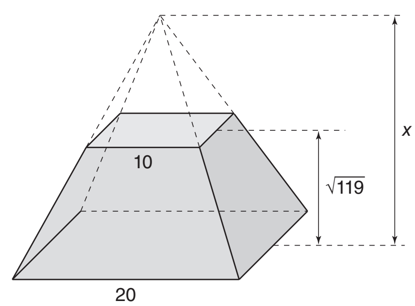


$H^2 + 5^2 = 12^2 \Rightarrow H^2 = 119$

$\therefore H = \sqrt{119}$

Logo, a altura do tronco é $\sqrt{119}$ cm.

d) Sendo x a medida da altura da pirâmide que contém esse tronco, temos:



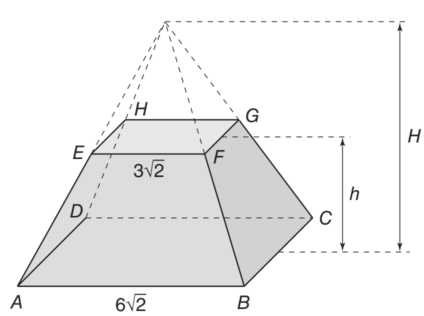
$\dfrac{x}{\sqrt{119}} = \dfrac{20}{10} \Rightarrow x = 2\sqrt{119}$

Logo, o volume V do tronco é dado por:

$V = \left(\dfrac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 2\sqrt{119} - \dfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{119}\right) \text{cm}^3 =$

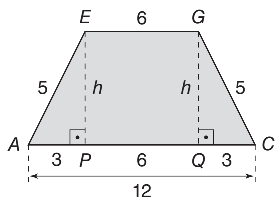
$= \dfrac{700\sqrt{119}}{3} \text{ cm}^3$

78 Nomeamos os vértices do tronco e os vértices da pirâmide que o contém, segundo o esquema abaixo, em que H é a altura da pirâmide e h é a altura do tronco:



$\overline{EG}$ é diagonal do quadrado $EFGH$ e, portanto, $EG = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ dm $= 6$ dm.

$\overline{AC}$ é diagonal do quadrado $ABCD$ e, portanto, $AC = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ dm $= 12$ dm.
Assim, do trapézio isósceles $ACGE$, temos:



$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$

Da semelhança entre as pirâmides $PABCD$ e $PEFGH$, obtemos:

$$\frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{4}{H} \Rightarrow H = 8$$

Logo, o volume V do tronco é dado por:

$$V = \left[\frac{1}{3} \cdot (6\sqrt{2})^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 4\right] \text{dm}^3 = 168 \text{ dm}^3$$

Exercícios contextualizados

79 Um poliedro convexo é a região do espaço limitada por uma superfície G, que é a reunião de n polígonos convexos, com $n \geq 4$, tais que:
(I) não há dois desses polígonos contidos em um mesmo plano;
(II) cada lado de qualquer um desses polígonos é lado de dois e apenas dois deles;
(III) o plano que contém qualquer um desses polígonos deixa os demais contidos em um mesmo semiespaço.
Analisando cada uma das figuras, temos:
- a coluna não obedece às condições (I) e (III); logo, não tem a forma de um poliedro convexo;
- a escada não obedece às condições (I) e (III); logo, não tem a forma de um poliedro convexo;
- o ladrilho tem a forma de um poliedro convexo, pois são satisfeitas as três condições.

80 O número A de arestas desse poliedro é dado por:

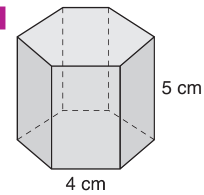
$A = \dfrac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5}{2} = 90$. Como todas essas arestas são congruentes, temos que o total t de linha necessário para costurar a bola é dado por:
$t = 90 \cdot 15$ cm $= 1.350$ cm $= 13{,}5$ m

81 Sendo n o número de arestas de cada face, temos:

$$\begin{cases} A = 20 \\ A = \dfrac{nF}{2} \end{cases} \Rightarrow nF = 40$$

Como n e F são números naturais, com $n \geq 3$ e $F \geq 4$, temos que o maior valor de F possível é obtido quando se atribui a n o menor valor possível. Assim, obtemos $n = 4$ e $F = 10$.
Aplicando a relação de Euler, concluímos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 20 + 10 = 2$
$\therefore V = 12$
Logo, a pedra deve ter o formato de um poliedro convexo com 20 arestas, 10 faces e 12 vértices.

82



A área lateral A_ℓ e a área B de cada base do prisma são dadas por:
$A_\ell = 6 \cdot 5 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 120 \text{ cm}^2$

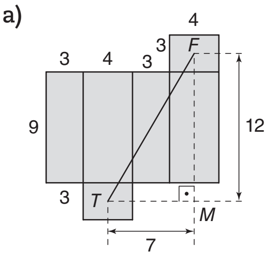
e $B = 6 \cdot \dfrac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = 40{,}8 \text{ cm}^2$

Logo, a área total A_T do prisma é dada por:
$A_T = (120 + 2 \cdot 40{,}8) \text{ cm}^2 = 201{,}6 \text{ cm}^2$
A área S da folha da cartolina é dada por:
$S = 20 \cdot 30 \text{ cm}^2 = 600 \text{ cm}^2$
Assim, o percentual p da área da folha usado na construção é:

$$p = \frac{201{,}6}{600} = 0{,}336 = 33{,}6\%$$

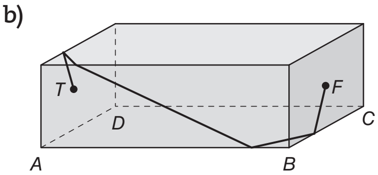
Alternativa **e**.

83 a)



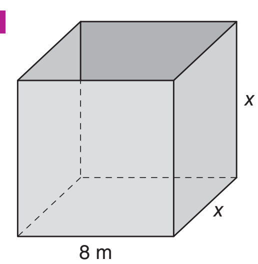
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MTF, temos:
$(TF)^2 = 12^2 + 7^2 \Rightarrow (TF)^2 = 193$
$\therefore TF = \sqrt{193}$ m

b)



Nota: Nessa representação, a face $ABCD$ pode ser o piso, o teto ou uma parede lateral.

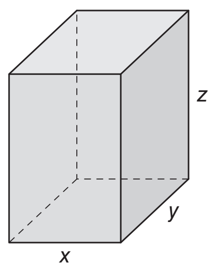
84



A área total A_T da caixa é dada por:
$A_T = 2\,(8x + 8x + x^2) = 32x + 2x^2$
Assim, temos:
$A_T = 322 \Rightarrow 32x + 2x^2 = 322$
$\therefore x^2 + 16x - 161 = 0$

Resolvendo essa equação, obtemos:
$x = 7$ ou $x = -23$ (não convém)
Logo, as dimensões são: 8 m, 7 m e 7 m. Portanto, o volume V da caixa é dado por:
$V = 8 \cdot 7 \cdot 7 \text{ m}^3 = 392 \text{ m}^3$
Alternativa **c**.

85 Sendo x, y e z as dimensões, em centímetro, do edifício, e V o seu volume, temos:



$V = 22.500 \text{ m}^3 \Rightarrow xyz = 22.500.000.000 \text{ cm}^3$
Sendo a, b e c as dimensões, em centímetro, da maquete, correspondentes a x, y e z, respectivamente, temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{50} \Rightarrow a = \frac{x}{50}$$

$$\frac{b}{y} = \frac{1}{50} \Rightarrow b = \frac{y}{50}$$

$$\frac{c}{z} = \frac{1}{50} \Rightarrow c = \frac{z}{50}$$

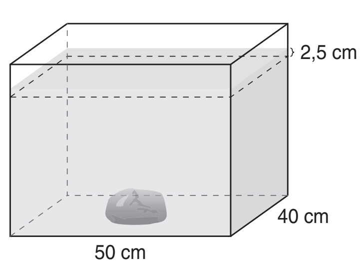
Assim, o volume v da maquete é dado por:

$$v = a \cdot b \cdot c \text{ cm}^3 = \frac{x}{50} \cdot \frac{y}{50} \cdot \frac{z}{50} \text{ cm}^3 =$$

$$= \frac{22.500.000.000}{125.000} \text{ cm}^3 \Rightarrow v = abc = 180.000 \text{ cm}^3$$

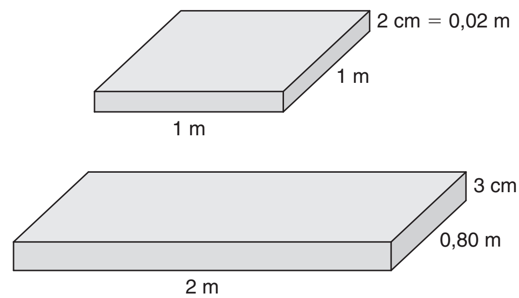
86 Sendo V a capacidade total do reservatório, em metro cúbico, temos que $\frac{4x}{5} = 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 22{,}5 \text{ m}^3$
Assim, sendo h a altura, em metro, do reservatório, concluímos:
$V = 22{,}5 \Rightarrow 3 \cdot 5 \cdot h = 22{,}5$
$\therefore h = 1{,}5$ m
Alternativa **c**.

87 A quantidade de água deslocada é igual ao volume da pedra.



Assim, o volume V da pedra é o volume de um paralelepípedo de dimensões 50 cm, 40 cm e 2,5 cm, ou seja:
$V = 50 \cdot 40 \cdot 2{,}5 \text{ cm}^3 = 5.000 \text{ cm}^3$

88 Sendo V_1 o volume da pedra de 2,5 kg e V_2 o volume da outra pedra, temos:

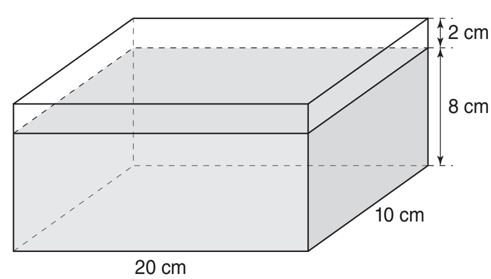


$V_1 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}02 \text{ m}^3 = 0{,}02 \text{ m}^3$
$V_2 = 2 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}03 \text{ m}^3 = 0{,}048 \text{ m}^3$
Assim, a massa x, em quilo, da pedra maior é dada por:

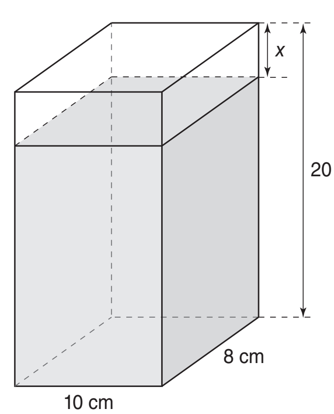
$$\frac{0{,}02}{25} = \frac{0{,}048}{x} \Rightarrow x = 60$$

Logo, a massa da pedra maior será 60 kg.

89 Sendo V o volume de água no recipiente, temos:

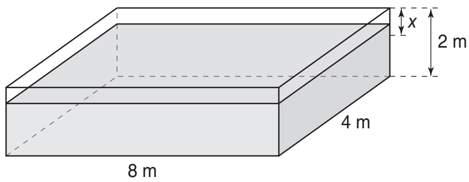


$V = 20 \cdot 10 \cdot 6 = 1.200 \text{ cm}^3$
Ao apoiar uma face de dimensões 10 cm por 8 cm sobre o tampo da mesa, seja x a distância entre a superfície da água e a face superior temos:



Assim:
$10 \cdot 8 \cdot (20 - x) = 1.200 \Rightarrow x = 5$ cm
Logo, a distância pedida é 5 cm.

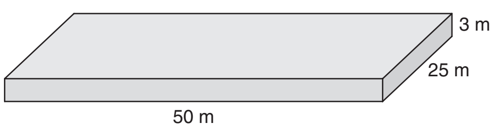
90 Sendo x a distância, em metro, da superfície da água à borda da piscina, temos:



$8 \cdot 4 \cdot (2 - x) = 59{,}2 \Rightarrow 2 - x = 1{,}85$
$\therefore\ x = 0{,}15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$
Logo, a água está a 15 cm da borda da piscina.
Alternativa **b**.

91 O volume V de água, acima do nível da jusante, contido na eclusa é dado por:
$V = 200 \cdot 17 \cdot 20 \text{ m}^3 = 68.000 \text{ m}^3$
Assim, o tempo t para o esvaziamento desse volume a uma vazão de 4.200 m^3 por minuto é:
$t = \dfrac{68.000}{4.200} \text{ min} \approx 16{,}19 \text{ min}$
Alternativa **d**.

92



01) Correto, pois o volume v do paralelepípedo é dado por:
$v = 50 \cdot 25 \cdot 3 \text{ m}^3 = 3.750 \text{ m}^3 = 3.750.000 \text{ dm}^3 =$
$= 3.750.000 \text{ L}$

02) Correto, pois o volume v do paralelepípedo de dimensões 50 m, 25 m e 0,1 m é dado por:
$v = 50 \cdot 25 \cdot 0{,}1 \text{ m}^3 = 125 \text{ m}^3 = 125.000 \text{ dm}^3 =$
$= 125.000 \text{ L}$

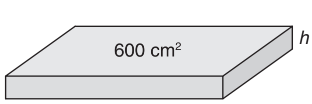
04) Correto, pois, se a área B da base fosse $B = 0{,}8 \cdot 50 \cdot 25 \text{ m}^2 = 1.000 \text{ m}^2$ e a altura h fosse $h = 1{,}3 \cdot 3 \text{ m} = 3{,}9 \text{ m}$, o volume w da piscina seria $w = 1.000 \cdot 3{,}9 \text{ m}^3 = 3.900 \text{ m}^3$, que é 4% maior que o volume v calculado no item (01) $\left(\dfrac{w}{v} = 1{,}04\right)$.

08) Incorreto, pois, se a área B da base fosse $B = 0{,}5 \cdot 50 \cdot 25 \text{ m}^2 = 625 \text{ m}^2$ e a altura h fosse $h = 0{,}5 \cdot 3 \text{ m} = 1{,}5 \text{ m}$, o volume U da piscina seria $U = 625 \cdot 1{,}5 \text{ m}^3 = 937{,}5 \text{ m}^3$, que é 25% do volume v calculado no item (01) $\left(\dfrac{u}{v} = 0{,}25\right)$.
Portanto, U seria 75% menor que v.

16) Incorreto, pois a área S_i interna da piscina é dada por:
$S_i\ [2(50 \cdot 3 + 25 \cdot 3) + 50 \cdot 25] \text{ m}^2 = 1.700 \text{ m}^2$

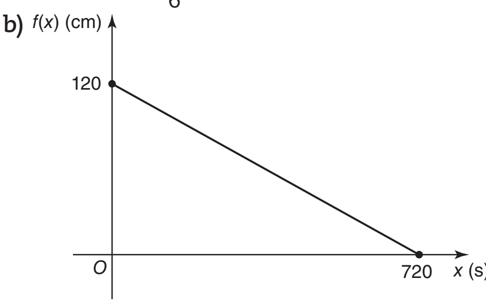
- A soma é: 01 + 02 + 04 = 7

93 a) O volume de água retirado da caixa por segundo é 10 L ou 10.000 cm^3. O desnível h ocorrido com a superfície da água, após essa retirada, é a altura de um paralelepípedo de volume $V = 10.000 \text{ cm}^3$, e a área da base é 60.000 cm^2:

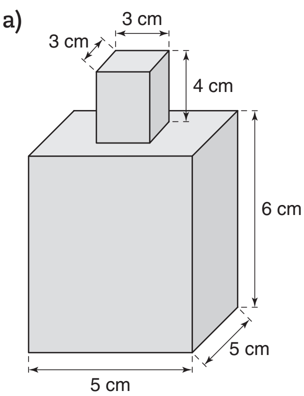


$V = 10.000 \Rightarrow 60.000\,h = 10.000$
$\therefore\ h = \dfrac{1}{6} \text{ cm}$
Assim, em x segundos o desnível da superfície da água será $\dfrac{x}{6}$cm.
Concluímos, então, que a altura $f(x)$, em centímetro, do nível da superfície da água em função do tempo x, em segundo, é:
$f(x) = 120 - \dfrac{x}{6}$, com $0 \leqslant x \leqslant 720$

b)

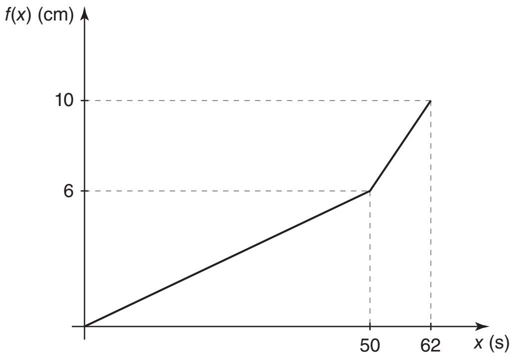


94 a)



Em relação ao corpo da garrafa, temos:
$\text{Vazão} = \dfrac{3\text{mL}}{\text{s}} = \dfrac{0{,}003 \text{ L}}{\text{s}} =$
$= \dfrac{0{,}003 \text{ dm}^3}{\text{s}} = \dfrac{3 \text{ cm}^3}{\text{s}}$
Como a velocidade de subida do nível é a razão entre a vazão e a área, temos:
$\dfrac{3 \text{ cm}^3}{\text{s} \cdot 25 \text{ cm}^2} = \dfrac{3 \text{ cm}}{25 \text{ s}}$
Assim, temos:
$f(x) = \dfrac{3x}{25}$, com $0 \leqslant x \leqslant 50$
Em relação ao gargalo, temos que a velocidade de subida do nível é:
$\dfrac{\text{vazão}}{\text{área}} = \dfrac{3 \text{ cm}^3}{\text{s} \cdot 9 \text{ cm}^2} = \dfrac{1 \text{ cm}}{3 \text{ s}}$
Logo:
$f(x) = 6 + \dfrac{1}{3}(x - 50)\ 50 < x \leqslant 62$
Concluímos então que f é função definida por duas sentenças:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{25}, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ \dfrac{x - 32}{3}, \text{ se } 50 < x \leqslant 62 \end{cases}$$

b) 

95 O menor número de caixas é obtido quando a medida da aresta dos cubos, em metro, é o máximo divisor comum entre 30, 72 e 6:

mdc(30, 72, 6) = 6

Dividindo o volume V do paralelepípedo pelo volume v de um cubo, obtemos o menor número n de caixas que podem ser armazenadas:

$$n = \frac{V}{v} = \frac{30 \cdot 72 \cdot 6}{6^3} = 60$$

Alternativa **c**.

96 Sendo a e V_m, respectivamente, a medida da aresta e o volume do cubo menor, e sendo ℓ e V_M, respectivamente, a medida da aresta e o volume do cubo maior, temos:

$$\begin{cases} V_m = a^3 \\ V_M = \ell^3 \end{cases}$$

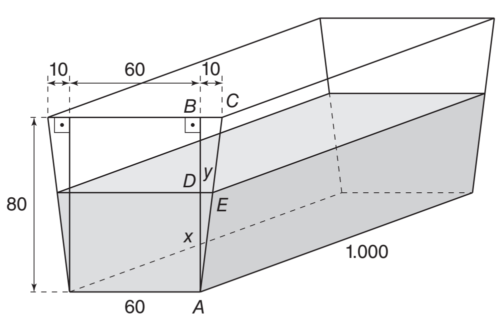
Assim:

$V_M = 3 \cdot V_m \Rightarrow \ell^3 = 3a^3$

$$\therefore \left(\frac{\ell}{a}\right)^3 = 3 \Rightarrow \frac{\ell}{a} = \sqrt[3]{3}$$

Alternativa **d**.

97 a) Sendo x a profundidade da água, temos:

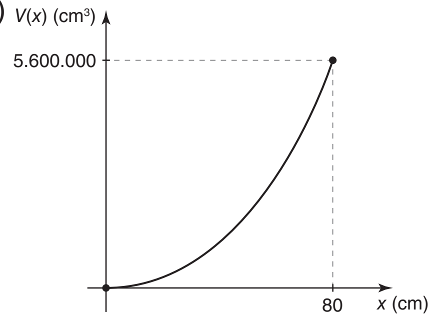


$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{10}{y} = \frac{80}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{8}$$

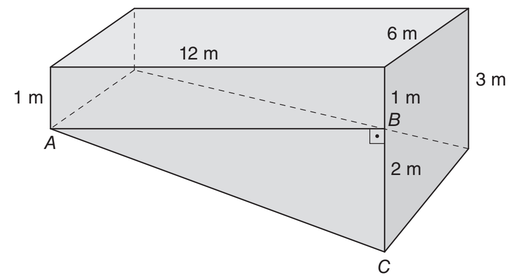
Assim, a base do prisma formado pela água é um trapézio de altura x e bases de medidas $60 + \frac{x}{4}$ e 60. Logo, o volume $V(x)$ desse prisma, em centímetro cúbico, é dado por:

$$V(x) = \frac{\left(60 + 60 + \frac{x}{4}\right)x}{2} \cdot 1.000 \Rightarrow$$

$\Rightarrow V(x) = 60.000x + 125x^2$, com $0 \leq x \leq 80$

b) 

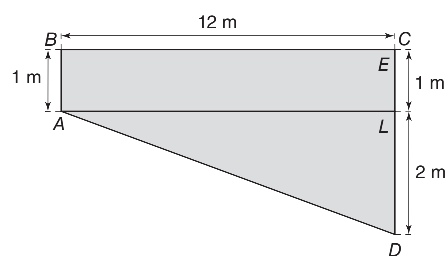
98



a) V, pois a lateral interna é formada por dois trapézios de altura 12 m e bases 3 m e 1 m, um retângulo de dimensões 1 m por 6 m e um retângulo de dimensões 6 m por 3 m; logo, a área S dessa lateral é dada por:

$$S = \left[2 \cdot \frac{(1 + 3) \cdot 12}{2} + 1 \cdot 6 + 6 \cdot 3\right] \text{m}^2 = 72 \text{ m}^2$$

b) V, pois o segmento $\overline{AE}$, representado abaixo, separa a face trapezoidal $ABCD$ no retângulo $ABCE$ e no triângulo retângulo AED:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AED, obtemos:

$(AD)^2 = 12^2 + 2^2 \Rightarrow (AD)^2 = 148$

$\therefore AD = \sqrt{148}$ m

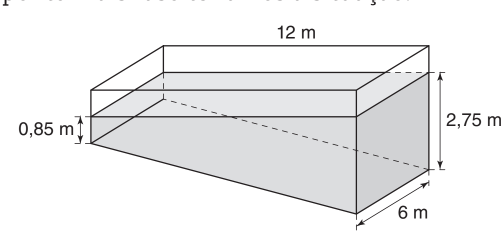
Logo, a área F do fundo da piscina é:

$F = 6\sqrt{148}$ m$^2 \approx 72$ m^2

O número n de azulejos necessários para revestir o fundo da piscina é a razão entre F e a área de cada azulejo:

$$n \approx \frac{72}{(0{,}2)^2} = 1.800$$

c) F, pois para a profundidade de 0,85 m em seu ponto mais raso teríamos a situação:



O volume V de água pode ser calculado como o volume de um prisma reto de altura 6 m cuja base é um trapézio retângulo de altura 12 m e lados paralelos de 0,85 m e 2,75 m, ou seja:

$$V = \frac{(0{,}85 + 2{,}75) \cdot 12}{2} \cdot 6 \text{ m}^3 = 129{,}6 \text{ m}^3$$

d) F, pois na ocasião o volume de água era 133,2 m³, ou seja, 133.200 L, e, portanto, a massa *m* de produto químico adicionado na piscina foi:

$$m = \frac{133.200}{10.000} \cdot 20 \text{ g} = 266{,}4 \text{ g}$$

e) F, pois o volume *U* da piscina é o volume de um prisma reto de altura 6 m cuja base é um trapézio retângulo de altura 12 m e lados paralelos com 2 m e 3 m:

$$U = \frac{(1 + 3) \cdot 12}{2} \cdot 6 \text{ m}^3 = 144 \text{ m}^3$$

Portanto: $U - 133{,}2 \text{ m}^3 = 10{,}8 \text{ m}^3 = 10.800$ L, ou seja, devem ser acrescentados 10.800 L de água para encher a piscina.

99 **a)** O plano que contém o fundo da parte rasa separa a água em um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 0,5 m por 12 m por 5 m e um prisma reto de altura 5 m cuja base é um trapézio de altura 1 m e lados paralelos com 6 m e 8 m. Logo, o volume de água contido na piscina é dado por:

$$V = \left[0{,}5 \cdot 12 \cdot 5 + \frac{(6 + 8) \cdot 1}{2} \cdot 5\right] \text{m}^3 = 65 \text{ m}^3$$

$\therefore$ V = 65.000 L

b) O volume *v* para elevar o nível da água em 0,1 m é o volume de um paralelepípedo de dimensões 12 m por 5 m por 0,1 m:

$v = 12 \cdot 5 \cdot 0{,}1 \text{ m}^3 = 6 \text{ m}^3$

$\therefore$ v = 6.000 L

100 O volume V da película sobre a parede, após a evaporação dos solventes, é:

$$V = \frac{2}{3} \cdot 3{,}6 \text{ L} = 2{,}4 \text{ L} = 0{,}0024 \text{ m}^3$$

Sendo *h* a espessura da película, temos:

$V = 0{,}0024 \Rightarrow 24\,h = 0{,}0024$

$\therefore h = 0{,}0001 \text{ m} = 0{,}1 \text{ mm}$

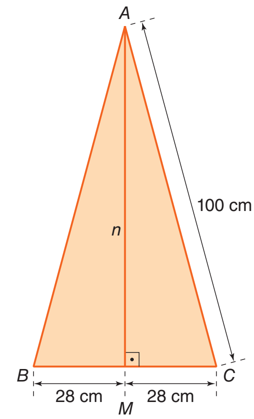
101 Considerando o prisma original e o prisma triangular determinado pelo corte, temos que ambos possuem a mesma altura; portanto, a área da base do maior deve ser o dobro da área da base do menor. Como a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, concluímos:

$$\frac{2}{1} = \left(\frac{8}{x}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{8}{x}$$

$$\therefore x = 4\sqrt{2} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2^{\frac{5}{2}}$$

Alternativa **a**.

102 Sendo *n* a medida do apótema dessa pirâmide, temos, como face lateral, o triângulo isósceles:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AMC*, obtemos:

$n^2 + 28^2 = 100^2 \Rightarrow n^2 = 9.216$

$\therefore n = 96$ cm

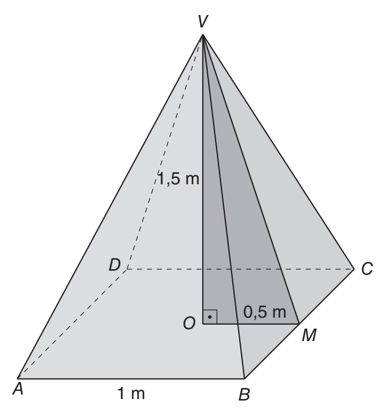
Assim, a área A_f dessa face é:

$$A_f = \frac{56 \cdot 96}{2} \text{ cm}^2 = 2.688 \text{ cm}^2$$

Logo, a área A do pano é dada por:

$A = 8A_f = 8 \cdot 2.688 \text{ cm}^2 = 21.504 \text{ cm}^2$

103 Indicando essa pirâmide por *VABCD*, em que *O* é o centro da base e *M* é o ponto médio de uma aresta da base, temos:



$(VM)^2 = (1{,}5)^2 + (0{,}5)^2 \Rightarrow (VM)^2 = 2{,}5$

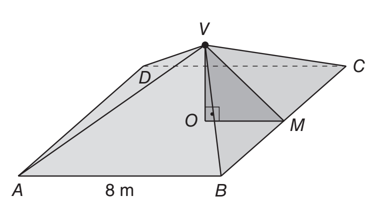
$\therefore VM = \sqrt{2{,}5} \text{ m} \approx 1{,}6 \text{ m}$

Logo, a área lateral A_ℓ é dada, aproximadamente, por:

$$A_\ell \approx 4 \cdot \frac{1 \cdot 1{,}6}{2} \text{ m}^2 = 3{,}2 \text{ m}^2$$

Alternativa **d**.

104 Indicando essa pirâmide por *VABCD*, em que *O* é o centro da base e *M* é o ponto médio de uma aresta da base, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos:

$(VM)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow (VM)^2 = 25$

$\therefore\ VM = 5$ m

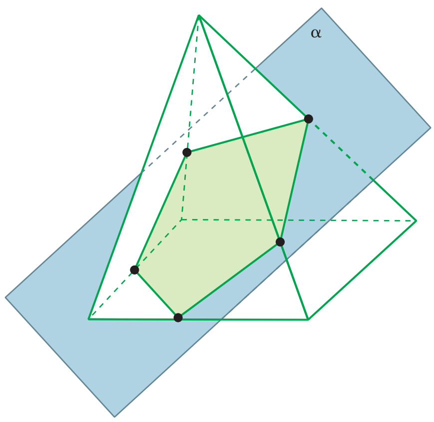
Assim, a área lateral A_ℓ da pirâmide é dada por:

$A_\ell = 4 \cdot \frac{8 \cdot 5}{2}$ m^2 = 80 m^2

Como, para quebras e emendas, deve haver um adicional de 10 m^2, concluímos que o mínimo de telhas a ser comprado é 90 m^2, que equivale a 90 lotes.

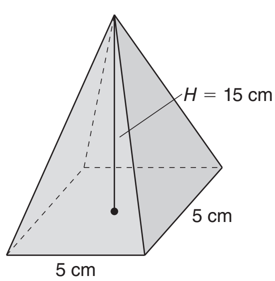
Alternativa **a**.

105 Se um plano α que não passa por nenhum vértice da pirâmide a intercepta em todas as faces, então a intersecção do plano com a pirâmide é um pentágono, conforme ilustra a figura.



Alternativa **c**.

106

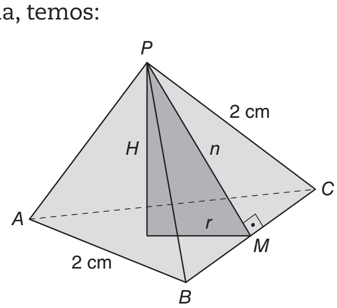


O volume interno V é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 15$ cm^3 = 125 cm^3

Alternativa **a**.

107 Indicando por $PABC$ esse tetraedro, em que O é o centro da base, M é o ponto médio de uma aresta da base, H é sua altura e n é a medida de seu apótema, temos:



$n = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ cm $= \sqrt{3}$ cm

$\therefore\ r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

$H^2 = (\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow H^2 = \frac{8}{3}$

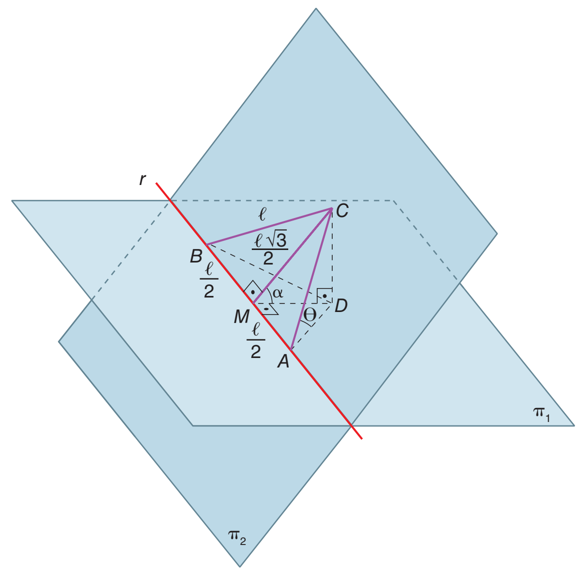
$\therefore\ H = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm

Logo, o volume V do tetraedro é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm^3 $= \frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm^3

Alternativa **a**.

108 A altura do triângulo equilátero mede $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e é perpendicular à reta r. Assim, esquematizamos:



a) Dos triângulos CDA e CDM, obtemos:

$$\begin{cases} \text{sen}\ \theta = \dfrac{CD}{\ell} \\ \text{sen}\ \alpha = \dfrac{CD}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{CD}{\ell} & \text{(I)} \\ \text{sen}\ \alpha = \dfrac{CD}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos: $CD = \frac{\ell\sqrt{6}}{4}$

Substituindo CD por $\frac{\ell\sqrt{6}}{4}$ na equação (II), obtemos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\frac{\ell\sqrt{6}}{4}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, concluímos que $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

b) Como $\alpha = \frac{\pi}{4}$, temos que o triângulo retângulo CDM é isósceles; portanto: $CD = MD = \frac{\ell\sqrt{6}}{4}$

Assim, a área S do triângulo ABD é dada por:

$$S = \frac{AB \cdot MD}{2} \Rightarrow S = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{6}}{8}$$

c) O volume V do tetraedro $ABCD$ é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot CD \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{6}}{8} \cdot \frac{\ell\sqrt{6}}{4} = \frac{\ell^3}{16}$$

Exercícios de revisão cumulativa

1 Sendo E o espaço amostral formado por todos os conjuntos de 4 pontos que podem ser escolhidos, temos:
$n(E) = C_{14,4} = 1.001$
Sendo A o evento de E formado por conjuntos de vértices de um tetraedro (2 pontos em uma reta e 2 pontos na outra), temos:
$n(A) = C_{6,2} \cdot C_{8,2} = 420$
Logo, a probabilidade $P(A)$ de que os 4 pontos escolhidos sejam vértices de um tetraedro é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{420}{1.001}$$

2 Na progressão aritmética abaixo, cada termo a_i representa a quantidade do produto, em litro, pulverizada no dia i:

$$(1;\ 1{,}2;\ 1{,}4;\ \ldots\ ;\ \underbrace{1 + (n-1) \cdot 0{,}2}_{a_n})$$

A soma dos termos dessa P.A. é 63, ou seja:

$$\frac{[1 + 1 + (n-1) \cdot 0{,}2]n}{2} = 63 \Rightarrow 0{,}2n^2 + 1{,}8n - 126 = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, obtemos $n = 21$ ou $n = -30$ (não convém).
Logo, o tratamento teve a duração de 21 dias.
Alternativa **a**.

3 Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} = -7m - 7$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores reais de m para que o sistema seja possível e determinado:
$-7m - 7 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$
Logo, o sistema é possível e determinado para qualquer m real, com $m \neq -1$.
Para $m = -1$, o determinante D é nulo e, portanto, ocorre apenas uma das alternativas: ou o sistema é possível e indeterminado ou é impossível.
Para descobrir qual delas ocorre, substituímos m por -1 no sistema e o escalonamos:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 10 \\ 2x - y + z = 32 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y - 2z = 10 \\ -7y + 5z = 12 \\ -7y + 5z = -25 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y - 2z = 10 \\ -7y + 5z = 12 \\ 0z = -37 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível para $m = -1$.
Resumindo, temos:
- Para $m \neq -1$, o sistema é possível e determinado.
- Para $m = -1$, o sistema é impossível.

4 $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$

Como $\det A \neq 0$, temos que existe A^{-1}.

Sendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2g & b + 2h & c + 2i \\ d & e & f \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a + 2g = 1 \\ b + 2h = 0 \\ c + 2i = 0 \\ d = 0 \\ e = 1 \\ f = 0 \\ 3a = 0 \\ 3b = 0 \\ 3c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0,\ b = 0,\ c = \frac{1}{3},\ d = 0,\ e = 1,\ f = 0,\ g = \frac{1}{2},$$

$h = 0$ e $i = -\frac{1}{6}$

$$\text{Logo: } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

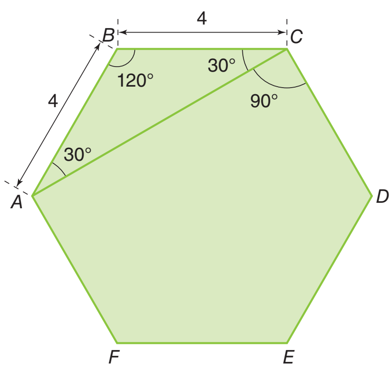
Análise da resolução

Indicando por x a medida, em decímetro, de uma aresta da base do prisma, temos:

$$6 \cdot x \cdot 10 = 240 \Rightarrow x = 4$$

Logo, a medida do lado de cada base é 4 dm.
Traçando a diagonal $\overline{AC}$ da base $ABCDEF$, temos:

- o triângulo ABC é isósceles, pois $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são lados do hexágono regular;
- $A\hat{B}C$ mede 120°, pois é ângulo interno do hexágono regular;
- $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ são congruentes e medem 30° cada um;
- $A\hat{C}D$ mede 90°, pois $m(B\hat{C}A) = 30°$ e $m(B\hat{C}D) = 120°$.



Temos também que o segmento $\overline{AC}$ é perpendicular à aresta $\overline{AG}$, pois cada aresta lateral de um prisma reto é perpendicular às bases do prisma.
Portanto, $\overline{AC}$ é perpendicular às duas retas reversas r e s; logo, a medida CD é a distância entre essas retas. Aplicando a lei dos cossenos, concluímos:

$$(AC)^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120° \Rightarrow (AC)^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore\ AC = 4\sqrt{3}$

Logo, a distância entre as retas r e s é $4\sqrt{3}$ dm.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

$C = 2\pi r \Rightarrow 15{,}7 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$

$\therefore\ r = 2{,}5$ mm

$5 = 1{,}43 + 7{,}57x \Rightarrow 7{,}57x = 3{,}57$

$\therefore\ x \approx 0{,}47$ mm

Exercícios propostos

1 a) A área B de cada base é a área de um círculo de raio 3 cm:

$B = \pi \cdot 3^2\ \text{cm}^2 = 9\pi\ \text{cm}^2$

b) A área lateral A_ℓ é a área de um retângulo de comprimento 6π cm e altura 10 cm:

$A_\ell = (6\pi \cdot 10)\ \text{cm}^2 = 60\pi\ \text{cm}^2$

c) A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das duas bases:

$A_T = (60\pi + 2 \cdot 9\pi)\ \text{cm}^2 = 78\pi\ \text{cm}^2$

d) A área A_{SM} de uma secção meridiana do cilindro é a área de um retângulo de base 6 cm e altura 10 cm.

$A_{SM} = (6 \cdot 10)\ \text{cm}^2 = 60\ \text{cm}^2$

2 a) No cilindro equilátero, a altura é igual ao diâmetro $2r$ da base:

$h = 2r \Rightarrow 6\ \text{dm} = 2r$

$\therefore\ r = 3$ dm

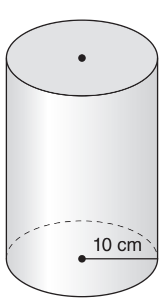
b) $B = \pi r^2 = (\pi \cdot 3^2)\ \text{dm}^2 = 9\pi\ \text{dm}^2$

c) $A_\ell = 2\pi r h = (2\pi \cdot 3 \cdot 6)\ \text{dm}^2 = 36\pi\ \text{dm}^2$

d) A área total A_T é a soma da área lateral A_ℓ com as áreas das duas bases, ou simplesmente:

$A_T = A_\ell + 2B = (36\pi + 2 \cdot 9\pi)\ \text{dm}^2 = 54\pi\ \text{dm}^2$

3



Como figuras planas equivalentes são figuras de mesma área, então a área da secção meridiana é igual à área da base do cilindro.

Assim:

$A_{SM} = B \Rightarrow 2rh = \pi r^2$

$\therefore\ (2 \cdot 10 \cdot h)\ \text{cm}^2 = (\pi \cdot 10^2)\ \text{cm}^2 \Rightarrow h = \left(\dfrac{100\pi}{20}\right)$ cm

$\therefore\ h = 5\pi$ cm

A área lateral é dada por: $A_\ell = 2\pi r h$

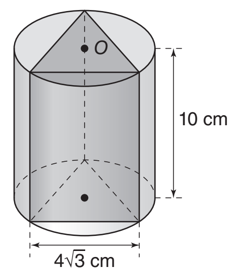
Assim:

$A_\ell = (2\pi \cdot 10 \cdot 5\pi)\ \text{cm}^2 = 100\pi^2\ \text{cm}^2$

4 Um cilindro circular inscrito em um prisma quadrangular regular de altura 12 cm e aresta da base 8 cm tem como área lateral a área do retângulo de base 8π cm e altura 12 cm:

$A_\ell = (8\pi \cdot 12)\ \text{cm}^2 = 96\pi\ \text{cm}^2$

5



A base do prisma inscrito no cilindro é um triângulo equilátero, de lado $\ell = 4\sqrt{3}$ cm.

Assim, o raio r da base do cilindro pode ser calculado como $\dfrac{2}{3}$ da altura do triângulo.

Portanto:

$r = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm $\Rightarrow r = 4$ cm

A área total A_T do cilindro é dada por:

$A_T = A_\ell + 2B = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Como $h = 10$ cm e $r = 4$ cm, concluímos:

$A_T = (2\pi \cdot 4 \cdot 10 + 2\pi \cdot 16)\ \text{cm}^2 = 112\pi\ \text{cm}^2$

6 Sabemos que a área lateral A_ℓ do cilindro de raio da base $r = 3$ dm é a terça parte da área total A_T.

Assim:

$A_\ell = \dfrac{1}{3} A_T \Rightarrow A_\ell = \dfrac{1}{3}(A_\ell + 2B)$

$\therefore\ A_\ell - \dfrac{1}{3} A_\ell = \dfrac{2}{3} B \Rightarrow A_\ell = B$

Portanto:

$2\pi r h = \pi r^2 \Rightarrow 6\pi h = 9\pi$

$\therefore\ h = 1{,}5$

Logo, a altura desse cilindro é 1,5 dm.

7 Sendo h e r as medidas da altura e do raio da base do semicilindro, respectivamente, temos:

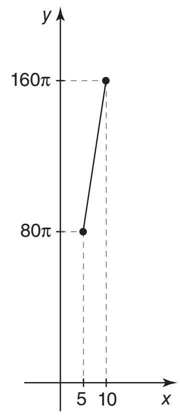
$A_\ell = 2rh + \pi r h \Rightarrow A_\ell = (2 \cdot 5 \cdot 15 + \pi \cdot 5 \cdot 15)\ \text{cm}^2 =$
$= 75(2 + \pi)\ \text{cm}^2$

$A_T = A_\ell + \pi r^2 \Rightarrow A_T = (150 + 75\pi + \pi \cdot 5^2)\ \text{cm}^2 =$
$= 50(3 + 2\pi)\ \text{cm}^2$

8 a) A lei que expressa a área lateral $f(x)$, em centímetro quadrado, em função da medida x do raio da base do cilindro, em centímetro, com $5 \leq x \leq 10$, é:

$f(x) = 2\pi x \cdot 8$, ou seja, $f(x) = 16\pi x$

b) A função $f(x) = 16\pi x$ está definida no intervalo [5, 10] e, portanto, seu gráfico é o segmento de reta:



9 A área A de cada lata, em metro quadrado, é dada por:

$A = 2\pi \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}12 + 2\pi \cdot (0{,}05)^2 = 0{,}017\pi$

Para $\pi = 3{,}14$, temos:

$A = 0{,}05338 \text{ m}^2$

Assim, a área total A_T das 20.000 latas é dada por:

$A_T = 20.000 \cdot 0{,}05338 \text{ m}^2 = 1.067{,}6 \text{ m}^2$

Logo, serão necessários 1.067,6 m^2 de folhas de flandres.

10 A área lateral A da cobertura é a terça parte (120°) da área lateral de um cilindro circular reto de altura 20 m e raio da base 10 m, ou seja:

$A = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 10 \cdot 20 \text{ m}^2 = \frac{400\pi}{3} \text{ m}^2$

Alternativa **c**.

11 Sendo r e h as medidas do raio da base e da altura do cilindro, respectivamente, temos:

$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = (\pi \cdot 0{,}64 \cdot 2) \text{ m}^3 = 1{,}28\pi \text{ m}^3$

Logo, o volume desse cilindro é $1{,}28\pi$ m^3.

12 $\text{sen } 30° = \frac{h}{h + 6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{h + 6}$

$\therefore\ h = 6 \text{ cm}$

Assim, o volume V do cilindro é dado por:

$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 \text{ cm}^3 = 150\pi \text{ cm}^3$

Logo, o volume desse cilindro é 150π cm^3.

13 Sendo r e h as medidas do raio da base e da altura do cilindro, respectivamente, a área lateral A_ℓ é dada por $A_\ell = 2\pi r h$ e, portanto:

$54\pi = 2\pi \cdot 0{,}3 \cdot h \Rightarrow h = 90 \text{ dm}$

Logo, o volume V do cilindro é dado por:

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (0{,}3)^2 \cdot 90 \text{ dm}^3$, ou seja:

$V = 8{,}1\pi \text{ dm}^3 = 8.100\ \pi \text{ cm}^3$

14 Sendo r e h as medidas do raio da base e da altura do cilindro equilátero, temos $h = 2r$ e, portanto, o volume V é dado por: $V = \pi r^2 h$, ou seja, $V = 2\pi r^3$. Logo:

$128\pi = 2\pi r^3 \Rightarrow r = 4 \text{ cm}$

Concluímos, calculando a área total A_T:

$A_T = 2\pi r h + 2\pi r^2 \Rightarrow A_T = (2\pi \cdot 4 \cdot 8 + 2\pi \cdot 4^2) \text{ cm}^2$

$\therefore\ A_T = 96\ \pi \text{cm}^2$

15 O comprimento C da circunferência da base do cilindro é dado por $C = 2\pi r$, em que r é o raio da base desse cilindro. Para $C = 12\pi$ cm, temos:

$C = 2\pi r \Rightarrow 12\pi = 2\pi r$

$\therefore\ r = 6 \text{ cm}$

O volume V do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, em que r é o raio da base e h é a altura do cilindro. Para $V = 180\pi$ cm^3, temos:

$V = \pi r^2 h \Rightarrow 180\pi = \pi \cdot 36h$

$\therefore\ h = 5 \text{ cm}$

Logo, a altura desse cilindro é 5 cm.

16 A área lateral A_ℓ do cilindro é dada por $A_\ell = 2\pi r h$, em que r é o raio da base e h é a altura do cilindro. Para $A_\ell = 120\pi$ cm^2 e $h = 12$ cm, temos:

$A_\ell = 2\pi r h \Rightarrow 120\pi = 2\pi \cdot r \cdot 12$

$\therefore\ r = 5 \text{ cm}$

Assim, podemos calcular o volume V do cilindro:

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 \text{ cm}^3 = 300\pi \text{ cm}^3$

Logo, o volume desse cilindro é 300π cm^3.

17 Como a secção meridiana é equivalente a uma das bases, então a área A_{SM} da secção meridiana é igual à área B da base do cilindro, de raio $r = 10$ cm e altura h.

Assim:

$A_{SM} = B \Rightarrow 2rh = \pi r^2$

$\therefore\ 2 \cdot 10 \cdot h = \pi 10^2 \Rightarrow h = 5\pi \text{ cm}$

Assim, podemos calcular o volume V do cilindro:

$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi \cdot 100 \cdot 5\pi \text{ cm}^3 = 500\pi^2 \text{ cm}^3$

Logo, o volume desse cilindro é $500\pi^2$ cm^3.

18 Como sólidos equivalentes são sólidos de mesmo volume, o volume do cilindro equilátero é igual ao volume do cubo de aresta $2\sqrt[3]{2\pi}$. Assim, sendo r o raio da base do cilindro, temos:

$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{cubo}} \Rightarrow \pi r^2 \cdot 2r = \left(2\sqrt[3]{2\pi}\right)^3$

$\therefore\ 2\pi r^3 = 16\pi \Rightarrow r^3 = 8$

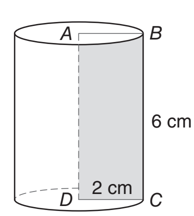
$\therefore\ r = 2$

Agora, podemos calcular a área lateral A_ℓ, dada por:

$A_\ell = 2\pi r \cdot 2r \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2) = 16\pi$

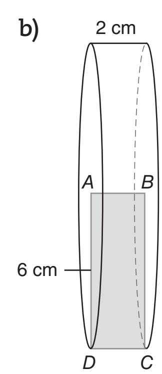
Logo, a área lateral mede 16π unidades de área.

19 a)



$V = (\pi \cdot 2^2 \cdot 6) \text{ cm}^3 = 24\pi \text{ cm}^3$

b)



$A_T = (2\pi \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 6^2) \text{ cm}^2 = 96\pi \text{ cm}^2$

20 Como a altura h do cilindro e o raio x da base variam linearmente, com $6 \text{ cm} \leqslant h \leqslant 10 \text{ cm}$ e $x \geqslant 4$ cm, temos:

$\frac{h}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow h = \frac{3x}{2}$

a) A lei que expressa o volume $f(x)$, em centímetro cúbico, em função da medida x, em centímetro, do raio da base desse cilindro é dada por:

$f(x) = \pi x^2 \cdot h \Rightarrow f(x) = \frac{3\pi x^3}{2}$

b) Para obter a inversa da função $y = \frac{3\pi x^3}{2}$, adotamos os procedimentos:

- Permutamos x e y, obtendo: $x = \frac{3\pi y^3}{2}$
- Após a permutação das variáveis, isolamos y, concluindo: $y = \sqrt[3]{\frac{2x}{3\pi}}$

Logo, a inversa da função $f(x) = \frac{3\pi x^3}{2}$ é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2x}{3\pi}}$.

21 O volume V do semicilindro circular reto de altura h e raio da base r é dado por: $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$. Assim, temos:

$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 96\pi$

Portanto, o volume do semicilindro é 96π cm^3.

22 Sendo R a medida do raio da base do reservatório, temos:

$\pi \cdot R^2 \cdot 12 = 72 \Rightarrow R^2 = \frac{6}{\pi}$

Assim, sendo h a medida da altura da camada de petróleo, concluímos:

$\pi R^2 h = 42 \Rightarrow \pi \cdot \frac{6}{\pi} \cdot h = 42$

$\therefore h = 7$

Logo, a altura da camada de petróleo é 7 m.

Alternativa **b**.

23 O volume V de ar contido no reservatório é dado por:

$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 \text{ m}^3 = 20\pi \text{ m}^3$

Assim, a massa M de ar contido no reservatório é dada por:

$M = 20\pi \cdot 1{,}22 \text{ kg} \approx 76{,}6 \text{ kg}$

Alternativa **d**.

24 O volume V do filtro é a diferença entre os volumes de dois cilindros de mesma altura 6 cm e raios da base de 10 cm e 4 cm, ou seja:

$V = (\pi \cdot 10^2 \cdot 6 - \pi \cdot 4^2 \cdot 6) \text{ cm}^3 = 504\pi \text{ cm}^3$

Logo, o volume do filtro é 504π cm^3.

25 O volume V_v da vala, em metro cúbico, é a diferença entre os volumes dos cilindros de mesma altura 3 m e raios da base 45 m e 41 m, ou seja:

$V_v = (\pi \cdot 45^2 \cdot 3 - \pi \cdot 41^2 \cdot 3) \text{ m}^3 = 1.032\pi \text{ m}^3$

O volume V_c de cada reservatório cilíndrico é dado por:

$V_c = \pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot 8 \text{ m}^3 = 18\pi \text{ m}^3$

Assim, temos:

$\frac{V_v}{V_c} = \frac{1.032\pi}{18\pi} \approx 57{,}3 \Rightarrow V_v \approx 57{,}3\, V_c$

Concluímos, então, que o número mínimo de caminhões necessários para encher a vala é 58.

26 Sabemos que 90.000 L = 90.000 dm^3 = 90 m^3. Assim, sendo h a medida, em metro, da altura do cilindro, temos:

$\pi \cdot 3^2 \cdot h = 90 \Rightarrow h = \frac{10}{\pi}$

Logo, a área total A_T do cilindro é dada por:

$A_T = \left(2\pi \cdot 3 \cdot \frac{10}{\pi} + 2 \cdot \pi \cdot 3^2\right) \text{ m}^2 \approx 116{,}52 \text{ m}^2$

Como cada metro quadrado de chapa custa R$ 100,00, concluímos que o custo C, em real, é dado por:

$C \approx 116{,}52 \cdot 100 = 11.652$

Alternativa **e**.

27 Um tronco de cilindro circular reto de raio da base r, cujas geratrizes medem G e g, respectivamente, tem volume V dado por:

$V = \frac{\pi r^2 (G + g)}{2}$. Assim, para

$r = 4$ cm, $G = 8$ cm e $g = 6$ cm, temos:

$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot (8 + 6)}{2} \text{ cm}^3 = 112\pi \text{ cm}^3$

Logo, o volume desse tronco é 112π cm^3.

28 A água contida no copo tem a forma de um tronco de cilindro circular reto cujas geratrizes maior e menor medem 10 cm e 8 cm e o raio da base circular mede 3 cm. Logo, o volume V de água é dado por:

$V = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot (10 + 8)}{2} \text{ cm}^3 = 81\pi \text{ cm}^3$

29 O volume V de cada tronco é dado por:

$V = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot (9 + 11)}{2} \text{ dm}^3 = 10\pi \text{ dm}^3$

O número de troncos necessários para encher o caminhão é n, tal que:

$n = \frac{150.000}{10\pi} \approx 4.777$

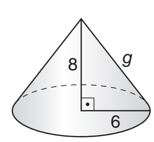
Logo, são necessários 4.777 troncos, aproximadamente, para encher o caminhão.

30 O volume de água despejada é igual ao volume de um tronco de cilindro circular reto cujas geratrizes maior e menor medem $\frac{8}{\pi}$ cm e 0 cm e o raio da base circular mede 2,5 cm. Logo, o volume V de água despejada é dado por:

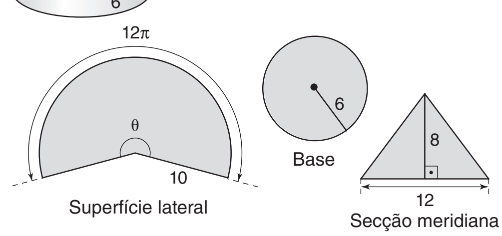
$V = \frac{\pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot \left(\frac{8}{\pi} + 0\right)}{2} \text{ cm}^3 = 25 \text{ cm}^3$

Alternativa **a**.

31



$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10$



a) $A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 6 \cdot 10$ cm^2

$\therefore A_\ell = 60\pi$ cm^2

b) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = (60\pi + \pi \cdot 6^2)$ cm^2

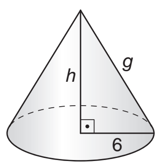
$\therefore A_T = 96\pi$ cm^2

c) $A_{SM} = \dfrac{12 \cdot 8}{2}$ cm^2 = 48 cm^2

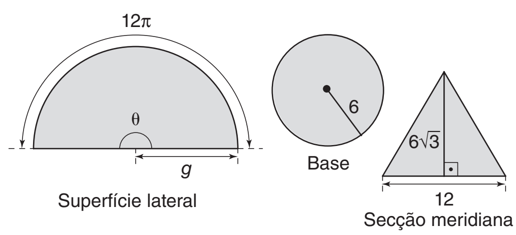
d) $\theta = \dfrac{2\pi r}{g}$ rad $\Rightarrow \theta = \dfrac{12\pi}{10}$ rad

$\therefore \theta = \dfrac{6\pi}{5}$ rad

32



$g = 2r = 12$
$h^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow h = 6\sqrt{3}$



a) $A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 6 \cdot 12$ cm^2

$\therefore A_\ell = 72\pi$ cm^2

b) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = (72\pi + \pi \cdot 6^2)$ cm^2

$\therefore A_T = 108\pi$ cm^2

c) $A_{SM} = \dfrac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2}$ cm^2 = $36\sqrt{3}$ cm^2

d) $\theta = \dfrac{2\pi r}{g}$ rad $\Rightarrow \theta = \dfrac{12\pi}{12}$ rad

$\therefore \theta = \pi$ rad

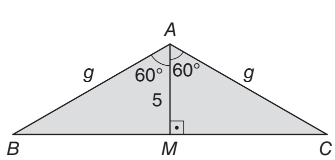
33 A medida θ, em radiano, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral de qualquer cone circular reto é dada por:

$\theta = \dfrac{2\pi r}{g}$

em que r e g são as medidas do raio da base e da geratriz do cone, respectivamente. Como no cone equilátero temos $g = 2r$, concluímos que, nesse tipo de cone:

$\theta = \dfrac{2\pi r}{2r}$ rad $\Rightarrow \theta = \pi$ rad

34



Secção meridiana

Do triângulo AMC, deduzimos:

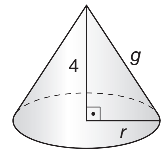
$\cos 60° = \dfrac{5}{g}$

ou seja:

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{g} \Rightarrow g = 10$

Logo, cada geratriz do cone mede 10 cm.

35



$$\begin{cases} g^2 = r^2 + 4^2 \\ \pi r g = 15\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^2 = r^2 + 16 & \text{(I)} \\ g = \dfrac{15}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (II) em (I), obtendo:

$\left(\dfrac{15}{r}\right)^2 = r^2 + 16 \Rightarrow r^4 + 16r^2 - 225 = 0$

Fazendo a mudança de variável $r^2 = t$, temos:

$t^2 + 16t - 225 = 0 \Rightarrow t = -25$ ou $t = 9$

Retornamos então à variável original:

- $t = -25 \Rightarrow r^2 = -25$ (não existe número real r sob essa condição)

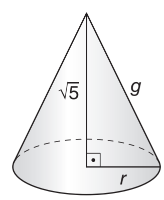
  ou
- $t = 9 \Rightarrow r^2 = 9$

  $\therefore r = 3$

Logo, a área A_{SM} da secção meridiana é dada por:

$A_{SM} = \dfrac{6 \cdot 4}{2}$ cm^2 = 12 cm^2

36



$$\begin{cases} g^2 = r^2 + (\sqrt{5})^2 \\ \pi r g + \pi r^2 = 10\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^2 = r^2 + 5 & \text{(I)} \\ g = \dfrac{10 - r^2}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (II) em (I), obtendo:

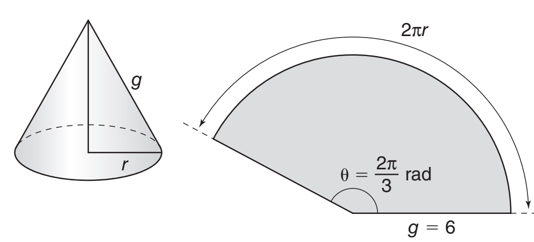
$\left(\dfrac{10 - r^2}{r}\right)^2 = r^2 + 5 \Rightarrow 100 - 20r^2 + r^4 = r^4 + 5r^2$

$\therefore 25r^2 = 100 \Rightarrow r^2 = 4$

$\therefore r = 2$

Logo, o raio da base desse cone mede 2 m.

37



Superfície lateral

$\theta = \dfrac{2\pi r}{g}$ rad $\Rightarrow \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2\pi r}{6}$

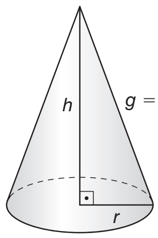
$\therefore r = 2$

Concluímos calculando a área lateral A_ℓ do cone:

$A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 2 \cdot 6$ dm^2

$\therefore A_\ell = 12\pi$ dm^2

38

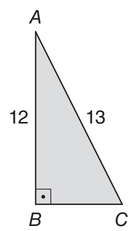


$$\begin{cases} g^2 = r^2 + h^2 \\ \pi r g = 27\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3r)^2 = r^2 + h^2 \\ \pi r \cdot 3r = 27\pi \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} h = 2r\sqrt{2} & \text{(I)} \\ r = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:
$h = 6\sqrt{2}$ dm

39

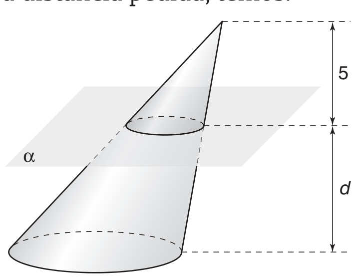


$$(BC)^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow BC = 5$$

a) A revolução do triângulo ABC em torno do lado $\overline{AB}$ gera um cone com 5 cm de raio da base e 13 cm de geratriz. Logo, a área lateral $A_{\ell(\overline{AB})}$ desse cone é:
$A_{\ell(\overline{AB})} = \pi \cdot 5 \cdot 13 \text{ cm}^2 = 65\pi \text{ cm}^2$

b) A revolução do triângulo ABC em torno do lado $\overline{BC}$ gera um cone com 12 cm de raio da base e 13 cm de geratriz. Logo, a área lateral $A_{\ell(\overline{BC})}$ desse cone é:
$A_{\ell(\overline{BC})} = \pi \cdot 12 \cdot 13 \text{ cm}^2 = 156\pi \text{ cm}^2$

40 Sendo d a distância pedida, temos:

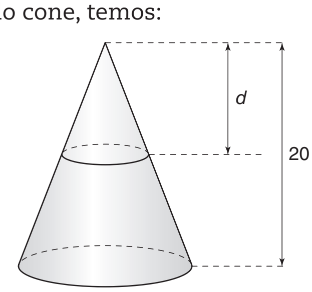


$$\frac{25}{4} = \left(\frac{d+5}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{d+5}{5} = \frac{5}{2}$$

$\therefore\ d = \frac{15}{2}$ cm $= 7{,}5$ cm

Logo, a distância entre o plano α e a base do cone é 7,5 cm.

41 Sendo b a área da secção transversal e $4b$ a área da base do cone, temos:

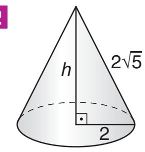


$$\frac{4b}{b} = \left(\frac{20}{d}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{20}{d}$$

$\therefore\ d = 10$ cm

Logo, essa secção transversal dista 10 cm do vértice do cone.

42

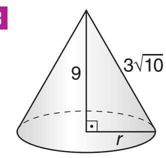


$$h^2 + 2^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow h = 4$$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \text{ dm}^3 = \frac{16\pi}{3} \text{ dm}^3$$

43

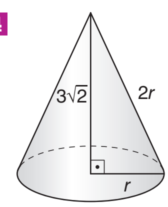


$$r^2 + 9^2 = \left(3\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow r = 3$$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 9 \text{ cm}^3 = 27\pi \text{ cm}^3$$

44

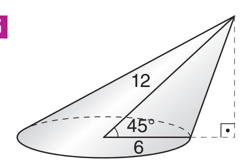


$$(2r)^2 = r^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow r = \sqrt{6}$$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 \cdot 3\sqrt{2} \text{ cm}^3 = 6\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$$

45



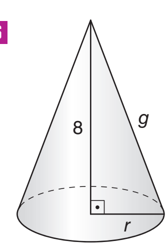
$$\text{sen } 45° = \frac{h}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{12}$$

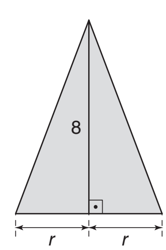
$\therefore\ h = 6\sqrt{2}$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{2} \text{ dm}^3 = 72\sqrt{2}\pi \text{ dm}^3$$

46





Secção meridiana

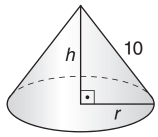
$$A_{SM} = 24 \Rightarrow \frac{2r \cdot 8}{2} = 24$$

$\therefore\ r = 3$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 24\pi \text{ cm}^3$$

47



$A_\ell = 60\pi \Rightarrow \pi r \cdot 10 = 60\pi$

$\therefore r = 6$

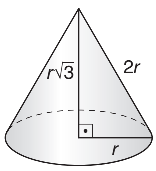
Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow h = 8$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 96\pi \text{ cm}^3$

48



$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \Rightarrow V = \dfrac{\pi r^3\sqrt{3}}{3}$

a) $V = 9\pi\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{\pi r^3\sqrt{3}}{3} = 9\pi\sqrt{3}$

$\therefore r = 3 \text{ dm}$

b) $A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 3 \cdot 6 \text{ dm}^2$

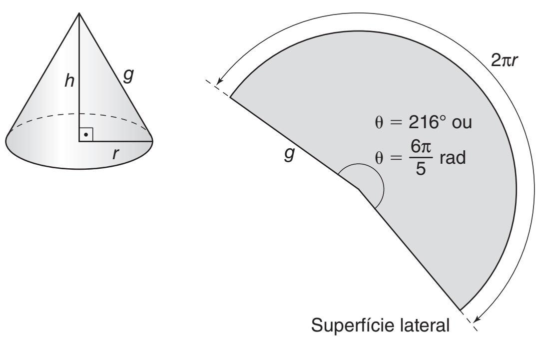
$\therefore A_\ell = 18\pi \text{ dm}^2$

c) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = (18\pi + \pi \cdot 3^2)\text{dm}^2$

$\therefore A_T = 27\pi \text{ dm}^2$

d) $A_{SM} = \dfrac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \text{ dm}^2 = 9\sqrt{3} \text{ dm}^2$

49



$\theta = \dfrac{2\pi r}{g} \text{ rad} \Rightarrow \dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{2\pi r}{15}$

$\therefore r = 9 \text{ cm}$

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos a medida h:

$h^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow h^2 = 144$

$\therefore h = 12 \text{ cm}$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 \text{ cm}^3 = 324\pi \text{ cm}^3$

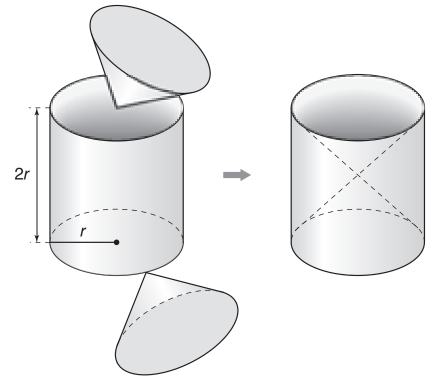
50 $V_{tronco} = V_{cone} \Rightarrow \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot (7 + 9)}{2} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 9$

$\therefore 8r^2 = 3R^2 \Rightarrow \dfrac{r^2}{R^2} = \dfrac{3}{8}$

$\therefore \dfrac{r}{R} = \sqrt{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

Alternativa **c**.

51 O volume V do sólido remanescente é a diferença entre o volume de um cilindro de raio r e altura $2r$ e o dobro do volume de um cone de altura r e raio da base r.



Logo, $V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r \Rightarrow V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

52 O volume V de biju com cada casquinha é a diferença entre os volumes dos cones de alturas 12 cm e 11 cm e raios das bases 3 cm e 2,7 cm, respectivamente, ou seja:

$V = \left(\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 12 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2{,}7)^2 \cdot 11\right) \text{cm}^3 =$

$= 9{,}27\pi \text{ cm}^3 \approx 29{,}12 \text{ cm}^3$

Logo, o volume de biju em cada casquinha é $9{,}27\pi$ cm³ ou aproximadamente 29,12 cm³.

53 O volume V de cada mourão é a soma dos volumes do cilindro e do cone que o compõem, ou seja:

$V = \left(\pi \cdot 10^2 \cdot 190 + \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 30\right) \text{cm}^3 =$

$= 20.000\pi \text{ cm}^3$

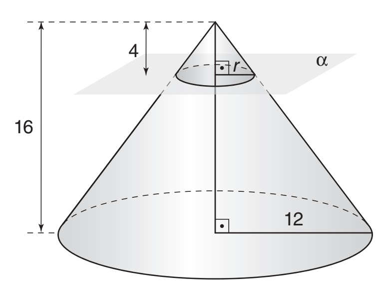
O número n de mourões que podem ser fabricados com 471 m³ (ou 471.000.000 cm³) de concreto é dado por:

$n = \dfrac{471.000.000}{20.000\pi}$

Para $\pi = 3{,}14$, temos $n = 7.500$.

Logo, podem ser fabricados 7.500 mourões.

54 A medida r do raio da secção transversal pode ser obtida por semelhança de triângulos:



$\dfrac{16}{4} = \dfrac{12}{r} \Rightarrow r = 3$

As medidas G e g das geratrizes do cone original e do cone acima do plano α são obtidas pelo teorema de Pitágoras:

$\begin{cases} G^2 = 16^2 + 12^2 \\ g^2 = 4^2 + 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = 20 \\ g = 5 \end{cases}$

Assim:

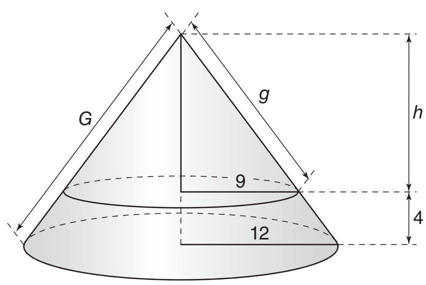
a) O volume V do tronco de cone é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4\right) \text{cm}^3 =$$
$$= 756\pi \text{ cm}^3$$

b) A área lateral A_ℓ do tronco de cone é dada por:
$A_\ell = (\pi \cdot 12 \cdot 20 - \pi \cdot 3 \cdot 5) \text{ cm}^2 = 225\pi \text{ cm}^2$

c) A área total A_T do tronco de cone é dada por:
$A_T = (225\pi + \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 12^2) \text{ cm}^2 = 378\pi \text{ cm}^2$

55 Prolongando as geratrizes do tronco, obtemos o cone que contém esse tronco:



Pela semelhança dos cones, temos:

$$\frac{h+4}{h} = \frac{12}{9} \Rightarrow 12h = 9h + 36$$
$$\therefore h = 12$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{cases} g^2 = 9^2 + 12^2 \\ G^2 = 12^2 + 16^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 15 \\ G = 20 \end{cases}$$

Assim:

a) O volume V desse tronco de cone é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12\right) \text{cm}^3 =$$
$$= 444\pi \text{ cm}^3$$

b) A área lateral A_ℓ desse tronco de cone é dada por:
$A_\ell = (\pi \cdot 12 \cdot 20 - \pi \cdot 9 \cdot 15) \text{ cm}^2 = 105\pi \text{ cm}^2$

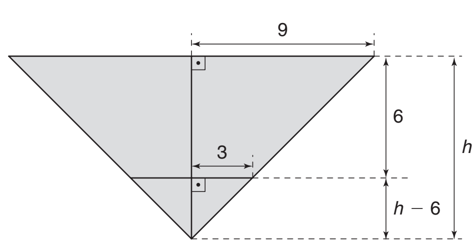
c) A área total A_T desse tronco de cone é dada por:
$A_T = (105\pi + \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 9^2) \text{ cm}^2 = 330\pi \text{ cm}^2$

56 Sendo v o volume do cone C', temos que o volume do tronco de cone é $7v$ e, portanto, o volume do cone original é $8v$. Assim, concluímos:

$$\frac{8v}{v} = \left(\frac{18}{d}\right)^3 \Rightarrow 8 = \left(\frac{18}{d}\right)^3$$
$$\therefore \frac{18}{d} = \sqrt[3]{8} \Rightarrow d = 9$$

Logo, a secção transversal dista 9 cm do vértice do cone.

57 Sendo h a medida, em metro, do cone obtido pelos prolongamentos das geratrizes desse tronco, temos a secção meridiana.



$$\frac{h}{h-6} = \frac{9}{3} \Rightarrow h = 9$$

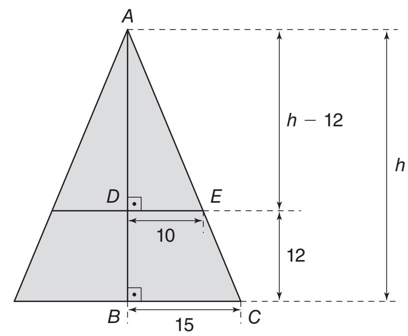
Assim, o volume V do tronco de cone é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3\right) \text{m}^3 = 234\pi \text{ m}^3$$

Para $\pi = 3{,}14$, temos:
$V = 734{,}76 \text{ m}^3 = 734.760 \text{ dm}^3$

Como $1\text{L} = 1 \text{ dm}^3$, concluímos que a capacidade do reservatório é 734.760 L.

58 Sendo h a medida, em centímetro, da altura do cone obtido pelos prolongamentos das geratrizes desse tronco, temos a secção meridiana:



$$\frac{h}{h-12} = \frac{15}{10} \Rightarrow h = 36$$

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos as medidas G e g das hipotenusas dos triângulos ABC e ADE, respectivamente:

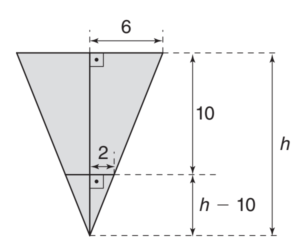
$$\begin{cases} G^2 = 36^2 + 15^2 \\ g^2 = 24^2 + 10^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = 39 \\ g = 26 \end{cases}$$

Assim, a área lateral A do tronco de cone é dada por:
$A = (\pi \cdot 15 \cdot 39 - \pi \cdot 10 \cdot 26) \text{ cm}^2 = 325\pi \text{ cm}^2$

Alternativa **d**.

59 O volume interno V_c do cilindro é dado por:
$V_c = \pi \cdot 2^2 \cdot 12 \text{ cm}^3 = 48\pi \text{ cm}^3$

Para calcular o volume interno V_t do tronco de cone, vamos, inicialmente, determinar a medida h, em centímetro, da altura do cone obtido pelos prolongamentos das geratrizes desse tronco:



$$\frac{h}{h-10} = \frac{6}{2} \Rightarrow h = 15$$

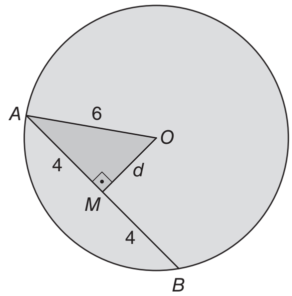
Assim:

$$V_t = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5\right) \text{cm}^3 = \frac{520\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Concluímos, calculando o volume V do funil:

$$V = \left(48\pi + \frac{520\pi}{3}\right) \text{cm}^3 = \frac{664\pi}{3} \text{ cm}^3 = \frac{664\pi}{3} \text{ m}\ell$$

60 A figura abaixo representa a secção plana da esfera pelos pontos A, B e O.

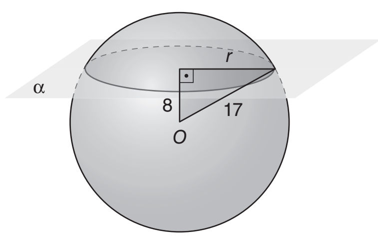


Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 + 4^2 = 6^2 \Rightarrow d = 2\sqrt{5}$

Logo, a distância entre o centro O e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $2\sqrt{5}$ cm.

61 **a)** Sendo r a medida do raio do círculo, temos:



$r^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow r = 15$

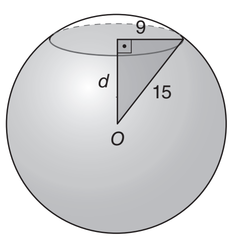
Logo, o raio do círculo mede 15 cm.

b) A área A da secção é dada por:

$A = \pi \cdot 15^2 \text{ cm}^2 = 225\pi \text{ cm}^2$

62 Sendo r a medida do raio da secção plana, temos:

$\pi r^2 = 81\pi \Rightarrow r = 9$ dm

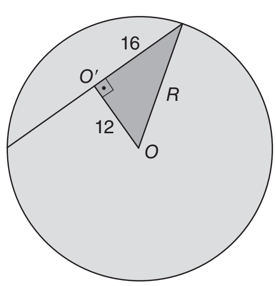


Assim, pelo teorema de Pitágoras, calculamos a distância d pedida:

$d^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow d = 12$

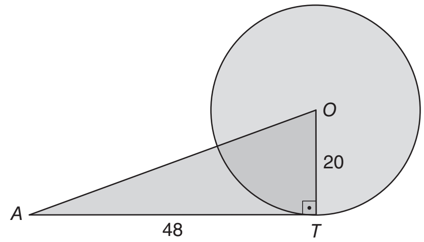
Logo, a distância entre o centro O e o plano que contém a secção é 12 dm.

63 Inicialmente, calculamos a medida R do raio da esfera.



$R^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow R = 20$

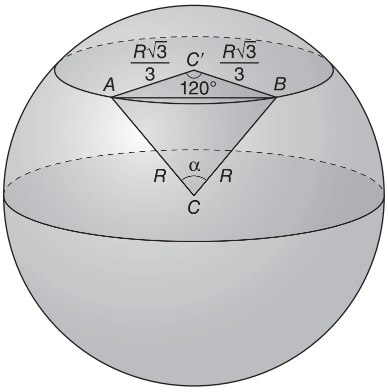
Sendo A a projeção ortogonal de O sobre r, a medida OA é a distância entre O e r:



$(OA)^2 = 20^2 + 48^2 \Rightarrow OA = 52$

Logo, a distância entre O e r é 52 cm.

64 Sendo C' o centro do paralelo e α a medida do ângulo $A\widehat{C}B$, temos:



Pela lei dos cossenos, aplicada no triângulo ABC', temos:

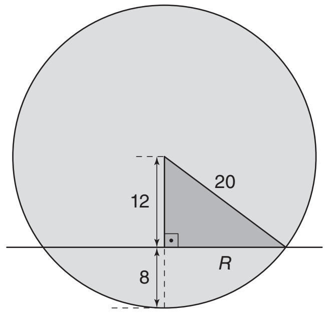
$(AB)^2 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{2R\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{3} \cdot$

$\cdot \cos 120° \Rightarrow AB = R$

Assim, o triângulo ABC é equilátero e, portanto, $\alpha = 60°$.

Alternativa **d**.

65 A parte submersa do diâmetro vertical mede 8 cm. Assim, sendo R a medida, em centímetro, do raio da circunferência determinada pela intersecção das superfícies da bola e da água, temos a secção:



$R^2 + 12^2 = 20^2 \Rightarrow R = 16$

Logo, a medida procurada é 16 cm.

66 $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \text{ m}^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ m}^3$

67 $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 \text{ cm}^3 = 144\pi \text{ cm}^3$

68 Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

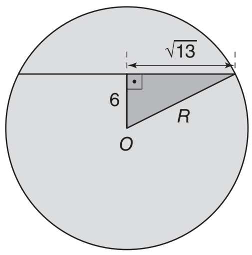
$\pi R^2 = 16\pi \Rightarrow R = 4$

Logo, o volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 \text{ m}^3 = \frac{256\pi}{3} \text{ m}^3$$

69 Sendo r a medida do raio da secção plana, temos:

$\pi r^2 = 13\pi \Rightarrow r = \sqrt{13}$



Assim, pelo teorema de Pitágoras, determinamos a medida R do raio da esfera:

$R^2 = 6^2 + (\sqrt{13})^2 \Rightarrow R = 7$

Logo, o volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 7^3 \text{ dm}^3 = \frac{1.372\pi}{3} \text{ dm}^3$$

70 Sendo r a medida do raio da base do cilindro, temos:

$$V_{esfera} = V_{cilindro} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = \pi \cdot r^2 \cdot 4$$

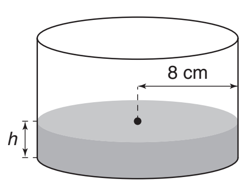
$\therefore r = 3$

Logo, o raio da base do cilindro mede 3 cm.

71 O volume V de cada bola de chocolate é dado por:

$$V = \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Assim, ao derreterem as seis bolas, o chocolate na panela alcançará a altura h, em centímetro, tal que:



$$\pi \cdot 8^2 \cdot h = 6 \cdot \frac{32\pi}{3}$$

$\therefore h = 1$ cm

72 Sendo V o volume da esfera, temos:

$$V = \frac{4\pi \cdot 5^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Assim, a medida a, em centímetro, da aresta do cubo é tal que:

$$a^3 = \frac{500\pi}{3} \Rightarrow a = \frac{5\sqrt[3]{36\pi}}{3}$$

Alternativa **e**.

73 **a)** O raio da esfera é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência. Assim:

$A\hat{C}B \cong A\hat{T}O$ (I)

O ângulo $O\hat{A}T$ é comum aos triângulos ATO e ACB. Assim:

$O\hat{A}T \cong C\hat{A}B$ (II)

As condições (I) e (II) caracterizam o caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos; portanto:

$\triangle OAT \sim \triangle CAB$

b) Sendo R a medida, em centímetro, do raio da esfera, temos, pela semelhança de triângulos demonstrada no item a e pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} \dfrac{R}{6} = \dfrac{2}{AB} \\ (AB)^2 = 6^2 + 8^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{12}{AB} & \text{(I)} \\ AB = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (II) em (I), obtendo: R = 1,2 cm

Logo, o volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4\pi(1{,}2)^3}{3} \text{ cm}^3 = 2{,}304\pi \text{ cm}^3$$

74 A área A da superfície esférica é dada por:

$A = 4\pi \cdot 6^2 \text{ dm}^2 = 144\pi \text{ dm}^2$

75 Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \frac{32\pi}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$\therefore R = 2$ m

Logo, a área A da superfície dessa esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot 2^2 \text{ m}^2 = 16\pi \text{ m}^2$

76 Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$2\pi R = 20\pi \Rightarrow R = 10$

Logo, a área A da superfície dessa esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot 10^2 \text{ cm}^2 = 400\pi \text{ cm}^2$

77 Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$4\pi R^2 = 400\pi \Rightarrow R = 10$ cm

Logo, o volume V dessa esfera é dado por:

$$V = \frac{4\pi \cdot 10^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{4.000\pi}{3} \text{ cm}^3$$

78 A área A do hemisfério de raio R é a soma da área da metade da superfície esférica com a área da base. Assim, para R = 3 cm, temos:

$$A = \left(4\pi \cdot \frac{3^2}{2} + \pi \cdot 3^2\right) \text{cm}^2 = 27\pi \text{ cm}^2$$

79 A área A da superfície de cada esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot (0{,}5)^2 \text{ cm}^2 = \pi \text{ cm}^2$

Assim, a área das 60 esferas é 60π cm^2 e, portanto, o custo C, em real, do banho de ouro é dado por:

$C = 60\pi \cdot 4{,}50 \Rightarrow C \approx 847{,}8$

Logo, o custo total do banho de ouro é R$ 847,80.

80

$$\begin{array}{ccc} \text{Ângulo (grau)} & & \text{Volume (cm}^3\text{)} \\ 360 & \text{———} & \dfrac{4\pi \cdot 6^3}{3} \\ 36 & \text{———} & V_{cunha} \end{array} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{144\pi}{5} \text{ cm}^3$$

81

Ângulo (radiano)		Área (cm^2)
2π	——	$4\pi \cdot 4^2$
$\frac{\pi}{8}$	——	A_{fuso}

$\Rightarrow A_{fuso} = 4\pi\ cm^2$

82 Sendo α a medida do ângulo diedro, temos:

Ângulo (grau)		Área (m^2)
360	——	$4\pi \cdot 5^2$
α	——	20π

$\Rightarrow \alpha = 72°$

83 Sendo α a medida do ângulo diedro, temos:

Ângulo (radiano)		Volume (cm^3)
2π	——	$\frac{4\pi \cdot 3^3}{3}$
α	——	$\frac{36\pi}{5}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5}$ rad

84 Sendo R a medida, em quilômetro, do raio da Terra, temos:

$2\pi R = 40.000 \Rightarrow R = \frac{20.000}{\pi}$

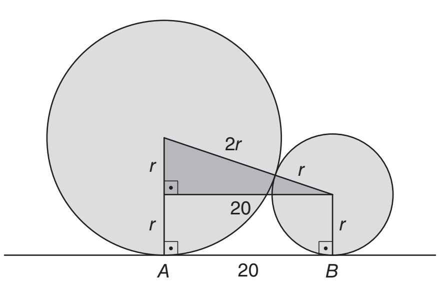
Como cada fuso horário tem ângulo diedro de 15°, a área A_f de cada um deles é calculada por:

Ângulo (grau)		Área (km^2)
360	——	$4\pi \cdot \left(\frac{20.000}{\pi}\right)^2$
15	——	A_f

$$\therefore A_f = \frac{15 \cdot \frac{16 \cdot 10^8}{\pi}}{360}\ km^2 = \frac{2}{3\pi} \cdot 10^8\ km^2$$

Alternativa **c**.

85 Sendo r a medida do raio da esfera menor, temos:



$(3r)^2 = r^2 + 20^2 \Rightarrow r^2 = 50$

$\therefore r = 5\sqrt{2}$

Logo, os raios dessas esferas medem $5\sqrt{2}$ cm e $10\sqrt{2}$ cm.

86 Sendo R a medida, em centímetro, do raio de cada bola, temos que o raio da base e a altura do cilindro medem R e 6R, respectivamente.

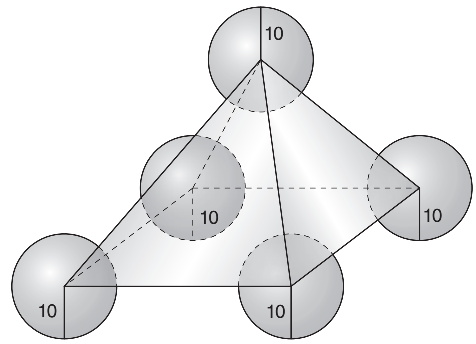
Assim:

$\pi \cdot R^2 \cdot 6R = 162\pi \Rightarrow R = 3$

Logo, o raio de cada bola mede 3 cm.

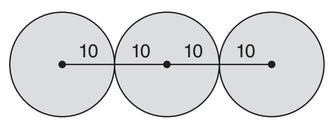
Alternativa **e**.

87 Representando as bolas cujos centros são vértices da pirâmide, temos:

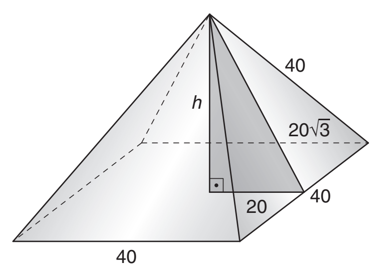


Assim, sendo h a altura da pirâmide, em centímetro, a altura da pilha de bolas é $h + 20$.

Para o cálculo de h, observemos que cada aresta da pirâmide tem comprimento 40 cm:



Assim, temos:



$h^2 + 20^2 = (20\sqrt{3})^2 \Rightarrow h = 20\sqrt{2}$

Logo, a medida H da pilha de bolas é dada por:

$H = (20\sqrt{2} + 20)$ cm $= 20(\sqrt{2} + 1)$ cm

Alternativa **b**.

88 Sendo a a medida da aresta do cubo, temos:

$a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$

A medida r do raio da esfera inscrita no cubo mede metade da medida da aresta desse cubo; logo:

$r = \frac{a}{2} \Rightarrow r = 0,5$ m

89 Sendo d e a as medidas da diagonal e de uma aresta do cubo, respectivamente, temos:

$d = a\sqrt{3}$

Para $d = \sqrt{48}$, deduzimos que:

$\sqrt{48} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = 4$

Logo, a medida r do raio da esfera inscrita nesse cubo é dada por:

$r = \frac{4}{2}$ cm $= 2$ cm

90 A medida a da aresta do cubo é o dobro da medida do raio da esfera inscrita e, portanto, $a = 5$ cm.

Logo, o volume V desse cubo é dado por:

$V = 5^3\ cm^3 = 125\ cm^3$

91 A distância d entre um vértice do cubo e a esfera inscrita é a diferença entre a metade da medida da diagonal do cubo e a medida do raio da esfera, isto é:

$$d = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right) \text{cm} = \frac{5(\sqrt{3} - 1)}{2} \text{cm}$$

92 A medida da diagonal do cubo é $8\sqrt{3}$ cm.

Como a medida R do raio da esfera circunscrita ao cubo é metade da medida da diagonal desse cubo, concluímos:

$$R = \frac{8\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

93 Sendo a a medida de uma aresta do cubo, temos:

$$a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

Assim, cada diagonal desse cubo mede 3 cm e, portanto, o raio da esfera circunscrita a esse cubo mede $\frac{3}{2}$ cm.

Concluímos, então, que a área A da superfície dessa esfera é dada por:

$$A = 4\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{cm}^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

94 Sendo R a medida da esfera circunscrita ao cubo, temos:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 36\pi \Rightarrow R = 3 \text{ dm}$$

Indicando por a a medida da aresta do cubo e observando que cada diagonal do cubo é diâmetro da esfera circunscrita, temos:

$$a\sqrt{3} = 6 \Rightarrow a = 2\sqrt{3} \text{ dm}$$

Concluímos, então, que o volume V do cubo é dado por:

$$V = (2\sqrt{3})^3 \text{ dm}^3 = 24\sqrt{3} \text{ dm}^3$$

95 Sendo a a medida da aresta do cubo, o raio da esfera circunscrita a ele mede $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Assim, sendo V_C o volume do cubo e V_E o volume da esfera circunscrita a ele, concluímos:

$$\frac{V_C}{V_E} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$$

96 Sendo a a medida da aresta do cubo, temos que o raio da esfera inscrita mede $\frac{a}{2}$ e o raio da esfera circunscrita mede $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Assim, a razão pedida é dada por:

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

97 Sendo R, a_i e a_c as medidas do raio da esfera, da aresta do cubo inscrito e da aresta do cubo circunscrito, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} R = \frac{a_i\sqrt{3}}{2} \\ R = \frac{a_c}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \\ a_c = 2R \end{cases}$$

Assim, concluímos:

$$\frac{a_i}{a_c} = \frac{\frac{2R\sqrt{3}}{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

98 As arestas coplanares de um octaedro regular são lados de um quadrado e, portanto, a medida do raio da esfera circunscrita ao octaedro é metade da medida da diagonal desse quadrado. Assim, sendo a a medida da aresta do octaedro, temos:

$$20 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 20\sqrt{2} \text{ cm}$$

99 Sendo a a medida da aresta do octaedro, temos:

$$6 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 6\sqrt{2} \text{ dm}$$

O volume V do octaedro é a soma dos volumes de duas pirâmides quadrangulares regulares cujas arestas das bases têm medida $6\sqrt{2}$ dm e cuja altura tem medida igual à do raio da esfera circunscrita ao octaedro, ou seja:

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot(6\sqrt{2})^2\cdot 6 \text{ dm}^3 = 288 \text{ dm}^3$$

Logo, o volume do octaedro é 288 dm^3.

100 Sendo a a medida da aresta do octaedro, temos que a medida do raio da esfera circunscrita é $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Assim, sendo A_E a área da superfície da esfera e A_T a área total do octaedro regular inscrito nessa esfera, temos:

$$A_E = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2 \text{ e } A_T = 8\cdot\frac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = 2a^2\sqrt{3}$$

Concluímos, então, que:

$$\frac{A_E}{A_T} = \frac{2\pi a^2}{2a^2\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

101 Sendo r a medida do raio da esfera, temos:

$$r = \frac{8\sqrt{6}}{6} \text{ cm} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

Logo, o volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^3 \text{cm}^3 = \frac{512\pi\sqrt{6}}{27} \text{ cm}^3$$

102 Sendo a a medida da aresta do octaedro, temos:

$$2\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow a = 12$$

Logo, cada aresta desse octaedro mede 12 m.

103 A altura do cilindro mede 8 cm, e o raio da base mede 4 cm; logo, a área total A_T desse cilindro é dada por:

$$A_T = (2\pi\cdot 4\cdot 8 + 2\cdot\pi\cdot 4^2) \text{ cm}^2 = 96\pi \text{ cm}^2$$

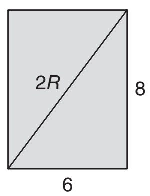
104 A medida r do raio da esfera é metade da medida da altura do cilindro, ou seja:

$$r = \frac{8}{2} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Logo, o volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4\pi\cdot 4^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{256\pi}{3} \text{ cm}^3$$

105 A medida R do raio da esfera é metade da medida da diagonal de uma secção meridiana do cilindro. Assim, temos:



$(2R)^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow 2R = 10$
$\therefore\ R = 5$ cm

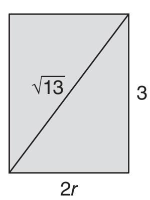
Logo, o volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4\pi \cdot 5^3}{3}\ \text{cm}^3 = \frac{500\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

106 Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

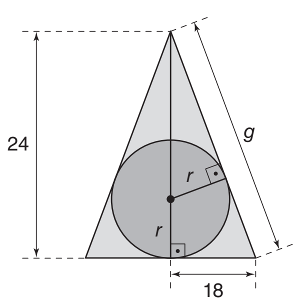
$$4\pi R^2 = 13\pi \Rightarrow R = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Assim, sendo r a medida do raio da base do cilindro, temos que uma secção meridiana desse cilindro é:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$(2r)^2 + 3^2 = (\sqrt{13})^2 \Rightarrow r = 1$
Logo, o raio da base do cilindro mede 1 dm.

107 Sendo g a medida da geratriz do cone e r a medida do raio da esfera inscrita nele, temos que uma secção meridiana desse cone é:



Pelo teorema de Pitágoras e por semelhança de triângulos, temos:

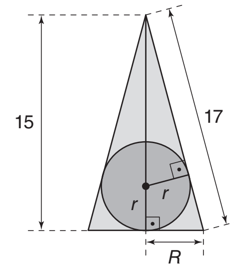
$$\begin{cases} g^2 = 18^2 + 24^2 \\ \dfrac{g}{24 - r} = \dfrac{18}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 30 & \text{(I)} \\ \dfrac{g}{24 - r} = \dfrac{18}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$$\frac{30}{24 - r} = \frac{18}{r} \Rightarrow r = 9$$

Logo, o raio da esfera mede 9 cm.

108 Sendo r e R as medidas dos raios da esfera e do cone, respectivamente, temos que uma secção meridiana do cone é:



Pelo teorema de Pitágoras e por semelhança de triângulos, temos:

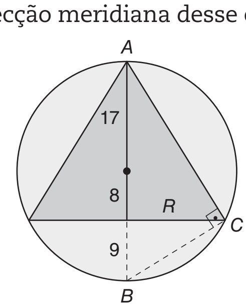
$$\begin{cases} R^2 + 15^2 = 17^2 \\ \dfrac{17}{15 - r} = \dfrac{R}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 8 & \text{(I)} \\ \dfrac{17}{15 - r} = \dfrac{R}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$$\frac{17}{15 - r} = \frac{8}{r} \Rightarrow r = \frac{24}{5}$$

Logo, o raio da esfera inscrita no cone mede $\frac{24}{5}$ cm, ou seja, 4,8 cm.

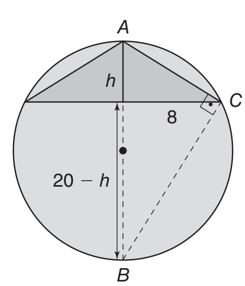
109 Sendo R a medida do raio da base do cone, temos que uma secção meridiana desse cone é:



Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:
$R^2 = 25 \cdot 9 \Rightarrow R = 15$
Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 25\ \text{cm}^3 = 1.875\pi\ \text{cm}^3$$

110 Uma secção meridiana desse cone é:



Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:
$8^2 = h(20 - h) \Rightarrow h^2 - 20h + 64 = 0$
$\therefore\ h = 16$ ou $h = 4$
Como, por hipótese, a altura h é menor que o raio da esfera, concluímos que $h = 4$ dm.

111 Sendo r e R as medidas dos raios das esferas inscrita e circunscrita ao cone de geratriz g, temos as secções meridianas:

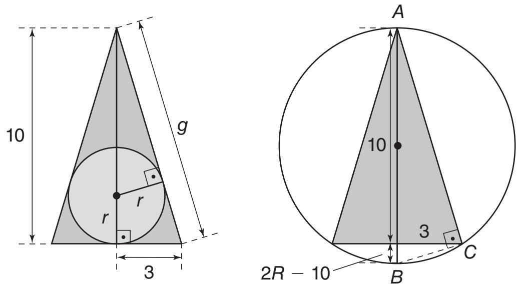


figura 1 figura 2

Pelo teorema de Pitágoras e por semelhança de triângulos, temos da figura 1:

$$\begin{cases} g^2 = 10^2 + 3^2 \\ \dfrac{g}{10 - r} = \dfrac{3}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = \sqrt{109} & \text{(I)} \\ \dfrac{g}{10 - r} = \dfrac{3}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$$\frac{\sqrt{109}}{10 - r} = \frac{3}{r} \Rightarrow r = \frac{3(\sqrt{109} - 3)}{10}$$

Do triângulo retângulo ABC da figura 2, temos:

$$3^2 = 10(2R - 10) \Rightarrow R = \frac{109}{20}$$

Logo, os raios das esferas inscrita e circunscrita ao cone medem $\dfrac{3(\sqrt{109} - 3)}{10}$ dm e $\dfrac{109}{20}$ dm, respectivamente.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 A área B de cada base é a área de um círculo de raio r.

$B = \pi r^2$

a) Como $B = 4\pi$ m^2, temos:

$4\pi \text{ m}^2 = \pi \cdot r^2 \text{ m}^2 \Rightarrow r^2 = 4$

$\therefore r = 2$ m

b) A área lateral A_ℓ é a área de um retângulo de comprimento 4π m e altura 5 m, ou simplesmente:

$A_\ell = 2\pi \cdot r \cdot h = (2\pi \cdot 2 \cdot 5) \text{ m}^2 = 20\pi \text{ m}^2$

c) A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das duas bases:

$A_T = (20\pi + 2 \cdot 4\pi) \text{ m}^2 = 28\pi \text{ m}^2$

d) A área A_{SM} de uma secção meridiana do cilindro é a área de um retângulo de base 4 m e altura 5 m, ou simplesmente:

$A_{SM} = 2 \cdot r \cdot h = (2 \cdot 2 \cdot 5) \text{ m}^2 = 20 \text{ m}^2$

2 a) No cilindro equilátero, a altura é o dobro do raio r da base. Assim, temos:

$A_{SM} = 2rh \Rightarrow A_{SM} = 4r^2$

Sabemos que $A_{SM} = 25$ cm^2; então:

$25 \text{ cm}^2 = 4r^2 \Rightarrow r^2 = \dfrac{25}{4} \text{ cm}^2$

$\therefore r = 2{,}5$ cm

b) $B = \pi r^2 = \pi \cdot (2{,}5)^2 \text{ cm}^2 = 6{,}25\pi \text{ cm}^2$

c) $A_\ell = 4\pi r^2 = (4\pi \cdot 6{,}25) \text{ cm}^2 = 25\pi \text{ cm}^2$

d) $A_T = A_\ell + 2B = (25\pi + 2 \cdot 6{,}25\pi) \text{ cm}^2 = 37{,}5\pi \text{ cm}^2$

3 a) O cilindro gerado pela revolução do retângulo $ABCD$ em torno do lado $\overline{AD}$ tem raio da base $r = 10$ cm e altura $h = 4$ cm.

Assim:

$A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$\therefore A_T = (2\pi \cdot 10 \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot 100) \text{ cm}^2 = 280\pi \text{ cm}^2$

b) O cilindro gerado pela revolução do retângulo $ABCD$ em torno do lado $\overline{AB}$ tem raio da base $r = 4$ cm e altura $h = 10$ cm.

Assim:

$A_T = A_\ell + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2 =$

$= (2\pi \cdot 4 \cdot 10 + 2\pi \cdot 16) \text{ cm}^2$

$\therefore A_T = 112\pi \text{ cm}^2$

4 Sabemos que a área total do cilindro tem 80π cm^2 a mais que a área de uma base.

Assim:

$A_T = B + 80\pi \text{ cm}^2$

Como $A_T = A_\ell + 2B$, temos:

$(B + 80\pi) \text{ cm}^2 = (A_\ell + 2B) \text{ cm}^2 \Rightarrow A_\ell = (80\pi - B) \text{ cm}^2$

No cilindro equilátero, a altura tem a medida do diâmetro da base; portanto:

$A_\ell = (80\pi - B) \text{ cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2\pi \cdot r \cdot 2r) \text{ cm}^2 = (80\pi - \pi r^2) \text{ cm}^2$

$\therefore 5\pi r^2 = 80\pi \Rightarrow r = 4$ cm

Logo, a medida do raio da base desse cilindro é 4 cm.

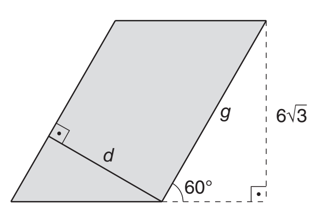
5 Sendo h e r as medidas da altura e do raio da base do semicilindro equilátero, temos que $h = 2r$. Portanto:

$A_\ell = 32(\pi + 2) \Rightarrow 2r \cdot 2r + \pi r \cdot 2r = 32(\pi + 2)$

$\therefore 2r^2(2 + \pi) = 32(\pi + 2) \Rightarrow r = 4$

Logo, a altura do semicilindro é 8 dm.

6 Sendo g e d as medidas da geratriz do cilindro e da distância entre as geratrizes contidas em β, temos a secção meridiana:



Assim:

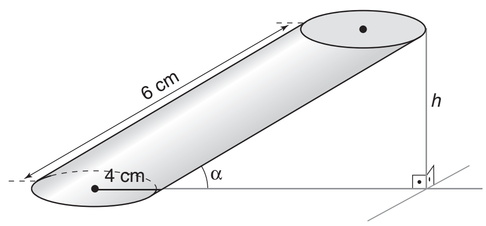
$$\begin{cases} gd = 60 \\ \text{sen } 60° = \dfrac{6\sqrt{3}}{g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} gd = 60 & \text{(I)} \\ g = 12 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (II) em (I), obtendo:

$d = 5$ cm

Logo, a distância entre as geratrizes contidas em β é 5 cm.

7 Nesse cilindro a medida r do raio da base é 4 cm e a medida h da altura, em centímetro, é dada por $h = 6$ sen α, em que α é a medida de um ângulo agudo que cada geratriz forma com os planos das bases.

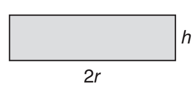


Como o volume V é dado por $V = \pi r^2 h$, temos:

$48\sqrt{3}\pi = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 \cdot \text{sen}\ \alpha \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $\alpha = 60°$.

8 Cada secção meridiana é um retângulo de base igual ao diâmetro $2r$ da base do cilindro e altura h igual à altura do cilindro.



O perímetro de qualquer secção meridiana mede 26 cm e, portanto:

$4r + 2h = 26 \Rightarrow 2r + h = 13 \quad \text{(I)}$

Como a área lateral mede 30π cm², temos:

$A_\ell = 2\pi r h \Rightarrow 30\pi = 2\pi r h$

$\therefore h = \dfrac{15}{r}$ (II)

Substituímos (II) em (I), obtendo:

$2r + \dfrac{15}{r} = 13$

Portanto:

$2r^2 - 13r + 15 = 0 \Rightarrow r = 5 \text{ ou } r = \dfrac{3}{2}$

Para $r = 5$ cm, temos: $h = \dfrac{15}{r}$ cm $= 3$ cm

Para $r = \dfrac{3}{2}$ cm, temos: $h = \dfrac{15}{\frac{3}{2}}$ cm $= 10$ cm

Pela condição $h < 2r$, deduzimos que $r = 5$ cm e $h = 3$ cm.

Assim, podemos calcular o volume V do cilindro:

$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi \cdot 5^2 \cdot 3 \text{ cm}^3$

$\therefore V = 75\pi \text{ cm}^3$

Logo, o volume desse cilindro é 75π cm³.

9 O volume V_a do cilindro obtido pela rotação em torno do lado a é dado por:

$V_a = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 \text{ cm}^3 = 100\pi \text{ cm}^3$

O volume V_b do cilindro obtido pela rotação em torno do lado b é dado por:

$V_b = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 \text{ cm}^3 = 80\pi \text{ cm}^3$

Assim, a razão entre esses volumes é dada por:

$\dfrac{V_a}{V_b} = \dfrac{100\pi \text{ cm}^3}{80\pi \text{ cm}^3} = \dfrac{5}{4}$

Alternativa **c**.

10 O volume V do semicilindro equilátero de raio da base r é dado por $V = \pi r^3$. Assim, temos:

$27\pi = \pi r^3 \Rightarrow r = 3$

Logo, a área lateral A_ℓ desse semicilindro é:

$A_\ell = (3\pi \cdot 6 + 6 \cdot 6) \text{ cm}^2 \Rightarrow A_\ell = 18(\pi + 2) \text{ cm}^2$

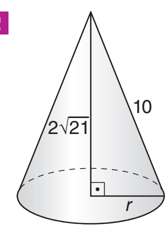
11 Conhecemos o volume, $V = 81\pi$ dm³, e as medidas, $G = 10$ dm e $g = 8$ dm, das geratrizes maior e menor do tronco de cilindro circular reto. Assim, a medida r do raio da base desse tronco é obtida por:

$V = \dfrac{\pi r^2(G + g)}{2} \Rightarrow 81\pi = \dfrac{\pi r^2(10 + 8)}{2}$

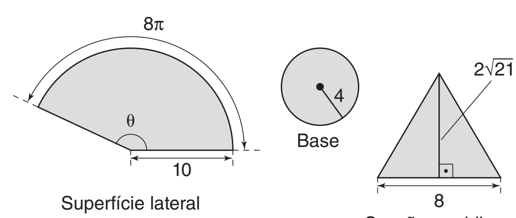
$\therefore r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

Concluímos, então, que o raio da base desse tronco mede 3 dm.

12



$r^2 + (2\sqrt{21})^2 = 10^2 \Rightarrow r = 4$



Superfície lateral

Secção meridiana

a) $A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 4 \cdot 10 \text{ dm}^2$

$\therefore A_\ell = 40\pi \text{ dm}^2$

b) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = (40\pi + \pi \cdot 4^2) \text{ dm}^2$

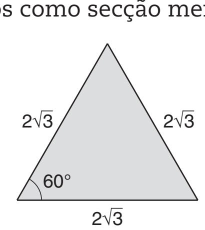
$\therefore A_T = 56\pi \text{ dm}^2$

c) $A_{SM} = \dfrac{8 \cdot 2\sqrt{21}}{2} \text{ dm}^2 = 8\sqrt{21} \text{ dm}^2$

d) $\theta = \dfrac{2\pi r}{g} \text{ rad} \Rightarrow \theta = \dfrac{8\pi}{10} \text{ rad}$

$\theta = \dfrac{4\pi}{5} \text{ rad}$

13 No cone equilátero, cada secção meridiana é um triângulo equilátero. Assim, se a geratriz mede $2\sqrt{3}$ cm, temos como secção meridiana:



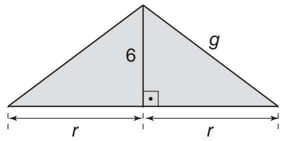
Logo:

$A_{SM} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \text{sen } 60° \text{ cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{SM} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

$\therefore A_{SM} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$

14 Secção meridiana



$A_{SM} = 48 \Rightarrow \dfrac{2r \cdot 6}{2} = 48$

$\therefore\ r = 8$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

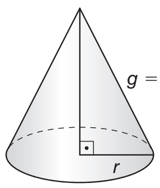
$8^2 + 6^2 = g^2 \Rightarrow g = 10$

Calculando a área total A_T, concluímos:

$A_T = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow A_T = (\pi \cdot 8 \cdot 10 + \pi \cdot 8^2)\ cm^2$

$\therefore\ A_T = 144\pi\ cm^2$

15



$A_T = 75\pi \Rightarrow \pi rg + \pi r^2 = 75\pi$

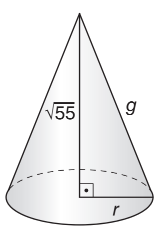
$\therefore\ \pi r \cdot 10 + \pi r^2 = 75\pi \Rightarrow r^2 + 10r - 75 = 0$

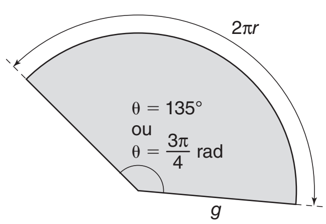
$\therefore\ r = -15$ (não convém) ou $r = 5$

Logo, o raio da base desse cone mede 5 cm.

Alternativa **b**.

16





Superfície lateral

$$\begin{cases} g^2 = r^2 + (\sqrt{55})^2 \\ \dfrac{2\pi r}{g} = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^2 = r^2 + 55 & \text{(I)} \\ r = \dfrac{3g}{8} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (II) em (I), obtendo:

$$g^2 = \left(\frac{3g}{8}\right)^2 + 55 \Rightarrow g = 8$$

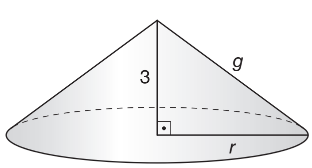
Substituímos então g por 8 em (II), obtendo $r = 3$.

Concluímos calculando a área total A_T do cone:

$A_T = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow A_T = (\pi \cdot 3 \cdot 8 + \pi \cdot 3^2)\ cm^2$

$\therefore\ A_T = 33\pi\ cm^2$

17



$$\begin{cases} g^2 = r^2 + 3^2 \\ \pi rg = 20\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^2 = r^2 + 9 & \text{(I)} \\ g = \dfrac{20}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (II) em (I), obtendo:

$$\left(\frac{20}{r}\right)^2 = r^2 + 9 \Rightarrow r^4 + 9r^2 - 400 = 0$$

Fazendo a mudança de variável $t = r^2$, temos:

$t^2 - 9t - 400 = 0 \Rightarrow t = -25$ ou $t = 16$

Retornamos então à variável original:

- $t = -25 \Rightarrow r^2 = -25$ (não existe número real r sob essa condição)

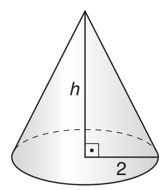
  ou
- $t = 16 \Rightarrow r^2 = 16$

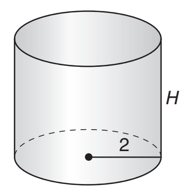
$\therefore\ r = 4$

Assim, uma secção meridiana desse cone é um triângulo isósceles com 8 cm de base e 3 cm de altura; portanto:

$$A_{SM} = \frac{8 \cdot 3}{2}\ cm^2 = 12\ cm^2$$

18





$$\begin{cases} A_{\ell(\text{cone})} = A_{\ell(\text{cilindro})} \\ g^2 = h^2 + 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi \cdot 2 \cdot g = 2\pi \cdot 2 \cdot H \\ g^2 = h^2 + 4 \end{cases}$$

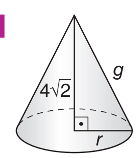
$$\therefore \begin{cases} g = 2H & \text{(I)} \\ g^2 = h^2 + 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

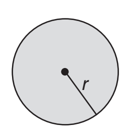
Substituímos (I) em (II), obtendo:

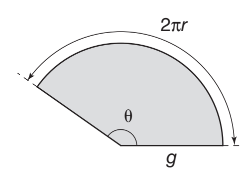
$(2H)^2 = h^2 + 4 \Rightarrow h = 2\sqrt{H^2 - 1}$

Alternativa **d**.

19







$$\begin{cases} A_T = 4B \\ g^2 = r^2 + (4\sqrt{2})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi rg + \pi r^2 = 4\pi r^2 \\ g^2 = r^2 + 32 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} g = 3r & \text{(I)} \\ g^2 = r^2 + 32 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$(3r)^2 = r^2 + 32 \Rightarrow r = 2$

Para $r = 2$, deduzimos da equação (I) que $g = 6$.

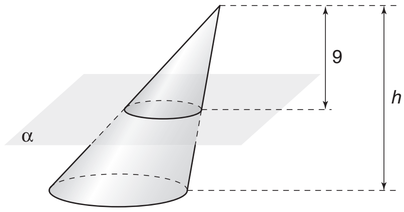
Concluímos calculando a medida θ:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g}\ \text{rad} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi \cdot 2}{6}\ \text{rad}$$

$$\therefore\ \theta = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad ou } \theta = 120°$$

Logo, a medida pedida é 120°.

20

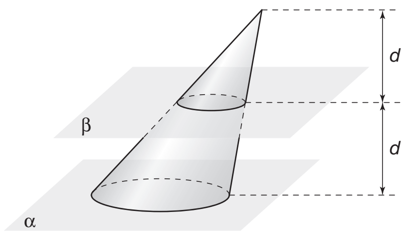


$$\frac{49}{36} = \left(\frac{h}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{h}{9} = \frac{7}{6}$$

$\therefore\ h = \dfrac{21}{2} = 10{,}5$

Logo, a altura do cone é 10,5 cm.

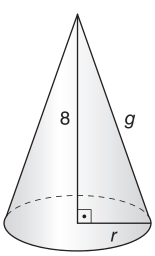
21



Sendo B e b as áreas da base do cone e da secção transversal contida em β, respectivamente, temos:

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{2d}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{B}{b} = 4$$

22



$$\begin{cases} \pi rg = 3\pi r^2 \\ g^2 = r^2 + 8^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 3r & \text{(I)} \\ g^2 = r^2 + 64 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$(3r)^2 = r^2 + 64 \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$

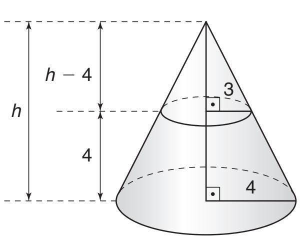
Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 8\ \text{cm}^3 = \frac{64\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

23 Sendo R e r as medidas dos raios da base e da secção transversal, temos:

$$\begin{cases} \pi R^2 = 16\pi \\ \pi r^2 = 9\pi \end{cases} \Rightarrow R = 4 \text{ e } r = 3$$

Assim, por semelhança de triângulos, obtemos a medida h da altura do cone:



$$\frac{h}{h-4} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4h - 16 = 3h$$

$\therefore\ h = 16$

O volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 16\ \text{cm}^3 = \frac{256\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

Assim: $\dfrac{3V}{16\pi} = \dfrac{3}{16\pi} \cdot \dfrac{256\pi}{3}\ \text{cm}^3 = 16\ \text{cm}^3$

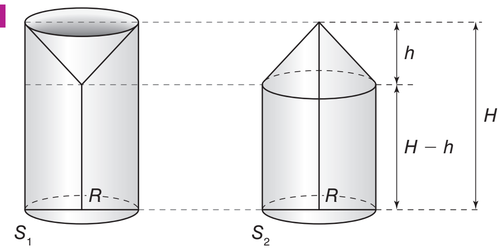
24 Sendo B a área das bases do cone e do cilindro, temos:

$V_{cone} = V_{cilindro} \Rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h = B \cdot H$

$\therefore\ h = 3H$

Alternativa **b**.

25



$$V(S_1) = \pi R^2 H - \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$V(S_2) = \pi R^2 (H - h) + \frac{\pi R^2 h}{3} = \pi R^2 H - \frac{2\pi R^2 h}{3}$$

Observando que:

$$V(S_1) - V(S_2) = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

e, portanto, $V(S_1) - V(S_2) > 0$, concluímos:
$V(S_2) < V(S_1)$

Alternativa **a**.

26 Sendo h a medida da altura do cone e da pirâmide, temos:

$V_{pirâmide} = V_{cone} \Rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$\therefore\ b^2 = \pi r^2 \Rightarrow \dfrac{b^2}{r^2} = \pi$

$\therefore\ \dfrac{b}{r} = \sqrt{\pi}$

Alternativa **c**.

27 Sendo h e x, respectivamente, as medidas da altura e do raio da base do cone, com $6 \leq h \leq 15$, temos:

$\dfrac{h}{x} = \dfrac{6}{2} \Rightarrow h = 3x$

a) A lei que expressa o volume $f(x)$, em centímetro cúbico, em função da medida x, em centímetro, do raio da base do cone, com $2 \leq x \leq 5$, é:

$f(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot 3x$

ou seja:

$f(x) = \pi x^3$

b) $f(x) > 27\pi \Rightarrow \pi x^3 > 27\pi$

$\therefore\ x^3 > 27 \Rightarrow x > 3$ (I)

Temos, ainda:

$2 \leq x \leq 5$ (II)

Assim, por (I) e (II), concluímos que $f(x) > 27\pi$ se, e somente se, $3 < x \leq 5$.

28 **a)** Pela semelhança dos cones, temos:

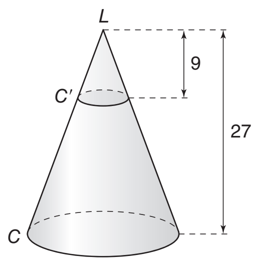
$\frac{9}{d} = \frac{6}{2} \Rightarrow d = 3$

Logo, o plano α dista 3 cm do vértice do cone.

b) O volume V do tronco de cone é dado por:

$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 3\right) \text{cm}^3 = 104\pi \text{ cm}^3$

29

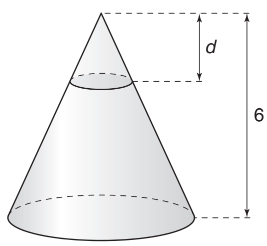


A razão entre os volumes de dois cones semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança entre eles. Assim:

$\frac{V_{(LC)}}{V_{(LC')}} = \left(\frac{27}{9}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{(LC)}}{18} = 3^3$

$\therefore V_{(LC)} = 486 \text{ dm}^3$

30



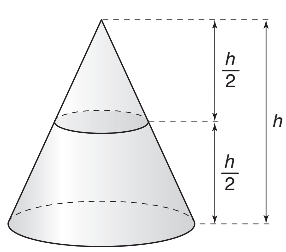
Sendo v o volume do cone menor, o volume do cone maior é $27v$. Logo:

$\frac{27v}{v} = \left(\frac{6}{d}\right)^3 \Rightarrow 27 = \left(\frac{6}{d}\right)^3$

$\therefore \frac{6}{d} = \sqrt[3]{27} \Rightarrow d = 2$

Alternativa **c**.

31



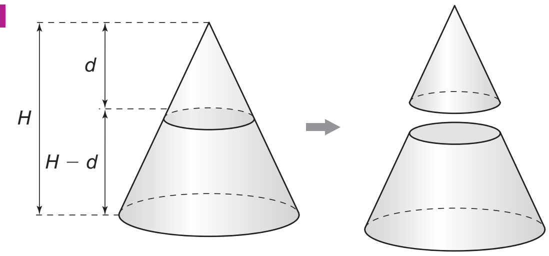
Sendo v o volume do novo cone, temos:

$\frac{V}{v} = \left(\frac{h}{\frac{h}{2}}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{v} = 8$

$\therefore v = \frac{V}{8}$

Alternativa **d**.

32



Um dos sólidos determinados é um cone C' semelhante ao cone C original tal que o volume V_C do cone C é o dobro do volume $V_{C'}$ do cone C'.

Assim, sendo d a distância entre a secção e o vértice do cone, temos:

$\frac{V_C}{V_{C'}} = \left(\frac{H}{d}\right)^3 \Rightarrow \frac{2V_{C'}}{V_{C'}} = \left(\frac{H}{d}\right)^3$

$\therefore \sqrt[3]{2} = \frac{H}{d} \Rightarrow d = \frac{H\sqrt[3]{4}}{2}$

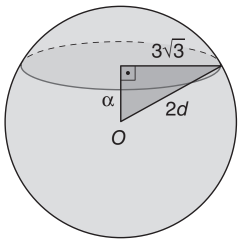
Logo, a distância entre a secção e a base do cone é dada por:

$H - d = H - \frac{H\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{H(2 - \sqrt[3]{4})}{2}$

33 Sendo r a medida do raio da secção plana, temos:

$2\pi r = 6\sqrt{3}\pi \Rightarrow r = 3\sqrt{3}$ m

Sendo d a distância pedida, temos:



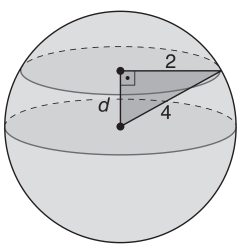
$(2d)^2 = d^2 + (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow d = 3$

Logo, a distância entre O e α é 3 m.

34 Sendo r a medida do raio da secção que não passa pelo centro da esfera, temos:

$4\pi r^2 = \pi \cdot 4^2 \Rightarrow r = 2$

Assim, sendo d a distância entre os planos, temos:

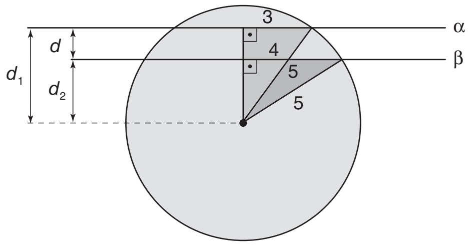


$d^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow d = 2\sqrt{3}$

Logo, a distância entre os planos é $2\sqrt{3}$ cm.

Alternativa **e**.

35



$$\begin{cases}(d_1)^2 + 3^2 = 5^2 \\ (d_2)^2 + 4^2 = 5^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d_1 = 4 \\ d_2 = 3\end{cases}$$

A distância d entre os planos α e β é dada por:

$d = d_1 - d_2 = 4 - 3 = 1$

Logo, a distância entre os planos é 1 dm.

36 Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$2\pi R = 20\pi \Rightarrow R = 10$

Logo, o volume V da esfera é dado por:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = \frac{4.000\pi}{3} \text{ cm}^3$

37 Sendo r a medida do raio da base do cone, temos:

$V_{esfera} = V_{cone} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 36$

$\therefore r = 2\sqrt{6}$ cm

Logo, o raio da base do cone mede $2\sqrt{6}$ cm.

38 $V_{esfera} = V_{cilindro} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \pi r^2 R$

$\therefore r = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Alternativa **a**.

39 Sendo R a medida, em milímetro, do raio da esfera, temos:

$V_{esfera} = V_{cone} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (24\sqrt{3})^2 \cdot 108$

$\therefore R^3 = 1.728 \cdot 27 \Rightarrow R = \sqrt[3]{1.728} \cdot \sqrt[3]{27} = 12 \cdot 3$

$\therefore R = 36$

Logo, o raio da esfera mede 36 mm.

40 Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$\pi R^2 = 64\pi \Rightarrow R = 8$ dm

Logo, a área A da superfície dessa esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot 8^2 \text{ dm}^2 = 256\pi \text{ dm}^2$

41 Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$\frac{4\pi R^3}{3} = 36\pi \Rightarrow R = 3$ dm

Logo, a área A da superfície dessa esfera é dada por:

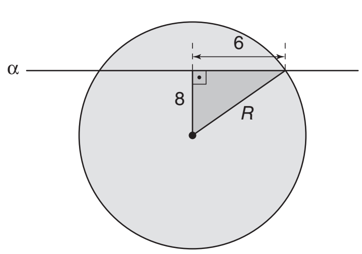
$A = 4\pi \cdot 3^2 \text{ dm}^2 = 36\pi \text{ dm}^2$

42 Sendo r a medida do raio da secção, temos:

$\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow r = 6$

Assim, sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$R^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow R = 10$



Logo, a área A da superfície dessa esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot 10^2 \text{ dm}^2 = 400\pi \text{ dm}^2$

43 Indicando por A_1 e A_2 as áreas das superfícies esféricas de raios R e $1{,}1 \cdot R$, respectivamente, temos:

$A_1 = 4\pi R^2$ e $A_2 = 4\pi(1{,}1 \cdot R)^2 = 4{,}84 \cdot \pi R^2$

Assim:

$\frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{0{,}84\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{0{,}84}{4} = 0{,}21$

Logo, a área A_2 é 21% maior que A_1.

Alternativa **a**.

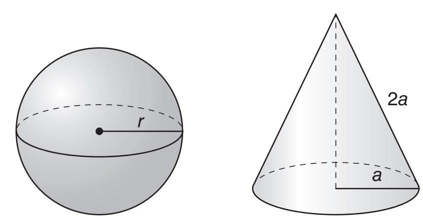
44 O sólido gerado é um hemisfério de raio 4 cm.

Logo:

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot 4^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{128\pi}{3} \text{ cm}^3$

$A = \left(\frac{4\pi \cdot 4^2}{2} + \pi \cdot 4^2\right) \text{ cm}^2 = 48\pi \text{ cm}^2$

45



$A_{sup.\ esfera} = A_{\ell(cone)} \Rightarrow 4\pi r^2 = \pi \cdot a \cdot 2a$

$\therefore r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Alternativa **e**.

46

Ângulo (radiano)		Volume (m^3)
2π	——	$\frac{4\pi \cdot 3^3}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	——	V_{cunha}

$\Rightarrow V_{cunha} = 6\pi \text{ m}^3$

47

Ângulo (grau)		Área (cm^2)
360	——	$4\pi \cdot 5^2$
50	——	A_{fuso}

$\Rightarrow A_{fuso} = \frac{125\pi}{9} \text{ cm}^2$

48

Ângulo (grau)		Área (m^2)
360	——	$4\pi \cdot 2^2$
40	——	A_{fuso}

$\Rightarrow A_{fuso} = \frac{16\pi}{9} \text{ m}^2$

Logo, a área total A da cunha esférica é dada por:

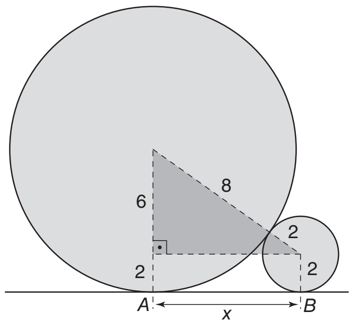
$A = \left(\frac{16\pi}{9} + \pi \cdot 2^2\right) \text{ m}^2 = \frac{52\pi}{9} \text{ m}^2$

49 Sendo R a medida do raio do fuso, temos:

Ângulo (grau)		Área (dm^2)
360	——	$4\pi R^2$
54	——	15π

$\Rightarrow R = 5$ dm

50 Sendo x a distância entre A e B, temos:
$x^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow x = 8$



Logo, a distância entre A e B é 8 cm.

51 Sendo a a medida de uma aresta do cubo, temos:
$6a^2 = 24 \Rightarrow a = 2$ dm
Como o raio da esfera inscrita nesse cubo mede metade da medida da aresta do cubo, concluímos que a área A da superfície dessa esfera é dada por:
$A = 4\pi \cdot 1^2 \text{ dm}^2 = 4\pi \text{ dm}^2$

52 Sendo a a medida da aresta do cubo, temos:
$a\sqrt{2} = 3 \Rightarrow a = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ dm
Assim, o raio da esfera inscrita nesse cubo mede $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ dm e, portanto, a área A da superfície dessa esfera é dada por:
$A = 4\pi\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 \text{ dm}^2 = \dfrac{9\pi}{2} \text{ dm}^2$

53 As arestas dos cubos C_1 e C_2 medem $2p$ e $2q$, respectivamente. Assim, temos:
$6(2q)^2 = 2 \cdot 6(2p)^2 \Rightarrow q = \sqrt{2}p$
Alternativa **a**.

54 Sendo a a medida da aresta do cubo C_1, temos que a diagonal desse cubo é $a\sqrt{3}$ e, portanto, a aresta do cubo C_2 mede $2a\sqrt{3}$.
Assim, temos:
$\dfrac{V_{C_1}}{V_{C_2}} = \dfrac{a^3}{(2a\sqrt{3})^3} = \dfrac{1}{24\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{72}$

55 Sendo a a medida de cada aresta do cubo, temos:
$a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$ m
Assim, a diagonal desse cubo mede $\sqrt{3}$ m e, por-, tanto o raio da esfera circunscrita mede $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m.
Logo, a área A da superfície da esfera circunscrita a esse cubo é dada por:
$A = 4\pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ m}^2 = 3\pi \text{ m}^2$

56 Sendo a a medida da aresta do cubo, temos que o raio da esfera inscrita mede $\dfrac{a}{2}$ e o raio da esfera circunscrita mede $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Assim, concluímos:
$$\frac{A_i}{A_c} = \frac{4\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{4\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

57 Sendo a a medida da aresta do cubo, temos que o raio da esfera inscrita mede $\dfrac{a}{2}$ e o raio da esfera circunscrita mede $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Assim, concluímos:
$$\frac{V_i}{V_c} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

58 Sendo a a medida da aresta do cubo, temos que o raio da esfera circunscrita mede $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Logo,
$$\frac{\text{Área do cubo}}{\text{Área da esfera}} = \frac{6a^2}{4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\pi}$$

59 Sendo a a medida da aresta do octaedro, temos:
$1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$ cm
A área de cada face do octaedro regular é igual à área de um triângulo equilátero; logo, a área total A_T do octaedro é dada por:
$$A_T = 8 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} \text{ cm}^2 = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

60 Sendo R a medida do raio da esfera, temos:
$R = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2}$ dm $= 2\sqrt{6}$ dm
Logo, o volume V da esfera é dado por:
$V = \dfrac{4\pi(2\sqrt{6})^3}{3} \text{ dm}^3 = 64\pi\sqrt{6} \text{ dm}^3$

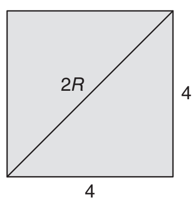
61 Sendo a a medida da aresta do octaedro, temos que a medida do raio da esfera circunscrita é $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Assim:
$$V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3} \text{ e}$$
$$V_O = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$
Então, concluímos:
$$\frac{V_E}{V_O} = \frac{\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}}{\frac{a^3\sqrt{2}}{3}} = \pi$$

62 A medida r do raio da esfera inscrita em um octaedro regular de aresta a é dada por:
$r = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$
Assim, para $a = 24$ cm, temos:
$r = \dfrac{24\sqrt{6}}{6}$ cm $= 4\sqrt{6}$ cm

63 Sendo r a medida do raio da esfera, temos:
$\dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4\pi}{3} \Rightarrow r = 1$ dm
Assim, a altura do cilindro mede 2 cm e o raio da base mede 1 cm e, portanto, o volume V do cilindro é dado por:
$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 \text{ dm}^3 = 2\pi \text{ dm}^3$

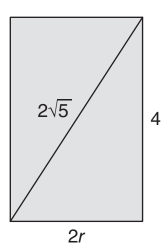
64 Sendo r a medida do raio da esfera, temos que as medidas do raio da base e da altura do cilindro são, respectivamente, r e $2r$. Assim:
$16\pi = 2\pi r \cdot 2r \Rightarrow r = 2$ cm
Logo, a área A da superfície da esfera é dada por:
$A = 4\pi \cdot 2^2\ \text{cm}^2 = 16\pi\ \text{cm}^2$

65 Sendo r e V, respectivamente, a medida do raio da base e o volume do cilindro equilátero, temos:
$V = 2\pi r^3 \Rightarrow 16\pi = 2\pi r^3$
$\therefore\ r = 2$ cm
A medida R do raio da esfera é metade da medida da diagonal de uma secção meridiana do cilindro. Assim, temos:
$(2R)^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$



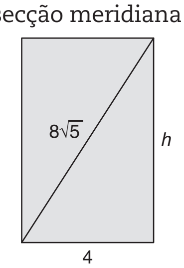
Concluímos calculando o volume V da esfera:
$$V = \frac{4\pi(2\sqrt{2})^3}{3}\ \text{cm}^3 = \frac{64\pi\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$$

66 Sendo R a medida do raio da esfera, temos:
$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{20\pi\sqrt{5}}{3} \Rightarrow R = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$$
Assim, sendo r a medida do raio da base do cilindro, temos que uma secção meridiana desse cilindro é:



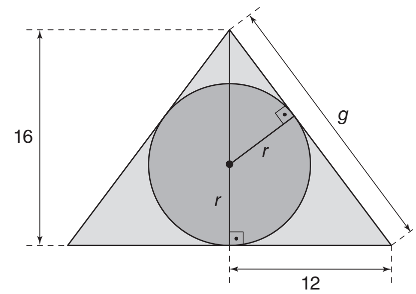
Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$(2r)^2 + 4^2 = (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow r = 1$
Logo, o volume V do cilindro é dado por:
$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 4\ \text{cm}^3 = 4\pi\ \text{cm}^3$

67 Sendo R a medida do raio da base da esfera, temos:
$4\pi R^2 = 320\pi \Rightarrow R = 4\sqrt{5}$
Assim, sendo h a medida da altura do cilindro, temos que uma secção meridiana desse cilindro é:



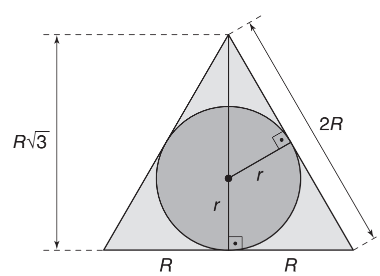
Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$h^2 + 4^2 = (8\sqrt{5})^2 \Rightarrow h = 4\sqrt{19}$
Logo, a área total A_T do cilindro é dada por:
$A_T = (2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{19} + 2 \cdot \pi \cdot 2^2)\ \text{cm}^2 =$
$= 8\pi(2\sqrt{19} + 1)\ \text{cm}^2$

68 Sendo g a medida da geratriz do cone e r a medida do raio da esfera inscrita nele, temos que uma secção meridiana desse cone é:



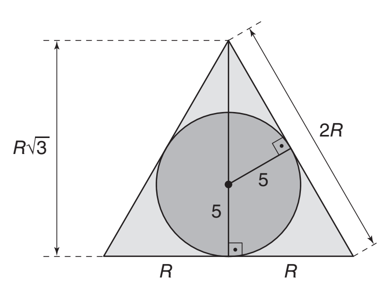
Pelo teorema de Pitágoras e por semelhança de triângulos, temos:
$$\begin{cases} g^2 = 12^2 + 16^2 \\ \dfrac{g}{16 - r} = \dfrac{12}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 20 & \text{(I)} \\ \dfrac{g}{16 - r} = \dfrac{12}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$
Substituímos (I) em (II), obtendo:
$$\frac{20}{16 - r} = \frac{12}{r} \Rightarrow r = 6$$
Logo, a área A da esfera é dada por:
$A = 4\pi \cdot 6^2\ \text{cm}^2 = 144\pi\ \text{cm}^2$

69 Sendo R e r as medidas dos raios da base do cone e da esfera inscrita, respectivamente, temos que uma secção meridiana desse cone é :



Por semelhança de triângulos, temos:
$$\frac{r}{R} = \frac{R\sqrt{3} - r}{2R} \Rightarrow 2r = R\sqrt{3} - r$$
$$\therefore\ 3r = R\sqrt{3} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

70 Sendo r a medida do raio da esfera, temos:
$4\pi r^2 = 100\pi \Rightarrow r = 5$
Assim, sendo R a medida do raio da base do cone equilátero, temos que uma secção meridiana desse cone é:



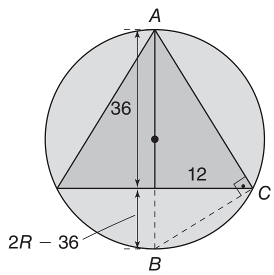
Por semelhança de triângulos, temos:

$\frac{R}{5} = \frac{2R}{R\sqrt{3} - 5} \Rightarrow R\sqrt{3} - 5 = 10$

$\therefore\ R = 5\sqrt{3}$ cm

Logo, o raio da base do cone mede $5\sqrt{3}$ cm.

71 Sendo R a medida do raio da esfera, temos que uma secção meridiana desse cone é:

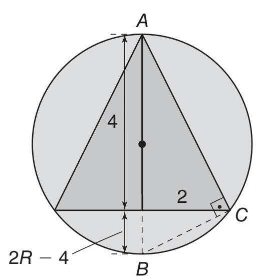


Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:

$12^2 = 36(2R - 36) \Rightarrow R = 20$

Logo, o raio da esfera mede 20 cm.

72 Sendo R a medida do raio da esfera, temos que uma secção meridiana desse cone é:



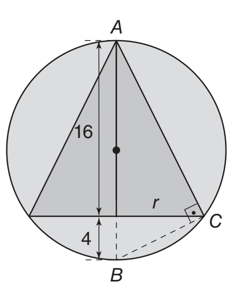
Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:

$2^2 = 4(2R - 4) \Rightarrow R = \frac{5}{2}$

Logo, a área A da superfície da esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \text{ dm}^2 = 25\pi \text{ dm}^2$

73 Sendo r a medida do raio da base do cone, temos que uma secção meridiana desse cone é:

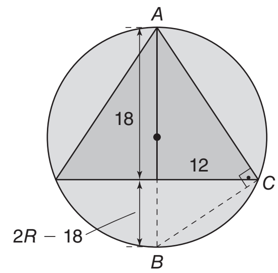


Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:

$r^2 = 16 \cdot 4 \Rightarrow r = 8$

Logo, o raio da base do cone mede 8 cm.

74 Sendo R a medida do raio da esfera, temos que uma secção meridiana desse cone é:

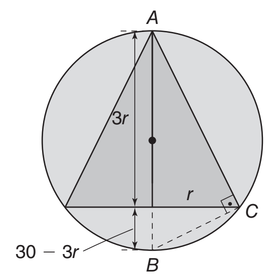


Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:

$12^2 = 18(2R - 18) \Rightarrow R = 13$

Logo, o raio da esfera mede 13 cm.

75 Sendo r a medida do raio da base do cone, temos que uma secção meridiana desse cone é:



Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:

$r^2 = 3r(30 - 3r) \Rightarrow 10r^2 - 90r = 0$

$\therefore\ r(10r - 90) = 0 \Rightarrow r = 0$ (não convém) ou $r = 9$

Logo, o raio da base do cone mede 9 cm.

Exercícios contextualizados

76 A área A de cada embalagem, em metro quadrado, é dada por:

$A = 2\pi \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}10 + 2\pi \cdot (0{,}04)^2 = 0{,}0112\pi$

Para $\pi = 3{,}14$, temos:

$A = 0{,}035168 \text{ m}^2$

A área da folha de alumínio é 4 m². Como existe uma perda de 12,08%, a área útil A_U da folha de alumínio é dada por:

$A_U = (4 - 0{,}1208 \cdot 4) \text{ m}^2 = 3{,}5168 \text{ m}^2$

Assim, o número E de embalagens que serão fabricadas é dado por:

$E = \frac{A_U}{A} = \frac{3{,}5168}{0{,}035168} = 100$

Logo, serão fabricadas 100 embalagens.

77 A área A_ℓ do reservatório é dada por:

$A_\ell = 2\pi \cdot 6 \cdot 10 \text{ m}^2 = 120\pi \text{ m}^2$

A área lateral pintada A_p é a sexta parte $\left(\frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$ da área lateral de um cilindro circular reto de altura 6 m e raio de base 6 m, ou seja:

$A_p = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 6 \cdot 6 \text{ m}^2 = 12\pi \text{ m}^2$

Assim, temos:

$\frac{A_p}{A_\ell} = \frac{12\pi}{120\pi} = \frac{1}{10}$

Logo, A_p corresponde a 10% de A_ℓ.

Alternativa **b**.

78 As medidas r e h do raio da base e da altura do cilindro são, respectivamente, $\frac{3,9}{2}$ cm e 3,9 cm.

Assim, o volume V desse cilindro é dado por:

$V = \pi \cdot \left(\frac{3,9}{2}\right)^2 \cdot 3,9 \text{ cm}^3 = \frac{(3,9)^3\pi}{4} \text{ cm}^3$

Assim, a densidade D desse cilindro é dada por:

$D = \frac{1.000}{\frac{(3,9)^3 \pi}{4}} \text{ g/cm}^3 = \frac{4 \cdot 10^3}{(3,9)^3\pi} \text{ g/cm}^3 =$

$= 4 \cdot \left(\frac{10}{3,9}\right)^3 \cdot \frac{1}{\pi} \text{ g/cm}^3 = 4 \cdot \left(\frac{100}{39}\right)^3 \frac{1}{\pi} \text{ g/cm}^3 =$

$= \frac{4 \cdot 10^6}{39^3\pi} \text{ g/cm}^3$

Alternativa **c**.

79 O volume V do rolo de papel é a diferença entre os volumes de dois cilindros de alturas iguais a 50 cm e raios 10 cm e r (raio do orifício), ou seja:

$4.800\pi = \pi \cdot 10^2 \cdot 50 - \pi r^2 \cdot 50 \Rightarrow r = 2$

Logo, o diâmetro do orifício mede 4 cm.

80 Sendo R a medida do raio da base dessa caixa, temos que sua altura é $2R$ e, portanto:

$2\pi R \cdot 2R = 100\pi \Rightarrow R = 5$

Assim, o volume V da caixa-d'água é dado por:

$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 \text{ m}^3 = 250\pi \text{ m}^3 = 785 \text{ m}^3$

Como 785 m^3 = 785.000 dm^3 e cada dm^3 equivale a 1 L, concluímos que a capacidade da caixa é 785.000 L.

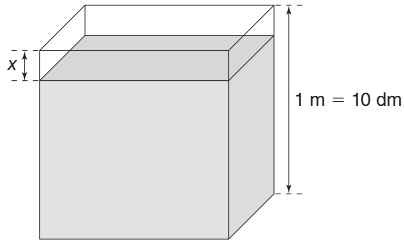
81 O volume V do cano cilíndrico de raio 0,2 dm e altura 500 dm é dado por:

$V = \pi \cdot (0,2)^2 \cdot 500 \text{ dm}^3 = 20\pi \text{ dm}^3 \approx 62,8 \text{ dm}^3$

Assim, após o enchimento do cano, verificamos que o nível de água da caixa desce o equivalente a uma medida x, em decímetro, tal que:

$10 \cdot 10 \cdot x \approx 62,8$

$\therefore\ x \approx 0,628 \text{ dm} = 0,0628 \text{ m}$



Logo, a altura h da água na caixa, após o enchimento do cano, é dada por:

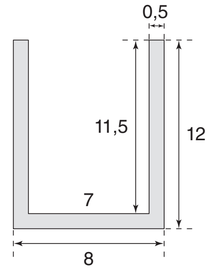
$h \approx (1 - 0,0628) \text{ m} = 0,9372 \text{ m} \approx 94 \text{ cm}$

Alternativa **c**.

82 O volume e a altura de um cilindro são diretamente proporcionais; logo, o volume que corresponde a 10% do volume do cilindro é 10% de 6 m, ou seja, 0,6 m, que corresponde a 60 cm.

Alternativa **b**.

83 Uma secção meridiana desse copo é:



Assim, o volume V, em centímetro cúbico, de vidro usado na fabricação de cada copo é a diferença entre os volumes dos cilindros de alturas 12 cm e 11,5 cm e raios das bases 4 cm e 3,5 cm, respectivamente, ou seja:

$V = (\pi \cdot 4^2 \cdot 12 - \pi \cdot (3,5)^2 \cdot 11,5) \text{ cm}^3 = 51,125\pi \text{ cm}^3$

Logo, cada copo contém $51,125\pi$ cm^3 de vidro ou aproximadamente 160,5 cm^3.

84 Sabemos que 400 mL = 400 cm^3.

Sendo R a medida, em centímetro, do raio da embalagem, temos que sua altura é $2R$. Assim:

$400 = \pi R^2 \cdot 2R \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$

Logo, o raio da base e a altura da embalagem devem medir $\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ cm e $2\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ cm, respectivamente, ou aproximadamente 4 cm e 8 cm.

85 Sendo R_1 e R_2 os raios das velas dos tipos 1 e 2, respectivamente, temos:

$\begin{cases} 2\pi R_1 = 20 \\ 2\pi R_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{10}{\pi} \text{ cm} \\ R_2 = \frac{5}{\pi} \text{ cm} \end{cases}$

Assim, os volumes V_1 e V_2 das velas dos tipos 1 e 2 são, respectivamente:

$V_1 = \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 10 \text{ cm}^3 = \frac{1.000}{\pi} \text{ cm}^3$

e

$V_2 = \pi \cdot \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 20 \text{ cm}^3 = \frac{500}{\pi} \text{ cm}^3$

Como $V_1 = 2V_2$, concluímos que o custo da vela do tipo 1 é o dobro do custo da vela do tipo 2.

Alternativa **b**.

86 O volume V_p do prisma hexagonal regular de altura 5 mm e aresta da base 4 mm é dado por:

$V_p = 6 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \text{ mm}^3 = 120\sqrt{3} \text{ mm}^3$

O volume V_c do cilindro circular reto de altura 25 mm e raio da base 2 mm é dado por:

$V_c = \pi \cdot 2^2 \cdot 25 \text{ mm}^3 = 100\pi \text{ mm}^3$

Como a rosca diminui em 1% o volume do cilindro, concluímos que o volume V do parafuso é dado por:

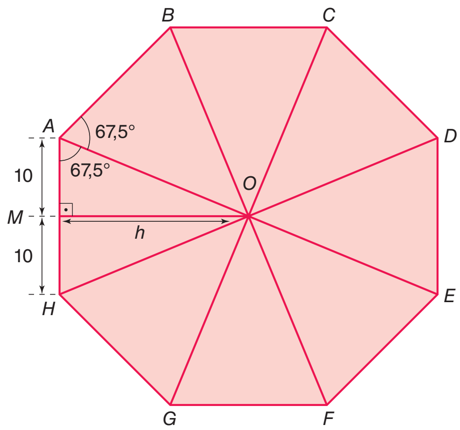
$V = V_p + V_c - 0,01V_c$, ou seja,

$V = (120\sqrt{3} + 100\pi - 0,01 \cdot 100\pi) \text{ mm}^3 =$

$= (120\sqrt{3} + 99\pi) \text{ mm}^3$

Alternativa **b**.

87 Cada ângulo interno do octógono regular mede 135°; assim, unindo o centro O de uma base do prisma aos seus vértices A, B, C, D, E, F, G, H, o octógono fica dividido em oito triângulos isósceles de altura h, em centímetro, conforme mostra a figura:



No triângulo OAM, temos:

$$\text{tg } 67{,}5° = \frac{h}{10} \Rightarrow 2{,}41 = \frac{h}{10}$$

$\therefore\ h = 24{,}1$ cm

Logo, a área S do triângulo OAM é dada por:

$$S_t = \frac{20 \cdot 24{,}1}{2}\ \text{cm}^2 = 241\ \text{cm}^2$$

Portanto, a área S do octógono é dada por:

$$S = 8 \cdot S_T = 8 \cdot 241\ \text{cm}^2 = 1.928\ \text{cm}^2$$

Sendo V_B o volume do bloco e V_C o volume do cilindro de altura 100 cm e raio da base 100 cm, temos:

$$V_B = 1.928 \cdot 100\ \text{cm}^3 = 192.800\ \text{cm}^3$$

e

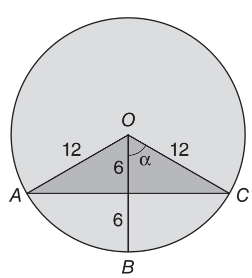
$$V_C = \pi \cdot 100^2 \cdot 100\ \text{cm}^3 = 1.000.000\pi\ \text{cm}^3$$

Concluímos, então, que o volume V do molde é dado por:

$$V = V_C - V_B = (1.000.000\pi - 192.800)\ \text{cm}^3 \approx$$
$$\approx 2.947.200\ \text{cm}^3$$

Logo, o volume do molde é $(1.000.000\pi - 192.800)$ cm³, ou, aproximadamente, 2,95 m³.

88 Uma secção transversal do cilindro é:



A medida α do ângulo $B\widehat{O}C$ é tal que $\cos \alpha = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ e, portanto, $\alpha = 60°$.

Assim:

- $m(A\widehat{O}C) = 120°$
- A área A_{set} do setor circular $OABC$ é dada por:
  $A_{set} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2\ \text{dm}^2 = 48\pi\ \text{dm}^2$
- A área A_t do triângulo AOC é dada por:
  $A_t = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \text{sen } 120°\ \text{dm}^2 = 36\sqrt{3}\ \text{dm}^2$
- A área A_{seg} do segmento circular ABC é dada por:
  $A_{seg} = A_{set} - A_t = (48\pi - 36\sqrt{3})\ \text{dm}^2 =$
  $= 12(4\pi - 3\sqrt{3})\ \text{dm}^2$

Concluímos, então, que o volume de combustível contido no cilindro é dado por:

$$V = 12(4\pi - 3\sqrt{3}) \cdot 50\ \text{dm}^3 = 600(4\pi - 3\sqrt{3})\ \text{dm}^3$$

Como 1 dm³ = 1 L, temos que o volume de combustível no cilindro é $600(4\pi - 3\sqrt{3})$ L ou, aproximadamente, 4.422 L.

89 O menor dos sólidos é um tronco de cilindro circular reto cujas geratrizes maior e menor medem 4 e 2 e o raio da base circular mede 2. Logo, o volume V desse sólido é dado por:

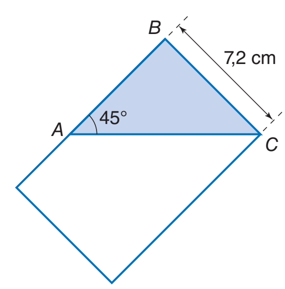
$$V = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot (4 + 2)}{2} = 12\pi$$

90 Sendo R a medida, em centímetro, do raio da base circular do tronco, temos:

$$\frac{\pi R^2(22 + 18)}{2} = 565{,}2 \Rightarrow R = 3$$

Logo, o raio da base circular de cada tronco mede 3 cm.

91 Considerando uma secção meridiana do cilindro inclinado, temos o seguinte esquema:



Como $m(B\widehat{A}C) = 45°$, temos que o triângulo retângulo ABC é isósceles, com $AB = BC = 7{,}2$ cm.

Assim, o volume V_D de água derramada, que é igual ao volume do espaço vazio do copo, é dado por:

$$V_D = \frac{\pi \cdot (3{,}6)^2 \cdot (7{,}2 + 0)}{2}\ \text{cm}^3 = 46{,}656\pi\ \text{cm}^3$$

O volume V_C do copo é dado por:

$$V_C = \pi \cdot (3{,}6)^2 \cdot 15\ \text{cm}^3 = 194{,}4\pi\ \text{cm}^3$$

Logo, $\frac{V_D}{V_C} = \frac{46{,}652\pi}{194{,}4\pi} = 0{,}24 = 24\%$

Alternativa **d**.

92 No cilindro inclinado, a água tem a forma de um tronco de cilindro circular reto cujas geratrizes maior e menor medem 10 cm e 0 cm e o raio da base circular mede R, em centímetro.

Assim, o volume V desse tronco é dado por:

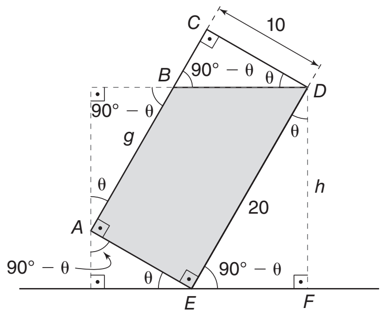
$$V = \frac{\pi R^2(10 + 0)}{2} = 5\pi R^2$$

Sendo h a altura, em centímetro, do líquido quando o cilindro está na posição vertical, concluímos:

$$\pi R^2 h = 5\pi R^2 \Rightarrow h = 5$$

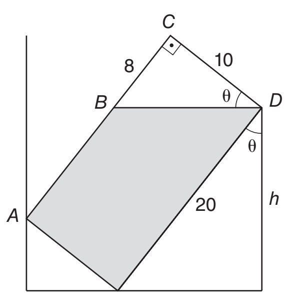
Alternativa **b**.

93 Indicando por g a distância, em centímetro, entre A e B, esquematizamos:



a) F, pois os volumes V_c e V_a do cilindro e da água são dados por:
$V_c = \pi \cdot 5^2 \cdot 20\ cm^3 = 500\pi\ cm^3$
e
$V_a = \frac{4}{5}V_c = 400\pi\ cm^3$
Logo, o volume V da região não ocupada pela água é $V_c - V_a = 100\pi\ cm^3$.

b) F, pois o volume V_a, calculado no item **a**, é igual ao volume de um tronco de cilindro circular reto cujas geratrizes medem 20 cm e g, e o raio da base mede 5 cm. Assim, temos:
$\frac{\pi \cdot 5^2(20 + g)}{2} = 400\pi \Rightarrow g = 12$
Logo, a distância entre o ponto B e a borda superior do recipiente é 8 cm, com o que obtemos:



$\text{tg}\ \theta = \frac{8}{10} = 0{,}8$
Concluímos, então, que $\theta \neq 45°$.

c) F, pois, no esquema anterior, temos pelo teorema de Pitágoras e por semelhança de triângulos:

$$\begin{cases} (BD)^2 = 8^2 + 10^2 \\ \frac{BD}{20} = \frac{10}{h} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = 2\sqrt{41} & \text{(I)} \\ \frac{BD}{20} = \frac{10}{h} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:
$\frac{2\sqrt{41}}{20} = \frac{10}{h} \Rightarrow h = \frac{100\sqrt{41}}{41}$ cm

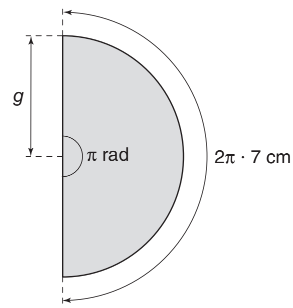
d) V, pois a medida BC é $(20 - g)$ cm, ou seja, 8 cm.

94 Sendo h e g as medidas, em metro, da altura e da geratriz do cone, respectivamente, temos:

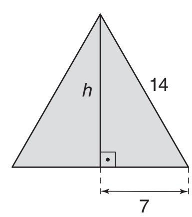
$$\begin{cases} \pi \cdot 1{,}5 \cdot g = \frac{15\pi}{4} \\ g^2 = h^2 + (1{,}5)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = \frac{5}{2} & \text{(I)} \\ g^2 = h^2 + 2{,}25 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:
$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = h^2 + 2{,}25 \Rightarrow h = 2$
Logo, a distância do vértice do cone ao plano de sua base é 2 m.

95 Sendo g a medida, em centímetro, da geratriz do cone, temos que sua superfície lateral é equivalente ao setor:



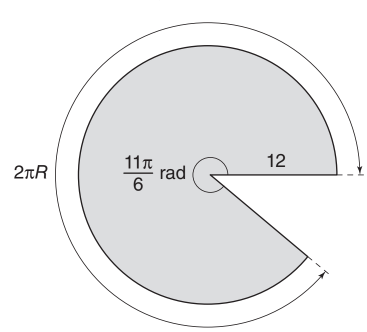
Assim, temos:
$\frac{14\pi}{g} = \pi \Rightarrow g = 14$
Uma secção meridiana do chapéu de altura h é:



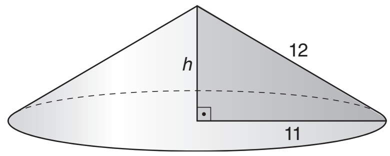
e, portanto:
$h^2 + 7^2 = 14^2 \Rightarrow h = 7\sqrt{3}$
Logo, a distância do bico do chapéu à mesa é $7\sqrt{3}$ cm.

96 A área total do cubo é o dobro da área total do cone, isto é:
$6a^2 = 2(\pi R \cdot 2R + \pi R^2) \Rightarrow 6a^2 = 6\pi R^2$
$\therefore a = R\sqrt{\pi}$
Alternativa **c**.

97 A medida do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone é $\frac{11\pi}{6}$ rad.
Assim, sendo R a medida, em centímetro, do raio da base do cone, temos:



$\frac{2\pi R}{12} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow R = 11$
A medida h, em centímetro, da altura do cone pode ser calculada pelo teorema de Pitágoras:
$h^2 + 11^2 = 12^2 \Rightarrow h = \sqrt{23}$



Alternativa **b**.

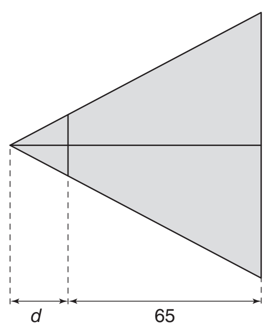
98 Sendo r a medida, em centímetro, do raio do círculo determinado pela superfície da água, temos:

$$\frac{\pi \cdot 6^2}{\pi r^2} = \left(\frac{H}{\frac{H}{3}}\right)^2 \Rightarrow r = 2$$

Logo, a área A desse círculo é dada por:

$A = \pi \cdot 2^2\ m^2 = 4\pi\ m^2$

99 Sendo d a distância, em centímetro, entre a lâmpada e a lente, temos o seguinte esquema:



$$\text{Logo: } \frac{29.400}{150} = \left(\frac{65 + d}{d}\right)^2 \Rightarrow 196 = \left(\frac{65 + d}{d}\right)^2$$

$$\therefore\ 14 = \frac{65 + d}{d} \Rightarrow d = 5$$

Concluímos, então, que a lâmpada dista 5 cm da lente da lanterna.

100 O volume V do tanque é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4\ m^3 = 12\pi\ cm^3 = 37{,}68\ m^3$

Como $37{,}68\ m^3 = 37.680\ dm^3$ e $1\ dm^3 = 1$ L, concluímos que o volume máximo de líquido que esse tanque pode conter é 37.680 L.

Alternativa **e**.

101 Os volumes V_v e V_A de vinagre e azeite são dados, respectivamente, por:

$$V_v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h - 5) = \frac{25\pi(h - 5)}{3}$$

e

$$V_A = \pi \cdot 5^2 \cdot h - V_v = \frac{25\pi(2h + 5)}{3}$$

Como $\frac{V_A}{V_v} = 5$, temos:

$$\frac{\frac{25\pi(2h + 5)}{3}}{\frac{25\pi(h - 5)}{3}} = 5 \Rightarrow \frac{2h + 5}{h - 5} = 5$$

$\therefore\ h = 10$ cm

Alternativa **c**.

102 a) Os volumes V_a e V_s da água e da substância são dados, respectivamente, por:

$$V_a = \pi \cdot \left(\frac{3r}{2}\right)^2 \cdot 16 = 36\pi r^2$$

e

$$V_s = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 27 = \frac{27\pi r^2}{3}$$

Para $\pi = 3$, temos: $V_a = 108r^2$ e $V_s = 27r^2$

Logo, o volume de água no cilindro é $108r^2\ cm^3$ e o volume da substância química no cone é $27r^2\ cm^3$.

b) • A concentração c é dada por:

$$c = \frac{27r^2}{135r^2} = \frac{1}{5}$$

Logo, a concentração é de 20%.

• O volume da mistura é $135r^2$ e, portanto:

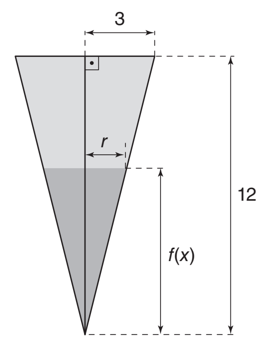
$$135r^2 = \pi \cdot \left(\frac{3r}{2}\right)^2 \cdot h$$

Para $\pi = 3$, temos $h = 20$.

Logo, a altura atingida pela mistura no cilindro foi 20 cm.

103 a) Sabemos que 10 mL = 10 cm^3. Assim, em x segundos a torneira despeja $10x\ cm^3$ de *milk-shake* na taça.

Sendo r a medida do raio da superfície do *milk-shake* na taça, depois de x segundos de aberta a torneira, temos:



$$\begin{cases} \frac{r}{3} = \frac{f(x)}{12} \\ \frac{\pi r^2 f(x)}{3} = 10x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{f(x)}{4} & \text{(I)} \\ \frac{\pi r^2 f(x)}{3} = 10x & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{f(x)}{4}\right)^2 \cdot f(x)}{3} = 10x \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\frac{480x}{\pi}}$$

b) Indicando a função f por $y = \sqrt[3]{\frac{480x}{\pi}}$, adotamos os seguintes procedimentos para obter f:

• Permutamos x e y, obtendo:

$$x = \sqrt[3]{\frac{480y}{\pi}}$$

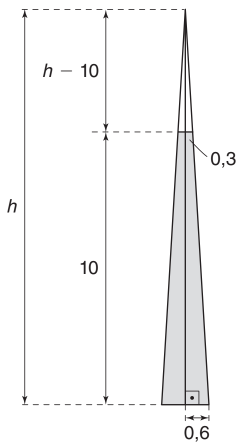
• Após a permutação de x e y, isolamos y, obtendo:

$$y = \frac{\pi x^3}{480}$$

Concluímos, então, que a inversa de f é:

$$f^{-1}(x) = \frac{\pi x^3}{480}$$

104 Sendo h a medida, em metro, do cone obtido pelos prolongamentos das geratrizes desse tronco, temos a secção meridiana:



$\dfrac{h}{h-10} = \dfrac{0,6}{0,3} \Rightarrow h = 20$

Assim, o volume V do tronco é dado por:

$V = \left[\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (0,6)^2 \cdot 20 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (0,3)^2 \cdot 10\right] \text{m}^3 =$

$= 2,1\pi \text{ m}^3$

Logo, para a fabricação de 100 colunas são necessários 210π m³ de concreto.

Alternativa **e**.

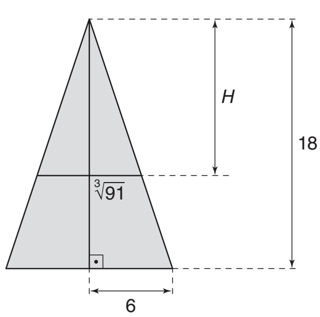
105 **a)** Por semelhança, temos:

$\dfrac{6}{R} = \dfrac{18}{15} \Rightarrow R = 5$ cm

Logo, o volume V de líquido é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 \text{ cm}^3 = 125\pi \text{ cm}^3$

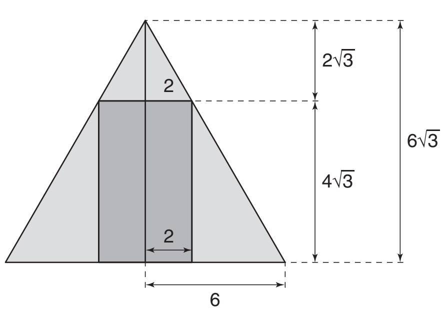
b) Uma secção meridiana da figura 2 é:



$\dfrac{18}{H} = \dfrac{6}{\sqrt[3]{91}} \Rightarrow H = 3\sqrt[3]{91}$

Para $\sqrt[3]{91} \approx \dfrac{9}{2}$, concluímos que $H \approx 13,5$ cm.

106 Como o cone é equilátero, temos as seguintes dimensões em uma secção meridiana:



O volume V_t do tronco de cone de altura $4\sqrt{3}$ cm e raios das bases 6 cm e 2 cm é dado por:

$V_t = \left(\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3} - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3}\right) \text{cm}^3 =$

$= \dfrac{208\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

O volume V_c do cilindro de altura $4\sqrt{3}$ cm e raio da base 2 cm é dado por:

$V_c = \pi \cdot 2^2 \cdot 4\sqrt{3} \text{ cm}^3 = 16\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$

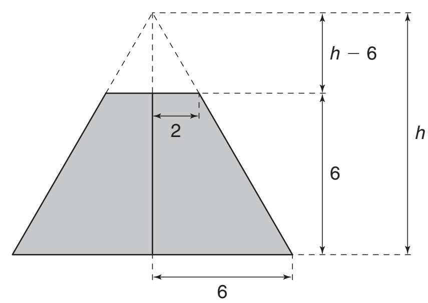
Logo, o volume V da peça final é dado por:

$V = V_t - V_c = \dfrac{160\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

107 O volume V_c do cilindro maior que compõe a garrafa é dado por:

$V_c = \pi \cdot 6^2 \cdot 20 \text{ cm}^3 = 720\pi \text{ cm}^3$

Sendo h a medida da altura, em centímetro, do cone obtido pelos prolongamentos das geratrizes do tronco de cone que compõe a garrafa, temos:



$\dfrac{h}{h-6} = \dfrac{6}{2} \Rightarrow h = 9$

Assim, o volume V_t do tronco de cone é dado por:

$V_t = \left(\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 9 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 3\right) \text{cm}^3 = 104\pi \text{ cm}^3$

Observando que $V_c + V_t = 824\pi$ cm³, que é exatamente a quantidade de água despejada na garrafa, concluímos que a altura h da água atingida na garrafa é a soma da altura do cilindro maior com a altura do tronco de cone, isto é, $h = 26$ cm.

108 Sendo V a capacidade do copo, em mililitro (ou centímetro cúbico), temos:

$\dfrac{V}{135} = \left(\dfrac{H}{\frac{3H}{4}}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{V}{135} = \dfrac{64}{27}$

$\therefore V = 320$

Logo, a capacidade do copo é 320 mL.

109 O depósito tem a forma de um tronco de cone cujo volume V é dado por:

$V = \left(\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 8 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (1,5)^2 \cdot 6\right) \text{m}^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{37\pi}{6} \text{ m}^3$

Alternativa **b**.

110 Sendo v o volume pedido, em mililitro, temos:

$\dfrac{400}{v} = \left(\dfrac{h}{\frac{h}{2}}\right)^3 \Rightarrow \dfrac{400}{v} = 8$

$\therefore v = 50$

Logo, o volume de líquido quando o nível está em $\dfrac{h}{2}$ é 50 mL.

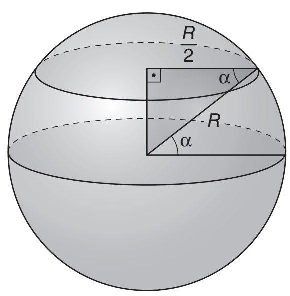
111 Indicando por O o centro da Terra e por S o satélite, temos que $\overline{SP}$ e $\overline{SQ}$ são tangentes à esfera terrestre. Consequentemente, $SP = SQ$, $\overline{OP} \perp \overline{SP}$ e $\overline{OQ} \perp \overline{SQ}$. Assim:

$$\begin{cases} (SP)^2 + R^2 = (7R)^2 \\ SP = SQ \end{cases} \Rightarrow SP = SQ = 4\sqrt{3}R$$

Logo, a distância pedida é dada por:
$SP + SQ = 8\sqrt{3}R$
Alternativa **c**.

112 Sendo x a medida, em centímetro, de uma aresta do cubo, temos:
$x^3 = 13.824 \Rightarrow x = 24$
Como o diâmetro de cada esfera é 12 cm, cada uma das dimensões do cubo — comprimento, largura e altura — equivale a dois diâmetros. Logo, o número máximo de esferas que podem ser armazenadas em uma caixa é $2 \cdot 2 \cdot 2$, ou seja, 8.
Alternativa **b**.

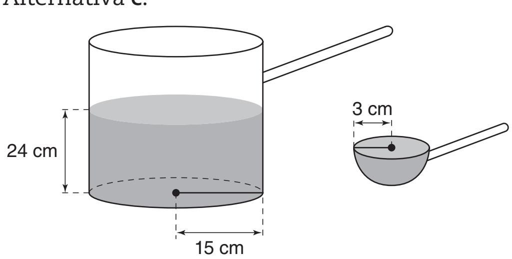
113 Sendo R e r as medidas dos raios da linha do equador e do paralelo PP', temos:
$$2\pi r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$
Assim, sendo α a latitude desse paralelo, temos:



$$\cos\alpha = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$$
Alternativa **d**.

114 O volume V de líquido é a diferença entre o volume do cilindro e a soma dos volumes das esferas, isto é:
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot 4r - 2 \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}$$
Alternativa **c**.

115

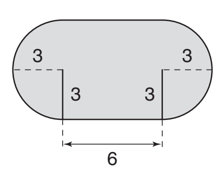


Sendo V_S o volume de sopa e V_C a capacidade da concha, temos:
$V_S = \pi \cdot 15^2 \cdot 24 \text{ cm}^3 = 5.400\pi \text{ cm}^3$
e
$$V_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} \text{ cm}^3 = 18\,\pi \text{ cm}^3$$
Portanto:
$$\frac{V_S}{V_C} = \frac{5.400\pi}{18\pi} = 300 \Rightarrow V_S = 300V_C$$
Logo, foram servidas 300 conchas de sopa, com o que concluímos que o número n de convidados é dado por:
$$n = \frac{300}{2} = 150$$
Assim, havia 150 convidados na festa.

116 Sabemos que 3 dm = 30 cm.
Assim, o volume V da bola é dado por:
$$V = \frac{4\pi \cdot (15)^3}{3} \text{ cm}^3 = 4.500\pi \text{ cm}^3$$
Para $\pi = 3{,}14$, temos:
$V = 14.130 \text{ cm}^3$
Como a massa de cada centímetro cúbico de ferro é 7,8 g, concluímos que a massa M dessa bola é dada por:
$M = 14.130 \cdot 7{,}8 \text{ g} = 110.214 \text{ g}$
Ou seja, a bola tem massa igual a 110,214 kg.

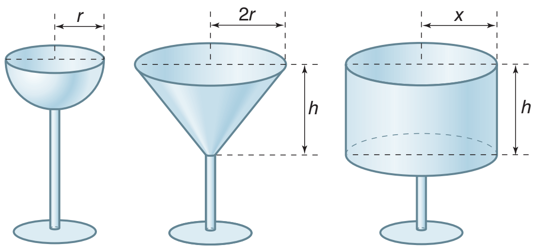
117 Sendo R a medida do raio da bola original, a medida do raio de cada uma das novas bolas é $\frac{R}{3}$.
Assim, os volumes V e v da bola original e de cada uma das novas bolas, respectivamente, são dados por:
$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$
e
$$v = \frac{4\pi\left(\frac{R}{3}\right)^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{81}$$
Assim:
$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{81}} = 27 \Rightarrow V = 27v$$
Logo, podem ser confeccionadas 27 novas bolas.
Alternativa **e**.
(**Nota:** Apresentar, também, a resolução por meio da razão entre volumes de figuras semelhantes.
Sendo R e r as medidas dos raios das bolas maior e menor, respectivamente, temos:
$$\frac{V}{v} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 3^3 = 27 \Rightarrow V = 27v$$

118 A medida do raio de cada semiesfera é 300 mm, que é a mesma medida do raio do cilindro. Assim, temos as dimensões, em decímetro:



Portanto, o volume interno V desse tanque é dado por:
$$V = \left(\frac{4\pi 3^3}{3} + \pi \cdot 3^2 \cdot 6\right) \text{dm}^3 = 90\pi \text{ dm}^3$$
Como $1 \text{ dm}^3 = 1$ L, deduzimos que a capacidade do tanque é $V = 90\pi$ L, ou, para $\pi = 3{,}14$, $V = 282{,}6$ L.
A quantidade máxima Q de metro cúbico de gás por litro nesse tanque é dada por:
$$Q = \frac{68{,}6718}{282{,}6} \text{ m}^3/\text{L} = 0{,}243 \text{ m}^3/\text{L}$$
Alternativa **b**.

119 Esquematizando:



Sendo V_S, V_{CON} e V_{CIL} os volumes das taças semiesférica, cônica e cilíndrica, respectivamente, temos:

$V_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V_S = \frac{2\pi r^3}{3}$

$V_{CON} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^2 \cdot h \Rightarrow V_{CON} = \frac{4\pi r^2 h}{3}$

$V_{CIL} = \pi x^2 h$

Como as três taças têm o mesmo volume, obtemos:

$V_{CIL} = V_{CON} \Rightarrow \pi x^2 h = \frac{4\pi r^2 h}{3} \therefore x = \frac{2r\sqrt{3}}{3} \quad \text{(I)}$

$V_S = V_{CON} \Rightarrow \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^2 h}{3} \therefore h = \frac{r}{2} \quad \text{(II)}$

De (I) e (II), concluímos:

$$\frac{x}{h} = \frac{\frac{2r\sqrt{3}}{3}}{\frac{r}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Alternativa **e**.

120 Sendo R a medida do raio da Terra, temos que a quarta parte de uma circunferência máxima da esfera terrestre mede $\frac{2\pi R}{4}$, ou seja, $\frac{\pi R}{2}$. Assim:

$1 \text{ m} = \frac{1}{10^7} \cdot \frac{\pi R}{2} \Rightarrow R = \frac{2 \cdot 10^7}{\pi} \text{ m}$

Logo, o volume V da Terra é dado por:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^7}{\pi}\right)^3 \text{ m}^3 =$

$= \frac{32 \cdot 10^{21}}{3\pi^2} \text{ m}^3 \approx 1{,}08 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$

Concluímos, então, que a ordem de grandeza de V é 10^{21} m³.

Alternativa **b**.

121 Sendo R a medida, em centímetro, da esfera original, temos:

$4\pi R^2 = 256\pi \Rightarrow R = 8$

Sendo V e v os volumes das esferas maior e menor, respectivamente, e r a medida, em centímetro, do raio de cada uma das oito esferas menores, temos:

$$\begin{cases} \frac{V}{v} = \left(\frac{8}{r}\right)^3 \\ \frac{V}{v} = 8 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{8}{r}\right)^3 = 8 \therefore r = 4$$

Logo, a área A da superfície de cada uma das esferas menores é dada por:

$A = 4\pi \cdot 4^2 \text{ cm}^2 = 64\pi \text{ cm}^2$

122 Sendo R a medida, em centímetro, do raio da bola, temos:

$4\pi R^2 = 25\pi \Rightarrow R = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Calculando a razão entre a medida da abertura e a medida do diâmetro da bola, obtemos:

$\frac{7{,}5}{5} = 1{,}5 = 150\%$

Logo, a medida da abertura é 50% maior que o diâmetro da bola.

123 **a)** Sendo A_f a área do fuso, temos:

Ângulo (grau)		Área (cm²)
360	———	$4\pi \cdot 6^2$
40	———	A_f

$\therefore A_f = \frac{40 \cdot 144\pi}{360} \text{ cm}^2 = 16\pi \text{ cm}^2$

Logo, a área do fuso é 16π cm².

b) Sendo V_C o volume da cunha, temos:

Ângulo (grau)		Volume (cm³)
360	———	$\frac{4\pi \cdot 6^3}{3}$
40	———	V_C

$\therefore V_C = \frac{40 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 216}{3}}{360} \text{ cm}^3 = 32\pi \text{ cm}^3$

c) A área total A_t do pedaço de queijo é a soma da área do fuso com a área de um círculo de raio 6 cm, ou seja:

$A_t = (16\pi + \pi \cdot 6^2) \text{ cm}^2 = 52\pi \text{ cm}^2$

Logo, a área total da cunha esférica é 52π cm².

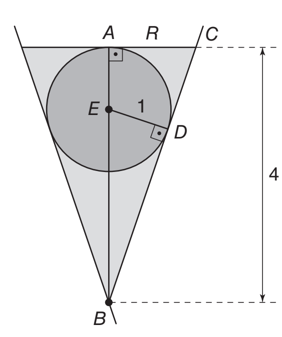
124 Sendo A_f a área do fuso, temos:

Ângulo (grau)		Área (m²)
360	———	$4\pi \cdot 5^2$
72	———	A_f

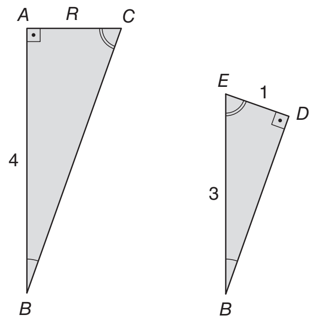
$\therefore A_f = \frac{72 \cdot 100\pi}{360} \text{ m}^2 = 20\pi \text{ m}^2$

Alternativa **a**.

125 Sendo R a medida, em centímetro, do raio da base do cone, temos a secção meridiana:



Os triângulos *ABC* e *DBE* são semelhantes:



Assim:

$\frac{R}{1} = \frac{4}{BD}$ (I)

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(BD)^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow BD = 2\sqrt{2}$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$R = \sqrt{2}$ cm

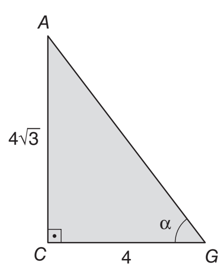
Concluímos, então, que:

$$V = \left[\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 4 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3\right] \text{cm}^3 = \frac{4\pi}{3} \text{cm}^3$$

Logo, o volume da bebida contida no cálice é $\frac{4\pi}{3}$ cm^3.

Exercícios da revisão cumulativa

1 O triângulo *AGC* é retângulo em *C*, com $AC = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}$ dm $= 4\sqrt{3}$ dm e $CG = 4$ dm. Assim, sendo α a medida do ângulo $A\hat{G}C$, temos:

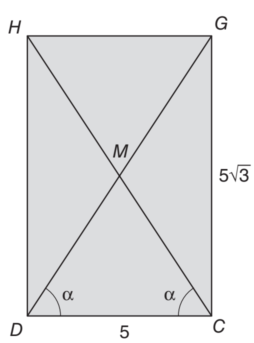


$\text{tg}\,\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$

Logo, o ângulo $A\hat{G}C$ mede 60°.

2 A medida do ângulo formado pelas retas reversas $\overleftrightarrow{DG}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ é igual à medida dos ângulos formados pelas diagonais $\overline{DG}$ e $\overline{HC}$ da face *CDHG* do paralelepípedo.

Sendo α a medida do ângulo $G\hat{D}C$, que é igual à medida do ângulo $H\hat{C}D$, temos:

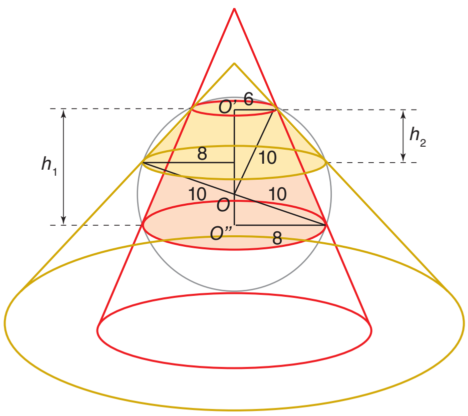


$\text{tg}\,\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$

Assim, concluímos que a medida do ângulo $D\hat{M}C$ também é 60° e, portanto, a medida do ângulo formado pelas retas reversas $\overleftrightarrow{DG}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ é 60°.

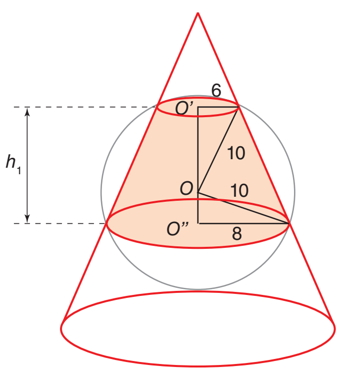
Análise da resolução

As bases do tronco podem estar contidas em um mesmo hemisfério ou em hemisférios opostos, como mostra a figura. Portanto, há duas possibilidades para a posição do tronco de cone em relação à esfera.



1ª possibilidade:

Sendo O o centro da esfera e O' e O'' os centros das bases do tronco de cone de altura h_1, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$(OO')^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow OO' = 8$

$(OO'')^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow OO'' = 6$

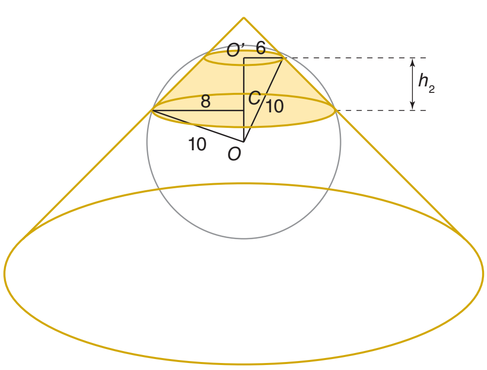
Concluímos, então, que a altura h_1 do tronco de cone é dada por:

$h_1 = OO' + OO'' = (8 + 6)$ cm $\Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = 14$ cm

2ª possibilidade:

Sendo O o centro da esfera e O' e C os centros das bases do tronco de cone de altura h_2, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(OO')^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow OO' = 8$

$(OC)^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow OC = 6$

Concluímos, então, que a altura h_2 do tronco de cone é dada por:

$h_2 = OO' - OC = (8 - 6)$ cm $\Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = 2$ cm